

XLVI олимпијада

1. На страните на рамностран триаголник ABC избрани се шест точки: A_1, A_2 на BC ; B_1, B_2 на AC и C_1, C_2 на AB . Овие точки се темиња на конвексен шестаголник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ чии страни имаат еднакви должини. Докажи, дека правите A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.

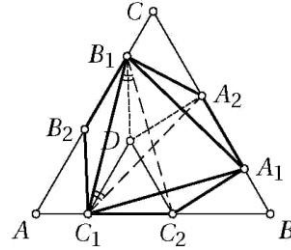
Решение. Нека D е точката во внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\triangle C_1C_2D$ е рамностран. Тогаш DC_1 е паралелна и еднаква со B_1B_2 , па затоа $B_1B_2C_1D$ е ромб и оттука $\overline{DB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{A_2B_1}$. Аналогно $\overline{DA_2} = \overline{A_2B_1}$, што значи дека $\triangle DA_2B_1$ е рамностран. Значи, точките A_2, B_1, C_1, C_2 лежат на кружница со центар D , па затоа

$$\angle B_1C_1A_2 = \angle C_1B_1C_2 = \frac{1}{2} \angle C_1DC_2 = 30^\circ.$$

Слично,

$$\angle C_1A_1B_2 = \angle A_1C_1A_2 = \angle A_1B_1C_2 = \angle B_1A_1B_2 = 30^\circ.$$

Од досега изнесеното следува дека $\triangle A_1B_1C_1$ е рамностран и дека A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 се сечат во една точка.



2. Нека $a_1, a_2, \dots$ е низа цели броеви, која содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Познато е дека за секој природен број n броевите $a_1, a_2, \dots, a_n$ даваат различни остатоци при делење со n . Докажи, дека во оваа низа секој цел број се појавува точно по еднаш.

Решение. Од условот на задачата следува дека сите членови на низата се различни. Исто така, ако $d = |a_i - a_j| \geq n$ за некои $i, j \leq n$, тогаш меѓу членовите $a_1, a_2, \dots, a_d$ се наоѓаат два кои даваат ист остаток по модул d , што не е можно. Според тоа, $|a_i - a_j| \leq n-1$, за секои $i, j \leq n$, т.е. множеството $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ се состои од n последователни цели броеви.

Ако целиот број k не се појавува во низата, тогаш сите членови на низата се поголеми од k или сите се помали од k , што противречи на условот дека низата содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Според тоа, низата ги содржи сите цели броеви и притоа секој број се содржи точно по еднаш.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz \geq 1$. Докажи дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0. \quad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $xyz \geq 1$ следува

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

т.е.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Ако го собереме ова неравенства со аналогните неравенства за $\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}$ и

$\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}$, го добиваме неравенството

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \leq 3$$

кое е еквивалентно со неравенство (1).

Втор начин. При вообичаената ознака

$$T_{a,b,c} = x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c + x^a z^b y^c + z^a y^b x^c + y^a x^b z^c,$$

после сведувањето на заеднички именител неравенството (1) се сведува на неравенството

$$T_{5,5,5} + 4T_{7,5,0} + T_{9,0,0} + T_{5,2,2} \geq T_{5,2,2} + 2T_{5,4,0} + T_{6,0,0} + 2T_{4,2,0} + T_{2,2,2}. \quad (2)$$

Од неравенствата на Шур и Мјурхед и условот $xyz \geq 1$ следуваат неравенствата

$$T_{9,0,0} + T_{5,2,2} \geq 2T_{7,2,0} \geq 2T_{7,1,1} \geq 2T_{6,0,0} \geq T_{6,0,0} + T_{4,2,0}, \quad T_{7,5,0} \geq T_{5,5,2}$$

$$2T_{7,5,0} \geq 2T_{6,5,1} \geq 2T_{5,4,0}, \quad T_{7,5,0} \geq T_{6,4,2} \geq T_{4,2,2}, \quad T_{5,5,5} \geq T_{2,2,2}.$$

Конечно, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (2).

4. Низата $a_1, a_2, \dots$ е определена со

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad (n=1, 2, \dots).$$

Опреди ги сите природни броеви кои се заемно прости со секој член на оваа низа.

