Ристо Малчески
Скопје

МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ I

Во математиката често се среќаваме со задачи од следниов вид:

Дадени се некој математички објект A *и дозволени трансформации на истиот. Се поставува прашањето дали со повеќекратна примена на дозволените трансформации дадениот објект* A *може да се претвори (трансформира) во некој друг однапред зададен објект* B.

Решавањето на задачите од овој вид се сведува на следниве два случаја:

- ако одговорот на поставеното прашање е позитивен, тогаш доволно е да се наведе било кој пример кој покажува како може со помош на допустливите трансформации од објектот A да се добие објектот B и
- ако одговорот на поставеното прашање е негативен, тогаш е потребно да се докаже дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Очигледно, во првиот случај треба да го докажеме постоењето на низа допустливи трансформации која ја обезбедува трансформацијата на објектот A во објектот B, што не секогаш е едноставна задача. Како да постапиме во вториот случај? Иако одговорот на ова прашање не е еднозначен, а уште помалку едноставен, сепак во многу случаи го користиме следниов метод:

- наоѓаме својство кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени која било од допустливите трансформации,
- докажуваме дека објектот B го нема наведеното својство, и
- заклучуваме дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Својството кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени допустлива трансформација го нарекуваме *инваријанта* на допустливата трансформација, а претходно опишаниот метод го нарекуваме *метод на инваријанти*.

Пример 1. Правоаголник е поделен (расечен) на четири помали правоаголници. Потоа, се зема определен број од новодобиените правоаголници и секој од нив е поделен на четири правоаголници итн.

Дали може со повторување на наведената операција да се добијат 2006 правоаголници?

Решение. Во случајот не интересира вкупниот број правоаголници кој се добива со наведената трансформација, т.е. со избирање определен број правоаголници и делење на секој од нив на четири нови правоаголници. Забележуваме, дека со делењето на еден од избраните правоаголници на четири нови, вкупниот број правоаголници се зголемува за 3 (од еден правоаголник добиваме четири нови). Според тоа, ако во некој чекор имаме n правоаголници и ако избереме k правоаголници секој од кои го делиме на 4 нови, тогаш новодобиениот број правоаголници е еднаков на $n+3k$. Понатаму, броевите n и $n+3k$ при делење со бројот 3 даваат исти остатоци и како на почетокот имаме еден правоаголник заклучуваме дека вкупниот број правоаголници кој се добива со наведената трансформација е од видот $1+3k$ и истиот има својство (инваријанта) да при делење со бројот 3 дава остаток 1. Од друга страна, $2006=2+3\cdot 668$, што значи дека тргнувајќи од еден правоаголник со наведениот начин на расекување не може да се добијат 2006 правоаголници. ♦

Пример 2. На таблата се запишани броевите $0,1,2,1,2$ и 1. Дозволено е да се изберат кои било три броеви и секој од нив да се зголеми за 1. Дали може, со повторување на оваа операција, да се добијат шест еднакви броеви?

Решение. После секој чекор, независно од тоа кои три броеви се зголемени, збирот на сите запишани броеви се зголемува за 3, т.е. остатокот при делење со 3 на збирот на сите шест броеви е инваријанта на опишаната трансформација. Бидејќи на почетокот збирот на броевите е еднаков 7 и овој број не е делив со 3, во секој нареден чекор ќе се добие збир кој не е делив со 3. Меѓутоа, збирот на шест еднакви броеви е делив со 6, па затоа тој е делив и со 3, па затоа на опишаниот начин не е можно да се добијат шест еднакви броеви. ♦

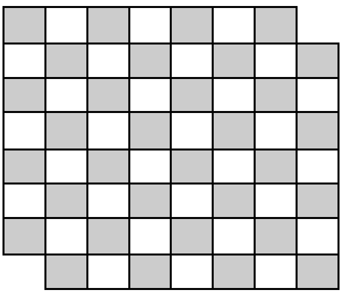
Пример 3. На таблата е запишана низа од броевите еден и два. Дозволено е да се избришат кои било два броја и наместо нив да се запише бројот еден ако избришаните броеви се еднакви, а два ако избришаните броеви не се еднакви. Дали последниот неизбришан број е еден или два?

Решение. Во низата секој член кој е еднаков на бројот 2 ќе го замениме со бројот -1 и на новодобиената низа да ја примениме истата трансформација. Го разгледуваме производот на членовите на низата. Ако во дозволената операција избришеме два еднакви броја, 1 и 1 или -1 и -1, тогаш го запишуваме бројот 1, а ако ги избришеме броеви 1 и -1, тогаш го запишуваме бројот -1. Според тоа, и во два случаја производот на членовите на низата останува непроменет, т.е. тој е инваријантен во однос на разгледуваната трансформација. Значи, во почетната задача, инваријанта е парен број на двојки, па затоа ако во почетната низа бројот на двојките е парен, тогаш последниот неизбришан број е 1, а во спротивно тоа е бројот 2. ♦

Пример 4. Вошебникот од Оз има градина со 101 каранфил. Се разбира градината е волшебна, па кога ќе се набере 1 одма израснуваат 6, кога ќе се наберат 13 одма израснуваат 8, кога ќе наберат 17 одма израснуваат 2 и кога ќе наберат 9 одма израснуваат 24 каранфили. Вештерот Гаргамел, знаел дека одеднаш може да се скинат само $1, 13, 17$ или 9 каранфили, и дека ако одеднаш скине друг број каранфили засекогаш ќе остане заробен во градината на Оз. Дали Гаргамел може да ги набере сите 101 каранфил?

