Игор Димоски, Прилеп

НЕОГРАНИЧЕНОСТ НА НИЗАТА ОД СОВРШЕНИ И НИЗАТА ОД ПРОСТИ БРОЕВИ

Последната, 36-та теорема од *IX* книга на ***Евклидовите*** "Елементи" гласи:

"*Ако се земат било колку пропорционални броеви со единицата на прво место во размер еден спрема два и тоа до тогаш додека збирот на сите тие броеви не стане **ПРОСТ** број и ако тој збир помножен со последниот број произведува нешто, добиениот број ќе биде **СОВРШЕН**.*"

Доказот на оваа, како и на другите теореми во оваа книга е изведен геометриски - преку должините на отсечки. Тоа значително ја отежнува работата, особено во споредба со моќниот апарат на современата алгебра и теорија на броеви. Но, запрепастува фактот што и после *2300* години, проблемот за неограниченост на низата од совршени броеви, скоро и да не е поместен од почетната точка - спомнатата теорема што ја дава Евклид.

Дефиниција. Совршен број е природниот број кој е еднаков на збирот од сите негови делители, вклучувајќи го и 1 (се разбира, без самиот тој број).

Пример 1. Делители на бројот 6 (без 6) се: 1, 2 и 3; нивниот збир $1+2+3=6$, па 6 е совршен број.

$$28=1+2+4+7+14\,,$$

т.е. 28 е еднаков на збирот на сите свои делители па значи 28 е совршен број.

Природно, се поставува прашањето колку такви броеви постојат, односно дали низата од совршени броеви е ограничена или не.

Теорема 1. Прост број не може да е совршен.

Доказ. Нека p е произволен прост број. Тогаш $p>1$ и единствен делител на p, различен од p е 1. Бидејќи $p\neq 1$, не е можно p да се претстави како сума од сопствените делители.♦

Теорема 2. Степен на прост број не може да е совршен.

Доказ. Нека $n=p^{\alpha}$, каде p е произволен прост број и α е произволен природен број. Сите делители на n, различни од n се: $1, p, p^2, ..., p^{\alpha-1}$. Тие образуваат геометриска прогресија со прв член 1 и количник p, па може да се пресмета нивната сума:

$$S_n=1+p+p^2+...+p^{\alpha-1}=\frac{p^{\alpha}-1}{p-1}<\frac{p^{\alpha}}{p-1}\leq p^{\alpha}=n$$

Бидејќи $S_n<n$, бројот n не може да е совршен.♦

Нека природниот број N е делив со точно два прости броеви. Тогаш тој е од облик $N=p^{\alpha}q^{\beta}$, каде p и q се прости броеви и $\alpha,\beta\in N$.

Сите можни делители на N (вклучувајќи го и самиот N) можат да се претставаат во правоаголна шема со $\alpha+1$ колони и $\beta+1$редици:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & p & p^2 & \ldots & p^{\alpha-1} & p^{\alpha} \\
q & pq & p^2q & \ldots & p^{\alpha-1}q & p^{\alpha}q \\
q^2 & pq^2 & p^2q^2 & \ldots & p^{\alpha-1}q^2 & p^{\alpha}q^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q^{\beta-1} & pq^{\beta-1} & p^2q^{\beta-1} & \ldots & p^{\alpha-1}q^{\beta-1} & p^{\alpha}q^{\beta-1} \\
q^{\beta} & pq^{\beta} & p^2q^{\beta} & \ldots & p^{\alpha-1}q^{\beta} & p^{\alpha}q^{\beta}
\end{array} \qquad (1)
$$

Нека S е сумата од сите делители на $N = p^{\alpha}q^{\beta}$, вклучувајќи го и N.

$$
\begin{aligned}
S &= 1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha}+q+pq+p^2q+\ldots+p^{\alpha}q+q^2+pq^2+p^2q^2+\ldots+p^{\alpha}q^2+ \\
&+q^{\beta}+pq^{\beta}+p^2q^{\beta}+\ldots+p^{\alpha}q^{\beta}=1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha}+q(1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha})+ \\
&+q^2(1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha})+\ldots+q^{\beta}(1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha})= \\
&=(1+p+p^2+\ldots+p^{\alpha})(1+q+q^2+\ldots+q^{\beta})
\end{aligned}
$$

Следува дека:
$$S = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1} \qquad (2)$$

Ако $N = p^{\alpha}q^{\beta}t^{\chi}$, каде t е прост број и $\chi \in N$, шемата на сите делители на N ќе добие форма на квадар со страни $\alpha+1, \beta+1$ и $\chi+1$, бидејќи за секоја редица од шемата (1) со множење на членовите на нејзината редица со соодветните степени на t, ќе се добие во длабочина правоаголна шема со димензии $\alpha+1$ и $\chi+1$.

