МЕСЕЧЕВА МАТЕМАТИЧКА КОМБИНАТОРИКА

(*или колку сме способни да генерализираме*)

Има многу забавни задачи за чие решавање треба добро да се замислиме. Тие кај нас побудуваат љубопитност, нé провоцираат со едноставноста во барањето. Лесно се сфатливи, но нивното решавање не секогаш е едноставно. Тие ни заличуваат на прекрасен стих во поезијата, заносен пејзаж во сликарството, виртуозен акорд во музиката, духовит виц во секојдневието.

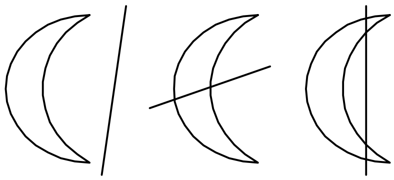
Се прашуваме: како некој дошол до таква прекрасна идеја? И, зошто нам не ни „паѓаат” на ум такви идеи? Можеме ли и ние да измислиме некоја слична задача? Дали нашата фантазија е толку „бујна” или пак ...? И, кога најмалку очекуваме, кога најмалку се надеваме - идејата блеснува како молња, го осветлува нашиот „математички простор” толку јасно, што ни се чини дека ако веднаш тој блесок не го „одразиме” на хартија ќе направиме неопростив пропуст. А тој блесок доаѓа ненадејно, неочекувано и не многу често. Затоа мораме да го искористиме мигот.

Додека се трудите да најдете одговор на овие и слични на нив прашања, ќе ви помогнеме со еден конкретен пример. Во СИГМА 45 од вас се бараше месечевиот срп, само со две прави, да го поделите на шест дела (стр. 47).

Дали се обидовте? Дали успеавте? Ако не успеавте, не е толку страшно, а ако успеавте - нашите честитки. Но?! Е, ова **но**! е многу важно. Се прашувате зошто? Па затоа што тие што успеале или имале повеќе среќа или биле малку поупорни од другите. Но, сé уште се далеку од оние што во оваа задача видоа прекрасен стих, заносен пејзаж, виртуозен акорд или духовит виц. А оваа задача е навистина духовита.

Да се обидеме да го „освоиме” овој „планински врв” од сите страни, чекор по чекор. Да ја „расчлениме” задачата! Да поставиме нови барања, нови услови! Да изведеме општи заклучоци! Тоа е математика!

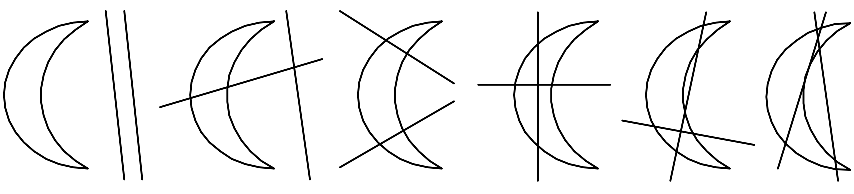
Да тргнеме од почеток. Наместо две, да земеме само една права. Да видиме кои сé можности постојат. На колку делови месечевиот срп може да се подели со една права? И - почнуваме со нашето мало истражување. Се редат разни цртежи, согледувања и на крајот заклучокот е овој: Со една права месечевиот срп можеме да го поделиме на 1 или на 2 или на 3 дела (црт. 1).



Црт. 1

Општ заклучок: со една права месечевиот срп можеме да го разделиме најмногу на три дела.

Продолжуваме понатаму: две прави и месечевиот срп. Пак цртежи, комбинации, можности, за конечниот заклучок да гласи: со две прави месечевиот



Црт. 2

срп може да биде поделен на 1 или 2 или 3 или 4 или 5 или 6 дела (црт. 2).

Општ заклучок: со две прави месечевиот срп можеме да го разделиме најмногу на 6 дела.

И сега до израз доаѓа вашата интуиција: со една права најмногу три дела, со две прави најмногу шест дела. Прашањето ви се наметнува само: Дали со три прави месечевиот срп може да се подели најмногу на девет дела?