Решение. После секое скинување на дозволениот број од $1, 13, 17$ или 9 каранфили и израснување на нови каранфили, бројот на каранфилите во градината на Оз се менува за $+5, -5, -15$ или $+15$. Последните броеви се деливи со 5, што значи бројот на каранфилите се менува за некој број кој е делив со бројот 5. Меѓутоа, бројот 101 не е делив со 5, па затоа во градината секогаш ќе има барем еден каранфил. ♦

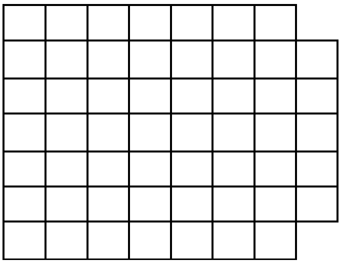
Пример 5. Дали може шаховска табла од која се отстранети две дијагонални полиња да се покрие со 31 правоаголник составени од по два квадрати?



Решение. Две спротивни полиња на таблата се обоени со иста боја. На цртежот се отстранети две бели полиња. Значи, без тие две полиња имаме 32 црни и 30 бели полиња, т.е. разликата меѓу непокриените црни и бели полиња е

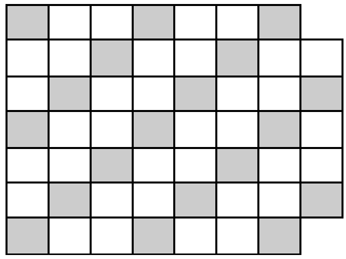
$$32 - 30 = 2.$$

Понатаму, две соседни полиња на шаховската табла (полиња кои имаат заедничка страна) се обоени со различни бои, па затоа со ставањето на секој правоаголник на таблата се покрива по едно бело и едно црно поле, што значи дека разликата меѓу непокриените црни и бели полиња останува непроменета, т.е. таа е инваријантна во однос на ставањето на правоаголници на таблата. Конечно, при произволно распоредување на 30 правоаголници на таблата ќе останат две непокриени црни полиња кои не можат да се покријат со преостанатиот правоаголник. ♦

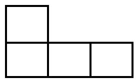


Пример 6. Докажи дека следнава фигура која е составена од 54 единечни квадрати (полиња), не може да се покрие со правоаголници составени од по 3 полиња.

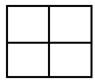
Решение. Таблата ќе ја обоиме на како на цртежот лево, при што на почетокот имаме 35 непокриени бели полиња, т.е. бројот на непокриените бели полиња е непарен. Понатаму меѓу секои 3 полиња на таблата кои можат да се покријат со правоаголник составен од 3 полиња имаме 2 бели полиња. Според тоа, со секое ставање на правоаголник со 3 полиња на таблата парноста на бројот на непокриените бели полиња не се менува, т.е. таа е инваријантна во однос на ставањето на правоаголници на таблата. Последното значи, дека после ставањето на претпоследниот правоаголник на таблата ќе останат едно бело и две црни полиња кои не можат да се покријат со последниот правоаголник. ♦



Пример 7. Докажи дека шаховска 8×8 табла не може да се покрие со 15 плочки од облик прикажан на цртеж 1 а) и една плочка од облик прикажан на цртеж 1 б).

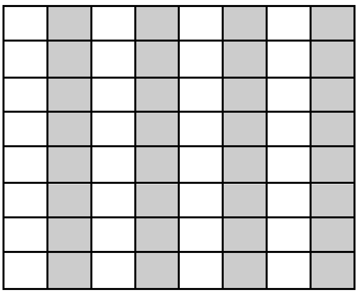


Црт. 1 а)



Црт. 1 б)

Решение. Таблата ќе ја обоиме како на цртеж 2. При вакво боење, ако произволно ја ставиме плочката од облик 1 б), тогаш таа покрива две бели и две црни полиња, што непокриени остануваат парен број бели и парен број црни полиња. Понатаму, секоја плочка од облик 1 а) покрива или три бели и едно црно поле или три црни и едно бело поле. Според тоа, со ставање на две плочки од облик 1 а) парноста на непокриените бели и црни полиња не се менува, т.е. непокриени остануваат парен број бели и парен број црни полиња. Конечно, ако ставиме 14 плочки од облик 1 а), т.е 7 парови плочки од облик 1 а), тогаш остануваат четири непокриени полиња кои можат да бидат: или сите бели или две бели и две црни или сите црни. Јасно, во ниту еден од овие случаи не е можно преостанатите полиња да се покријат со петнаесеттата плочка. ♦



Цртеж 2

Пример 8. Од шаховска 10×10 табла исечено е едно поле. Дали може пресотанатиот дел од таблата да се покрие со 99 рамнокраки правоаголни триаголници со хипотенуза со должина 2, така што хипотенузите на триаголниците се поклопуваат со страните на полињата, а катетите на триаголниците се поклопуваат со дијагоналите на полињата?

Решение. Таблата ја обојуваме на вообичаен “шаховски” начин (направи цртеж). Бројот на црните и бројот на белите полиња се разликува за 1. Од друга страна, при дадените услови, црниот и белиот дел на таблата покриен со еден рамностран триаголник имаат иста плоштина, па затоа бараното покривање не е можно. ♦