

МЕТОДИКА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Ристо Малчески

Ристо Малчески

**МЕТОДИКА НА НАСТАВАТА
ПО МАТЕМАТИКА**

Скопје, 2020

Рецензент:

Академик Иван Ганчев, ЈЗУ “Неофит Рилски”, Благоевград

Компјутерска обработка: Ристо Малчески

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

37.091.3:51(035)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Методика на наставата по математика / Ристо Малчески. - Скопје :
Армаганка, 2020. - 529 стр. ; 25 см

Регистар. - Библиографија: стр. 523-529

ISBN 978-608-4904-75-5

а) Наставни методи - Математика – Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 111972106

Дозволено е само слободно индивидуално користење на електронското издание. Ниту еден дел на оваа книга не смее да се умножува, фотокопира, ниту на било кој друг начин да се репродуцира без писмено одобрување на авторот.

*Во знак на сеќавање на
Проф. Јанев Илија*

СОДРЖИНА

Предговор

xiii

I ГЛАВА МАТЕМАТИКАТА КАКО НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

1.	Цели на наставата по математика	1
1.1.	Општи цели на наставата по математика	1
1.2.	Специфични цели на наставата по математика	2
2.	Математиката како наставен предмет	5
2.1.	Суштината на математиката како наставен предмет	5
2.2.	Историски белешки за математиката како наставен предмет	6
2.3.	Што понатаму?	9
3.	Содржина на наставата по математика	10
3.1.	Суштината на поимот содржина	10
3.2.	Барања од содржината на наставата по математика	12
3.3.	Основни линии во содржината на наставата по математика	13

II ГЛАВА ОБРАЗОВНО-СОЗНАЈНА ДЕЈНОСТ

1.	Мотиви и цели	15
2.	Карактеристика на образовно-сознајната дејност	18
2.1.	Управување на наставниот процес на ниво учител-ученик	18
2.2.	Работа со помош	19
3.	Сознајни интереси, способности и склоности	21
3.1.	Суштина на сознајните интереси, склоности и способности	21
3.2.	Развивање на интересите и способностите на учениците	21
3.3.	Наставна содржина, систем на нејзино усвојување и можности за поттикнување и развивање на интересите и на способностите на учениците	22
4.	Евристичка дејност во наставата по математика	24

III ГЛАВА МАТЕМАТИЧКО МИСЛЕЊЕ

1.	Поим за математичко мислење	29
2.	Својства на математичкото мислење	30
2.1.	Еластичност на мислењето	30
2.2.	Шаблонизација на мислењето	31
2.3.	Длабочина на мислењето	33

2.4. Целесообразност на мислењето	33
2.5. Рационалност на мислењето	34
2.6. Широчина мислењето	35
2.7. Критичност на мислењето	35

IV ГЛАВА

НАУЧНИ МЕТОДИ

1. Научни методи во наставата по математика	37
1.1. Набљудување и експеримент	37
1.2. Споредување	40
1.3. Анализа и синтеза	41
1.4. Воопштување, систематизација и апстракција	42
2. Усвојување на научните методи од страна на учениците	51

V ГЛАВА

ВИДОВИ ЗАКЛУЧУВАЊЕ

1. Видови заклучување и нивното место во наставата	53
2. Заклучување по индукција	54
3. Дедуктивно заклучување	57
3.1. Еквиваленција и некои логички закони	57
3.2. Правила за извод поврзани со квантификаторите за општото и егзистенцијата	61
4. Заклучување по аналогија	61
5. Методи и постапки за развивање на умеењата за правилно заклучување	65

VI ГЛАВА

ДИДАКТИЧКИ ПРИНЦИПИ И СРЕДСТВА

ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

1. Дидактички средства	69
2. Текстуални дидактички средства	70
3. Демонстрациони дидактички средства	72
4. Кабинет по математика	74
5. Дидактички принципи во наставата по математика	75
5.1. Принцип на сознајност	76
5.2. Принцип на активност	77
5.3. Принцип на нагледност	79
5.4. Принцип на достапност	82
5.5. Принцип на систематичност и последователност	84
5.6. Принцип на индивидуален пристап и диференцираност во наставата	85

5.7. Принцип на трајност на знаењата и умењата	86
5.8. Принцип на соодветство на организирањето и реализирањето на наставата со работната средина	87
5.9. Принцип на успешност	87
6. Диференцијација и интеграција во наставата	88

VII ГЛАВА

УЧЕЊЕ, ПОМНЕЊЕ И ЗАБОРАВАЊЕ

1. Психолошко-педагошки карактеристики на личноста на ученикот од 10 до 15 годишна возраст	99
2. Учење, помнење и трансфер на учењето	101
2.1. Учење	102
2.1.1. Напредување во текот на учењето	103
2.1.2. Методи на учење	106
2.1.2.1. Распределено и нераспределено учење	106
2.1.2.2. Глобално и партитивно учење	109
2.1.2.3. Активно учење	111
2.2. Помнење и забораване	114
2.2.1. Помнење и забораване на различен материјал	115
2.2.2. Методи на учење и помнење	117
2.2.3. Причини за забораване	117
2.3. Психолошки услови за успешно учење	119
2.4. Трансфер на учењето	126
2.5. Принципи за успешно учење	129
2.6. Учење преку решавање проблеми. Барманов циклус на учење	130
2.7. Мислењето, методите на заклучување, научните методи и циклусот на учење	131

VIII ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ

1. Содржина и обем на поим	135
2. Дефинирање на поими и видови поими	137
3. Методика на воведување на математички поими	142

IX ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

1. Поим за математичко тврдење	149
2. Видови математички тврдења	150
2.1. Теореме	152
2.2. Аксиоми	158
3. Методика на усвојување на математички тврдења	159

3.1. Аксиоматски метод во наставата по математика	159
3.2. Методика на воведување на теореми	160
3.3. Методика на усвојување теореме	163
4. Методи на докажување на математички тврдења	165
4.1. Математичка индукција	167
4.2. Директни методи за докажување	175
4.2.1. Метод со напредување (синтетички метод)	175
4.2.2. Метод со враќање (аналитички метод)	178
4.3. Идиректни методи за докажување	180
5. Методика за докажување на теореми	182

X ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Поим за математичка задача	185
2. Видови математички задачи	188
3. Функции на задачите	192
4. Методика на решавање задачи	195
5. Методи на решавање задачи	200
5.1. Синтетички метод	201
5.2. Аналитички метод	204
5.2.1. Метод на алгебарска анализа	207
5.2.2. Метод на анализа при решавање конструктивни задачи	209
6. Контрапримерите во наставата по математика	211
6.1. Формирање умееша кај учениците за користење контрапримери	212

XI ГЛАВА

СТАТЕГИИ, МЕТОДИ И ФОРМИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

1. Наставни стратегии	217
1.1. Егземпларна стратегија	217
1.1. Евристичка стратегија	218
1.2. Истражувачка стратегија	219
1.3. Пример на индивидуален и групен пристап за изработка на ученички проекти	220
2. Наставни методи	222
2.1. Метод на беседа	223
2.2. Метод на усно изложување	225
2.3. Метод на програмирана настава	226
2.4. Метод на самостојна работа со учебник	227
2.5. Метод на проблемска настава	228
2.5.1. Проблемска ситуација, проблем, проблемска задача и проблемско прашање	229
2.5.2. Услови за реализирање на проблемска настава и нивоа	

на примена на методот на проблемска настава	231
2.6. Метод на користење технички помагала	232
2.6.1. Потреба и можности за користење компјутери во наставата	233
2.6.2. Дијалогски образовни програми	236
2.7. Избор и комбинирање на наставните методи	238
2.8. Домашната работа во наставата по математика	240
3. Основни форми на организацијата на наставата по математика	245
3.1. Структура на типовите часови по математика	246
3.1.1. Структура на часовите за усвојување нови знаења и умеења	246
3.1.2. Структура на часовите за часовите за утврдување на знаењата и умеењата и здобивање навика	247
3.1.3. Структура на часовите за повторување и систематизирање на знаењата	248
3.1.4. Структура на часовите за проверување и оценување на знаењата и умеењата на учениците	248
3.1.5. Структура на комбинираниот час	248

XII ГЛАВА

СЛЕДЕЊЕ, ПРОВЕРУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

1. Знаењето. Видови знаење	251
1.1. Декларативно и процедурално знаење	251
1.2. Умеења и вештини, способности, интереси и наклоности	254
1.3. Постигања и успех – знаење во поширока смисла	256
1.4. Карактеристики на знаењето	258
2. Проверување на знаењата и следење на постигањата на учениците	259
2.1. Потреба од проверување на знаењата и следење на постигањата на учениците	261
2.2. Принципи, функции и цели на проверувањето	263
2.3. Видови проверување според времето кога се реализира и потребата од проверување	265
2.3.1. Дијагностичко проверување	266
2.3.2. Формативно проверување	267
2.3.3. Сумативно оценување	275
2.3.4. Ипсативно проверување	276
2.4. Повратна информација	277
2.5. Начини и форми на проверување на знаењата	283
2.5.1. Усно проверување	283
2.5.2. Писмено проверување	289
2.5.3. Практично проверување	295
2.6. Фактори што влијаат на постигањата	296
2.7. Следење на постигањата	296
2.8. Прашањата и нивната улога во проверувањето на	

	постигањата на учениците	299
3.	Вреднување и оценување на постигањата на учениците	305
	3.1. За поимите вреднување и оценување	305
	3.2. Врска меѓу следењето и вреднувањето на постигањата на учениците	306
	3.3. Цели, функции и принципи на вреднување на постигањата на учениците	307
	3.4. Мерење на знаењата на учениците	309
	3.5. Мерни карактеристики на инструментите	310
	3.5.1. Валидност	310
	3.5.2. Објективност	312
	3.5.3. Релијабилност	314
	3.5.4. Осетливост	315
	3.6. Предмет на оценувањето	315
	3.7. Фактори што влијаат врз вреднувањето на знаењата на учениците	316
	3.7.1. Фактори што влијаат врз манифестирањето на знаењата	316
	3.7.2. Фактори што влијаат врз учителот при оценувањето на постигањата	318
	3.8. Нормативно и критериумско вреднување и оценување	320
	3.8.1. Образовни стандарди	323
	3.8.2. Критериуми	327
	3.8.3. Индикатори	327
	3.9. Интерно и екстерно оценување	329
	3.10. Описно оценување	331
	3.11. Скали за оценување	333
	3.12. Критериуми за оценките од 1 до 5	334
4.	Инструменти за оценување на постигањата на учениците	338
	4.1. Поим за тест. Видови тестови	338
	4.2. Наставен тест на знаење	342
	4.3. Видови задачи (прашања) за наставен тест	344
	4.3.1. Задачи (прашања) со избор	345
	4.3.2. Задачи (прашања) со дополнување	346
	4.3.3. Задачи (прашања) од отворен тип	348
	4.4. Етапи во изработката на наставен тест на знаење	350
	4.5. Примери на наставни тестови	358
	4.6. Есејски прашања	365
	4.6.1. Формулирање на прашањата кај проширените есеи	367
	4.6.2. Оценување на есејско прашање по определен наставен предмет	368
	4.7. Проекти	370
	4.8. Портфолио	373
5.	Анализа на резултатите добиени од следењето и вреднувањето на постигањата на учениците	375
	5.1. Анализа на индивидуалните резултати на еден ученик	376
	5.2. Анализа на резултатите на образовна група од ученици	377

XIII ГЛАВА

ПЛАНИРАЊЕ НА НАСТАВАТА

1.	Наставен план и наставна програма	381
2.	Програмирање на наставата	384
2.1.	Стратегии за програмирање на наставата	386
3.	Планирање на наставата	392
3.1.	Видови планирање на наставата	393
3.1.1.	Годишен глобален план	394
3.1.2.	Тематско планирање	396
3.1.3.	Планирање на наставниот час	398

XIV ГЛАВА

РАБОТА СО НАДАРЕНИ УЧЕНИЦИ

1.	Надареност, креативност, талент	403
1.1.	Поим за креативност, надареност и талент	403
1.2.	Видови надареност	405
1.2.1.	Повеќекратна надареност	405
1.2.2.	Надареност за математика	406
1.2.3.	Надареност за уметности	408
1.2.3.1.	Ликовсна надареност	408
1.2.3.2.	Музичка надареност	409
1.2.3.3.	Надареност за сценска уметност	410
1.2.4.	Вербална надареност	410
1.2.5.	Надареност за лидерство	411
1.3.	Карактеристики на надарените деца	411
2.	Препознавање и идентификување на надарените ученици	422
2.1.	Препознавање на надарените ученици	422
2.2.	Идентификување на надарените ученици	425
2.3.	Принципи и методи за препознавање и идентификување на надарените	429
2.4.	Прашалникот како инструмент за препознавање и идентификување на надарените деца	433
2.5.	Проблеми поврзани со препознавање и идентификување на надарените	450
3.	Развој на надарените ученици	452
3.1.	Мотивација на надарените ученици	452
3.2.	Развој на надареноста	454
3.2.1.	Фази во развој на надареноста	455
3.2.2.	Фактори што влијаат на развојот на надареноста	457
3.2.3.	Влијанието на семејството во развојот на надареноста	458
3.2.4.	Влијанието на учителот врз развојот на надареноста	460
3.3.	Причини за неуспех на надарените ученици	464
4.	Едукација на надарените ученици	467
4.1.	Модел на автономен ученик	467

4.2. Форми за работа со надарените ученици	469
4.3. Форми за работа со надарените ученици во традиционалното училиште	473
4.3.1. Математички кружок – форма за работа со надарените ученици	474
4.3.1.1. Научно – популарна секција	475
4.3.1.2. Секција за подготовка на нагледни средства	476
4.3.1.3. Училишен математички весник	477
4.3.1.4. Секција за решавање проблемски задачи и подготовка за натпревари	478
4.3.2. Математички школи – форма за работа со надарените ученици	491
4.3.3. Заедничка самостојна творечка работа на учителот-ментор и на надарениот ученик	501
4.3.3.1. Барања за успешна ЗСТРУМНУ	502
4.3.3.2. Заедничка самостојна творечка работа на надарениот ученик , учителот-ментор и консултантот научен работник	505
4.3.3.3. Изготвување на реферат	506
4.3.3.4. Примери на теми за ЗСТРУМНУ	506
4.3.3.5. Усвојување на научните методи при ЗСТРУМНУ	509

ДОДАТОК А

Когнитивно подрачје на Блумовата таксономија	514
Индекс на поими	517
Литература	523

ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Подготвувањето на наставниот кадар за основното и за средното образование не може да се замисли без изучување на методиката на наставата по математика (општ и посебен дел). На Институтот за математика при Природно – математичкиот факултет во Скопје во предметот Методика на наставата по математика се изучува општата методика. Книгата **МЕТОДИКА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА** е резултат на долгогодишната наставна практика на авторот во средното и во високото образование, неговата работа со надарените ученици за математика од основното и од средното образование, предавањата по овој предмет кои ги држеше на Институтот за математика и реализираните проекти на теми: работа со надарени ученици, стратегии и техники на учење и подучување и следење, проверување и оценување на постигањата на учениците. Материјалот, кој е предмет на разработка во оваа книга е поделен на четиринаесет глави и тоа:

1. Математиката како наставен предмет,
2. Образовно сознајна дејност,
3. Математичко мислење,
4. Научни методи,
5. Видови заклучувања,
6. Дидактички принципи и средства во наставата по математика,
7. Учење, помнење и заборавање,
8. Математички поими,
9. Математички тврдења,
10. Математички задачи,
11. Стратегии, методи и форми во наставата по математика,
12. Следење, проверување и оценување во наставата по математика,
13. Планирање на наставата и
14. Работа со надарени ученици.

Во *првата* глава, која содржи три параграфи се разработени целите и содржината на наставата по математика. Исто така, даден е краток осврт на историскиот развој на математиката како наставен предмет, со нагласок на актуелните состојби во нашата држава. *Втората* глава е поделена на четири параграфи, во кои одделно се разработени мотивите, целите, образовно – сознајната дејност, сознајните интереси, способности и склоности, за на крајот посебно внимание да се посвети на евристичката дејност во наставата по математика. Третата глава е посветена на математичкото мислење и неговите својства. Во *четвртата* глава се разработени научните методи во наставата по математика, при што посебно внимание е посветено на методиката за нивно усвојување. *Петтата* глава е посветена на методите за заклучување, со посебен осврт на значењето на заклучувањето по аналогија во наставата по математика. Притоа, одделно се разгледани методите и постапките за развивање на умењата за правилно заклучување, како и потребата од строг математички доказ кога заклучокот е добиен по пат на аналогија. Во *шестата* глава се разработени дидактичките средства во наставата по математика, дидактичките принципи и нивната реализација во наставата по математика, ако диференцијацијата и интеграцијата во наставата. Во првите шест глави разработуваниот материјал во целост се совпаѓа со првото издание, освен кај дидактичките принципи каде е разработен *принципот на успешност*, кој се диференцира како посебен принцип во изминатите десетина години. Исто така, се додадени неколку примери, сè со цел читателот подобро да се запознае со значењето на диференцијацијата и интеграцијата на наставата по математика.

Имајќи го предвид значењето на поимите учење, помнење и заборавање во ова издание истите подетално се разработени во *седмата* глава. Покрај класичната разработка на овие поими, на крајот од оваа глава е направен обид читателот подетално да се запознае со трансферот на учењето, принципите за успешно учење, учењето преку решавање на проблеми и Бармановиот циклус на учење, кој е доведен во тесна врска со мислењето, методите на заклучување и научните методи. *Осмата*, *деветтата* и *десеттата* глава се посветени на математичките поими, тврдења и задачи. Главно содржините на секоја од овие глави се совпаѓаат со првото издание на книгата, при што во повеќе делови се додадени примери кои ги дообјаснуваат теориските разгледувања. Покрај тоа, при разработката на математичките задачи е додаден нов параграф во кој се разработени местото и улогата на контрапримерите во наставата по математика, како и начините за формирање на умења кај учениците за користење контрапримери.

Единаесеттата глава е поделена на три параграфи во кои се разработени наставните стратегии, наставните методи и формите за организа-

ција на наставата по математика. Притоа во делот на наставните методи посебно внимание е посветено на методот на проблемска настава и методот на технички помагала, со нагласок на користењето на компјутерот во наставата и дијалогските образовни програми. Во овој дел е разгледана домашната работа како една од формите за усвојување на математичките знаења. Понатаму, за разлика од првото издание разгледувањето на истражувачката стратегија е надолнето со примери на индивидуален и групен пристап при изработка на ученички проекти.

Дванаесеттата глава е посветена на следењето, проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците. Притоа, имајќи предвид дека во крајна линија предмет на оценување се знаењата на учениците во првиот параграф се разгледувани знаењето и видовите знаења, за да во останатите три параграфи детално се разгледуваат проверувањето на знаењата, вреднувањето и оценувањето на постигањата и инструментите за оценување на постигањата на учениците. На крајот од оваа глава даден е краток осврт на потребата од анализа резултатите добиени од следењето и вреднувањето на постигањата на учениците. Може да се каже дека за разлика од првото издание, во второто издание следењето, проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците е целосно преработено и дека претставува заокружена целина, која во целост соодветствува на потребите на идните учители.

Во *тринаесеттата* глава е разработено планирањето на наставата. Притоа, истото е доведено во корелација со стратегиите за програмирање на наставата, бидејќи на мислење сум дека самото планирање на наставата треба да се реализира согласно стратегијата според која истата е програмирана. Последната, *четринаесетта* глава, е посветена на работата со надарените ученици. За разлика од првото издание оваа содржина е во целост преработена, при што посебно внимание е посветено на поимите: надареност, креативност и талент, како и на методите и постапките за препознавање и идентификување на надарените ученици. Исто така, во рамките на третиот четвртиот параграф од оваа глава разгледан е развојот на надарените ученици, како и причините за нивниот неуспех. Конечно, последниот параграф е посветен на едукацијата на надарените ученици за математика, при што покрај моделот на автономен ученик, значително внимание е посветено на формите за работа со надарените ученици во традиционалното училиште.