Аналогно, ако $N = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ за некој $k \in N$, тогаш шемата на сите делители ќе добие форма на k-димензионален квадар со страни $\alpha_1+1, \alpha_2+1, \ldots, \alpha_k+1$, а сумата на сите делители на N, вклучувајќи го и N ќе биде:

$$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} = \prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} \qquad (3)$$

Нека $N = p2^{\beta}$. Тоа е специјален случај за $N = p^{\alpha}q^{\beta}$, каде $\alpha = 1$ и $q = 2$. Равенството (2) сега добива облик:

$$S = \frac{p^2-1}{p-1}\cdot\frac{2^{\beta+1}-1}{2-1} = \frac{(p-1)(p+1)}{p-1}\cdot\left(2^{\beta+1}-1\right) = (p+1)\left(2^{\beta+1}-1\right) \qquad (4)$$

Бројот N е совршен ако и само ако $S = N + N$ (бидејќи S веќе го содржи N како собирок), т.е.

$$
\begin{aligned}
&(p+1)(2^{\beta+1}-1) = 2N \quad \Leftrightarrow \quad (p+1)(2^{\beta+1}-1) = p2^{\beta+1} \quad \Leftrightarrow \\
&p2^{\beta+1} - p + 2^{\beta+1} - 1 = p2^{\beta+1} \quad \Leftrightarrow \quad p = 2^{\beta+1}-1 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Значи $N = p2^{\beta}$ е совршен број ако и само ако N е од облик $N = (2^{\beta+1}-1)2^{\beta}$ и $2^{\beta+1}-1$ е прост број. Од претходната дискусија непосредно следува следната:

Теорема 3. Ако $2^{n+1}-1$ е прост број, тогаш $N = (2^{n+1}-1)2^{n}$ е совршен број.

Ова е всушност истата теорема на Евклид од почетокот, искажана со јазикот на современата алгебра.

Пример 2. За $n=4$, $2^4-1=31$ е прост број, па од теоремата 3 следува дека $N=(2^5-1)2^4=31\cdot 16=496$ е совршен број.

За $n=3$, $2^{3+1}-1=15$ не е прост број, $N=(2^4-1)2^3=15\cdot 8=120$ не е совршен број иако е од облик $(2^{n+1}-1)2^n$.

Со помош на теорема 3, можат да се генерираат уште членови на низата од совршени броеви $6, 28, 496, \ldots$.

Проблемот на неограниченост на оваа низа би бил решен ако се докаже дека постојат бесконечно многу прости броеви од облик $2^{n+1}-1$.

Теорема 4. Ако $n+1$ е сложен број, тогаш и $2^{n+1}-1$ е сложен број.

Доказ. Нека $n+1=u\cdot v$ в, каде што u и v се природни броеви поголеми од 1, односно $n+1$ е сложен број. Следува дека

$$2^{n+1}-1=2^{u\cdot v}-1=(2^u)^v-1=(2^u-1)(2^{u(v-1)}+2^{u(v-2)}+\ldots+2^u+1)$$

Значи бројот $2^{n+1}-1$ може да се претстави како производ на два броја, па тој е сложен. ⬩

Теоремата 4 значително го олеснува пребарувањето на совршените броеви, бидејќи ако $n+1$ е сложен број, тогаш сигурно $N=(2^{n+1}-1)2^n$ не е совршен број.

Пример 3. Во примерот 2 беа испитани вредностите $n=3$ и $n=4$. Според теорема 4, нема потреба да се испитува за n=5, 7, 8 и 9, бидејќи тогаш $n+1$ ќе биде сложениот број $6, 8, 9$ или 10.

За $n=6$, се добива совршениот број $(2^{6+1}-1)2^6=8128$.