Решение. Ќе докажеме дека за секој прост број p постои m таков што $p \mid a_m$. За $p \in \{2, 3\}$ имаме $p \mid a_2 = 48$. Од друга страна, ако $p > 3$, тогаш од малата теорема на Ферма следува дека

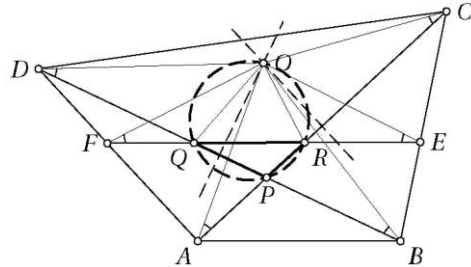
$$6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0 \pmod{p},$$

т.е. $p \mid a_{p-2}$, со што доказот е завршен.

Според тоа, единствен природен број со саканото својство е бројот 1.

5. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кај кој должините на страните BC и AD се еднакви и страните BC и AD не се паралелни. Нека E и F се внатрешни точки на страните BC и AD , соодветно при што важи $\overline{BE} = \overline{DF}$. Правите AC и BD се сечат во P , правите BD и EF се сечат во Q , а правите EF и AC се сечат во R . Ги разгледуваме триаголниците PQR кои се добиваат за сите вакви точки E и F . Докажи, дека опишаните кружници на сите овие триаголници имаат заедничка точка различна од P .

Решение. Со O да го означиме пресекот на симетралите на отсечките AC и BD . Точките D, F, A при ротација околу точката O за агол $\omega = \angle DOB$ се пресликуваат во точките B, E, C , соодветно. Според тоа, $\overline{OE} = \overline{OF}$ и $\angle OFE = \angle OAC = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$, па затоа



точките F, A, R, O се конциклични и $\angle ORP = 180^\circ - \angle OFA$. Слично, точките E, B, Q, O се конциклични и $\angle OQP = 180^\circ - \angle OEB = \angle OEC = \angle OFA$. Сега важи $\angle ORP = 180^\circ - \angle OQP$, т.е. точката O лежи на опишаната кружница околу $\triangle PQR$ и тоа е бараната точка.

6. На еден математички натпревар учениците решавале 6 задачи. Се покажало дека секој пар задачи бил решен од повеќе од $\frac{2}{5}$ од учениците и дека не постои ученик кој ги решил сите 6 задачи. Докажи, дека постојат најмалку два ученика такви што секој од нив решил точно 5 задачи.

Решение. Нека имало n ученици, од кои a_i решиле точно i задачи, што значи дека $a_0 + \dots + a_5 = n$. Ќе го определиме бројот N на парови (C, P) , каде C е ученик кој го решил парот задачи P . Секој од 15-те парови задачи го решиле барем $\frac{2n+1}{5}$ ученици, па затоа $N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3$. Од друга страна, a_i ученици решиле $\frac{i(i-1)}{2}$ парови, па затоа

$$\begin{aligned} 6n+3 &\leq N \leq a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 \\ &= 6n + 4a_5 - (3a_3 + 5a_2 + 6a_1 + 6a_0) \\ &\leq 6n+4. \end{aligned}$$

Според тоа, $a_5 \geq 1$.

Да претпоставиме дека $a_5 = 1$. Тогаш мора да важи $N = 6n+4$, што е можно

само ако је 14 парова задачи решиле точно $\frac{2n+1}{5}$ ученици, а преостанатиот пар (да го наречеме *посебен*) $\frac{2n+1}{5}+1$ ученици. Притоа $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, т.е. победникот решил 5 задачи (да кажеме дека не ја решил задачата t), а сите останати решиле по 4 задачи.

Сега да го определиме бројот M_p на парови (C, P) во кои P содржи дадена задача p . Нека b_p е бројот на учениците кои ја решиле p . Тогаш $M_t = 3b_t$ (секој од b_t ученици решил три пара задачи кои ја содржат t) и $M_p = 3b_p + 1$ за $p \neq t$ (победникот решил четири такви пара). Од друга страна, секој од петте парови кои ја вклучуваат p го решиле $\frac{2n+1}{5}$ или $\frac{2n+1}{5}+1$ ученици, па затоа $M_p = 2n+2$ ако посебниот пар ја содржи p , односно $M_p = 2n+1$ во спротивно. Значи $M_t = 3b_t = 2n+1$ или $2n+2$, па затоа $2n+1 \equiv 0$ или $2 \pmod{3}$. Но, ако $p \neq t$ е задача која не е во посебниот пар, имаме $M_p = 3b_p + 1 = 2n+1$, па е $2n+1 \equiv 1 \pmod{3}$, што е контрадикција.