

БМО 1984

1. Нека $a_i, i = 1, 2, \dots, n, (n \geq 2)$ се позитивни броеви такви што $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Докажи

дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\dots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Решение. За секој $i = 1, 2, \dots, n$ важи

$$\frac{a_i}{1+a_2+\dots+a_{i-1}+a_{i+1}+\dots+a_n} = \frac{a_i}{2-a_i} = \frac{2}{2-a_i} - 1,$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \dots + \frac{1}{2-a_n} \geq \frac{n^2}{2n-1}.$$

Ставаме $x_i = 2 - a_i, i = 1, 2, \dots, n$ и добиваме

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{2n-1},$$

каде $x_i > 0$ и $\sum_{i=1}^n x_i = 2n - \sum_{i=1}^n a_i = 2n - 1$. Според тоа, неравенството е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

2. Нека $A_1A_2A_3A_4$ тетивен е четириаголник. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Докажи дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

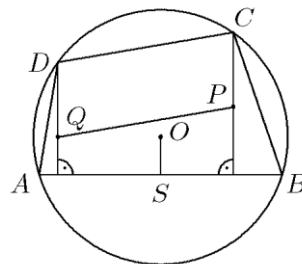
Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник и P и Q се ортоцентрите соодветно на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, тогаш четириаголникот $PCDQ$ е паралелограм.

Доказ. Од $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$ следува $CP \parallel DQ$. Ако O е центарот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ и S е средината на AB , тогаш важи $\overline{OS} = \overline{CP}$ (ова

својство се докажува ако се искористи дека пресечната точка на CS и OP е тежиштето на триаголникот ABC). Аналогно, $\overline{OS} = \overline{DQ}$, па затоа $\overline{DQ} = \overline{CP}$.

Конечно, од $CP \parallel DQ$ и $\overline{DQ} = \overline{CP}$ следува, дека $PCDQ$ е паралелограм. ■



Од лемата следува, дека отсечките A_1A_2 и H_2H_1 ; A_2A_3 и H_3H_2 ; A_3A_4 и H_4H_3 ; A_4A_1 и H_1H_4 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

3. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број $n > m$ таков што декадниот запис на 5^n се добива од декадниот запис на 5^m со додавање на неколку цифри од лево.

Решение. Прво ќе докажеме, дека ако бројот 5^m има k цифри, тогаш $k \leq m$. Навистина, ако го претпоставиме спротивното, тогаш $k - 1 \geq m$, па како секој број со k цифри е поголем или еднаков на 10^{k-1} добиваме $10^{k-1} \geq 10^m > 5^m \geq 10^{k-1}$, што е противречност.

Ако најдеме n таков што $5^n - 5^m$ е делив со 10^k , тогаш последните k цифри на 5^n се совпаѓаат со бројот 5^m , т.е. 5^n се добива од 5^m со додавање на неколку цифри од лево. Бидејќи броевите 2 и 5 се заемно прости, заклучуваме дека бројот $5^{\varphi(2^k)} - 1$ е делив со 2^k , каде $\varphi(x)$ е Ојлеровата функција. Тогаш бројот

$$5^{m+\varphi(2^k)} - 5^m = 5^m(5^{\varphi(2^k)} - 1)$$

е делив со 5^k и со 2^k , т.е. е делив со 10^k . Значи, $n = m + \varphi(2^k)$ е бројот со саканото својство.

4. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2 \end{cases}$$

каде a, b, c се позитивни броеви.

Решение. Ги собираме трите равенства и добиваме

$$ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx.$$

Во последното равенство заменуваме

$$ax + by = x^2 + y^2 - 2xy$$

и добиваме

$$cz = z^2 + xy - yz - zx = (z - x)(z - y).$$

Аналогно добиваме $by = (y - x)(y - z)$ и $ax = (x - z)(x - y)$. Ако $x \geq y \geq z$, тогаш

$$ax = (x - z)(x - y) \geq 0$$

$$by = (y - x)(y - z) \leq 0$$

$$cz = (z - x)(z - y) \geq 0.$$

Бидејќи a, b, c се позитивни броеви, добиваме $x \geq 0$, $y \leq 0$ и $z \geq 0$. Сега од $y \geq z$ следува дека $y = z = 0$ и од $ax = x^2$ добиваме $x = 0$ или $x = a$. Во овој случај ги добиваме решенијата $(0, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Аналогно добиваме уште две решенија $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.