На крајот од книгата поместен е додаток во кој е разгледано когнитивното подрачје на Блумовата таксономија, после што е даден список на користена литература, детален индекс на користените поими и фрагмент од рецензијата на првото издание.

Теориските разгледувања во книгата се илустрирани со бројни примери, за кои се надевам дека ќе им бидат од корист на студентите, како при совладувањето на наставните содржини по предметот, така и на почетокот на нивниот професионален ангажман како учители по математика. Овде да забележиме дека наместо шаренилото на термини: учител, наставник и професор, во книгата е усвоен терминот учител, кој барем според мислењето на авторот е најсоодветен назив за оној кој некогаш подучува, без оглед на тоа за кој степен на образованието се работи.

Сакам да напомам дека насловите [11], [18], [34], [35], [83], [146] и [164] имаа особено влијание во оформувањето на новите содржини кои ги содржи ова издание.

На крајот, пријатна должност и особено задоволство ми е да им искажам благодарност на академик Иван Ганчев, кој со своите забелешки и сугестии придонесе за појавувањето на ова издание, како и за подобрување на содржините кои тоа ги содржи во однос на претходното издание. Овде особено сакам да и се заблагодарам на мојата сопруга Цветанка Малческа, и тоа не само заради нејзиното трпение, туку и низата идеи и практични совети кои несомнено влијае на конечното оформување на ракописот. Секако, голема благодарност на колешката м-р Валентина Гоговска, која детално го прочита ракописот со што придонесе значително да се намалат техничките и не само тие грешки, кои неминовно го следат издавањето на секоја книга.

Сепак, и покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа книга, затоа и однапред сум благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија.

Јануари, 2016
Скопје

Авторот

I ГЛАВА

МАТЕМАТИКАТА КАКО НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

1. ЦЕЛИ НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

1.1. ОПШТИ ЦЕЛИ НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

При определувањето на целите на наставата по математика се поаѓа од општите цели на воспитно-образовниот процес за формирање на личност која ќе ги познава законите за развој на природата и општеството, а која свесно и сознајно ќе учествува во менувањето на средината во која што живее.

При реализирањето на наставата по математика треба да се постигнат три општи цели, и тоа:

- a) општообразовна цел на наставата по математика,
- b) воспитна цел на наставата по математика, и
- c) практична цел на наставата по математика.

Општообразовната цел на наставата по математика е учениците да усвојат определен систем на математички знаења и неопходни навики и умеања за нивно користење.

Овие знаења, умеања и навики вклучуваат: усно и писмено математичко изразување кое мора да биде едноставно, јасно и сеопфатно; математички методи за осознавање на реалната стварност; минимум умеања за усвоените знаења да станат применливи и навики за активна спознајна работа при учењето и самоучењето.

Воспитната цел на наставата по математика, при нејзиното реализирање, бара да се искористи секоја можност за изградување на ученикот во почитуван граѓанин во средината каде што живее. Во наставата по математика треба да се реализира систематска и непрекината дејност, со која кај учениците ќе се поттикнуваат и градат сознајната дисциплина и од-

говорноста за нивната работа (учењето), работните навики, чувството за убаво и слично.

Практичната цел на наставата по математика е учениците да усвојат знаења, умеења и навики за применување на математичките знаења и методи во секојдневниот живот. За постигнување на оваа цел е потребно на учениците да им се посочат широките можности за примена на математичките знаења во физиката, техниката, решавањето на задачи од секојдневниот живот и слично.

1.2. СПЕЦИФИЧНИ ЦЕЛИ НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Покрај општите цели на наставата по математика, постојат и нејзини специфични цели кои, пред сè, се должат на специфичноста на математиката како наука, на нејзиното место и улога во современиот систем на науките, техниката, производството и на значењето на математиката за сестраниот развој на современиот свет.

i) Една од најважните црти на математиката како наука е *нејзината строгост и точност*, така што користењето на нејзините методи во другите науки придонесува за зголемување на строгоста и точноста во овие науки. Поради претходно изнесеното оправдано е совладувањето некои методи на научното сознавање да го определеме како специфична цел на наставата по математика.

ii) Друга специфична цел на наставата по математика е *формирањето и развојот на математичкото мислење*, т.е. на оперирањето со математичките категории: поим, теорема и аксиома; совладувањето на математичките методи; развојот на математичката интуиција и осознавањето на внатрешната логика на градбата на математиката.

Математиката располага со такви можности за развој на мисловниот процес на ученикот со какви што не располага ниту еден друг наставен предмет. Во процесот на наставата по математика се решаваат задачи, со што се стекнуваат умеења за логичко расудување карактеристични за дедуктивното мислење. Се создаваат умеења за извлекување заклучоци при дадени претпоставки, се поттикнуваат апстрактното мислење, способноста за анализирање и синтетизирање, за издвојување на потребните и доволните услови дадено тврдење да е точно итн. Последица на сето ова е развој на изразувањето, особено на писменото, кое во крајна линија мора да се одликува со точност, леснотија во изразувањето, критичност, основаност, причинско-последична поврзаност итн.

Дедуктивната структура на математиката дозволува да се развиваат умеења да се докажуваат нештата, да се развива критичкото мислење, но за тоа учителот треба да создава благопријатни услови при реализирањето на наставата. За таа цел е потребно што поголем број ученици да учествуваат во докажувањето на теоремите и во “колективното” решавање на задачите, активности кои треба умешно да бидат водени и насочувани од страна на учителот.

Набљудувањата покажуваат дека учителите, кои не обезбедуваат услови сите ученици, според нивните можности, активно да учествуваат во наставниот процес, не придонесуваат за развојот на толку посакуваните особини кај учениците како што се: трудољубивоста и упорноста во работата. Спротивно пак, оние учители кои успеваат повеќе ученици, според нивните способности, активно да учествуваат во наставниот процес придонесуваат за развој на овие особини кај учениците.

iii) Трета специфична цел на наставата по математика е формирањето на знаења и умеења за креирање и користење на математичките модели, за подобро проучување на објектите и процесите во природата.

Секое истражување почнува со опишување и систематизирање на природните закономерности. Во оваа етапа резултатите најчесто се обработуваат статистички. Следната етапа е математичка етапа или етапа на моделирање. При сложените математички модели се користи и нумеричката математика, а во голем број случаи е неопходна и примената на компјутерот.

Математиката како целина, а и секој нејзин дел, се создадени како апстрактен модел на соодветен објект или процес на проучување. Јасно, апстрактниот модел е одраз на основните својства на објектот или процесот. Сè ова придонесува со помош на апстрактниот модел да се откријат нови својства на објектите или на процесите. Затоа, особено е важно од почетниот степен на обучување да му се посвети соодветно внимание на формирањето на математичките модели.

iv) Четвртата специфична цел на наставата по математика е во делот од геометријата да ги развива просторните претстави и геометриската интуиција на учениците. Просторните претстави се неопходни при изучувањето на стереометријата, каде објектите се посложени и учениците тешко се ориентираат при решавањето на овие проблеми. Меѓутоа, со систематска и целисходно насочена работа учениците можат да се оспособат до тој степен така што просторните геометриски проблеми ќе ги согледуваат исто толку јасно, како што ги согледуваат и рамнинските. Ова може

да се постигне со умесно користење на наставните средства како, на пример, моделите, слајдовите, фолиите и слично.

v) Математичките знаења и умења се количествени и слични на нив соодноси, просторни и слични на нив форми од реалната стварност. Затоа ваквите знаења се применливи насекаде каде што овие форми и соодноси се важни за изучување на даден објект или процес.

Секоја примена на математичките знаења опфаќа три етапи:

- 1) избор на извесен број факти од дадена област и нивно преведување на јазикот на математиката,
- 2) математичка обработка на овие факти, која може да биде чисто формална, а може да вклучува и знаења од разгледуваната област, и
- 3) преведување на добиените резултати во тврдења, со кои се добиваат нови знаења од разгледуваната област.

Поради тоа учениците треба да научат да го согледуваат математичкиот дел на разгледуваниот проблем и него да го запишат со јазикот на математиката. Потоа треба математички да ја обработат добиената информација, за на крај да ги протолкуваат добиените резултати во врска со разгледуваниот проблем.

vi) Во процесот на обучување учениците освен тоа што се здобиваат со знаења за определени факти и закономерности, туку и ги осмислуваат тие факти и закономерности во развојот на природата и на општеството. Поврзувањето на научните знаења со реалната стварност ги развива творечките способности на учениците и придонесува да формираат вистинска слика за своето опкружување. Според, тоа наставата по математика има покрај образовен и воспитен карактер.

Воспитната улога на знаењата произлегува од нивната суштина. Имено, секоја наука проучува закономерности на процеси и на појави во определен дел од реалната стварност. Затоа не треба да се заборави дека може да воспитува само оној кој чувствува одговорност за својата работа, кој се интересира за неа и е убеден во точноста на принципите од кои се раководи. Притоа, исто така е важно учителот да биде задоволен од својата работа, да умее внимателно да ги сослуша мислењата на другите и да не им ги наложува своите разбирања и согледувања. Имено, учителот треба да ги сослуша мислењата на учениците, да го земе предвид точното во нивните одговори и внимателно да ги коригира направените грешки, без да се подбива или да иронизира.

При изучувањето на математиката учениците се среќаваат со сериозни тешкотии, особено при решавањето на некои нестандартни задачи,

кои во себе содржат и творечки, а не само репродуктивни елементи. Без постојано и систематско совладување на овие потешкотии не е можно да се изучуваат и совладуваат математичките знаења. Само така кај учениците можат да се формираат умења и навика за совладување на тешкотиите и постигнување на саканата цел. Имено, самостојното решавање на некоја потешка задача кај ученикот предизвикува задоволство од постигнувањата, а истовремено е и поттик за решавање на други такви задачи.

vii) Како последна специфична цел ќе го наведеме *поттикнувањето и одржувањето на интересот за математика кај ученикот*. Без успешното спроведување на оваа цел, тешко може да се замисли реализацијата на општите и на специфичните цели на наставата по математика. По правило, ученикот може да се заинтересира за работи што се нови, за кои може да ја сфати практичната вредност при примената во ситуации и области за кои се интересира, како и за работи кои ја поттикнуваат неговата имагинација. Во таа смисла, мотивираноста на ученикот за изучување на математика може да се постигне со:

- примената на математиката во другите предмети што ги изучува ученикот,
- укажување на примената на математиката во практиката,
- истакнување на културните и на образовните вредности на математиката,
- користење на интелектуалната љубопитност на учениците, и
- организирање на математички секции, натпревари и сл.

Наброените цели се заемно поврзани. Имено, не може да се постигнат останатите цели без да се усвојат низа знаења, но сигурно дека усвојувањето на знаењата само по себе не значи постигнување на другите цели. Во нашите разгледувања целите ги одделуваме и ги систематизираме со цел идните учители, во својата натамошна работа, целосно да и посветат внимание на секоја од нив.

2. МАТЕМАТИКАТА КАКО НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

2.1. СУШТИНА НА МАТЕМАТИКАТА КАКО НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

Секој наставен предмет е синтеза на научните знаења од некоја област, методите и формите на структурирање на тие знаења и сознаниите методи, а исто така, е синтеза и на организацијата на наставата, наставните средства и наставните методи. Диференцирањето на наставните предмети

во најголема мера е последица од знаењата кои се усвојуваат и од нивното структурирање. Овие два фактора влијаат како на користените сознājни методи, така и на организацијата на наставата, наставните средства и наставните методи.

Проучувањето на историјата на наставата покажува дека, во крајна мера, елементите на наставните предмети се определуваат од општествените и од економските потреби на заедницата и од степенот на развој на различните научни области од кои се преземаат соодветните знаења, а исто така, и од степенот на развој на областите кои се занимаваат со сознājната дејност, организацијата на наставата и наставните средства. Јасно, во овој поглед не е исклучок и математиката. Овој наставен предмет се оформувал во период подолг од 3000 години. Како резултат на тоа денес наставниот предмет математика во основното и во средното образование е синтеза на знаења од аритметика, алгебра, анализа, Евклидова геометрија, аналитичка геометрија и тригонометрија, со структура која до одреден степен соодветствува на структурата на соодветните научни области од кои се преземени тие знаења. Тоа се знаења кои се неопходни за натамошното усвојување на математичките знаења и умеења и на другите наставни предмети, а исто така, и за решавањето на различни практични проблеми. Освен тоа, во математиката како наставен предмет свое место нашле и соодветните форми на организација, наставните средства и наставните методи за усвојување на математичките знаења.

2.2. ИСТОРИСКИ БЕЛЕШКИ ЗА МАТЕМАТИКАТА КАКО НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

Со појавата на првите математички знаења се јавува и потребата за нивно пренесување на следните генерации. Поради тоа и проблемот на математиката како наставен предмет е толку стар, колку што е и проблемот на математиката како наука.

Првите сведоштва за обучувањето на децата за едноставни пресметувања се среќаваат во историските записи на стариот Египет. Пред тоа на “учениците” им се пренесувале готови знаења за броевите, за мерењето на конкретни рамнински фигури и тела и слично. Големо влијание за развитокот на наставата по математика, особено во Европа, имала културата на античките балкански народи и периодот на хеленизмот, кога уште од VII до V век пне. во школите на Талес (624-548 год. пне.) и на Питагора (580-500 год. пне.) се изучувале аритметиката и геометријата. Тука веќе се користеле докази на тврдења врз основа на очигледни, експериментално усвоени тврдења, или на претходно докажани тврдења. Веќе во IV век пр.н.е. античкиот мислител Аристотел (384-322 год. пр.н.е.) ги поставува основи-

те на дедуктивната структура на знаењата, чиј прв реализатор е Евклид (околу 300 год. пр.н.е.). Тој ги систематизирал основните математички знаења, достигнати до III век пр.н.е, во согласност со барањата поставени од Аристотел, а кои се:

- а) Секој поим да се дефинира со претходно дефинирани поими или да се земе за основен (познат од експеримент).
- б) Секое тврдење да се докажува со претходно докажани тврдења или да се земе како почетно (познато од експеримент).

Реализираниот начин на изложување на математичките знаења во Евклидовото дело “*Елементи*” постепено станува правило во градбата на математиката како наука, а оттука се пренесува и во наставниот предмет математика. Многу векови делото на Евклид е основа за совладување на математиката, особено на геометријата. Меѓутоа, за да стане поразбирливо и подостапно за усвојување, математичарите кои го препишувале го дополнувале со свои коментари. Како последица на ова, основните текстови на Евклидовите “Елементи” биле прередактирани, а коментарите станале сè побројни. На таков начин, во средниот век, биле создадени првите учебници по геометрија. Според структурата и стилот тие целосно соодветствувале на Евклидовите “Елементи”. Овој стил на реализирање на геометријата како наставен предмет, бил запазен во некои земји, како Англија, Италија, Русија итн., до почетокот на XX век. Паралелно со тоа, на почетокот на XIX век Ј.Х. Песталоци во почетните одделенија го поставил усвојувањето на геометриските знаења врз основа на експеримент и нагледност, при што барал повеќе да се користи интуицијата. Подоцна, особено во Франција и во Германија, се настојувало дури и во погорните одделенија Евклидовата логика на изложување на геометријата да се замени со интуиција и експеримент.

По сосема друг пат се развивале и оформувале наставните предмети аритметика, алгебра и тригонометрија. Тука се создавала различна традиција, пред се раководена од почетокот со “техничките процедури” на сметањето, кои потоа биле пренесени во алгебрата со создавање на буквената симболика во средниот век. Така, дедуктивниот метод долго време отсутствувал од наставата по овие дисциплини. Меѓутоа, веќе во XIX век, во повисоките одделенија сè повеќе се појавувале доказите во веќе формираните училишни курсеви по аритметика, алгебра и тригонометрија.

Од крајот на XIX век, како во училишниот курс по геометрија, така и во училишните курсеви по аритметика, алгебра и тригонометрија сè поголем простор зафакала примената на математичките знаења во нематематички ситуации. До крајот на XIX век за математиката како наставен предмет било карактеристично давањето на готови знаења, кои ученикот тре-

бал да ги усвои и да ги примени при решавањето на избрани задачи од секојдневниот живот. За отстранување на овој недостаток, од почетокот на XX век, во наставата по математика сè поголема улога имале таканаречените евристички методи, за кои ќе зборуваме понатаму.

За содржините на математиката како наставен предмет во училиштата до крајот на XIX век е карактеристично тоа што тие биле одраз на математиката како наука до XVI век. Затоа од почетокот на XX век се поставила цел овие содржини да се осовременат со достигнувањата на математиката од XVII век. До средината на XX век оваа идеја постепено се реализирала во развиените земји со воведувањето на поимите функција, извод на функција и на елементи од аналитичката геометрија. Во следниот период имало обид за подобрување на поврзаноста меѓу оформените училишни математички предмети по аритметика, алгебра, геометрија и тригонометрија до крајот на XVIII век. Меѓутоа, на овој план се уште не се постигнати задоволителни резултати, независно од тоа што векторите и координатниот метод го наоѓаат своето место во наставата.

Од почетокот на 50-тите години на XX век се јавила уште посмела идеја, доближување на училишниот курс по математика со математиката од XX век, за на таа основа да се подобрат врските меѓу различните училишни курсеви по математика и тие да се обединат во еден наставен предмет. Експерименти за реализирање на оваа идеја биле направени во многу земји, така што во Франција, Англија, Белгија, СРГ и други биле создадени единствени училишни курсеви по математика за сите одделенија, а во поранешниот СССР, Полска, Бугарија, Романија и други биле создадени единствени курсеви по математика само за првите 5, 6 или 7 години. Како основа за единствените курсеви по математика, во 50-тите и 60-тите години од XX век, се предлагало користењето на теориско-множествениот јазик, логичкиот јазик и симболиката. Во некои земји, како Франција, Белгија и Италија била преценета улогата на општите знаења и на математичките структури во наставата. Овој факт и занемарувањето на експериментот кај многу учители и ученици предизвикаа негативен однос кон новиот пристап, па затоа тој беше дискредитиран и во голема мера отфрлен.

Методите и средствата во наставата по математика од 60-тите до 90-тите години од XX век, исто така, претрпеле сериозни промени. Сè пошироко место во наставниот процес зафаќала, на пример, самостојната работа.

По Втората светска војна и во нашава земја биле извршени неколку содржајни реформи, во кои се извршило значително осовременување на наставата по математика, како во средното, така и во основното образование. Се разбира, овие реформи се реализирале во тогашна СФРЈ, освен по-

следната која е во тек и за чии добри и лоши страни нема да судиме, иако таа е проследена со многу недоследности и негативности.

Претпоследната од тие реформи на средното образование започнала во 1982 година и се однесувала не само на наставата во тесна смисла, туку и на севкупниот образовен систем. Основната идеја на оваа реформа била да се добие систем на средно "насочено" образование, коешто максимално ќе им соодветствува на потребите на стопанството и на достигнатиот степен на развој на општествената заедница. Меѓутоа реформата почнала да се реализира пред таа целосно да се осмисли, без да се обезбедат неопходните материјални услови и дури без оформени наставни планови и програми за енормно големиот број струки и занимања. Се чини дека и тековната реформа во средното образование, на која покрај несериозниот пристап на надлежните институции и кумуваат и најразлични агенции од странство, се одвива по ист терк, такашто нема да згрешиме ако однапред кажеме дека таа ќе биде неуспешна, како и онаа од 1982 година.

Од реформата во 1982 година предметот математика излезе мошне осиромашен, наместо обратно - да биде збогатен во согласност со зголемените потреби на современата наука и напредокот на техниката. Веќе е јасно дека наставниот предмет математика исто така нема подобро да помине и со тековната реформа на средното образование, кадешто според некои предлози за машинската и за електротехничката струка во III и IV година се предвидени како задолжителни само по два часа седмично, состојба невидена во современите образовни системи. За среќа, барем засега оваа реформа не е толку драстично лоша во гимназиското образование, кое по бруталното укинување со реформата во 1982 година, со корекциите започнати во учебната 1987/88 година повторно се вовеле во учебната 1990/91 година.

2.3. ШТО ПОНАТАМУ?

