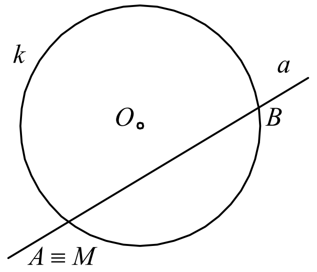
Виолета Василевска, Скопје

СТЕПЕН НА ТОЧКА ВО ОДНОС НА КРУЖНИЦА

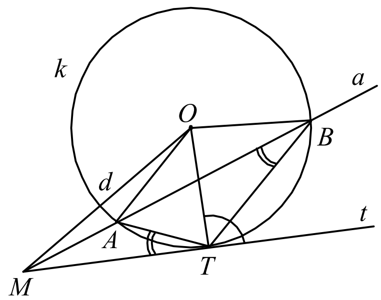
Нека M е произволна точка и нека $k(O, r)$ е кружница со центар O и радиус r. Низ точката M повлекуваме произволна права, која што ја сече кружницата k во точките A и B. Тврдиме дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата a низ точката M, т.е. дека има константна вредност. За да го покажеме тоа ќе ги разгледаме трите можни положби на точката M во однос на кружницата k, посебно.



Црт. 1 а)

Прво, нека точката M лежи на кружницата $k(O, r)$, црт. 1 а). Тогаш M се совпаѓа со една од точките A и B, па еден од броевите $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ е нула, што значи дека $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=0=const$.

Сега, нека M е надворешна точка за кружницата $k(O, r)$. Нека t е една од тангентите на k повлечени од M, која што ја допира кружницата k во точка T, црт. 1 б). Триаголниците MAT и MTB имаат заеднички агол кај темето M, а аглите MTA и MBT се еднакви како агол меѓу тангента и тетива, и периферен агол над лакот TA. Според тоа, $\Delta MAT\sim\Delta MTB$, од каде што следува дека

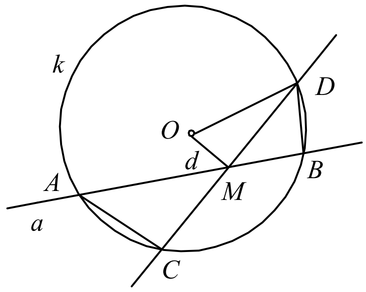


Црт. 1 б)

$$\overline{MA}:\overline{MT}=\overline{MT}:\overline{MB},$$

т.е. $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MT}^2=d^2-r^2=const$.

На крајот, нека точката M е внатрешна за кружницата $k(O, r)$, црт. 1 в). Низ точката M повлекуваме права нормална на правата OM која ја сече кружницата во точки C и D. За триаголниците MCA и MBD имаме: $\angle AMC=\angle BMD$, како вкрстени агли, и $\angle MCA=\angle MBD$, како перифериски агли над лакот AD. Значи, овие триаголници се слични, од каде што следува $\overline{MA}:\overline{MC}=\overline{MD}:\overline{MB}$ т.е.



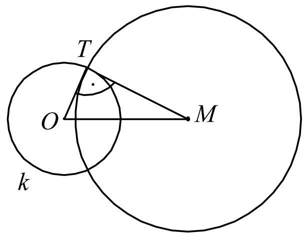
Црт. 1 в)

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}=\overline{MD}^2=r^2-d^2=const .$$

Покажавме дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата a низ точката M, туку зависи само од радиусот r на кружницата $k(O, r)$ и од растојанието $d=\overline{OM}$ од точката M до центарот O на кружницата $k(O, r)$, т.е. зависи само од точката M и кружницата $k(O, r)$. Значи за произволна точка M и за произволна сечица a на $k(O,r)$ низ M, производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ е константен и е еднаков на $|d^2-r^2|$.

Степен на точката M во однос на кружницата $k(O, r)$ е бројот d^2-r^2.