Се поставува прашање дали важи обратното тврдење, односно дали ако $n+1$ е прост број, тогаш и $2^{n+1}-1$ ќе биде прост број?

Пример 4. Нека $n=10$. Бројот $n+1=11$ е прост број, но бројот $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ е очигледно сложен број.

Тоа значи дека не може со сигурност да се тврди дека ќе постојат бесконечно многу членови на Евклидовата низа од совршени броеви.

Во разгледувањето на совршените броеви, тука некаде застанал и Евклид. Подоцна Ојлер ја разработувал истата тема, но се што успеал да докаже е дека ако еден парен број е совршен, тогаш тој мора да е од облик $(2^{n+1}-1)2^n$ - како Евклидовите совршени броеви.

Теорема 4 (на Ојлер). Ако N е парен совршен број, тогаш постои природен број n, така што $N=(2^{n+1}-1)2^n$ и $2^{n+1}-1$ е прост број.

Доказ. Нека N е произволен парен број. Тогаш постои природен број n и непарен природен број u, така што $N=2^n u$. Првиот множител што се јавува во сумата S на сите делители на N, пресметана во равенството (3) ќе биде $\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$.

Ако S_u е сумата од сите делители на u, вклучувајќи го и y, за сумата S се добива:

$$S=(2^{n+1}-1)\cdot S_u .$$

За N да е совршен број, треба $S = 2N$, т.е.

$$(2^{n+1} - 1)S_u = 2 \cdot 2^n \cdot S_u \Leftrightarrow 2^{n+1} S_u - S_u = 2^{n+1} u$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1}(S_u - u) = S_u \Leftrightarrow 2^{n+1}(S_u - u) = (S_u - u) + u$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1}(S_u - u) - (S_u - u) = u \Leftrightarrow (2^{n+1} - 1)(S_u - u) = u \qquad (6)$$

Според (6) бројот $S_u - u$ е делител на u . Но $S_u - u$ е сумата на сите делители на u , без u , и истовремено е еден од делителите на u . Значи $S_u - u$ е сума од броеви меѓу кои се наоѓа и самата сума. Тоа е можно само ако во таа сума нема други собироци, што значи дека $S_u - u$ е единствен делител на u . Следува дека мора $S_u - u = 1$ и $u = 2^{n+1} - 1$ мора да е прост број.

Од сето тоа следува дека за да биде бројот $N = 2^n y$ совршен, мора да е од облик $N = (2^{n+1} - 1)2^{n+1}$ и $2^{n+1} - 1$ е прост број. ♦

Најголемиот досега откриен прост број (ноември 2001) е бројот $2^{13466917} - 1$ и има околу 4 милиони цифри. Значи најголемиот број за кој со сигурност може да се тврди дека е совршен е бројот $(2^{13466917} - 1)2^{13466917}$.

Досега не е откриен ниту еден непарен совршен број, но не е докажано ниту дека таков број не постои.

Интуицијата ни вели дека единствени совршени броеви се Евклидовите и дека низата од Евклидовите совршени броеви не е ограничена. Доказот на ваквиот став е отворен предизвик и едно од неразрешените прашања во теоријата на броеви. ♦

Сумата на сите делители на еден природен број N е само специјален случај од поопштиот проблем на разгледување на сумата од степените на сите делители на бројот N . Ако сите делители на N помали од N се $1, d_1, d_2, ..., d_l$ за произволен цел број c , сумата од степените на делителите на N има облик:

$$1^c + d_1^c + d_2^c + ... + d_l^c \qquad (7)$$

Ако $c = 1$, се добива сумата од делителите. Ако $c = 0$, вредностите на сите степени е 1, па сумата ќе го одредува вкупниот број на делители на N .

Нека $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. Сите делители на N се од облик $N = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$, каде $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ $i = 1, 2, ..., k$ Аналогно како што беа изведени равенствата (2) и (3), може да се заклучи дека сумата на степените на делителите на N за $c = -1$, односно на реципрочните вредности на делителите на N е:

$$R = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} ... + \frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right) \cdot .... \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + ... + \frac{1}{p_k^{\alpha_k}}\right) \qquad (8)$$

Тргнувајќи од ова равенство, Ојлер успеал да изведе уште еден, интересен доказ дека низата од прости броеви е неограничена.