Од претходно изнесеното може да се заклучи дека математиката како наставен предмет е еден систем кој бил мошне динамичен низ вековите, а особено во XX век. Поради тоа, во принцип не се основани приговорите на нејзиното менување, како во наставните содржини, така и во организацијата и наставните средства и методи, што се прави во различни временски интервали. Вакви промени ќе има и во иднина. Меѓутоа, основани се приговорите и незадоволството упатени на адреса на недоволно осмислените промени, кои се прават без соодветни анализи и валидна оценка на во моментот постоечките содржини, методи, наставни средства и организациона поставеност на наставата, без сериозно експеримен-

тирање на сите нивоа за тековните промени и проучувања на реалните можности нешто да се менува.

Затоа, во следниот период потребно е да се направат соодветни анализи на поставеноста на математиката во образовниот систем, степенот на корелацијата со другите наставни предмети итн., а потоа во зависност од добиените резултати да се пристапи кон реформа на наставата по математика. Се разбира, се ова ќе придонесе да се елиминираат низа пропусти кои ја следат наставата по математика, особено во средното образование почнувајќи од 1982 година до крајот на XX век, и таа да се сведе на потребите на образовниот систем во целина, а не да биде предмет на меѓусебно договарање во надлежните државни институции.

3. СОДРЖИНА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

3.1. СУШТИНА НА ПОИМОТ СОДРЖИНА

Еден од суштествените проблеми на методиката по математика е дефинирањето на содржините на наставата по математика. Има многу тешкотии. Од една страна е динамичниот развој на математиката како наука и потребата со училишниот курс по математика, на учениците да се пренесат достигнувањата на древната, класичната и на современата математика во релативно малиот временски период предвиден за обучување. Математичките знаења треба на идните генерации да им користат во животот, а денешните најмлади ученици ќе “навлезат во животот” по 10-15 години и затоа е многу тешко да се предвиди какви математички знаења ќе им бидат потребни. Прашањата за достапност на наставните содржини и корелацијата со другите предмети уште повеќе го усложнуваат проблемот. Свој придонес кон усложнувањето на проблемот даваат и се почестите барања и идеи за диференцирана настава.

Но, прво да го објасниме поимот *содржина на наставата по математика*. По традиција ова прашање се минимизира и се ограничува, кога под содржина на наставата по математика се подразбираат само математичките поими и тврдењата поврзани со нив. Одроз на ова сфаќање се наставните програми кои, по правило, содржат теми од различни математички области и потребното време за нивна реализација. Меѓутоа, паралелно со математичките знаења, како содржина на наставата по математика треба да се подразбираат и умењата за нивна примена, бидејќи без таквите умења знаењата се мртви, бескорисни. Но, додека математичките

знаења во наставните програми се точно опишани, потребните умеења не се конкретизирани ниту според видот, ниту според начинот на нивното формирање. Често пати тие или не се присутни во целите на наставата по математика, или присуствуваат во многу аморфен и скриен облик.

Во содржините на наставата по математика очигледно треба да се вклучи и специфичниот јазик (термини и симболи), список на методи за докажување на теореми и решавање на задачи. Јасно, кога еден метод е ставен во тој список, тоа значи дека учениците треба да имаат знаења и умеења да го применуваат во различни ситуации.

Оправдано, кон содржините на наставата по математика треба да ги додадеме и знаењата и умеењата за самостојно усвојување на математичките теории. Затоа е неопходно во содржините на наставата по математика да се вклучат општите и специфичните за математиката методи на познанието, како што се: *анализирање, споредување, апстрахирање, синтетизирање, генерализирање, формулирање и докажување на хипотези, моделирање и емпириските методи (набљудување, мерење, експериментирање)*. Ученикот треба да знае дека изучувањето на еден математички објект е составено од:

- 1) дефинирање на објектот и на неговите елементи,
- 2) откривање на својствата на објектот,
- 3) наоѓање зависности меѓу докажаните својства,
- 4) наоѓање на врски меѓу изучуваниот математички објект и други математички објекти, и
- 5) наоѓање примена на новоусвоените математички знаења.

Вклучувањето на општите и на специфичните методи на познанието во содржината на наставата по математика е во функција на постигнувањето не само на образовните, туку и на воспитните цели на наставата.

Согласно со целите на наставата по математика содржината треба да има и список на важни примени на математичките знаења и креирање на некои математички модели. Од досега изнесеното следува дека во содржината на наставата по математика се оцртува математичка линија (тоа се математичките знаења и умеења) и нематематичка линија (тоа е севкупноста од знаењата и умеењата за методите на познанието, за самостојно здобивање со математички знаења). Најчесто вториот дел се подразбира, но тоа не е доволно. Имено, една содржина не може да се усвои ако таа не е цел на наставниот процес, така што математичкиот и нематематичкиот дел на содржината на наставата по математика можат да се усвојат само ако тие се објект на целисходно насочена активност на ученикот.

3.2. БАРАЊА ОД СОДРЖИНАТА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Изборот на наставните содржини, главно, зависи од математиката како наука и од целите на наставата по математика во соодветниот училишен степен и во соодветниот вид училиште, но притоа треба да бидат исполнети неколку дополнителни барања.

а) *Современост*. Ова барање се реализира со вклучување на такви математички знаења, умеања и методи, на таков математички апарат и математички јазик, преку кој учениците ќе добијат претстава за современата математика. Поради тоа, во училишниот курс паралелно со класичните математички поими треба да бидат застапени и такви како што се моделите, алгоритмите и информациите, да се користи современата електронско-пресметковна техника и слично. Се ова го засилува општообразовното, интегративно значење на наставата по математика.

б) *Научност*. Покрај тоа што фактите и теориите во наставните содржини треба да бидат точни, тие треба и коректно да се докажани, при што е неопходно да се користи современ пристап.

в) *Структурност на содржините*. Под структурирање на материјалот ќе подразбираме негова изградба во логички систем врз база на причинско-последователна и функционална поврзаност. Доброто структурирање на наставната материја може да помогне во разрешувањето на противречноста меѓу натрупувањето на математичките научни сознанија и тенденциите за намалување на часовите наменети за изучување на математиката во училиштата. Притоа треба да се има предвид дека структурираните знаења полесно се изучуваат и трајно се запомнуваат. Затоа треба да се потенцираат заемните врски меѓу одделните теми. На пример, меѓусебно се поврзани темите комплексни броеви, квадратна функција, квадратни равенки и квадратни неравенки. Притоа, ако од последните три теми, темата квадратна функција се разгледува како основна, тогаш другите две теми произлегуваат од задачите за наоѓање на вредности на аргументот при кои квадратната функција се анулира или има позитивни (негативни) вредности.

г) *Достапност на содржините*. Ова барање е ограничувачко при изборот на наставните содржини и е условено од возраста на учениците и од нивните психофизички способности. Имено, наставните содржини мора да им бидат достапни на учениците, како по обем, така и по сложеност и длабочина. Пожелно е при нивниот избор да се користат искуствата на други земји, но можно е тоа да се направи и со помош на сопствени дидактички истражувања.

д) *Поврзаност со секојдневниот живот и техничката насоченост.* Наставните содржини треба да даваат можност при обучувањето да се користи животното искуство на учениците и да вклучуваат примена во секојдневниот живот, со што ќе се оправда изучувањето на математиката. Тие треба да бидат избрани така што ќе ги задоволуваат секојдневните потреби на учениците за пресметување и мерење, ќе го помагаат изучувањето на другите предмети, ќе формираат знаења и умеѐња за конструирање и цртање на графикони, за работа со математички инструменти итн. Така, на пример, несфатливо е при изучувањето на геометриската прогресија да не се изучува пресметувањето на сложена камата, туку тоа да се прави со помош на готови таблици, кои се многу рестриктивни, особено во случај на нестабилни економски текови во државата.

е) *Можност за примена.* Содржината на наставата по математика се определува со наставната програма по математика, која ја пропишува надлежното министерство и е задолжителна за сите учители. Во неа е даден список на теми кои се изучуваат, нивна разместеност по одделенија и расположливото време за реализација, кое може да варира за $\pm 10-15\%$, но не повеќе. Освен тоа, секоја современа програма треба да ги содржи барем целите и задачите на наставата, основното информативно јадро за секое одделение, најважните математички методски идеи и закономерности, но мора да остава и доволно простор за креативна работа на учителите, што не е случај кај нашиот образовен систем, особено во наставата по математика. Исто така, пожелно е програмата да ги содржи и критериумите и нормите за оценување, корелацијата со другите предмети и слично.

3.3. ОСНОВНИ ЛИНИИ ВО СОДРЖИНАТА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Независно од промените кои периодично се прават во наставните содржини, во нив се запазуваат низа основни линии кои го карактеризираат:

а) *Развојот на поимот број.* Основните содржини на оваа тема се сместени од I до VIII одделение во основното образование, а потоа во II клас во средното образование се изучуваат комплексните броеви. Со оваа линија се поврзани прашањата за степен со реален показател, вредностите на експоненцијалната, логаритамската и тригонометриските функции.

б) *Идентични трансформации во множеството на рационалните, ирационалните и трансцедентните изрази (логаритамски, тригонометриски итн).* Оваа тема зафаќа голем дел од наставните содржини од VII одделение во основното образование до III клас во средното образование.

Со оваа линија се поврзани и низа методи за решавање на равенки и докажување на идентитети и неравенства.

в) *Равенки, неравенки и нивни системи.* Овој дел одсекогаш бил носечки на училишниот курс по алгебра. Почнувајќи од VIII одделение во основното образование па сè до III клас во средното образование се изучуваат алгоритми за решавање на основните равенки и неравенки: линеарни, квадратни, биквадратни, едноставни ирационални, експоненцијални, логаритамски и тригонометриски равенки, како и нивни системи.

г) *Функции.* Освен изучувањето на основните функции (линеарната, квадратната, експоненцијалната, логаритамската и тригонометриските), во училишниот курс се предвидува изучување и на низа важни поими поврзани со функциите, како што се: парност, периодичност, монотоност, непрекинатост, диференцијабилност итн.

д) *Геометриски фигури во рамнина и геометриски тела.* Нивното изучување зафаќа голем простор, почнувајќи од I одделение во основното образование се до III клас во средното образование.

ѓ) *Мерењето на геометриските објекти* е важна тема на наставата по математика. Оваа содржинска линија е со изразени интегративни и технички можности.

е) *Геометриските трансформации и векторите* се самостоен содржински правец, кој може да се поврзе со изучувањето на геометриските фигури. Современиот училишен курс по математика не може да се замисли без овие теми, но често пати тие почнуваат да се изучуваат пред учениците да станат способни правилно да ги усвојуваат, а тоа е состојба која веќе подолго време е присутна во нашиот образовен систем. Исто така, во врска со овие теми најчесто се јавува проблем со димензионирањето на обемот на темите и нивниот распоред.

ж) *Моделирање.* Формирањето и разбирањето на математичките модели е една од целите на наставата по математика. Моделите се особено важни за здобивање на умеенја за примена на знаењата, а нивното составување е специфичен метод на познанието, на изучувањето на реалноста со математички средства. По правило, оваа линија треба да се реализира во целиот период на обучување, почнувајќи од I одделение во основното образование па сè до завршување на средното образование.

II ГЛАВА

ОБРАЗОВНО-СОЗНАЈНА ДЕЈНОСТ

Образовниот процес во училиштето содржи систем од постапки преку кои учениците усвојуваат знаења, умеења и начин на размислување со посредство на организирана комуникација со учителите. Реализирањето на тие постапки се поттикнува со помош на различни материјални и нематеријални објекти, кои се нарекуваат *мотиви и цели*. Прво ќе се осврнеме на нив бидејќи истите се од особена важност за остварување на општите и посебните цели на наставата одделно по секоја наставна дисциплина, но и на севкупниот воспитно-образовен процес.

1. МОТИВИ И ЦЕЛИ

Под *мотив* ќе подразбираме материјален или нематеријален објект, кој поттикнува активност на човекот, насочена кон задоволување на некоја негова внатрешна потреба.

На пример, ученикот постојано решава задачи непосредно пред некоја контролна работа по математика. Во еден момент тој дознава дека контролната работа нема да се спроведе. За неговото натамошно однесување има две можности: или веднаш да престане да решава задачи или да продолжи да решава задачи. Во вториот случај заклучуваме дека решавањето задачи е со цел да се задоволи внатрешната потреба. Во слична состојба е и секој човек, кој решава крстозбори, не учествувајќи на некаков натпревар, туку едноставно за свое задоволство. Од претходно кажаното следува дека решавањето задачи и решавањето крстозбори се мотиви.

Човекот има различни потреби. Едните се поврзани со биолошкиот опстанок (исхрана, облекување и живеалиште), а другите ги опфаќаат знаењата, музиката, спортувањето итн. Првите потреби се дел од биолошкото наследство, а вторите човекот ги здобива во средината во која што живее. Бидејќи средината во која живее човекот е подложна на промени, постојат и можности за промена на мотивите. На пример, во последните триесетина години кон знаењата се придружија нови знаења, меѓу кои и информатиките. Освен тоа, до мотивите обично не се доаѓа со еднократни, туку со

повеќекратни постапки, кои човекот најчесто ги извршува по некој редослед. Притоа, во овој редослед поединечните постапки секогаш не резултираат со задоволување на некоја потреба на човекот, но помагаат при достигнувањето на мотивите. На пример, за многу ученици решавањето задачи не е поврзано со задоволувањето на нивните потреби во дадениот момент, но им ги дава знаењата потребни за нивно професионално оспособување, кое од своја страна ќе биде основа за задоволување на биолошките и сличните потреби. Меѓутоа, понекогаш решавањето задачи може да биде потреба. Ваквиот материјален или идеален објект се нарекува *цел*. Според тоа, материјалниот или идеалниот објект кој предизвикува активност на човекот, проследена со постапки кои директно или индиректно се поврзани со задоволувањето на потреби на човекот се нарекува цел.

Во случај кога во обучувањето, сознајно и целисходно се потенцира врската на секоја основна цел со некој мотив, тогаш зборуваме за *мотивација*. Бидејќи карактерот на математичките знаења е таков што секогаш не може да се види врската со биолошките или со здобиените потреби на учениците, за наставата по математика многу е важен проблемот за мотивација. Затоа целта, која сè појасно се посочува од специјалистите за настава по математика, не е само сознајно да се користат мотивите кои постојат кај учениците, туку да се создадат услови за формирање нови мотиви, сврзани со математичките знаења. Сè ова отвара нови проблеми кои треба да ги решаваат методичарите, авторите на учебниците и учителите по математика.

Во овој дел ќе се задржиме уште на два поима, кои се тесно поврзани со претходните разгледувања.

Постапките на човекот, во кои целта е и мотив ги нарекуваме *дејност*, а постапките на човекот во кои целта не е мотив ги нарекуваме *дејство*.

На пример, кога во текот на распустот еден ученик решава задачи за сопствено задоволство, иако знае дека за тој материјал нема да го испитуваат, тогаш велиме дека станува збор за *дејност*. Меѓутоа, кога ученикот решава задачи само затоа што ќе прави писмена работа, тогаш велиме дека станува збор за *дејство*.

Секоја дејност и секое дејство се извршуваат со користење на некои средства, инструменти, машини, симболи, поими, тврдења и нивни системи. За математичките дејности и дејства карактеристично е користењето симболи, поими и теореми. Освен тоа, секое дејство е составено од три дела: ориентирање, реализирање и контрола. При извршување на дејствата и на дејностите, обично, некои нивни делови се извршуваат автома-

тизирано, т.е. стануваат технички процедури, (операции). Во наставата по аритметика, алгебра и тригонометрија многу дејства, кои се усвојуваат во дадена етапа и имаат определени цели, се усвојуваат до таа мера што стануваат операции (технички процедури). На пример, операциите со дробно-рационални изрази е дејство (од гледна точка на психологијата) во VII одделение, но потоа при решавањето равенки тоа станува операција (повторно од гледна точка на психологијата).

Освен во операции, дејствата можат да се применат и во дејности. На пример, на почетокот ученикот решава задачи за да ја исполни желбата на своите родители или на учителот. Но, ако како последица на тоа ученикот почне да решава задачи за сопствено задоволство, тоа значи дека целта на дејството станала мотив, т.е. *дејството преминало во дејност*.

За наставата по математика е многу важно да се знае при кои услови дејствата преминуваат во дејности или во операции, за да може со регулирање на овие услови да се управува со воспитно-образовниот процес.

Во операции преминуваат оние дејства кои учествуваат како составен дел на посложени дејства и нивното извршување често се повторува при реализирање на посложени дејства. Повеќето од нив имаат карактер на алгоритми. Карактеристичен пример за ова се собирањето, множењето, одземањето и делењето на повеќецифрените броеви. На почетокот, од гледна точка на психологијата тоа се дејства, но во погорните одделенија тие преминуваат во операции, повторно од гледна точка на психологијата.

Во двата случаја на преминување на дејството во операција или дејност потребно е негово повеќекратно повторување, т.е. потребно е определено количество акумулирано искуство. Ако учителот не ја сообрази својата работа со претходно кажаното, тогаш знаењата на учениците ќе бидат изолирани (одделни), од што како последица ќе има лошо усвојување на алгоритмите и само кај мал број ученици решавањето задачи ќе стане нивна внатрешна потреба. Затоа е неопходно преку добро осмислен систем од задачи да се акумулира потребното искуство за усвојување на алгоритмите и решавањето задачи, со што тоа ќе стане внатрешна потреба. Притоа треба да се има предвид дека при извршувањето сложени дејства во кои се извршуваат низа елементарни дејства, мора да се води грижа за тоа како се преминува од едно кон друго дејство. Во математиката, решавањето на секоја задача или докажувањето на секоја теорема е проследено со извршување на низа елементарни дејства, за што ќе зборуваме понатаму.

2. КАРАКТЕРИСТИКА НА ОБРАЗОВНО-СОЗНАЈНАТА ДЕЈНОСТ

Суштествена карактеристика на образовно-сознајната дејност во училиштето е тоа што таа се управува и се помага од учителот, што значи дека наставниот процес треба да се управува на ниво учител-ченик и да се обезбеди континуирана и одмерена помош на учениците во текот на учењето. Токму затоа, во следните разгледувања ќе се осврнеме на управувањето на наставниот процес и на работата на учениците со помош на возрасните.

2.1. УПРАВУВАЊЕТО НА НАСТАВНИОТ ПРОЦЕС НА НИВО УЧИТЕЛ-УЧЕНИК

За успешно реализирање на наставата важно е учителот да знае што е тоа *траекторија на познанието* и да ги разграничи двата основни начина на управување на наставниот процес на ниво на учител-ученик.

1) Управувањето на обучувањето на ученикот во училиштето е многу слично со движењето на ракетата. Имено, како што пред истрелувањето на ракетата се определува нејзината траекторија, по која таа треба да се движи за да ја постигне саканата цел, така и при обучувањето треба претходно да се определат знаењата и умеењата со кои треба да се здобијат учениците за да се постигне саканата цел. Притоа е важно да се утврди и редоследот на нивното усвојување. И во едниот и во другиот случај се следи текот на соодветните процеси, поврзани со “движењето” и во зависност од отстапувањата од планираното се прават соодветни корекции. Затоа, кога ученикот усвојува истовремено се што се реализира во текот на наставата, условно ќе кажеме дека тој се движи по траекторијата на познанието, а секој пропуст во знаењата и умеењата ќе го наречеме отстапување од траекторијата на познанието.

2) Управуваниот процес во кој корекциите во траекторијата на познанието се прават на почетокот на секој следен циклус, во зависност од отстапувањата од целите и од задачите на претходниот циклус, условно ќе го наречеме *лошо управуван процес*.

Управуваниот процес при кој се следат отстапувањата од траекторијата на познанието за време на реализирањето на секој циклус и паралелно се внесуваат корекции во тој циклус, условно ќе го наречеме *добро управуван процес*.

Така, на пример, ако се прават контролни работи на крајот од едно полугодие, за да се констатира степенот на усвоеност на знаењата и умеењата кај учениците и потоа се преземат корективни мерки, тогаш станува збор за лошо управуван процес. Ако се прават сосема самостојни писмени или контролни работи кои потоа се проверуваат од учителот, за по неколку дена добиените резултати да им се соопштат на учениците, тогаш повторно станува збор за лошо управуван процес.