Кога точката M е надворешна за кружницата $k(O, r)$ степенот на M во однос на k е еднаков со $\overline{MT}^2$. Во тој случај кружницата со центар во M и радиус $\overline{MT}$ ја сече под прав агол кружницата $k(O, r)$, црт. 2.



Црт. 2

Пример 1. Даден е бројот s и кружницата $k(O, r)$. Да се најде геометриското место на точки M, чиј степен во однос на кружницата е s.

Решение. Нека $M(x,y)$ е точка од геометриското место. Тогаш важи:

$$s=\overline{OM}^2-r^2=(x-0)^2+(y-0)^2-r^2,$$

т.е. $x^2+y^2=s+r^2$. Ако $s+r^2>0$ тогаш геометриското место е кружница со центар во $O(0,0)$ и радиус $\sqrt{s+r^2}$. Ако $s+r^2=0$ тогаш геометриското место е точка $O(0,0)$. Ако $s+r^2<0$ тогаш не постојат точки M со такво својство.♦

Пример 2. Нека ABC е даден триаголник и нека M е ортогоналната проекција на темето C врз правата AB. Покажи дека:

а) ако аголот кај темето A е остар, тогаш

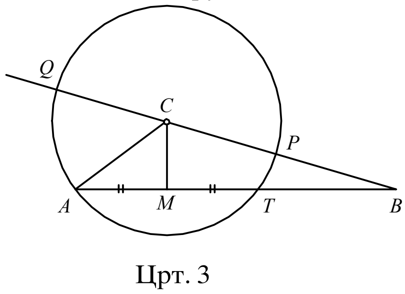
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AM} \qquad (1)$$

б) ако аголот кај темето A е тап, тогаш

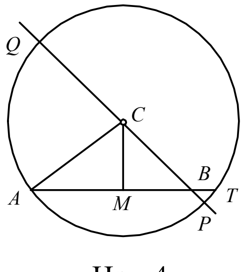
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{AM} \qquad (2)$$

Формулите (1) и (2) се познати како **Карноови формули**.

Решение. Ја разгледуваме кружницата $k(C,\overline{AC})$. Од степенот на B во однос на кружницата $k(C,\overline{AC})$, добиваме



Црт. 3



Црт. 4

$$\overline{BT} \cdot \overline{BA} = \overline{BQ} \cdot \overline{BP} \tag{3}$$

а) Нека аголот кај темето A е остар. Можат да настанат два случаи $\overline{AC} < \overline{BC}$ и $\overline{AC} > \overline{BC}$.

Нека $\overline{AC} < \overline{BC}$. Од црт. 3 добиваме дека:

$$\overline{BT} = \overline{BA} - \overline{AT} = \overline{BA} - 2\overline{AM} \tag{4}$$

$$\overline{BP} = \overline{BC} - \overline{CP} = \overline{BC} - \overline{AC} \tag{5}$$

$$\overline{BQ} = \overline{BP} + 2\overline{AC} = \overline{BC} + \overline{AC}\,. \tag{6}$$

Заменувајќи ги формулите (4), (5) и (6) во (3) добиваме

$$\left(\overline{AB} - 2\overline{AM}\right)\overline{AB} = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\,,$$

т.е. го добиваме бараното равенство (1).

Аналогно е и во случај кога $\overline{AC} > \overline{BC}$, црт. 4.

б) Нека аголот кај темето A е тап, црт. 5. Тогаш добиваме:

$$\overline{BT} = \overline{BA} + \overline{AT} = \overline{BA} + 2\overline{AM}$$

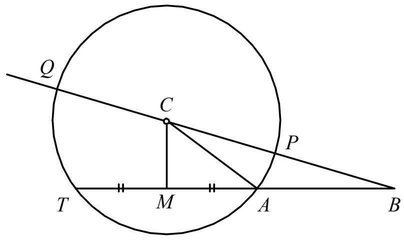
$$\overline{BP} = \overline{BC} - \overline{CP} = \overline{BC} - \overline{AC}$$

$$\overline{BQ} = \overline{BC} + \overline{AC}\,.$$

Заменувајќи ги формулите (7), (8) и (9) во (3) добиваме

$$\left(\overline{AB} + 2\overline{AM}\right)\overline{AB} = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2\,,$$

