

БМО 2010

1. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

Решение. Неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - a^3b^2c - b^3c^2a - c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b. \quad (1)$$

Од неравенството меѓу средините следува

$$a^3b^3 + a^3b^3 + a^3c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3 \cdot a^3b^3 \cdot a^3c^3} = 3a^3b^2c.$$

Конечно, ако ги собереме аналогните циклични неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

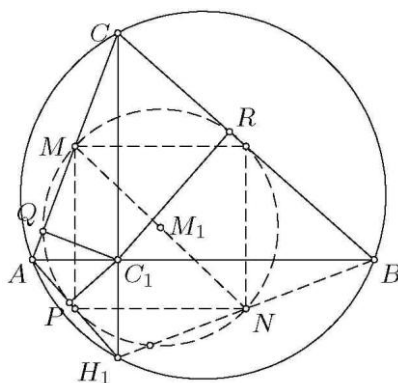
2. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC , а M средината на AC . Нека C_1 е подножјето на нормалата повлечена од C на AB , а H_1 е симетричната точка на H во однос на AB . Нека P, Q и R соодветно се подножјата на нормалите повлечени од точката C_1 на правите AH_1, AC и CB , а M_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQR . Докажи дека симетричната точка на M во однос на точката M_1 лежи на отсечката BH_1 .

Решение. Ќе го користиме следново едноставно тврдење.

Лема. Нека во конвексен тетивен четириаголник $A_1A_2A_3A_4$ дијагоналите се сечат по прав агол во точката X . Ако B_i е средина на страната A_iA_{i+1} , а X_i е подножјето на нормалата повлечена од X кон таа страна ($A_5 = A_1$), тогаш точките $B_i, X_i, i = 1, 2, 3, 4$ лежат на иста кружница.

Доказ. Четириаголникот $B_1B_2B_3B_4$ е правоаголник бидејќи $B_1B_2 \parallel B_3B_4 \parallel A_1A_3$ и $B_2B_3 \parallel B_4B_1 \parallel A_2A_4$. Понатаму, $\angle B_3XA_3 = \angle A_4A_3A_1 = \angle A_4A_2A_1 = \angle A_1XX_1$, па затоа точките B_3, X, X_1 се колинеарни, што значи дека точката X_1 лежи на кружницата над дијаметарот B_1B_3 , т.е. на опишаната кружница k околу правоаголникот $B_1B_2B_3B_4$. Аналогно се докажува дека $X_i, i = 2, 3, 4$ лежат на k . ■

Познато е дека точката H_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Според претходната лема точките P, Q, R лежат на кружницата над дијаметарот MN , каде N е средина



на отсечката BH_1 . Според тоа, точката N е симетрична на точката M во однос на точката M_1 , па затоа лежи на BH_1 .

3. Трака со ширина w го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание w една од друга. Нека S е множество од n точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството S може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека S може да се покрие со трака со ширина 2.

Решение. Меѓу сите триаголници со темиња во S , го разгледуваме триаголникот кој има најголема плоштина, и нека тоа е $\triangle ABC$. Нека A', B', C' се симетричните точки на точките A, B, C во однос на средините на страните BC, CA, AB , соодветно. Тврдиме дека сите точки на множеството S лежат внатре или на страните на $\triangle A'B'C'$. Навистина, ако $X \in S$ е надвор од $\triangle A'B'C'$, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме дека X и BC се на различни страни од правата $B'C'$, па затоа $\triangle BCX$ има поголема плоштина од $\triangle ABC$, што е противречност. Триаголникот ABC може да се покрие со трака со ширина 1, па затоа триаголникот $A'B'C'$ може да се покрие со трака со ширина 2, која всушност го покрива множеството S .

4. Нека $n \geq 2$ е природен број. Со $f(n)$ да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n и кои не се заемно прости со n . Докажи, дека $f(n+p) \neq f(n)$, за секој $n \geq 2$ и за секој прост број p .

Решение. Ненегативни цели броеви кои не се заемно прости со n и кои се помали или еднакви на n има $n+1-\varphi(n)$. Понатаму, ако r е таков број, тогаш и $n-r$ е таков број, па затоа важи $f(n) = \frac{1}{2}n(n+1-\varphi(n))$. Нека претпоставиме дека $f(n+p) = f(n)$. Јасно, n и $n+p$ се деливи со бројот $2f(n) < n(n+p)$, па затоа тие не се заемно прости. Според тоа, $n = kp$, за некој $k \in \mathbb{N}$, па затоа равенството $f(n) = f(n+p)$ го добива обликот

$$k(kp+1-\varphi(kp)) = (k+1)(kp+p+1-\varphi(kp+p)),$$

од каде добиваме

$$kp+1-\varphi(kp) = (k+1)x \text{ и } kp+p+1-\varphi(kp+p) = kx, \quad (1)$$

за некој $x \in \mathbb{N}$, $x < p$. Сега (1) добиваме $x = \varphi(kp+p) - \varphi(kp) - p$. Бидејќи $\varphi(kp)$ и $\varphi(kp+p)$ се деливи со $\varphi(p) = p-1$, од последното равенство следува дека $x \equiv -1 \pmod{p-1}$.

Ако $p=2$ или $p=3$, тогаш $x=1$, што во првиот случај во (1) дава $\varphi(2k+2) = k+3$, а во вторито случај $\varphi(3k+3) = 2k+4$. Јасно, и двата

случаи не се можни бидејќи $\varphi(2k+2) \leq k+1$ и $\varphi(3k+3) \leq 2k+2$. Според тоа, $p \geq 5$ и $x = p-2$, па ако замениме во (1) добиваме

$$\varphi(kp) = 2k+3-p \text{ и } \varphi(kp+p) = 2k+1+p. \quad (2)$$

Ако $p \mid k$, тогаш $p \mid \varphi(kp)$, па затоа $p \mid 2k+3$ и оттука $p \mid 3$, што не е можно. Значи, $p \nmid k$. Слично, $p \nmid k+1$. Оттука

$$\varphi(pk) = (p-1)\varphi(k) \text{ и } \varphi(kp+p) = (p-1)\varphi(k+1),$$

па од (2) следува

$$\varphi(k)+1 = \varphi(k+1)-1 = \frac{2k+2}{p-1}.$$

Барем еден од броевите $\varphi(k)$ и $\varphi(k+1)$ не е делив со 4 (зошто?). Овој број да го означиме со $\varphi(t)$. Последното е можно само ако $t \in \{1, 2, 4\}$ или $t \in \{q^i, 2q^i\}$ за некој прост број $q > 2$ и $i \in \mathbb{N}$. Случаите $t=1, 2, 4$ ги исклучуваме со непосредна проверка. Од друга страна, ако на пример $t = k = q^i$, тогаш $\varphi(q^i)+1 = q^{i-1}(q-1)+1$ е делител на $2q^i+2$, а тоа не е можно бидејќи $q^i+1 > q^{i-1}(q-1)+1 > \frac{2}{3}(2q^i+2)$. Аналогно се покажува дека и останатите три случаи не се можни.