Меѓутоа, кога се прават контролни работи, со истовремено давање помош при грешките или при пројавените тешкотии (а при оценувањето помошта се бележи), тоа значи дека станува збор за добро управуван процес. Но, за да видиме каква треба да биде помошта, прво ќе се осврнеме на проблемот на работа на учениците со помош на учителот.

Претходно изнесеното ни овозможува подобро да ја согледаме улогата на некои елементи на наставата како, на пример, испитувањето. Познато е дека на него најчесто се гледа како на средство со кое ќе се констатира колку и како се усвоени определени знаења и умеења, се со цел ученикот да добие оценка, која законодавецот ја бара од учителот. Но, ако се земе предвид дека основна цел во добро управуван процес е да се констатира отстапувањето од траекторијата на познанието и да се забележат и реализираат дејствата за отстранување на отстапувањата, можеме да заклучиме дека на испитувањето треба да се гледа, пред се, како на средство за откривање на пропустите во знаењата и умеењата на учениците, за да се најдат начини за нивно отстранување.

2.2. РАБОТА СО ПОМОШ

Наставниот процес е дејност во која учениците усвојуваат знаења и умеења. Тие знаења се резултат на творењето на претходните генерации. Практиката, а и научните истражувања покажуваат дека знаењата најдобро ги усвојува младата генерација, но со помош на оние кои веќе ги усвоиле тие знаења. Токму во овој факт е причината за појавата на училиштето како институција во која сознајната дејност е помогната од учителот. Затоа, природно се поставува прашањето како да се постигне поголема ефективност во заедничката работа на учениците и учителот. Меѓутоа, во нашата образовна практика најчесто нема заедничка работа на овие субјекти, туку е присутно лекцијашко објаснување на новите знаења од страна на учителот, а учениците најчесто се пасивни слушатели кои треба само да ги запомнат и репродуцираат предавањата на учителот. Секако, тоа е максимално негативна појава, како што е негативна и тенденцијата, присутна во нашава земја кон крајот на XX век, учениците низ истражувачка работа

самостојно да усвојуваат нови знаења и умеења (таканареченото интерактивно учење).

Истражувањата покажуваат дека основната помош која треба да ја даде учителот може да се расчлени на:

- i) обезбедување претходна подготовка на ученикот за усвојување нови знаења и умеења,
- ii) изнесување содржини пред ученикот, во кои се инкорпорирани нови знаења и умеења и помагање за нивно етапно откривање, при што е неопходно да се дадат и соодветни објаснувања,
- iii) оставање доволно простор ученикот самостојно да открива дел од новите знаења и умеења или тие да ги применува пред да премине на усвојување на нови наставни содржини,
- iv) навремено помагање на секој ученик, согласно определбата на добро управуван процес и според тешкотиите на кои наидува или грешките кои ги прави.

Во наставата по математика новите знаења и умеења се проследени со усвојување нови поими, тврдења, задачи, докази, решенија на задачи, методи итн., а помошта која треба да се укажува е поврзана со извршувањето на наведените дејства.

Во врска со извршувањето на овие дејства, со помош или самостојно, во психологијата се користат и поимите *зона на актуелниот* и *зона на блискиот развој*.

Зона на актуелниот развој на еден човек се нарекува севкупноста од сите психички процеси кои се јавуваат кај него без тоа да биде помогнато од друг човек.

Зона на блискиот развој на еден човек се нарекува севкупноста од сите психички процеси кои се јавуваат кај него ако тоа е помогнато од друг човек. За психичките процеси од зоната на блискиот развој е карактеристично тоа што ако тие повеќекратно се побудуваат преку соодветни дејства и се извршуваат со помош, тогаш тие созреваат до таа мера што почнуваат да се побудуваат без помош. Всушност, последното значи проширување на зоната на актуелниот развој на личноста.

Од претходно изнесеното следува дека ефективно средство за здобивање со нови знаења, а оттука и со нови способности, се дејствата кои се извршуваат со помош. Јасно, содржината и обемот на конкретната помош зависат и од конкретната дејност, а исто така, и со кого се извршува. Затоа во следните разгледувања ќе се задржиме на дидактичките

принципи и на конкретни примери ќе го разгледаме проблемот на работа со помош.

3. СОЗНАЈНИ ИНТЕРЕСИ, СПОСОБНОСТИ И НАКЛОНОСТИ

3.1. СУШТИНА НА СОЗНАЈНИТЕ ИНТЕРЕСИ, СПОСОБНОСТИ И НАКЛОНОСТИ

Интересот е таков квалитет на личноста кој се карактеризира со упорна сознајна насоченост кон предметот или појавата која се создава. *Наклоноста*, пак, се изразува во насоченоста на личноста кон извршување на некоја дејност.

Интересите и наклоностите се важни квалитети на човековата личност и тие се во тесна и нераскинлива заемна врска. За интересите е карактеристично создавањето на детерминирачките елементи на работата, така што тие имаат важна улога во творечката дејност на човекот. Наклоностите се, исто така, поврзани со творечката дејност на човекот. Но, додека интересите ја одразуваат желбата на личноста за здобивање нови знаења, во наклоностите се пројавува стремежот на човекот за работа и за творештво.

Способностите се психички својства, кои обезбедуваат успешно извршување на дадена дејност. Тие имаат решавачка улога во индивидуалниот развој на личноста и се подобруваат при усвојување нови знаења и умеања. Јасно, од своја страна способностите повратно дејствуваат на усвојувањето на новите знаења и умеања.

3.2. РАЗВИВАЊЕ НА ИНТЕРЕСИТЕ И НА СПОСОБНОСТИТЕ НА УЧЕНИЦИТЕ

Во процесот на развој на личноста интересите се менуваат во зависност од условите за живот. Обично, интересите се пројавуваат кон областите во кои полесно се постигнуваат резултати.

Важната улога која ја имаат интересите на ученикот во обучувањето, ја наложува одговорната задача на учителот да ја направи наставата “интересна” за ученикот. За побудување интерес кај учениците кон даден

предмет особено значење имаат квалитетот на предавањата и личноста на учителот. Основен начин за создавање траен интерес кон некој наставен предмет е вклучување на учениците во непосредна творечка дејност. Во математиката тоа може да се постигне со дозирано задавање на типични нестандартни задачи, за чие решавање е потребен творечки пристап. Сепак, овде треба да се внимава, бидејќи неодмерената тежина на задачите може да биде контрапродуктивна.

Што се однесува до откривањето на математичките способности, тоа може да се постигне со правилна оценка на следниве барања:

- i)* самостојно и лесно усвојување на математичките знаења,
- ii)* оригиналност при решавањето математички задачи,
- iii)* умеања за составување математички модели,
- iv)* решавање нестандартни задачи и наоѓање нестандартни решенија на стандардни задачи и
- v)* лесно користење на математичка симболика итн.

Истражувањата покажуваат дека развивањето на способностите е сложен и недоволно испитан процес. Теориските размислувања за ова прашање се мошне различни, а често пати се противречни и меѓусебно се исклучуваат. Но, во едно се согласуваат сите истражувачи на ова поле, а тоа е дека треба да се прави разлика меѓу образовно-сознајните и научно-творечките способности. Образовно-сознајните способности за математика се способности за успешно совладување на училишниот курс по математика и тие не треба да се поистоветуваат со успешноста на учениците, во која најчесто покрај способностите главна улога имаат системот на учење, упорноста во работата и домашната средина на ученикот.

3.3. НАСТАВНА СОДРЖИНА, СИСТЕМ ЗА НЕЈЗИНО УСВОЈУВАЊЕ И МОЖНОСТИ ЗА ПОТТИКНУВАЊЕ И РАЗВИВАЊЕ НА ИНТЕРЕСИТЕ И НА СПОСОБНОСТИТЕ НА УЧЕНИЦИТЕ

Современите научни достигнувања можат успешно да се применуваат во практиката доколку се добро развиени интелектуалните умеања и способности. Може да се каже дека структурата на човековиот интелект е изградена од два дела, кои се поврзани со содржинската и функционалната страна на нашата психа. Првиот дел на нашиот интелект ги содржи сите знаења, кои човекот ги има независно од нивната вредност, обем, апстрактност и систематизираност. Знаењата се еден од основните квалитети на човекот. Не е случајно тоа што понекогаш во зависност од знаењата кои

ги има човекот во дадена област, ние судиме дали е способен или не, иако знаењата и способностите се две различни нешта.

Вториот дел на нашиот интелект е изграден од општата способност за репродуктивна и творечка преработка на информациите. Во неговата структура влегуваат способноста да се мисли, да се набљудува, да се решаваат сложени проблеми итн.

Интелектуалниот развој на ученикот шематски може да биде опишан и разбран преку категориите знаење, мислење, способност и мотивација за самостојно интелектуално надградување. Меморирањето на знаењата е важен процес, без кој нема интелектуален развој. Способноста за брзо и трајно меморирање е голема предност на оној кој ја има. Поседувањето знаења го подобрува мисловниот процес на човекот, бидејќи обемот на знаењата ги определува параметрите и границите во кои се протегаат мислата и фантазијата на човекот. Знаењата не се само производ на мисловниот процес, туку се и негова задолжителна содржина.

Некои образовни дејци тврдат дека треба да му се даде предност на развојот на мислењето пред усвојувањето на знаењата. Меѓутоа, тие како да забораваат на фактот дека тоа се два меѓусебно тесно поврзани процеса. Способностите за мислење можат да се развиваат само ако се поседува определено количество знаења. Поради тоа, при осмислувањето на даден наставен предмет треба да се одговори на следниве прашања:

- i)* Каква треба да биде содржината на даден наставен предмет или во дадена област, за оптимално да се развиваат способностите на учениците?
- ii)* Дали при усвојувањето на дадени знаења може непосредно да се развиваат способностите, или за тоа се потребни дополнителни активности?
- iii)* Како треба да бидат поставени наставните содржини, методите на обучување, алгоритмите и дидактичките технологии за нивното совладување да води кон развивање на способностите на учениците?
- iv)* Дали ученикот треба да усвојува готови алгоритми на мислење и работа или тие треба да се усвојуваат според некој методски пристап?

Способностите не можат да се внесат еднадвор, но тие не можат да се развиваат и без определени специфични дејности. Поради тоа, при разгледувањето на образовните содржини треба да се има поопшт пристап. Неправилно и ограничувачко е сфаќањето дека образовните содржини треба да вклучуваат само знаења, умеења и навики. Во наставната програма и во

структурата на образовните содржини треба да биде вклучена и сознајната работа за нивно усвојување. Во даден момент таа може да доминира во структурата на образовните содржини, но сепак многу тешко однадвор може да се планира и управува, што значи дека во голема мера ќе зависи од способностите на учителот.

Од досега изнесеното може да се заклучи дека способностите на учениците, главно, се формираат и се развиваат во зависност од тоа што се учи, но уште поважно е тоа како се учи.

На формирањето и на развивањето на способностите на ученикот за усвојување методи и алгоритми за примена на знаењата и решавањето проблеми, треба да се гледа како на една од најважните дидактички технологии за развивање на севкупните способности на ученикот. Токму затоа, паралелно со знаењата, наставната програма треба да содржи и опис на специфичните умеења и методи на мислење и работа, валидни за наставниот предмет математика, за формирање интереси кај учениците и за развој на нивните способности. Притоа, неопходно е да се предвиди потребното време за нивно усвојување, бидејќи само нивното забележување нема никаква практична вредност.

Подучувањето за усвојување на знаења и подучувањето во усвојување на методи се две страни на наставниот процес, кои заемно се поврзани, но се релативно самостојни процеси. Знаењата можат да се усвојуваат без да се совладаат методите за нивно користење, но методите и умеењата за решавање задачи и примена на знаењата не можат да се усвојат без да се има определен квантум знаења. Потребата од решавањето на овие две задачи на дидактиката е позната, но решавањето на втората задача не е целосно осмислено ниту методски, ниту организационо, барем не до сега.

Според претходно изнесеното можеме оправдано да заклучиме дека само наставата, во која се посветува еднакво внимание и на знаењата и на методите и умеењата за нивно користење, може да обезбеди вистински развој на способностите на учениците.

4. ЕВРИСТИЧКА ДЕЈНОСТ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Математиката како наставен предмет е погодна за оспособување на учениците за творечка и истражувачка дејност и за развивање на способностите за истражување. Еден од основните методи за работа во ваквото оспособување е евристичкиот метод, т.е. методот на откривањето. Основна

форма на пројавување на овој метод во наставата по математика е поставувањето проблемски ситуации пред учениците, со кои тие најчесто се среќаваат при решавањето нестандартна задача, т.е. задача за која треба да се открие начинот за решавање. Ваков пример е следнава задача, која учителот може да ја искористи при реализирањето на содржините од теоријата на броеви во I клас од средното образование, односно при проучувањето на класите на остатоци.

Пример 1. Билјана и Деспина ја играат следнава игра. Билјана кажува еден природен број кој не е поголем од 2. Деспина на овој број му додава природен број кој не е поголем од 2 и го кажува добиениот збир. Така, наизменично му додаваат на претходниот број броеви коишто не се поголеми од 2. Победник е онаа која ќе каже 31.

Дали постои начин Билјана постојано да победува?

Решение. Јасно е дека победник е оној што ќе го каже бројот 28, бидејќи противникот може на овој број да му додаде најмалку 1, а најмногу 2. Така, се добива збир меѓу 29 и 30. Сега, оној кој кажал 28 додавајќи соодветен број добива збир 31. Враќајќи се наназад, гледаме дека збирот 28 ќе го соопшти играчот којшто претходно ќе соопшти 25 итн. Значи, оној што игра прв може да ја добие секоја партија ако прво го соопшти бројот 1, а по додавањето на број од страна на противникот, збирот го дополнува до 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 и 28. Според тоа, ако Билјана игра прва, тогаш постои начин да ја добие секоја партија.

Сега, учителот треба да ги поттикне учениците да ги анализираат броевите 4, 7, 10, ... и да побараат нивно заедничко својство, т.е. да заклучат дека тие при делење со 3 даваат остаток 1 итн. ♦

Како што може да се види од наведениот пример, работата на ученикот кој решава нестандартна задача може да се поистовети со работата на научникот кој решава нов научен проблем, бидејќи и двата вида работа имаат изразит творечки карактер. Сепак, во овој дел има и разлика, која пред се е во тоа што ученикот обично решава позната задача, а научникот ги открива и задачата и решението. Притоа, барањата на задачата за ученикот се точно определени, а тоа се однесува и на знаењата кои ги користи, што не е случај при решавањето научен проблем. Јасно, неопходните знаења и методи кои ученикот треба да ги има за решавање задачи мора да ги обезбеди учителот во текот на реализирањето на наставата. За таа цел учителот треба да обезбеди усвојување на следнава шема, која најчесто резултира со успех при решавањето задачи:

- разбирање на барањата на задачата,
- составување план за решавање,
- остварување на планот, и

- анализирање на добиеното решение.

Во овие четири етапи ученикот мора сам на себе да си поставува низа прашања и на нив да наоѓа одговори. Такви прашања се: Што е познато? Што е непознато? Дали оваа задача или слична на неа веќе сум сретнал, така што можам да ги искористам претходните искуства? Дали треба да воведам помошни елементи, со кои полесно ќе ја решам задачата? Кои се тие елементи? ...

Претходно поставените прашања ученикот може подобро и поцелосно да си ги одговори доколку кај него не е доминантно влијанието на “фиксните претстави”. Ова ќе го илустрираме на следниов пример.

Учениците често ја применуваат синусната теорема само кога се дадени некои од страните и агли на триаголникот, за да ги најдат другите страни и агли. Меѓутоа, тоа најчесто не го прават кога се дадени страна и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот, а се бара аголот спроти дадената страна. Аналогно, учениците се досетуваат да ја искористат теоремата за висините во триаголникот, само кога треба да докажат дека три отсечки минуваат низ една точка, но многу малку ја користат оваа теорема за да докажат нормалност на две прави.

Во сите овие случаи едностраноста во користењето на теоремите од страна на учениците се должи на нивното еднострано користење при решавањето на задачи на час. На пример, за увежбување на синусната теорема најмногу се решаваат задачи во кои се дадени агли и страни во триаголникот, а се бараат други страни и агли. Така, за оваа теорема како доминантно својство се наметнува можноста за нејзино користење за наоѓање страни и агли на триаголникот при зададени други негови страни и агли.

Овој недостаток може да се елиминира ако во работата на час се разгледаат сите основни случаи во кои може да се искористи дадената теорема, за што понатаму ќе зборуваме.

Доминантните својства, кои се резултат и од несоодветната работа на часовите, често пати се непремостливи пречки за решавање на таканаречените комбинирани задачи, за чие решавање се потребни како примената на знаења од повеќе области, така и помалото влијание на некои “фиксни претстави”.

Ослободувањето од “фиксните претстави” е можно само ако ученикот може да се ослободи од некои претходни ставови, да може слободно да

го промени погледот за врските меѓу елементите на задачата и слично. Оваа идеја е реализирана со таканаречениот метод на “интелектуален напад”, чија суштина е следнава.

За решавање на определен проблем се земаат не само познати стручњаци, туку и лица чии знаења од дадената област се мали. Сите учесници слободно ги искажуваат своите идеи и размислувања за поставениот проблем. Ниедно тврдење не се отфрла веднаш, а секое размислување се анализира и се испитува, а потоа се донесува заклучок. Овој метод поттикнува човекот да излезе од стегите на традицијата, од закоравеноста на мислењето.

Да забележиме дека нашите учители тоа го прават и без да знаат, бидејќи најчесто решавањето на една задача е проследено со зборовите “од каде да почнеме?”. Меѓутоа, недоволното време на часовите не им дозволува на учителите и на учениците да го постигнат саканиот резултат. Овде свое влијание има и големината на паралелките во нашите училишта, кои значително ја надминуваат оптималната бројка од околу 20-22 ученика во паралелка.

Позитивноста на методот на “интелектуален напад” може да се согледа од следниве карактеристични признаци на творечките процеси:

- i) новини и уникатност,
- ii) корисност,
- iii) новини во врските, и
- iv) едноставност.

Претходно изнесените признаци ги дал Џ. Диксон кој ги претпочитал следните способности за остварување на творечка активност:

- a) способност за примање нови знаења, љубопитност и независност во расудувањата,
- b) поврзување на напорната работа и неопходниот одмор,
- c) систематско истражување на нови комбинации,
- d) широко користење на аналогичјата и на имагинацијата, и
- e) совладување на инерцијата од неплодни идеи.

Во творечката дејност на човекот главно има три основни правци на нејзино реализирање, и тоа:

- i) Ако човекот е способен да открива, тој веднаш преминува на новото, дејствувајќи по метод на експеримент и грешка.

- ii) Ако кај човекот е развиено асоцијативното мислење и тој е способен да прави неочекувани споредби, тогаш имаме евристичко сознавање.
- iii) Ако човекот не е досетлив и асоцијативното мислење не му е развиено, тогаш стапува во сила механизмот за поставување хипотеза, нов пристап кон проблемот или шема.

Истражувањата покажуваат дека барем во сегашниот степен на развој на методиката на математиката може многу успешно да се влијае на повеќестепеното користење на теоремите и подобрување на асоцијативното мислење на учениците. Имено, тоа може да се постигне со постепено синтетизирање на знаењата за поимите, изучувани на различни места во училишниот курс по математика. Така, се добиваат дидактичките системи од признаци и од својства, кои суштински го помагаат усвојувањето на наставната материја.

Не задржувајќи се на евристичката дејност, на крајот од овој дел ќе забележиме дека етапите низ кои таа минува се повторуваат, а повторувањето може да биде и повеќекратно. Овие етапи се дадени во следнава едноставна шема:

- сестрано изучување на проблемот и негово осознавање,
- одмор (период на несознајна дејност),
- анализа, комбинации, споредби, дополнување на знаењата, правеење план за натамошна работа, и
- скок и добивање нова идеја.

Оваа шема, која сигурно не е целосна, може да послужи како пример за активностите кои целесобразно треба да се реализираат, за да се помогнат самостојното или со помош откривањето нови знаења, решавањето задачи и докажувањето теореми во наставата по математика.

III ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКО МИСЛЕЊЕ

1. ПОИМ ЗА МАТЕМАТИЧКО МИСЛЕЊЕ

Математичко мислење, што е тоа? Дали воопшто постои такво мислење? Ако одговорот на второто прашање е позитивен, тогаш треба да се признае дека постои физичко, биолошко, хемиско, географско и какво нели уште мислење, или кратко има мислења колку што има научни области. Но, секако дека ова не е сосема прифатливо. Меѓутоа, од друга страна прифатените методи на расудување и структурирање на математичките знаења и на оние во биологијата, суштински се разликуваат. Но, тоа не е случај само со биологијата, бидејќи при расудувањето и структурирањето на знаењата во различни научни области се користат различни методи. Според карактерот на објектите на истражување во науките како доминантни или речиси како единствено дозволиви се наложиле определени пристапи, методи на расудување итн. Доведувањето до постепена доминација на овие пристап и методи најдобро може да се согледа преку проучување на историјата на различни научни области. Специјално од историјата на математиката може да се види дека во неа се наложуваат следниве пристапи и методи:

- i)* технички процедури врз база на определени операции и релации,
- ii)* дефинирање на поими со исклучок на основните, при што во дефиницијата се земаат само минималните својства кои се доволни за распознавање на соодветните објекти,
- iii)* со логичко размислување се докажуваат својствата на објектите, освен основните својства познати како аксиоми.

Елементите од овие пристапи и методи се среќаваат и во сите други научни области, но од низа причини тие во математиката се наложуваат како единствено дозволиви. Затоа во натамошните излагања ќе се осврнеме на својствата на мислењето.

2. СВОЈСТВА НА МИСЛЕЊЕТО

2.1. ЕЛАСТИЧНОСТ НА МИСЛЕЊЕТО

Еластичноста на мислењето се карактеризира со умењето лесно да се премине од еден кон друг начин на решавање на проблемот, да се наоѓаат нови начини за решавање на проблемите при промена на условите, да се реструктурира системот од сопствени знаења, што ќе овозможи усвојување нови знаења. Ќе разгледаме еден пример.

Пример. Задачата:

На колку начини на тројца ученици може да им се поделат 8 исти моливи, но така што секој од нив да добие барем по еден молив?

Ќе ја решиме на два различни начини, при што преминот од едниот на другиот начин се должи токму на еластичноста на мислењето.

I начин. На следниот цртеж е дадена поделба на 8 исти моливи на тројца ученици, така што првиот ученик да добие два, вториот четири и третиот два молива.

••|••••|••

Сите можни поделби се дадени во следната табела (бројот x го означува бројот на поделбите):

Првиот добива	Вториот и третиот добиваат	x
1 молив	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	6
2 молива	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	5
3 моливи	1+4, 2+3, 3+2, 4+1	4
4 моливи	1+3, 2+2, 3+1	3
5 моливи	1+2, 2+1	2
6 моливи	1+1	1
	Вкупно	21

Според тоа, 8 моливи можат да се поделат на тројца ученици, но така што секој од нив ќе добие барем еден молив на 21 начини.

II начин. Ако го искористиме горниот цртеж и празнините меѓу моливите, кои ги има 7, ги означиме со броевите 1,2,3,4,5,6 и 7 добиваме нова ситуација која е прикажана на следниот цртеж.

•¹•²|•³•⁴•⁵•⁶|•⁷•

Понатаму, забележуваме дека поделбата на цртежот е определена со празнините 2 и 6, т.е. бројот со 26. Јасно, на секоја поделба на моливите и со-

одветствува по еден двоцифрен број, на различни поделби различни броеви. Обрато на секој од броевите дадени во следната табела му соодветствува една и само една поделба.

12	13	14	15	16	17
23	24	25	26	27	
34	35	36	37		
45	46	47			
56	57				
67					

Вакви двоцифрени броеви има 21, па оттука следува дека и бројот на поделбите на 8 исти моливи на тројца ученици, така што секој ученик добива барем по еден молив, е еднаков на 21. ♦

Ефективен начин за развивање на еластичноста на математичкото мислење и создавање услови за негово појавување кај учениците е сознанието откривање на сите активности кои можат да се реализираат при усвојувањето и примената на секоја теорема. Јасно, сè ова придонесува и за систематизирање на знаењата.

2.2. ШАБЛОНИЗАЦИЈА НА МИСЛЕЊЕТО

Шаблонизацијата на мислењето е сериозна пречка за творечката дејност. Обично, таа се јавува како последица од неправилната организација на наставата и влијанието на погрешните аналогии, чија примена најчесто учителите целесообразно не ја насочуваат. Набљудувањата покажуваат дека при решавањето задачи учениците најчесто ги следат усвоените шаблони. Така, решавајќи ја неравенката

$$2 + 5x - 7x < 1$$

тие следејќи го шаблонот за решавање на аналогните равенки последователно добиваат

$$5x - 7x < 1 - 2, \quad -2x < -1$$

од каде наместо $x > \frac{1}{2}$ наоѓаат $x < \frac{1}{2}$.

Со шаблонизацијата на мислењето се објаснуваат и карактеристичните грешки по алгебра кои ги прават учениците, како на пример “скратувањето”

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}.$$

Со шаблонизацијата на мислењето е поврзан и ефектот на таканаречената “функционална стабилност”, според кој објектот се користи само во дадената форма, при што не се бара негов нов квалитет кој од условите со кои е дефиниран проблемот најчесто не може јасно да се види, но сепак тој следува од некоја теорема или дефиниција. На пример, со ова се објаснуваат и тешкотиите со кои учениците се среќаваат при решавање на следнава задача:

Паралелните прави AB и CD се пресечени со правата OD . Еден од внатрешните агли во точката O е еднаков на 130° и полуправата OM е симетрала на овој агол. Да се најде $\angle OMD$.

Тешкотиите се јавуваат на симетралата OM како трансферзала, односно од неможноста учениците да ја согледаат и оваа карактеристика на OM . Ваквата ситуација може да биде и последица на нецелосното усвојување на дефинициите, аксиомите и теоремите, бидејќи токму на нив се потпира согледувањето на новата карактеристика на даден објект.

За да се надмине шаблонизацијата во мислењето, потребно е учениците да се насочуваат на начин како што тоа го прават искусните учители, кои за оваа потреба најчесто ги користат зборовите:

- Обиди се да ја решиш оваа задача на друг начин, запомни има многу начини за решавање, а не еден.
- Немој да ги користиш само стандардните методи.
- Дали може оваа задача да се формулира и на друг начин?

Покрај насочувањето на учениците со помош на презентираниве или слични прашања, пожелно е учителот да користи некои “нематематички” задачи, како што е следната:

Славко со синот и Јордан со синот се на риболов. Славко уловил толку риби колку што уловил и неговиот син, а Јордан уловил три пати повеќе риби од својот син. Вкупно се уловени 35 риби. Синот на Славко се вика Никола. Како се вика синот на Јордан?

На крајот од овој дел да забележиме дека шаблонизацијата на мислењето нема само негативни последици. Имено, таа помага да не се усвојуваат веќе усвоените знаења за операциите, кои преку повеќекратното повторување преминуваат во технички процедури, а исто така, повторно да не се усвојуваат веќе усвоените формули и теореми.

2.3. ДЛАБОЧИНА НА МИСЛЕЊЕТО

Длабочината на мислењето се карактеризира со умеењето да се проникнува во суштината на изучуваните факти, да се согледа нивната врска со други факти, да се моделираат различни ситуации, да се согледа како тие модели можат да се применат во практиката итн.

Длабочината на мислењето може да се тестира и да се формира со помош на прашања и на задачи формулирани специјално за таа намена, како што е следнава:

За реалните броеви се дефинирани операциите: собирање, множење и степенување (која е делумна). Зошто кај степенувањето имаме две инверзни операции: коренување и логаритмирање, додека кај собирањето и множењето имаме само по една инверзна операција, а тоа се одземањето и делењето, соодветно.

Јасно, одговор на ова нестандартно прашање може да се очекува само од учениците кај кои постои поголема длабочина во мислењето. Имено, само тие ќе забележат дека степенувањето не е комутативно, односно дека $a^b \neq b^a$ и затоа е можно да има повеќе од една инверзна операција.

Овде уште да забележиме дека структурирањето на математичките знаења и нивното усвојување ја претпочитува длабочината на мислењето, но тоа истовремено и неа ја развива, односно придонесуваат за надминување на површното мислење.

2.4. ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТ НА МИСЛЕЊЕТО

Целесообразноста на мислењето претставува стремеж да се оствари разумен избор на методи и средства за решавање на некој проблем, при што постојано се ориентираме кон целта поставена во проблемот и кон наоѓањето најкратки патишта за остварување на таа цел. Докажувањето теореми и воопшто решавањето задачи во наставата е незаменливо средство за развивање на умеењето за избор на средства (дефиниции, аксиоми, теореми) за постигнување на дадена цел. Да разгледаме еден пример.

Пример. При изучувањето на простите и сложените броеви често пати се среќаваме со задачи од видот:

а) Докажи дека за секој природен број $n > 1$ бројот $n^4 + 4$ е сложен.

б) Докажи, дека природниот број $2^{2006} + 5^{2004}$ е сложен.

в) Докажи, дека бројот од видот $4n^4 + 1$, $n \in \mathbf{N}$ е прост само ако $n = 1$.

г) Докажи, дека за секој $n > 1$ природниот број $n^4 + 4^n$ е сложен.

д) Докажи, дека природниот број $2005^4 + 4^{2005}$ е сложен.

Негувањето на целесообразноста на мислењето учителот може да го постигне со следнава постапка:

- учениците да согледаат дека секој од дадените броеви е од видот $a^4 + 4b^4$,
- да побара од учениците, со помош на формулите за скратено множење $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ и $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ да го докажат идентитетот на Софија Жермен:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab),$$

- секој од дадените броеви да го запишат во облик $a^4 + 4b^4$ и да го применат претходно докажаниот идентитет. ♦

Целесообразноста на мислењето е тесно поврзана со љубопитноста на човекот и најчесто е претставена со прашањето: “Дали ова е вака?”, “Зошто?”, “А што ќе биде ако постапам вака?” итн.

Како што веќе рековме, дејноста на човекот е поврзана со постигнувањето на некоја цел. Затоа, отсуството на определување на целта и нецелесообразноста во мислењето водат до бесперспективност на дејството, а и на целата дејност.

2.5. РАЦИОНАЛНОСТ НА МИСЛЕЊЕТО

Целесообразноста на мислењето овозможува појавување на уште едно негово својство, а тоа е рационалноста. Ова својство се карактеризира со економичност во однос на времето и на средствата за решавање на даден проблем. Во наставата по математика тоа се појавува преку таканаречената рационалност при пресметувањата. Последното се заснова на некои општи тврдења, во кои во готов вид, како во “концентрат”, се содржат други операции и наместо сите нив се извршува само едно дејство, на пример, формулите за скратено множење. Овој факт придонесува рационалните дејства да бидат привлечни за учениците и тоа треба да се искористи во мотивирањето на учениците да учат математика.

Очигледно, особености на мислењето, шаблонизацијата и рационалноста се поврзани меѓу себе. Имено, за да се постигне рационалност во мислењето се користат алгоритми и теореми, кои како готови шаблони се применуваат во практиката. Освен тоа, рационалноста се должи на фактот дека алгоритмите и теоремите се однесуваат на цели класи објекти. Затоа, рационалноста на мислењето е во тесна врска со широчината на мислењето.

2.6. ШИРОЧИНА НА МИСЛЕЊЕТО

Широчината на мислењето се карактеризира со способноста да се опфатат проблемите во целост, да се прошири примената на добиените резултати итн.

На пример, задача: “Дали броевите 276276, 458458, 764764 се делат со 13?”, можеме да ја решиме со непосредна проверка. Но, ако овие броеви ги запишеме во облик

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc},$$

тогаш од $13 \mid 1001$ следува дека броевите се деливи со 13. Јасно, тука веднаш можеме да заклучиме дека овие броеви се делат и со 7 и со 11.

Примената на математичката симболика и техничките процедури треба сознајно да се користат за да се убедат учениците во рационалноста и во силата на математичката симболика, а заедно со тоа да се развива и широчината на мислењето. Ова може да се постигне со добро избрани системи задачи, така што по решавањето на неколку вакви задачи да се даде општа задача, на која претходните и се парцијални случаи, и таа да се реши.

2.7. КРИТИЧНОСТ НА МИСЛЕЊЕТО

Критичноста на мислењето е својство различните мислења да не се прифаќаат без доволно аргументи, туку тие да подлежат на проценка. Јасно, критичноста на мислењето е еден од квалитетите, кои човештвото го довеле до неопходноста од убедување во точноста на тврдењето и наоѓање објективни критериуми за проценка на нивната вистинитост. Убедувањето на личноста во точноста на тврдењата е ефективно средство за развивање на критичноста кај учениците. Притоа треба да се има предвид дека ова е најдобриот начин во наставата по математика учениците да се запознаат со дедуктивниот начин на мислење и со неговото реално практикување.

*

* *

Негувањето на квалитетите на мислењето, т.е. подобрувањето на истите треба да биде континуирана активност на секој учител. Токму затоа, како при усвојувањето на нови знаења и умења, така и при утврдувањето на истите и при негувањето на способностите на учениците, потребно е осмислено делување во насока на подобрување на квалитетите на мислењето на секој ученик одделно. На пример, во наставата по математика тоа може да се постигне со решавање на наменски формирани системи задачи.

На крајот од овој дел да забележиме дека евристичката дејност во наставата не е можна, доколку кај учениците не се на завидно ниво развиени: *еластичноста, длабочината, целесобразноста, широчината и критичноста* на мислењето.

IV ГЛАВА

НАУЧНИ МЕТОДИ

1. НАУЧНИ МЕТОДИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

За проучување на природните појави и другите односи во реалниот свет, човекот користи посебни средства за истражување, наречени научни методи. *Научен метод* претставува начин на согледување на такви факти кои ќе му овозможат на набљудувачот, т.е. на истражувачот, да открие општи законитости за разгледуваните објекти или појави.

При изучувањето на математиката, ученикот се поставува во слична ситуација како научникот: тој за себе за прв пат си ги “открива” математичките вистини, сам или со помош на учителот. Затоа научните методи кои се застапени во математичките истражувања служат и како наставни методи.

Во процесот на учењето на математиката, учениците имаат можности да ги совладуваат научните методи, на кои подетално ќе се осврнеме во следниве разгледувања.

1.1. НАБЉУДУВАЊЕ И ЕКСПЕРИМЕНТ

Набљудувањето е научен метод кој се спроведува по однапред определен план, со цел да се открие, утврди и изучи некое својство на одредени предмети и појави или поврзаноста со други предмети и појави. Притоа, предметите и појавите најчесто се разгледуваат во нивната природна средина.

Јасно, треба да се прави разлика меѓу набљудувањето и обичната перцепција. Перцепцијата е само непосреден одраз на даден предмет или појава во моментот на нивното дејство врз сетилните органи, додека набљудувањето е планско, организирано и управувано перцепирање на определен предмет или појава и тоа се врши за да се постигне определена цел.

Под *експеримент* се подразбира таков метод на изучување на предметите и појавите, при кој истражувачот интервенира во нивната природна состојба и развиток, создавајќи вештачки услови, разложувајќи ги на делови или соединувајќи ги со други предмети и појави. Притоа, секој предмет или појава е подложен на набљудување, така што можеме да сметаме дека експериментот и набљудувањето се два тесно поврзани метода.

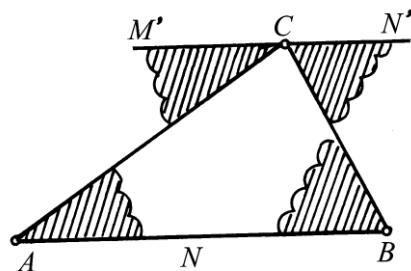
Набљудувањето и експериментот се карактеристични за експерименталните науки. Математиката не е експериментална наука, но овие методи имаат важна улога во наставата по математика, особено во основното образование. Овие методи се тесно поврзани со лабораториската работа по математика, особено во наставата по геометрија, каде тие се користат за создавање услови кои на учениците ќе им овозможат да осознаат очигледни законитости, факти во геометријата или идеи за докази на некои тврдења. Притоа, за тие да бидат ефективно средство во наставата по математика, пожелно е определено време да бидат посебна цел во наставата по математика, што значи дека учителот треба да ги оспособи учениците за набљудување и за експериментирање.

Пример 1. Во VI одделение се изучува *теоремата за збирот на внатрешните агли во триаголник*.

Прво, на учениците им се задава задача да нацртаат триаголник во тетратките, да ги измерат неговите внатрешни агли и да го најдат нивниот збир. Некои ученици ќе најдат дека збирот е помал од 180° , други дека е поголем од 180° , а трети дека е точно 180° ! Учениците нагудуваат дека збирот треба да е 180° , а другите резултати ги објаснуваат со грешки во мерењето. На овој начин тие откриваат дека “*збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180°* ”.

Следниот експеримент ќе го потврди ова тврдење и ќе даде идеја за негов доказ.

Секој ученик има подготвено триаголник пресечен од хартија. На учениците им се предлага да отсечат два негови агли и да ги наместат на третиот агол, како на цртежот 1.

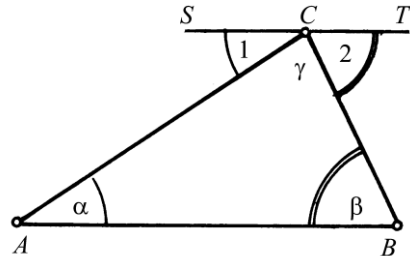


Цртеж 1

Учениците забележуваат дека трите агли, со заедничко теме C , формираат рамен агол, што значи дека нивниот збир е 180° . Но, дали е сигурно дека отсечките $M'C$ и CN' лежат на иста права? Дали тоа не е искршена линија, која само малку отстапува од права линија, а ние тоа не

можеме да го забележиме? Јасно, во тој случај збирот на аглие нема да биде 180° !

Спроведениот експеримент не дава доказ за нашето тврдење. Меѓутоа, анализирајќи го цртеж 2 можеме да согледаме една потврда на горната хипотеза, како и пат за еден доказ. Наместо да ги пресечуваме двата агли и да ги поставуваме до третиот, ние ќе ги нацртаме полуправата CS така што $\angle SCA = \alpha$ и полуправата CT така што $\angle CTB = \beta$. Понатаму учениците лесно ќе го спроведат доказот на нашето тврдење. ♦



Цртеж 2

Набљудувањето и експериментот многу често може да му помогнат на ученикот сознательно да усвои одредени поими.

Пример 2. а) При изучувањето на поимите прост и сложен број ученикот полесно ќе навлезе во нивната суштина ако претходно го набљудува разложувањето на множители на неколку природни броеви и потоа ако спроведе такви разложувања за повеќе броеви. На пример,

$$3 = 1 \cdot 3, \quad 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 7 = 1 \cdot 7, \quad 10 = 1 \cdot 2 \cdot 5, \quad 12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4$$

итн. Со набљудување ученикот забележува дека броевите 3 и 7 имаат точно по два делитела, додека броевите 6, 10 и 12 имаат повеќе од два делитела. Но, што се случува со бројот на делителите на другите природни броеви? Сега од учениците се бара да направат разложувања и на други природни броеви, при што ќе спроведат плански експеримент, т.е. последователно ќе ги разложуваат броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Во овој случај набљудувањето и експериментот му овозможуваат на ученикот сознательно да ја усвои дефиницијата на прост и сложен број (*прост број* е таков природен број кој има точно два различни делители, а *сложен број* е природен број кој има три или повеќе различни делители), а исто така да заклучат дека бројот 1 не е ниту прост ниту сложен број.