Значи, користејќи индукција искажавме една хипотеза, едно тврдење, кое во општ случај гласи:

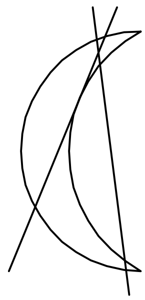
Со n прави месечевиот срп може да се подели најмногу на $3n$ дела.

Ако досега ни помагаше нашата интуиција, сега треба овие наши „предвидувања" да ги докажеме строго математички.

Значи, тргнавме од една едноставна забавна задача, а дојдовме до строг математички доказ. Иако најбитното, најважното го сторивме, сепак останува најтешкиот дел, доказот на нашето тврдење.

И пак цртежи, цртежи, комбинирања и ах! Еве го доказот! Па тој е многу едноставен иако од почеток ни задаваше грижи. Па да, ќе речете, кога го знаеме доказот, тој е многу лесен! И сосем сте во право.

Еве го сега и доказот. Или подобро тоа да го оставиме на вас. Ние само ќе ви посочиме една идеја - искажана со цртежот 3, а вие продолжете - онаму каде што ние застанавме!



Црт. 3

Илија Јанев

ЗАДАЧИ

551. Производот на еден број и неговиот обратен број е 78445. Кој е тој број?

552. Најди ги цифрите x, y, z, t, u, ако важи равенството

$$\overline{xy} + \overline{ztu} = \sqrt{\overline{xyztu}}\ .$$

553. Ако $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$, тогаш $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

554. Докажи дека за секој $a, b, c \geq 0$ важи

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geq 0\ .$$

555. Ако на четирицифрен број му се допише цифрата 2 од лево или цифрата 4 од десно, тогаш во двата случаја се добива полн квадрат. Најди го четирицифрениот број.

556. Во квадратот $ABCD$, со страна 1, точката M е средина на страната CD, а N е подножјето на нормалата повлечена од A на BM.

Докажи дека страните на триаголникот MNA се однесуваат како $3:4:5$.

557. Во правоаголен триаголник ABC правата што минува низ средината S на катетата BC и центарот O на впишаната кружница, ја сече катетата AC

во точка M, а правата што минува низ допирните точки на вписаната кружница и страните AB и AC, ја сече висината CH во точката N.

Докажи дека $\overline{CM} = \overline{CN}$.

558. Кружницата k ги допира краците на агол со теме O во точките A и B. Правата низ B што е паралелна со кракот OA, ја сече кружницата во точката C, а отсечката OC ја сече кружницата во точката D.

Докажи дека правата BD ја располовува отсечката OA.

559. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + xy + y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

560. Одреди го интервалот во кој припаѓа параметарот a, за вредноста на дропката $\frac{x^2+2x-1}{x^2+4x+a}$ да може да биде кој било реален број.

561. Ако z_1, z_2, z_3 се комплексни броеви такви што $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ и $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, тогаш изразот

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$$

има константна вредност.

Докажи!

562. За функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$ знаеме дека се исполнети условите

$$f(-1) < 1\ ,\quad f(1) > -1,\quad f(3) < -4.$$

Одреди го знакот на коефициентот a.

563. Низ произволна точка O во триаголникот ABC се повлечени три прави, паралелни со неговите страни. Секоја од нив го дели триаголникот ABC на еден трапез и еден триаголник. Три дијагонали на овие трапези, кои немаат заеднички краеви, го делат триаголникот ABC на седум делови, од кои четири се триаголници.

Докажи дека збирот на плоштините на три од нив е еднаков на плоштината на четвртиот триаголник.

564. Во квадрат со страна 1 се сместени 100 точки.

Докажи дека постои круг со радиус $\frac{1}{7}$, кој содржи барем три точки.

565. Одреди $\sin x$, ако $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{1}{5}$.

Забелешка. При решавањето на секоја задача, прво треба да ја препишете самата задача во дадената терминологија, а потоа да го напишете нејзиното решение. Секое решение пишувајте го на посебен лист и тоа само од едната страна. На крајот секое решение треба читко да го потпишете. На пликот покрај адресата на СИГМА ("Пиринска" б.б. 91000 Скопје) назначете ја и рубриката од која што ги решавате задачите. Решенијата на задачите ги очекуваме до 15.09.2000 година.