Пропозиција 1: За секој прост број p и за секој природен број n :

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + ... + \frac{1}{p^n} < \frac{p}{p-1} \qquad (9)$$

Доказ. Нека n е произволен природен број и нека x е произволен реален број, така што $0<x<1$. Според теоремата за збир на членовите на геометриската прогресија со прв член 1 и количник x, важи:

$$1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Бидејќи $0<x<1$, следува дека $x^{n+1}>0$ и $1-x>0$, па $\frac{x^{n+1}}{1-x}>0$. Значи ако од бројот $\frac{1}{1-x}$ се одземе позитивниот број $\frac{x^{n+1}}{1-x}$, ќе се добие број помал од $\frac{1}{1-x}$, т.е. $\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}<\frac{1}{1-x}$, од што следува дека:

$$1+x+x^2+...+x^{n+1}<\frac{1}{1-x} \tag{10}$$

Нека p е произволен прост број. Јасно, $p\geq 2$, па $x=\frac{1}{p}<1$. Ако во (10) се замени наместо x, бројот $\frac{1}{p}$, се добива:

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...+\frac{1}{p^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{\frac{p-1}{p}}=\frac{p}{p-1}$$

од што следува равенството (9) што требаше да се докаже:

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...+\frac{1}{p^n}<\frac{p}{p-1} \blacklozenge$$

Нека за произволен природен број m, со A_m е означена сумата на реципрочни вредности на природните броеви не поголеми од 2^m.

$$A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^m} \tag{11}$$

Да ги разгледаме вредностите на A_m за првите неколку вредности на m:

$$A_1=1+\frac{1}{2}$$

$$A_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2}, \qquad \text{бидејќи} \quad \frac{1}{3}>\frac{1}{4}.$$

$$A_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=A_2+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>A_2+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}>$$
$$>1+\frac{2}{2}+\frac{4}{8}=1+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}, \qquad \text{бидејќи} \quad \frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}>\frac{1}{8}.$$

Понатаму,

$$A_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}=A_3+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>1+\frac{3}{2}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}...+\frac{1}{16}}_{8-\text{пати}}=1+\frac{4}{2}.$$

Се наметнува како заклучок следната:

Пропозиција 2: За секој природен број $m>1$, за сумата дефинирана во равенството (11) важи:

$$A_m>1+\frac{m}{2} \tag{12}$$

Доказ: За $m=2$, веќе беше разгледано дека $A_2=1+\frac{2}{2}$.

Нека за $m=k$, е исполнето неравенството $A_k>1+\frac{k}{2}$.

Ако $m=k+1$,

$$A_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}=A_k+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k}$$

Секој од броевите 2^k+r, каде $1\leq r\leq 2^k-1$ е помал од 2^{k+1}, па $\frac{1}{2^k+r}>\frac{1}{2^{k+1}}$, за секој $1\leq r\leq 2^k-1$. Според тоа $A_{k+1}>A_k+\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k\text{ –собироци}}$ и од претпоставката за $A_k>1+\frac{k}{2}$, следува дека $A_{k+1}>1+\frac{k}{2}+\frac{2^k}{2^{k+1}}=1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{k+1}{2}$.

Од принципот на математичка индукција следува дека за секој $m>1$, $A_m>1+\frac{m}{2}$ ♦

Од равенството (12) следува дека низата од броеви (A_m) неограничено расте со зголемувањето на m. Имено за произволен $M\in$, постои $m=2M-2\in$, така што

$$A_m>1+\frac{m}{2}=1+\frac{2M-2}{2}=1+M-1=M, \quad \text{односно} \quad A_м>M.$$

На пример за A_m да го надмине бројот 1000, доволно е да се земе m=1998, односно:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{1998}}>1000 \ ♦$$

Нека n е природен број и p е произволен прост број. Нека со N е означен производот на n-тите степени на сите прости броеви не поголеми од p, т.е.

$$N=2^n\cdot 3^n\cdot\ldots\cdot p^n$$

Нека R_p е сумата од реципрочни вредности на сите делители на N, вклучувајќи ги 1 и N. Сите делители на N се од облик $2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p^{\alpha_p}$, каде $0\leq\alpha_{\mathrm{I}}<n$ и i е прост број не поголем од p.