б) При изучувањето на аритметичката прогресија ученикот полесно ќе навлезе во нејзината суштина ако претходно набљудува неколку примери. На пример, учителот ги задава низите:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots \text{ и } 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots$$

Со набљудување ученикот забележува дека два последователни члена во првата низа меѓусебно се разликуваат за 3, а во втората низа се разлику-

ваат за $\frac{1}{2}$. Врз основа на набљудувањето ученикот сознателно ја усвојува дефиницијата на *аритметичката прогресија*. Понатаму, на прашањето на учителот каква е врската на секои три последователни членови на секоја од овие низи, учениците лесно ќе воочат дека средниот член е аритметичка средина на другите два члена. Аналогно, со пригодни прашања на конкретните примери можат да се воочат сите својства на аритметичката прогресија, а потоа да се премине на изведувањето на формулите во општ случај. Практиката покажува дека ваквата постапка, т.е. примената на методот на набљудување и на експеримент, во голема мера го олеснува усвојувањето на својствата на аритметичката прогресија. ♦

Иако набљудувањето и експериментот се важни во наставата по математика, сепак да забележиме дека овие методи не се водечки при математичкото истражување. Затоа, учителот треба на соодветен начин да им укажува на учениците дека резултатите од набљудувањето и од експериментот не треба да се прифаќаат како доказ на некое својство, туку тие треба да се користат само како помошно средство за да се открие својството.

1.2. СПОРЕДУВАЊЕ

Споредувањето е мисловна операција при која се врши мисловно откривање на сличностите и разликите меѓу предметите и појавите кои се истражуваат.

При користењето на овој метод неопходно е да се уважуваат следниве барања, познати како принципи на споредување:

- 1) споредувањето треба да има смисла, т.е. треба да се споредуваат објекти кои имаат определена врска,
- 2) споредувањето треба да се реализира плански, т.е. треба јасно да се издвојат оние својства кои се споредуваат, и
- 3) споредувањето треба да биде целосно, т.е. до крај реализирано.

Методот на споредување се среќава на секој чекор. Така, при откривањето на теоремата за збирот на внатрешните агли на триаголникот, со завршувањето на експериментот и набљудувањето паралелно се вршат споредувања на резултатите кои ученикот претходно ги добил или се добиени од други ученици. Аналогно, во пример 2 б) се споредуваат својствата на две конкретни низи, а како резултат на споредувањето да се издвојат заедничките својства на овие низи и тие да послужат како основа за изведување на својствата на аритметичката прогресија.

Да забележиме дека методот на споредување е корисен за изучување на складноста и сличноста на триаголниците, за изучување на многуголниците, аритметичката и геометриската прогресија итн, при што се вршат експерименти и набљудувања, а заедно со тоа се врши и споредување. Всушност, речиси секоја примена на методите на експеримент и набљудување е придружена со методот на споредување, кој е мошне корисен и при решавањето задачи од определен тип.

1.3. АНАЛИЗА И СИНТЕЗА

Анализата и синтезата како научни методи имаат особено значење за развитокот на сите науки, а особено на математиката. Во наставата по математика тие се пројавуваат на најразлични начини, и тоа: како методи за решавање задачи, како методи за воведување математички поими и за изучување на нивните својства, како методи за докажување на теореми итн.

Анализата го означува расчленувањето на даден предмет или појава на неговите карактеристични елементи, сè со цел тие поединечно да се испитаат, при што треба да се води сметка дека тоа се составни делови на една целина. Како мисловна операција анализата поаѓа од последиците и се движи кон причините коишто довеле до тие последици.

Синтезата го означува составувањето на деловите или својствата на предметите и појавите во единствена целина. Синтезата поаѓа од причините и се движи во насока на последиците кои се предизвикани од овие причини.

Анализата и синтезата се најважни психолошки карактеристики на мислењето, бидејќи во процесот на мислењето прво анализираме, потоа вршиме синтеза на резултатите од анализата, а на крај доаѓаме до воопштувањето, систематизирањето и апстрахирањето, кои се резултат од анализирањето и од синтетизирањето. Овде треба да се има предвид дека во мисловните процеси анализата постојано преминува во синтеза и обратно, што значи дека во процесот на создавање нема два одделни дела за кои можеме да кажеме дека едниот е анализа, а другиот е синтеза. Според тоа, анализата и синтезата како методи се заемно поврзани и тие практично формираат единствен *аналитичко-синтетички* метод.

Со анализата решението на дадена задача се расчленува на неколку делови, кои потоа со помош на синтезата се обединуваат во решение на задачата. Ова доаѓа до израз како при решавањето конструктивни задачи во геометријата, така и при решавањето на таканаречените текстуални за-

дачи. Имено, конструктивните задачи во геометријата најчесто се решаваат според шемата: *анализа, конструкција, доказ и дискусија*, при што во докажувањето на правилноста на конструкцијата, најчесто анализата и самата конструкција имаат клучна улога, а тоа важи и за дискусијата.

Аналитичко-синтетичкиот метод ќе го илустрираме на следниов пример.

Пример 1. Од две парчиња легура со маси $6kg$ и $3kg$ и со различни проценти на бакар, пресечено е по едно парче со иста маса. Секое од пресечените парчиња е стопено со остатокот од другото парче и при ова претопување се изедначил процентот на бакар во двете легури. Колкави се масите на пресечените парчиња?

Решение. *Анализа.* Со A ја означуваме легурата чија маса е $6kg$, а со B легурата чија маса е $3kg$. Нека во $1kg$ од легурата A има u kg бакар, а во $1kg$ од легурата B има v kg бакар. Од условот на задачата имаме $u \neq v$. Нека масите на отсечените парчиња од легурите A и B се x kg . По претопувањето на пресечените парчиња со остатоците од другите парчиња, во $1kg$ од легурата A ќе има $\frac{(6-x)u+xv}{6}$ kg бакар, а во $1kg$ од легурата B ќе има $\frac{(3-x)v+xi}{3}$ kg бакар.

Синтеза. Бидејќи процентот на бакар во двете новодобиени легури е еднаков, имаме

$$\frac{(6-x)u+xv}{6} = \frac{(3-x)v+xi}{3}.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$(u-v)(9x-18)=0$$

и како $u \neq v$ добиваме $9x-18=0$, т.е. $x=2$. ♦

1.4. ВООПШТУВАЊЕ, СИСТЕМАТИЗАЦИЈА И АПСТРАКЦИЈА

Воопштувањето е резултат на мисловното обединување на издвоени општи својства, кои се суштински за дадена класа предмети и појави. Притоа, може да се каже дека воопштувањето претставува преминување од дадено множество објекти A кон разгледување на пошироко множество објекти B , коишто го содржат примарното множество објекти A .

На пример, ние вршиме воопштување кога преминуваме

- 1) од разгледување на триаголниците кон разгледување на многуаголниците,
- 2) од разгледување на аритметичките и геометриските прогресии кон разгледување на низите реални броеви,
- 3) од разгледување на тригонометриските функции од остар агол кон разгледување на тригонометриските функции од произволен агол,
- 4) од разгледување на степените со природен степен показател кон разгледување на степените со целоброен показател, а потоа кон разгледување на степените со рационален и на крај со реален показател,
- 5) при замена на константа со променлива итн.

Забележуваме дека во некои случаи може да се врши воопштување од предмети кон цела класа која ги содржат овие предмети, а во други случаи од дадено множество кон пошироко множество.

Пример 1. Ако при решавањето на задачата:

Дали броевите 276276, 458458, 764764 се делат со 13?

дадените броеви ги запишеме во вид

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}, \quad (1)$$

и од $13 \mid 1001$ заклучиме дека тие се деливи со 13, тогаш сме извршиле замена на константите со променлива. Исто така, од (1) можеме да заклучиме дека овие броеви се делат и со 7 и со 11, што значи дека во случајот сме извршиле натамошно воопштување, кое не довело до нови својства на броевите од видот \overline{abcabc} . ♦

Ќе разгледаме уште еден пример на воопштување.

Пример 2. При откривањето на формулата за n -от член на геометриската прогресија може да се почне од конкретен пример, како

$$2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \dots$$

и да се изразат нејзините членови со помош на првиот член $a_1 = 2$ и количникот $q = \frac{2}{3}$. Потоа, оваа задача може да се разгледа за произволна геометриска прогресија

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

со прв член a_1 и количник q . Имаме:

$$a_2 = a_1q, a_3 = a_2q = (a_1q)q = a_1q^2, a_4 = a_3q = (a_1q^2)q = a_1q^3 \text{ итн.}$$

Понатаму, овие равенства се воопштуваат во една формула $a_n = a_1q^{n-1}$, со која може да се пресмета општиот член на геометриската прогресија. ♦

Обратниот мисловен процес на воопштувањето се нарекува *специјализирање*. Во овој процес се издвојува некое својство од множеството својства на изучуваниот предмет или појава. Може да се каже дека специјализирањето претставува преминување од дадено множество M кон некое негово подмножество N . На пример, ние вршме специјализирање кога од разгледување на множеството многуаголници преминуваме кон множеството правилни многуаголници, а специјализирањето можеме да го продолжиме со разгледување на правилни многуаголници со конкретен број страни, петаголник, квадрат, рамностран триаголник и слично.

Општо земено, специјализација вршме кога од дадено множество преминуваме кон негово подмножество (од множеството цели броеви кон множеството прости броеви), вршме замена на променлива со константа и воведуваме ограничување (триаголник \rightarrow рамнокрак триаголник \rightarrow рамностран триаголник).

Систематизацијата е мисловна дејност при која изучуваните објекти се организираат во определен систем, врз основа на избран принцип (својство).

На систематизацијата и претходат: анализа, синтеза, воопштување и споредба, чии резултати се користат и се реализираат со систематизацијата. Како резултат на систематизацијата се добиваат системи од поими, кои се составен дел од некоја дедуктивна теорија. Најважен вид систематизација е *класификацијата*, која претставува распоредување на објектите по групи, врз основа на констатирани сличности и разлики меѓу нив. Да забележиме дека систематизацијата не се сведува на класификација, туку таа ја опфаќа класификацијата.

Пример 3. При изучувањето на поимот триаголник, обично од учениците се бара да цртаат разни триаголници, при што нивното внимание се насочува кон страните или агли на секој од нацртаните триаголници. По соодветното набљудување, споредување и анализирање се врши систематизирање во кое учениците согледуваат дека кај некои триаголници сите три агли се остри, кај други има еден агол кој е прав, а кај трети има агол кој е тап. Потоа, постојат триаголници кај кои сите три страни се со различна должина, но постојат и такви триаголници кај кои две или сите три страни се со иста должина. ♦

Во процесот на создавање на реалниот свет, кај човекот се одразуваат објектите и појавите на два начина и тоа како сетилни одрази и во форма на поими кои претставуваат слика на реалните објекти. Притоа, поимите се формираат во свеста на човекот со занемарување на несусштинските својства на изучуваниот предмет или појава и со воопштување, со што се поедноставува изучувањето на предметот, односно појавата, кои во реалниот свет најчесто се разнообразни.

Мисловната операција со која се врши занемарување на несусштинските и нагласување на суштинските својства на даден предмет или појава се нарекува *апстрахирање*, а резултатот на оваа мисловна операција е наречен *апстракција*.

Апстракцијата може да биде *сетилна* и *мисловна*. Мисловната апстракција добиена по пат на воопштување формира нов идеален предмет, кој го нарекуваме *поим*. Така, сите математички поими се формираат со помош на мисловната апстракција. Да забележиме дека мисловното одделување на суштинските од несусштинските својства се реализира со помош на воопштување, па затоа апстракцијата не може да се реализира без воопштувањето. Според тоа, апстракцијата и воопштувањето се клучни мисловни операции при формирањето на новите поими.

Методот на апстракција е многу важен за усвојувањето на математичките содржини, поради што учителот треба што е можно почесто да го посочува неговото појавување во одделни случаи.

Ќе дадеме еден едноставен пример на апстрахирање.

Пример 4. Треба да се реализира нафтовод меѓу две места A и B . Нафтоводот е реален објект кој има свои својства: должина, пропустлива моќ, форма на цевките, внатрешно премачкување, квалитет на металот од кој се изработени цевките итн.

Почнувајќи од проектирањето, конструкторот прво е заинтересиран за должината на нафтоводот и неговата траса, без да ги зема предвид другите својства на објектот. Така, се јавува *првиот апстрактен модел на нафтоводот*: крива од точката A до точката B . Потоа конструкторот го проучува прашањето за пропустливата моќ, која зависи од напречниот пресек на цевките, формата на цевките, како и од внатрешното премачкување, кои се пресудни за силите на триење. Притоа, ако конструкторот води сметка и за трасата по која ќе се протега нафтоводот, се јавува *вториот апстрактен модел на нафтовод*, а тоа е геометриско тело. Во даден момент конструкторот води сметка за квалитетот на металот од кој ќе се изработат цевките, но и за надворешното премачкување со кое ќе се обез-

беди заштита на металот од корозија, што значи дека веќе има *трет апстрактен модел на нафтоводот*, а тоа е геометриска површина. ♦

Конкретизацијата е мисловен процес спротивен на апстракцијата. Таа ја открива содржината на научните апстракции, со вклучување на конкретни факти или врски.

Притоа, конкретизацијата може да биде *со илустрација, потврдување на некоја апстрактна ситуација или со примена на некое својство во конкретни услови*.

Пример 5. а) Комутативниот закон за собирање во множеството рационални броеви: $x + y = y + x$ може да се конкретизира со равенството

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15+8}{20} = \frac{8+15}{20} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}.$$

б) При докажувањето на тврдењето: *секој прост број поголем од 3 е од обликот $6k \pm 1$, k е природен број*, ние можеме ова својство да го провериме со конкретни примери: $5 = 6 \cdot 1 - 1$, $7 = 6 \cdot 1 + 1$, $17 = 6 \cdot 3 - 1$ и слично. Се разбира, овие примери не го докажуваат нашето тврдење, туку можат само да го потврдат или да го негираат искажаното тврдење.

в) Откако учениците ќе ја усвојат формулата

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

неа можеме да ја примениме при конкретни пресметувања, какви што се следниве:

$$\begin{aligned} \sqrt{73^2 - 48^2} &= \sqrt{(73+48)(73-48)} = \sqrt{121 \cdot 25} = 11 \cdot 5 = 55 \text{ и} \\ 73^2 &= 73^2 - 3^2 + 3^2 = (73-3)(73+3) + 9 = 70 \cdot 76 + 9 = 5320 + 9 = 5329. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

На крај од овој дел да забележиме дека во процесот на научното истражување, а исто така, и во процесот на наставата, претходно разгледуваните научни методи меѓусебно се испреплетуваат, и затоа нивното одвоено разгледување има смисла само во процесот на нивното изучување, но не и во практиката, што може да се види и од следниов пример.

Пример 6. На учениците им се соопштува дека според познатата анегдота, големиот германски математичар Гаус (1777-1855) како десетгодишно дете, молневито ја решил следнава задача:

Да се најде збирот на сите природни броеви од 1 до 100.

Понатаму, откако ќе се сочека учениците да ги изнесат своите идеи за решавање на оваа задача, доколку се добие “плодна” идеја таа се разрабо-

тува, а ако таква идеја не се добие на учениците им се соопштува: Се претпоставува дека, Гаус при решавањето ја користел следнава табела од два реда составена од броевите 1, 2, ..., 100:

$$A_{100} : \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Понатаму, збирот на броевите во табелата A_{100} можеме да го пресметаме на два начини. Првиот начин се состои во тоа да се пресметаат збирите на броевите во секоја колона: $1+100$, $2+99$, $3+98$, ..., $98+3$, $99+2$, $100+1$ и потоа сите зборови да се соберат. Така се добива бројот

$$(1+100) \cdot 100. \quad (2)$$

Вториот начин за определување на збирите на сите броеви во табелата A_{100} се сведува на тоа да се најдат збирите во секој ред:

$$1+2+3+\dots+98+99+100 \text{ и } 100+99+98+\dots+3+2+1.$$

Потоа овие два збира се собираат и се добива

$$2 \cdot (1+2+3+\dots+98+99+100). \quad (3)$$

Конечно, ако ги изедначиме резултатите од (1) и (2) го добиваме решението на задачата

$$1+2+3+\dots+98+99+100 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

Во следниот чекор на учениците им се соопштува следнава задача, со што всушност се прави обид да се усвои научниот метод *воопштување*.

Најди формула за пресметување на збирот $1+2+3+\dots+n$.

Се разбира, учениците треба сами да ја решат поставената задача, но притоа пожелно е учителот во повеќе наврати да потенцира дека во случајот се воопштува идејата на Гаус.

Понатаму, се разгледува следнава задача, која е слична на претходната задача за наоѓање на збирот на првите n природни броеви. Тоа е задачата:

Најди го збирот на квадратите на првите n природни броеви.

Бараниот збир го означуваме со S , т.е. ставаме

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2.$$

Начинот за пресметување на овој збир не е така очигледен, но учениците ќе се обидат да ја искористат идејата на Гаус и ќе запишат

$$B_n : \begin{array}{cccccccc} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & (n-1)^2 & (n-2)^2 & n^2 \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \dots & 3^2 & 2^2 & 1^2 \end{array}$$

Меѓутоа, во овој случај збирот на броевите во секоја колона од табелата B_n е различен, на пример

$$n^2 + 1, n^2 - 2n + 5 \text{ итн.}$$

па учениците брзо ќе согледаат дека на овој начин не може да ја решат задачата. Во случајот имаме појава на инерција на неплодна идеја, која за среќа учениците брзо ја совладуваат. Во натамошните разгледувања, од посебна важност е учениците самостојно или со минимална помош своето внимание да го насочат кон формулата

$$(p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$

која може да се запише во видот

$$(p+1)^3 - p^3 = 3p^2 + 3p + 1.$$

Јасно, последната формула е точна за секој природен број p и ако истата ја запишеме за $p = 1, 2, \dots, n$ добиваме

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

.....

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Понатаму, учениците лесно ќе согледаат дека треба да ги соберат последните равенства, при што ќе го добијат равенството

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{n \text{ pati}}$$

од кое следува равенството

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \quad (4)$$

во кое е се познато, со исклучок на збирот S , кој всушност го наоѓаме од ова равенство и добиваме

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (5)$$

Како што видовме, постапката за наоѓање на збирот на квадратите на првите n природни броеви во целост се разликува од постапката за наоѓање на збирот на првите n природни броеви. Логично е учениците да се обидат претходната постапка да ја искористат за наоѓање на збирот на третите степени на првите n природни броеви, да го означиме со D . Притоа, природно е да се очекува дека по аналогија ќе ги запишат формулите

$$(p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$

$$(p+1)^4 - p^4 = 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$

од што, повторно по аналогија, ќе добијат

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$

.....

$$(n+1)^4 - n^4 = 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1$$

Понатаму, ги собираат претходните равенства и го добиваат равенството

$$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + \dots + n^2) + 4(1 + \dots + n) + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ pati}}$$

од кое следува равенството

$$(n+1)^4 - 1 = 4D + 6S + 4 \frac{n(n+1)}{2} + n. \quad (6)$$

Во последното равенство се е познато, со исклучок на збирот D , кој всушност го наоѓаме од ова равенство и добиваме

$$D = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad (7)$$

Во натамошните разгледувања учениците, користејќи ја претходната постапка, по инерција ќе се обидат да го најдат збирот на четвртите степени на првите n природни броеви, па збирот на петтите степени итн. Меѓутоа, ова е веќе усвоена постапка и секако не води кон нов квалитет, а уште помалку кон усвојување на научните методи. Затоа, учителот треба да ја насочи натамошната работа кон постигнување на нов квалитет и како што ќе видиме во случајот тоа може да се направи со незначителна интервенција, со што всушност ќе се воведи методот *специјализација*.