т.е. го добивме бараното равенство (2). ♦



Црт. 5

Пример 3. Дадена е отсечката $\overline{AB}$. Да се најде точка M од отсечката AB, таква што

$$\overline{AB} : \overline{AM} = \overline{AM} : (\overline{AB} - \overline{AM})\,.$$

Ова правило за поделба на една отсечка се вика ***златен пресек***.

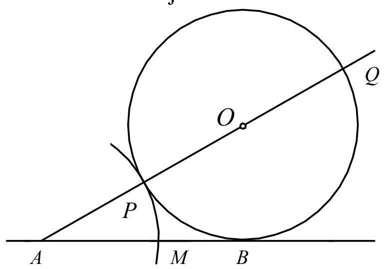
Решение. Нека означиме $\overline{AB} = a$, $\overline{AM} = x$ и $k\left(O, \frac{a}{2}\right)$ (црт. 6). Од произволна точка повлекуваме тангента кон кружницата. Нека допирната точка ја означиме со B. На тангентата ја наоѓаме точката A така што $\overline{AB} = a$.

Од степенот на точката A во однос на кружницата $k\left(O, \frac{a}{2}\right)$, добиваме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}\,. \tag{10}$$

Нека $\overline{AP} = x$. Тогаш заменувајќи во (10) добиваме

$$a^2 = x(x+a)\,.$$



Црт. 6

Значи $\overline{AP} = x$ е бараната отсечка, па бараната точка M ќе ја најдеме во пресек на $k\left(A, \overline{AP}\right)$ и отсечката AB. ♦

Пример 4. Дадени се кружниците k_1 и k_2. Да се најде геометриското место на точки со својство: збирот на степените во однос на k_1 и k_2 да е константен.

Решение. Нека кружницата k_1 (k_2) има центар во точката $O_1(x_1, y_1)$ $(O_2(x_2, y_2))$ и радиус r_1 (r_2) и нека $M(x, y)$ е точка од бараното геометриско место, чии степени во однос на кружниците k_1 и k_2 се соодветно s_1 и s_2. Тогаш важи $s_1 + s_2 = C$, каде C е константа. Значи добиваме дека

$$\overline{O_1M}^2 - r_1^2 + \overline{O_2M}^2 - r_2^2 = C \text{, т.е.}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = C + r_1^2 + r_2^2 .$$

По средување на последното равенство се добива равенството

$$\left(x - \tfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\right). \qquad (11)$$

Ако $C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 > 0$, тогаш последната равенка е равенка на кружница со центар во точка $O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ и радиус $\sqrt{\frac{1}{2}\left(C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\right)}$.

Ако $C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$, тогаш единствена точка која ја задоволува равенката (11) е точката $O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Ако $C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 < 0$, тогаш не постои точка која ја задоволува равенката (11).

Значи бараното геометриско место на точки е кружница, точка или не постојат такви точки кои го задоволуваат барaниот услов. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Нека s е степенот на точка M во однос на кружницата $k(O, r)$. Покажи дека:

- ако $M \in k$, тогаш $s = 0$;
- ако M е надворешна точка, тогаш $s > 0$;
- ако M е внатрешна точка, тогаш $s < 0$.

2. Да се конструира кружница која минува низ две дадени точки A и B и допира дадена права p.

3. Дадени се кружниците k_1 и k_2. Да се најде геометриското место на точки со својство: разликата на степените во однос на k_1 и k_2 да е константна.

Литература

[1] А. Самарџиски, *Хомотетија*, *Инверзија и задачите на Аполониј*, Скопје, 1988

[2] Ж. Мадевски, А. Самарџиски, Н Целакоски, *Геометрија* (за II клас на средното образование), Скопје, 1975