Според равенството (8), сумата R_p од реципрочни вредности на делителите на N е:

$$R_p=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}\right)$$

Но, според пропозицијата 1,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{2}{2-1}$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}<\frac{3}{3-1}$$

....

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^n}<\frac{p}{p-1}$$

Ако се помножат левите страни на претходните неравенства се добива R_p, од што следува неравенството

$$R_p<\frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p}{p-1} \tag{13}$$

Нека со L_p е означен производот $\frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p}{p-1}$. Од последните неколку расудувања следува:

Пропозиција 3: За секој прост број p и секој природен број n, важи неравенството $R_p<L_p$. ♦

Нека m е произволен природен број, $m>1$ и нека q е најголемиот прост број таков што $q<2^m$.

Во сумата $A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2^m}$ собироци се реципрочните вредности на членовите на низата:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2^m \tag{14}$$

Нека K е произволен број во низата (14) делив со p^n каде p е прост број. Очигледно $2^m \geq K \geq p^n \geq p$, па значи p е прост член на низата (14) и мора $p \leq q$.

Ако се претпостави дека $n>m$, следи $K \geq p^n \geq 2^n > 2^m$ што не е можно бидејќи во низата (14) членуваат само броевите не поголеми од 2^m.

Значи секој член на низата (14) може да се претстави како производ на степените на простите броеви не поголеми од q на експоненти не поголеми од m. Тоа значи дека сите членови на низата (14) се делители на бројот:

$$N = 2^m \cdot 3^m \cdot 5^m \cdot 7^m \cdot 11^m \cdot .. . \cdot q^m.$$

Бидејќи $m>1$, бројот 3 сигурно е член на низата (14), што значи дека $q \geq 3$, па $N \geq 2^m \cdot 3^m > 2^m$. Тоа значи дека бројот N сигурно не е член на низата (14).

Конечно, сите броеви 1, 2, 3, 4, 5, ..., 2^m се делители на бројот N, од што следува дека сите собироци на A_m се собироци на сумата R_q од реципрочните вредности на делителите на N и постои најмалку еден собирок на R_q (тоа е $\frac{1}{N}$) што не е вклучен во A_m. Од ова следува:

Пропозиција 4: $R_q > A_m$. ♦

Теорема 5. Постојат бесконечно многу прости броеви.

Доказ: Нека тврдењето не е исполнето, односно нека множеството од прости броеви е конечно: $P=\{p_1, p_2, ..., p_r\}$, така што $2=p_1< p_2<...<p_r=q$.

Нека m е произволен природен број така што $q<2^m$. Бидејќи q е најголемиот прост број воопшто, тој е најголем прост број помал од 2^m.

Од пропозицијата 4 следува дека $R_q>A_m$, односно

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^m}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^m}\right)\cdot ... \cdot\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^m}+...+\frac{1}{q^m}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^m}.$$

Но, од пропозицијата 3 следува дека $L_q>R_q>A_m$, т.е.

$$\frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot ... \cdot\frac{q}{q-1}>A_m,$$

а според пропозицијата 2, $L_q > A_m > 1+\frac{m}{2}$, што значи дека

$$\frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot ... \cdot\frac{q}{q-1}>1+\frac{m}{2} \qquad (15)$$

Но, m е произволен природен број таков што $2^m>q$. Значи m може неограничено да расте, а неравенството (15) постојано ќе важи. Сега, бидејќи q е фиксен, непроменлив број, левата страна на неравенството (15) е непроменлива, што значи дека за доволно големо m, сепак $1+\frac{m}{2}$ ќе го надмине L_q што е во противречност со неравенството (15).

Следува дека претпоставката дека множеството од прости броеви е конечно, не е точна. Конечно, следува дека ***постојат бесконечно многу прости броеви***, односно низата од прости броеви е неограничена. ♦♦

Доказот на Ојлер е доста посложен отколку вообичаениот доказ за неограниченоста на низата од прости броеви. Но, неговото значење се состои во тоа што може да биде пренесено на поширок круг слични, но потешки прашања. Освен тоа на овој доказ се заснова целото учење за распределбата на простите броеви - една од најпроблематичните, најтешки и најактуелни области на современата математика. Основната идеја на презентираниот доказ кој ги влече своите корени од антиката, се јавува како раководна идеја во целата таа област.