Да ставиме

$$S_0 = 1^0 + 2^0 + \dots + n^0$$

$$S_1 = 1^1 + 2^1 + \dots + n^1$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

и да запишеме

$$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$$

.....

$$(n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1$$

Собирајќи ги последните равенства го добиваме равенството

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1 + S_0 \quad (8)$$

од кое наоѓаме $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Понатаму, користејќи ги претходните ознаки од равенствата (4) и (6) соодветно добиваме

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_2 + 3S_1 + S_0 \quad (9)$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0 \quad (10)$$

Во следниот чекор учениците треба да ја согледаат врската меѓу формулите (8)-(10) и улогата на Њутновата биномна формула за добивање на овие формули, т.е. овие формули да ги запишат во следниве видови:

$$(n+1)^2 - 1 = C_2^1 S_1 + C_2^2 S_0,$$

$$(n+1)^3 - 1 = C_3^1 S_2 + C_3^2 S_1 + C_3^3 S_0,$$

$$(n+1)^4 - 1 = C_4^1 S_3 + C_4^2 S_2 + C_4^3 S_1 + C_4^4 S_0,$$

каде $C_i^j, j \leq i$ се биномни коефициенти. Натомошните разгледувања треба да резултираат со воопштување на формулите (9)-(10), при што се добива обштиот израз за збирот S_k :

$$(n+1)^{k+1} - 1 = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + C_{k+1}^3 S_{k-2} + \dots + C_{k+1}^{k+1} S_0 \quad (11)$$

Треба да се очекува учениците, користејќи аналогни размислувања, да ја докажат формулата (11). Имено, треба да се очекува учениците самостојно да ги запишат следните равенства

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + C_{k+1}^3 1^{k-2} + \dots + C_{k+1}^{k+1} 1$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + C_{k+1}^3 2^{k-2} + \dots + C_{k+1}^{k+1} 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + C_{k+1}^3 n^{k-2} + \dots + C_{k+1}^{k+1} 1$$

потоа истите да ги соберат и после групирањето на собираците да ја добијат формулата (11).

Реализирањето на претходните разгледувања овозможува усвојување на научните методи воопштување, специјализирање и апстрахирање. Меѓутоа, како што може да се види овој пример овозможува и суштински да се усвои поимот *рекурзија*. За таа цел учениците прво треба да согледаат дека од равенството (11) може со помош на n и k да се изрази S_k , ако претходно ни се познати $S_{k-1}, S_{k-2}, \dots, S_1$ и S_0 , односно дека со помош

на формулата (11), ако е познат членот S_0 , тогаш последователно еден по друг можат да се изразат сите членови на низата $S_1, \dots, S_{k-1}, S_k, \dots$, што во нашиот случај е можно бидејќи $S_0 = n$. ♦

2. УСВОЈУВАЊЕ НА НАУЧНИТЕ МЕТОДИ ОД СТРАНА НА УЧЕНИЦИТЕ

Во процесот на наставата, претходно разгледуваните научни методи меѓусебно се испреплетуваат и затоа нивното одвоено разгледување има смисла само во процесот на нивното изучување, но не и во практиката. Како што рековме, усвојувањето на научните методи во наставата е една од приоритетните задачи. Притоа иако учителот треба да се стреми научните методи перманентно да се усвојуваат од сите ученици, сепак на овој дел посебно внимание треба да се обрне при работата со надарените ученици. Последното е особено важно, ако се има предвид дека:

- воглавно идните научни кадри се регрутираат токму од надарените ученици, и
- усвојувањето на практичните знаења и умења и стекнувањето со практичните способности, кои се неопходни за сите ученици, не претпочита целосно усвојување на научните методи.

Сепак, во историјата на науката постоеле обиди за пронаоѓање на универзален научен метод, а со самото тоа и универзална постапка за оспособување на младата популација за научно-истражувачка работа. Меѓутоа, како што може да се види од самата поделба на научните методи, вакво нешто не е можно, па затоа од крајот на минатиот век во повеќето образовни системи се форсира парцијалното усвојување на научните методи. Имајќи го предвид последното, важно е учителот во секоја прилика доследно да ги применува, без да ги потенцира научните методи, со што постапувајќи аналогно на претходно разгледуваните примери значително ќе придонесе истите да се усвојуваат од што е можно поголем број ученици.

На крајот од овој дел ќе дадеме три примери во кои читателот самостојно треба да согледа кои научни методи можат да се усвојуваат преку дадените системи задачи.

Пример 1. Запишани се последователни девет броеви, од кои првиот е бројот $a \neq 0$, а секој следен се добива со множење на претходниот со a . Најдете го производот на

- 1) првиот и деветтиот број,
- 2) вториот и осмиот број,

- 3) третиот и седмиот број и
- 4) четвртиот и шестиот број.

Што можете да кажете за добиените производи и квадратот на петтиот број? ♦

Пример 2. Пресметајте:

- 1) $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$,
- 2) $\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n(n-1)}$,
- 3) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$,
- 4) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$,
- 5) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,
- 6) $\frac{5}{1 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 11} + \frac{5}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{5}{(5n-4)(5n+1)}$ и
- 7) $\frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \frac{d}{a_3 a_4} + \dots + \frac{d}{a_{n-1} a_n}$, каде a_1, a_2, \dots, a_n се последователни членови на аритметичка прогресија со разлика d . ♦

Пример 3. Решете ги равенките:

- 1) $\sin 30^\circ \cos x + \cos 30^\circ \sin x = \frac{1}{2}$,
- 2) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$,
- 3) $\cos x + \sin x \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$,
- 4) $\cos x + \sin x = 1$,
- 5) $\cos x + 3 \sin x = 1$,
- 6) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sin(30^\circ + x) \sin(30^\circ - x)$,
- 7) $\sin(30^\circ + x) = \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{3}{4} \sin^2 x$,
- 8) $4 \sin(30^\circ + x) = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$,
- 9) $4 \sin(30^\circ + x) = 1 - 4 \sin^2 x$,
- 10) $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \sin(60^\circ + x) \sin(60^\circ - x)$,
- 11) $\sin(60^\circ + x) = \frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 x$ и
- 12) $4 \sin(60^\circ + x) = 4 \cos^2 x - 1$. ♦

V ГЛАВА

ВИДОВИ ЗАКЛУЧУВАЊЕ

1. ВИДОВИ ЗАКЛУЧУВАЊЕ И НИВНОТО МЕСТО ВО НАСТАВАТА

Мислењето е активен процес на сознавање при кој реалниот свет се одразува во свеста на човекот. Поради тоа, една од најважните задачи на современата настава е развивањето на мислењето кај учениците. Во овој контекст, наставата по математика има посебна улога.

Мислите можат да имаат различна структура. Градбата на одделни мисли и нивните посебни комбинации се нарекуваат форми на мислењето. Најважни форми на мислењето се поимите, тврдењата и расудувањата (заклучувањата).

Во овој дел ќе се осврнеме на заклучувањето како форма на мислењето и на неговото место во наставата по математика.

Неопходен инструмент во процесот на создавање е таканареченото логичко заклучување. Тоа се применува кога треба да се спроведе некое истражување, да се докаже некое тврдење, да се систематизираат знаења, да се провери хипотеза и слично.

Тврдењата од кои се гради ново тврдење се наречени *претпоставки (премиси)*, а новото тврдење кое се добива со споредување или со комбинирање на претпоставки е наречено *заклучок (извод)*.

Логичкото заклучување, т.е. изведувањето заклучок претставува мисловна операција со која се добива нов извод, нови знаења. Неговата вредност за процесот на сознавање е во тоа што со негова помош се добиваат нови знаења, без експериментирање или практична проверка, со што се прошируваат можностите за научно сознавање.

Заклучокот од едно расудување може да биде *точен (вистинит)*, ако се исполнети следниве два услова:

- 1) претпоставките се вистинити, и

- 2) законите на мислењето правилно се применуваат при логичкото оперирање со претпоставките, т.е. при нивното споредување и поврзување.

Расудувањето при кое е запазен условот 2) се нарекува *правилно расудување*. Нарушувањето на еден од овие услови при расудувањето може да доведе до лажен заклучок. Неправилноста во расудувањето може да биде:

- a) *логичка*, грешка во содржината на мислата или во формата на врската меѓу тврдењата при расудувањето (тавтологија, вртење во круг при докажувањето, нарушување на логичките закони),
- b) *зборовна*, неточна употреба на зборовите, мешање на различни значења на ист збор (омоними).

Постојат неколку форми на логичко заклучување: индуктивно, дедуктивно и аналогија.

2. ЗАКЛУЧУВАЊЕ ПО ИНДУКЦИЈА

Терминот *индукција* има три основни значења: *тоа е метод на расудување, метод на научно создавање и начин на изложување на материјалот во математичката литература и во процесот на наставата.*

Индукцијата, како *метод на расудување* претставува сложена мисловна операција при која се поаѓа од некои поединечни факти и од две или повеќе поединечни тврдења се доаѓа до општо тврдење. Како *научен метод*, индукцијата е многу блиска со гореопишаниот метод на расудување и таа е определена со намерата на научникот да проучи одредени својства на некое множество објекти. Оваа намера се реализира на следниов начин: се избираат одделни објекти, кај нив се изучуваат саканите својства, се констатираат саканите својства за овие објекти и на крај се изведува заклучок што ќе се однесува на сите објекти од разгледуваното множество.

Индукцијата како *начин на изложување на материјалот* во математичката литература и во процесот на наставата се карактеризира со преминување од поединечното кон општото, од познатото кон непознатото, од простото кон сложеното, т.е. во себе ги содржи повеќето барања на дидактичкиот принцип на научност. Притоа е неопходно на учениците да им се напомнува дека индуктивно добиениот заклучок е само *веројатно точен*, а за да бидат сигурни во неговата тој истиот треба да се *докаже*.

Вообичаена шема за изведување заклучок по индукција е следнава: Нека $M = \{a_i \mid i \in I\}$ е множество, а P е својство на елементите од M . Означуваме $P(x)$, ако елементот x го има својството P , а $P(\bar{x})$ ако елементот x го нема својството P . Нека својството P е констатирано за елементите $a_i \in M, i = 1, 2, \dots, k$. Тогаш, индуктивниот заклучок се изведува според следнава индуктивна шема:

$$\frac{P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_k)}{\text{Заклучок: веројатно } P(a) \text{ за секој } a \in M} \quad (1)$$

Ако множеството M е конечно и има k елементи, тогаш исказната формула

$$(\forall x \in M)P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_k) \quad (2)$$

е тавтологија, така што шемата

$$\frac{P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_k)}{\text{Заклучок: } P(a) \text{ за секој } a \in M}$$

е правило за заклучување, кое се нарекува *потполна индукција*. Јасно, добиениот заклучок е сигурно точен.

Ако $|M| > k$, при што M може да биде бесконечно множество, т.е. разгледаните k случаи не ги исцрпуваат сите можни случаи, тогаш заклучокот според шемата (1) не мора да биде сигурно точен, туку е само веројатно точен. Во овој случај, изведувањето заклучок според шемата (1) се нарекува *непотполна индукција* или само *индукција*.

Потполната индукција може да се примени и во некои случаи кога множеството M е бесконечно, ако M може да се разбие на конечен број дисјунктни подмножества и ако за секое од нив може да се докаже точноста на разгледуваното својство за елементите од множеството M .

Пример 1 (потполна индукција). Ако n е парен природен број од втората или од третата десетка, тогаш тој е збир на два прости броја.

Ги разгледуваме поединечните случаи:

$$12 = 5 + 7, \quad 14 = 7 + 7, \quad 16 = 3 + 13, \quad 18 = 5 + 13, \quad 20 = 7 + 13, \\ 22 = 3 + 19, \quad 24 = 7 + 17, \quad 26 = 3 + 23, \quad 28 = 5 + 23, \quad 30 = 11 + 19$$

Тука множеството $M = \{12, 14, 16, \dots, 30\}$ е конечно и е направена проверка за сите случаи, при што е констатирано дека тврдењето е точно за сите одделни случаи. ♦

Пример 2 (потполна индукција). За кои природни броеви n бројот $n^3 - n$ се дели со 3?

Множеството $M = \mathbf{N}$ го разбиваме на три дисјунктни множества:
 $M_1 = \{3k \mid k \in \mathbf{N}\}$, $M_2 = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{N}_0\}$, $M_3 = \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{N}_0\}$.

Ако $n \in M_1$, тогаш $n^3 - n = 3k(9k^2 - 1)$.

Ако $n \in M_2$, тогаш $n^3 - n = 3k(9k^2 + 9k + 2)$.

Ако $n \in M_3$, тогаш $n^3 - n = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)$.

Од претходните разгледувања следува дека $n^3 - n$ се дели со 3, за секој $n \in \mathbf{N}$.

Така, ако со $P(n)$ означиме $3 \mid (n^3 - n)$, тогаш

$$\frac{P(3k), P(3k+1), P(3k+2)}{\text{Заклучок: } P(n) \text{ за секој } n \in \mathbf{N}} \cdot \blacklozenge$$

Пример 3 (непотполна индукција). Да испитаеме колку е остатокот од делењето на бројот $4^n + 15n$ со 9, каде $n \in \mathbf{N}$.

За $n = 1$ добиваме $4^1 + 15 = 19 = 3 \cdot 6 + 1$, што значи дека остатокот е 1. За $n = 2$ добиваме $4^2 + 30 = 46 = 3 \cdot 15 + 1$, што значи дека остатокот е 1. За $n = 3$ добиваме $4^3 + 45 = 109 = 3 \cdot 36 + 1$, што значи дека остатокот е 1. Природно е да помислиме дека за секој $n \in \mathbf{N}$ при делењето на бројот $4^n + 15n$ со 9 се добива остаток 1. Во овој случај ја применуваме шемата на заклучување (1) и добиваме

$$\frac{P(1), P(2), P(3)}{\text{Заклучок: веројатно } P(n) \text{ за секој } n \in \mathbf{N}} \cdot$$

Да забележиме дека секој следен случај за кој тврдењето е точно значи само поткрепа на нашиот заклучок, но тоа не значи дека имаме доказ за изведениот заклучок. \blacklozenge

Следниов пример покажува дека непотполната индукција не мора да води кон точен заклучок.

Пример 4 (непотполна индукција). За секој $n = 1, 2, 3, \dots, 15$ е точно тврдењето дека од $n^2 + n + 17$ се добива прост број, но не е точно тврдењето дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $n^2 + n + 17$ е прост. Навистина, за $n = 16$ се добива $n^2 + n + 17 = 17^2$, кој е сложен број. \blacklozenge

Да забележиме дека дури и големите математичари изведувале погрешни заклучоци при примената на непотполната индукција, како што е тврдењето дека за секој $n \in \mathbf{N}$ бројот $n^2 - n + 41$ е прост, што не е точно, на пример, за бројот 42 (проверете!).

3. ДЕДУКТИВНО ЗАКЛУЧУВАЊЕ

Терминот *дедукција* има три основни значења, и тоа: *метод на расудување, метод на научно осознавање и начин на изложување на материјалот во математичката литература и наставата.*

Како *метод на расудување дедукцијата* претставува мисловна постапка со која, од едно или од повеќе точни тврдења земени како претпоставки, се изведува ново тврдење кое нужно следува од претпоставките, според правилата на логичкото мислење. Дедуктивното заклучување се врши од општото кон посебното или кон поединечното, но и од поединечното кон посебното. Тоа се заснова на логичките закони и правилата за извод. Интересно е да забележиме дека тука се важни само формата, структурата и точноста на содржината на тврдењето, но не и конкретната содржина. Постоенето на различни закони и правила за извод значи и постоење на различни шеми за дедуктивно заклучување.

Како *метод на научно осознавање* дедукцијата е многу блиска до претходно опишаниот метод на дедуктивно заклучување. Имено, за добивање ново знаење за некој објект или за група објекти, со дедукцијата се бара најблискиот вид во кој спаѓаат разгледуваните објекти, а потоа врз тие објекти се применува некој закон кој важи за целиот вид. Друга варијанта на дедукцијата како метод за научно осознавање е преминувањето од знаења на поопшти ставови кон знаења на помалку општи ставови.

Како *начин на изложување на материјалот во математичката литература и во наставата* дедукцијата се карактеризира со поаѓање од општи ставови, закони или правила и преминување кон помалку општи ставови.

3.1. ЕКВИВАЛЕНЦИЈА И НЕКОИ ЛОГИЧКИ ЗАКОНИ

Во сите степени на наставата по математика, дури и нејавно, се користат следниве еквивалентности (закони на логиката):

$$1) \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p; \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p;$$

- 2) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r); (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r);$
- 3) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r); (p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- 4) $\neg\neg p \Leftrightarrow p;$
- 5) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q;$
- 6) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q; \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q;$
- 7) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p;$
- 8) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \wedge p \Rightarrow \neg p;$
- 9) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \wedge p \Rightarrow q;$
- 10) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \wedge p \Rightarrow r \wedge \neg r.$

Од друга страна, знаеме дека секоја исказна формула може да биде *тавтологија*, *контрадикција* или *неутрална исказна формула*. Понатаму, од сите исказни формули посебно значење имаат тавтологиите, бидејќи секоја тавтологија е некој *логички закон* или *закон на мислењето*.

Во натамошниот дел, користејќи го претходно изнесеното, ќе се запознаеме со некои правила за изведување заклучоци.

а) Модус поненс (правило за одделување). Исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q \quad (1)$$

е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *модус поненс* или *правило за одделување*. Во случајов исказите $p \Rightarrow q$ и p се *претпоставки*, а исказот q е *заклучок*. Пред да наведеме примери во кои ќе го примениме ова правило, да забележиме дека тоа уште се запишува во вид на шема на следниов начин:

$$\frac{p \Rightarrow q, p}{q}.$$

Да спомнеме дека во последнава шема запирката во броителот го заменува сврзникот “и”, а дробната црта зборот “заклучок” или “следува”.

Пример 1. а) Имаме:

- 1) Ако $x = a$, тогаш $x^3 = a^3$.
- 2) $x = a$.

Заклучок. $x^3 = a^3$.

Да ја појасниме примената на модус поненс. Имаме исказ $p: x = a$ и исказ $q: x^3 = a^3$, па затоа во 1) и во 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и p , од кои следува заклучокот q , т.е. $x^3 = a^3$.

б) Имаме:

- 1) Ако врне дожд, тогаш улицата е влажна.
- 2) Врне дожд.

Заклучок. Улицата е влажна.

Да ја појасниме примената на модус поненс. Имаме исказ p : “Врне дожд” и исказ q : “Улицата е влажна”, па затоа во 1) и 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и p , од кои следува заклучокот q т.е. “Улицата е влажна”. ♦

б) **Модус толенс.** Исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p \quad (2)$$

е тавтологија, поради тоа таа е логички закон кој го нарекуваме *модус толенс*. Пред да наведеме примери во кои ќе го примениме ова правило, да забележиме дека тоа уште се запишува во вид на шема на следниов начин:

$$\frac{p \Rightarrow q, \neg q}{\neg p}.$$

Пример 2. а) Имаме:

- 1) Ако $x=1$, тогаш $x^3=1$.
- 2) $x^3 \neq 1$.

Заклучок. $x \neq 1$.

Да ја појасниме примената на модус толенс. Имаме исказ p : $x=1$ и исказ q : $x^3=1$, па затоа во 1) и во 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и $\neg q$, од кои следува заклучокот $\neg p$, т.е. $x \neq 1$.

б) Имаме:

- 1) Ако врне дожд, тогаш улицата е влажна.
- 2) Улицата не е влажна.

Заклучок. Не врне дожд.

Да ја појасниме примената на модус толенс. Имаме исказ p : “Врне дожд” и исказ q : “Улицата е влажна”, па затоа во 1) и во 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и $\neg q$, од кои следува заклучокот $\neg p$ т.е. “Не врне дожд”.

в) Имаме:

- 1) Ако четириаголникот е ромб, тогаш дијагоналите се нормални.
- 2) Дијагоналите не се нормални.

Заклучок. Четириаголникот не е ромб. ♦

в) **Хипотетички силогизам.** Да ја разгледаме исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r). \quad (3)$$

Оваа исказна формула е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *хипотетички силогизам*. Пред да наведеме примери во кои ќе го примениме ова правило, да забележиме дека тоа уште се запишува во вид на шема на следниов начин:

$$\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}.$$

Пример 3. а) Имаме:

1) Ако збирот на цифрите на бројот n е делив со 9, тогаш n е делив со 9.

2) Ако бројот n е делив со 9, тогаш n е делив со 3.

Заклучок. Ако збирот на цифрите на бројот n е делив со 9, тогаш n е делив со 3.

б) Имаме:

1) Ако дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се преполовуваат, тогаш тој е паралелограм.

2) Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Заклучок. Ако дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се преполовуваат, тогаш $\overline{AB} = \overline{CD}$. ♦

Да забележиме дека правилото за хипотетички силогизам може да се воопшти. Притоа имаме

$$\frac{p \Rightarrow p_1, p_1 \Rightarrow p_2, p_2 \Rightarrow p_3, \dots, p_{k-1} \Rightarrow p_k, p_k \Rightarrow q}{p \Rightarrow q}. \quad (4)$$

г) **Правило на контрапозиција.** Знаеме дека исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad (5)$$

е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *правило за контрапозиција*. Пред да наведеме примери во кои ќе го примениме ова правило, да забележиме дека тоа уште се запишува во вид на шема на следниов начин:

$$\frac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}.$$

Пример 8. а) Имаме:

Ако цифрата на единиците на природниот број n е 0 или 5, тогаш тој е делив со 5.

Заклучок. Ако природниот број n не е делив со 5, тогаш неговата цифра на единици е различна од 0 и од 5.

б) Имаме:

Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.

Заклучок. Ако дијагоналите не се заемно нормални, тогаш четириаголникот не е ромб. ♦

3.2. ПРАВИЛА ЗА ИЗВОД ПОВРЗАНИ СО КВАНТИФИКАТОРИТЕ ЗА ОПШТОТО И ЕГЗИСТЕНЦИЈАТА

Овде ќе спомнеме две такви правила, кои се поврзани со квантификаторот за општост (за секој, \forall) и квантификаторот за егзистенција (постои, \exists). Имено, на правилото

$$\frac{(\forall x \in M)P(x), x_0 \in M}{P(x_0)} \quad (6)$$

се потпира примената на секоја теорема за различни конкретни случаи, а правилото

$$\frac{(\forall x \in M)P(x)}{(\exists x_0 \in M)P(x_0)} \quad (7)$$

се применува при докажувањето на многу теореми каде што е важна егзистенцијата на елемент кој задоволува определено својство.

Во текот на основното образование е пожелно учениците да се привикнуваат на користењето на правилата (1)-(7), но во текот на средното образование, по можност, тие да ги совладаат. Меѓутоа, во практиката обично учениците успеваат само интуитивно да ги користат правилата (1), (3), (4) и (5) и логичките закони поврзани со еквиваленцијата од 1) до 4). Затоа е потребно во средното образование да и се обрне особено внимание на примената на правилото за модус толенс и на законите од 5) до 10) поврзани со еквиваленцијата.

4. ЗАКЛУЧУВАЊЕ ПО АНАЛОГИЈА

Заклучувањето по аналогија е мисловен процес при кој од согледувањето дека два определени објекта се согласуваат во одредени својства или односи, се изведува заклучок дека тие се согласуваат и во други својства или односи кои претходно не биле согледани.

Заклучоците по аналогија се само веројатно точни и затоа, како и заклучоците добиени со непотполна индукција, треба да подлежат на проверка, т.е. на верификација (доказ) со некој дедуктивен метод.

Пример 1. Паралелограмот и паралелопипедот можеме да ги сметаме за аналогни фигури (паралелограм може да се добие со поместување на дадена отсечка во даден правец, а паралелопипед со поместување на паралелограм во даден правец). Знаеме дека кај паралелограмот дијагоналите заемно се преполовуваат, така што по аналогија можеме да заклучиме дека кај паралелопипедот просторните дијагонали веројатно заемно се преполовуваат. ♦

За заклучувањето по аналогија карактеристична е следнава шема:

- 1) A ги има својствата $P_1, P_2, \dots, P_k; Q$
- 2) B ги има својствата P_1, P_2, \dots, P_k ;
- 3) **Заклучок:** B го има својството Q .

Примената на оваа шема ќе ја дадеме на следниов пример.

Пример 2 (аналогија меѓу триаголник и тетраедар). Во овој пример ќе ја констатираме аналогијата меѓу класата триаголници и класата тетраедри, а потоа ќе изведеме заклучок по аналогија.

Прво, можеме да прифатиме дека улогата на правата во дводимензионалниот простор ја има рамнината во тридимензионалниот простор (според аксиомите на планиметријата и стереометријата). Во оваа смисла, рамнината е аналогна на правата. Потоа забележуваме дека секој триаголник е ограничен од $3 = 2 + 1$ прави, а тоа е најмалиот број прави со кои може да се формира затворена и ограничена фигура во рамнината, а секој тетраедар е ограничен со $4 = 3 + 1$ рамнини, најмалиот број рамнини со кои може да се формира затворена и ограничена фигура во просторот, па затоа *тетраедарот го сметаме за фигура аналогна на триаголникот.*

Секој триаголник ги има следниве својства:

- i)* триаголникот е конвексна фигура;
- ii)* околу секој триаголник може да се опише кружница;
- iii)* симетралите на страните на секој триаголник се сечат во една точка, која е центар на опишаната кружница;
- iv)* за плоштината P на секој триаголник важи $P = \frac{ah}{2}$, каде a е должина на основата, а h е должина на припадната висина, и
- v)* збирот на внатрешните агли во секој триаголник е π .

Сега, заклучувајќи по аналогија, добиваме:

- vi) *секој тетраедар е конвексна фигура;*
- vii) *околу секој тетраедар може да се опише сфера;*
- viii) *симетралните рамнини на рабовите на тетраедарот (вкупно б) се сечат во една точка, центарот на опишаната сфера;*
- ix) *за волуменот V на секој тетраедар важи $V = \frac{BH}{3}$, каде B е плоштина на основата, а H е должина на припадната висина, и*
- x) *збирот на сите б диедарски агли на тетраедарот изнесува 2π .*

Дали се точни тврдењата од vi) до x), кои се добиени по аналогија. Да забележиме дека при искажувањето на тврдењето ix) предвид ја зедовме и димензијата на просторот, но ако тоа не го направевме, тогаш можевме по аналогија да го искажеме и тврдењето:

- ix') *за волуменот V на секој тетраедар важи $V = \frac{BH}{2}$, каде B е плоштината на основата, а H е должина на припадната висина;*

за што знаеме дека не е точно. Исто така, да забележиме дека не е точно тврдењето x), а дури и не постои никаква причина за ова тврдење, бидејќи збирот на сите б диедарски агли во тетраедарот може да биде било која вредност меѓу 2π и 3π . ♦

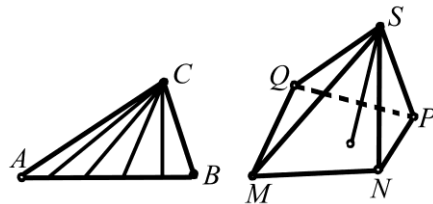
Аналогијата претставува сличност од некаков вид. Суштинската разлика меѓу аналогијата и другите видови сличности е содржана во намерата на лицето кое ја применува. Имено, ако односот во кој објектите A се согласуваат со објектите B на ниво на определени поими, тогаш тие објекти се разгледуваат како аналогни. Ако притоа се успее да се најдат јасни врски меѓу објектите A и објектите B , тогаш аналогијата е разјаснета.

Воопшто, кога поимот аналогија достигнува ниво на логички или математички поими велиме дека аналогијата е *разјаснета* или *силна*, а во спротивен случај велиме дека е *неразјаснета* или *слаба*. Често пати аналогијата е нејасна, бидејќи одговорот на прашањето “*кое на што е аналогно?*” не е секогаш еднозначен. Сепак нејасноста на аналогијата не ја намалува нејзината корисност во наставата по математика.

Карактеристично за аналогијата е тоа што речиси во сите случаи, еден објект подлежи на непосредно испитување, а се изведува заклучок за друг објект т.е. се врши пренесување на информација од еден на друг објект. Затоа, заклучоците изведени по аналогија се само веројатно точни и

всушност, аналогијата не дава одговор на прашањето дали добиениот заклучок е точен или не. Јасно, верификувањето на заклучокот добиен со аналогија треба да се направи со други методи, но значењето на аналогијата е во тоа што таа ни навела на размислување за нова претпоставка, со можност за ново откритие.

Пример 3 (аналогија меѓу триаголник и пирамида). Триаголникот и пирамидата можеме да ги разгледуваме како аналогни фигури. Имено, да земеме една отсечка AB и еден рамнински многуаголник $MNPQ$. Потоа, да избереме точка C која не лежи на правата AB и да ги повлечеме отсечките AC и BC , со што ќе добиеме $\triangle ABC$. Сега, да избереме точка S која не лежи на рамнината на многуаголникот $MNPQ$ и да ја поврземе со темињата на многуаголникот. На тој начин се добива пирамида $MNPQS$.



Според тоа, $\triangle ABC$ и пирамидата $MNPQS$ можеме да ги сметаме за аналогни фигури. ♦

Пример 4 (аналогија меѓу собирањето и множењето на реални броеви). Собирањето и множењето во \mathbf{R} и $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ се аналогни операции. Така имаме:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a & ab &= ba \\ (a + b) + c &= a + (b + c) & \text{и} & (ab)c = a(bc) \\ a + 0 &= a & a \cdot 1 &= a \end{aligned}$$

што значи дека броевите 0 и 1 се аналогни. Едната и другата операција дозволуваат инверзна операција, т.е. равенките

$$a + x = b \text{ и } ax = b, \quad a \neq 0$$

имаат единствено решение

$$x = b - a \text{ и } x = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0,$$

соодветно. ♦

Разгледаните примери покажуваат дека аналогијата која не е разјаснета може и да не биде особено продуктивна. Така, на пример, во врска со рамнинската и просторната геометрија прво најдовме аналогија меѓу триаголникот и тетраедарот, а потоа аналогија меѓу триаголникот и пирамидата. Двете аналогии се разумни, секоја има свое место и вредност, но сепак може да се каже дека првата аналогија е поуспешна.

Тоа значи дека меѓу рамнинската и просторната геометрија има повеќе аналогии, а не само една привилегирана аналогија. Поради тоа, без разлика на успешноста и разјаснетоста на аналогијата, може да се каже дека таа е непресушен извор на идеи, кои најчесто водат до нови откритија.

5. МЕТОДИ И ПОСТАПКИ ЗА РАЗВИВАЊЕ НА УМЕЕЊАТА ЗА ПРАВИЛНО ЗАКЛУЧУВАЊЕ

Ги разгледаваме индуктивните и дедуктивните методи во наставата по математика. Математиката е дедуктивна наука, па затоа е природно тоа што во нејзината изградба доминираат дедуктивните методи. Меѓутоа состојбата се менува кога е во прашање наставата по математика. Имено, тука имаат предност индуктивните методи. Притоа, примената на индуктивните методи е многу поголема во основното образование отколку во средното, а за тоа основна причина се психофизичките способности на учениците од таа возраст. Имено, на оваа возраст тие се уште не се во состојба да ги разберат дедуктивната природа на математиката и потребата од строги докази на математичките тврдења.

Јасно, дедуктивните методи во наставата треба постепено да добиваат во значење почнувајќи од V одделение во основното образование, а понагласена улога треба да имаат во погорните одделенија од основното образование, со тенденција тие да имаат иста улога во средното образование како и индуктивните методи.

Всушност, индуктивните методи и соодветствуваат на основната задача на индуктивното расудување, а тоа е да се констатираат причинско-последователните врски меѓу предметите и појавите. Индуктивниот метод се применува во наставата по математика како метод со кој се констатираат логичките врски меѓу поимите и тврдењата, како пристап за изучување на конкретни содржини и слично.

Дедукцијата има исто толку важна улога во наставата колку што е нејзината улога во математиката како наука. Имено, речиси сите теореми, формули и идентитети се изведуваат и се докажуваат со дедуктивни методи.

Овде да забележиме дека дедуктивните и индуктивните методи во наставата меѓусебно не се исклучуваат, туку напротив тие се дополнуваат и дури многу тешко можат да се издвојат во “чист” облик. Како што рековме, соодносот меѓу дедуктивните и индуктивните методи во наставата пред се зависи од возраста на учениците, од нивните психофизички спо-

собности, предзнаењата со кои располагаат итн., па затоа правилното користење на овие методи во наставата по математика има особено значење не само за наставата, туку и за севкупниот развој на учениците.

Веќе споменавме дека аналогијата зазема значајно место во процесот на наставата, како еден од најважните асоцијативни методи и таа овозможува длабоко и трајно усвојување на знаењата. Затоа е пожелно учителот да спроведува аналогија меѓу десетичните дробки и природните броеви, алгебарските и обичните дробки, признаците за сличност и признаците за складност, својствата меѓу аритметичката и геометриската прогресија, составувањето на линеарни и квадратни равенки при решавање на текстуалните задачи, рамнинската и просторната геометрија, аналогија меѓу конечните и бесконечните зборови итн., при што од особена важност е да потенцира дека заклучоците добиени по пат на аналогија се веројатно точни, но дека истите задолжително мора да подлежат на непосредна проверка (доказ).

Аналогијата имала и има особена улога речиси во сите важни математички откритија. Нејзината улога не е помала и во наставата по математика, особено ако таа добро се комбинира со другите научни и наставни методи. Но, голема е опасноста од нејзиното неправилно користење. Имено, во многу случаи учениците ги применуваат заклучоците добиени по пат на аналогија како сигурно точни, што често доведува до катастрофални грешки. Ќе наведеме неколку примери во кои се појавуваат грешки токму заради неправилното користење на аналогијата.

Пример 1. *i)* Точно е $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, така што по аналогија учениците најчесто пишуваат $\frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}$, што секако не е точно.

ii) Точно е $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$, така што по аналогија учениците најчесто пишуваат $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$ (?!?).

iii) Точно е $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, по аналогија $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (?!?).

iv) Точно е $\log ab = \log a + \log b$, по аналогија

$$\log(a+b) = \log a + \log b \text{ (?!?)}$$

v) Точно е $\sqrt{a^2b^2} = |ab|$, по аналогија $\sqrt{a^2+b^2} = |a+b|$ (?!?).

vi) Точно е следново тврдење: *Единствена непрекината реална функција $f(x)$ која ја задоволува Кошиевата равенка*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

е линеарната функција $f(x) = ax, a = \text{const}$.

Меѓутоа, често учениците го “генерализираат” ова тврдење, па можат да се сретнат “математички бисери” од типот

$$\cos(x + y) = \cos x + \cos y, \sin(x + y) = \sin x + \sin y \text{ итн. } \blacklozenge$$

Од следниов пример може да се забележи дека секогаш не се точни тврдењата добиени по пат на аналогија.

Пример 2. Во првата колона на табелата се формулирани две теореми за три прави во рамнина. По аналогија на овие две теореми се формулирани тврдења за три прави или рамнини во простор.

3 прави a, b, c во рамнина	3 прави a, b, c во простор	3 рамнини α, β, γ во простор	2 прави a, b и рамнина γ
$\frac{a \parallel b \text{ i } b \parallel c}{\Downarrow}$ $a \parallel c$	$\frac{a \parallel b \text{ i } b \parallel c}{\Downarrow}$ $a \parallel c$	$\frac{\alpha \parallel \beta \text{ i } \beta \parallel \gamma}{\Downarrow}$ $\alpha \parallel \gamma$	$\frac{a \parallel b \text{ i } b \parallel \gamma}{\Downarrow}$ $a \parallel \gamma$
$\frac{a \perp b \text{ i } b \perp c}{\Downarrow}$ $a \parallel c$	$\frac{a \perp b \text{ i } b \perp c}{\Downarrow}$ $a \parallel c$	$\frac{\alpha \perp \beta \text{ i } \beta \perp \gamma}{\Downarrow}$ $\alpha \parallel \gamma$	$\frac{a \perp b \text{ i } b \perp \gamma}{\Downarrow}$ $a \parallel \gamma$

Лесно се гледа дека од добиените тврдења во овој пример не сите се вистинити. \blacklozenge

Имајќи ги предвид последните два примера, слободно може да се каже дека за правилен развој на секој ученик одделно од особена важност е учителот да е во постојана борба со погрешното користење на аналогијата како метод за заклучување. Практиката покажува дека всушност постојат три патишта за борба против погрешното користење на аналогијата како метод за заклучување, и тоа:

- користењето на контрапримери, со кои се покажува дека тврдењата добиени по пат на аналогија не секогаш се точни,
- со барање да се посочи аксиомата или теоремата, или врз основа на која дефиниција е изведен некој заклучок,
- со искажување на познато точно тврдење, од кое ќе се види дека донесениот заклучок по пат на аналогија не е точен.

Сепак, и покрај големиот број грешки кои ги прават учениците како резултат на заклучувањето по аналогија, значењето на аналогијата за наставата по математика е огромно, особено за развитокот на математичкото мислење, а посебно на творечкото мислење кај учениците. Учители-

лот којшто правилно и умешно го применува методот на откривање по аналогија, со правилно и целесообразно избрани прашања, може да постигне неспоредливо подобри резултати во наставата отколку учителот кој не му посветува доволно внимание на овој метод. Овде е исклучително важно учителот да ги разјаснува слабите аналогии, а посебно да обрнува внимание на патиштата за избегнување на лошата примена на методот на заклучување со аналогија.

VI ГЛАВА

ДИДАКТИЧКИ ПРИНЦИПИ И СРЕДСТВА ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

1. ДИДАКТИЧКИ СРЕДСТВА

Под *дидактички средства* ги подразбираме материјалите, приборите и сите други средства со кои се служиме во наставата, сè со цел на учениците што поочигледно и поуспешно да им ги презентираме новите наставни содржини, но и да ги утврдиме веќе усвоените знаења. Без примена на дидактички средства наставата по математика се сведува на празен вербализам и таа се формализира. Кои дидактички средства ќе се користат во рамките на еден наставен час, пред сè, зависи од содржината на наставната единица која се обработува, но и од опременоста на училиштето. Се разбира, едно дидактичко средство не ја исклучува употребата на друго, но сепак мора да се води сметка дека средствата кои се користат во текот на еден час треба меѓусебно да се дополнуваат и да придонесуваат учениците да се здобијат со што поцелосни сознанија во текот на часот. Најдобро е при обработката на предвидените содржини да се комбинираат различни дидактички средства. При тоа, учителот треба да ги користи оние дидактички средства со чија помош ќе може на учениците најочигледно, најдобро и најлесно да им ја објасни содржината на наставната единица која се обработува.

Современата настава по математика не може да се замисли без квалитетни дидактички средства, кои покрај тоа што треба да задоволуваат одредени научни стандарди, мораат да задоволуваат и определени барања од психолошка, воспитна, естетска, техничка и економска гледна точка. Тука нема да ги разгледуваме спомнатите стандарди, туку ќе се обидеме да дадеме класификација на дидактичките средства, со посебен осврт на некои од нив.

Во литературата најчесто се среќаваме со следнава класификација на дидактичките средства во наставата по математика:

- текстуални дидактички средства, и
- демонстрациони дидактички средства,

на кои подетално ќе се задржиме во натамошниот дел.

Прво да забележиме дека примената на дидактичките средства помага да се постигне висок степен на апстракција на математичките поими, релации и зависности. Последното е особено важно при изучувањето на стереометријата, каде што е неопходно да се обезбеди добра нагледност, но нивното значење не треба да се занемарува и во другите делови на наставната математика.

Сепак, нагледноста треба да се користи само тогаш кога е неопходна. Прекумерната употреба на нагледни средства може кај учениците да создаде навика да размислуваат конкретно, само на даден модел, со што би се забавил развојот на апстрактното мислење. Поради тоа, присутноста на нагледноста треба да се намалува одејќи кон погорните класови.

2. ТЕКСТУАЛНИ ДИДАКТИЧКИ СРЕДСТВА

Во групата текстуални дидактички средства спаѓаат пишуваните материјали, кои во наставата се користат како извор на знаење, а тоа се учебникот по математика и прирачната литература.

Учебникот по математика како текстуално дидактичко средство е еден од позначајните извори на знаење, кој учениците го користат во текот на школувањето. Во наставата по математика учителот и учебникот, главно, имаат рамноправна улога. Имено, добриот учебник претставува основен извор на информации, а со соодветно приспособување учителот ја толкува неговата содржина. Според тоа, може да се каже дека личноста на учителот и неговиот однос кон учебникот е важен фактор за негово правилно користење, со што учебникот нема да биде само потсетник за содржините кои учителот ги реализирал, туку активно користејќи го учениците ќе стекнат навика книгата да им претставува траен извор за здобивање со знаења. Јасно, претходно кажаното може да се постигне со добар учебник. За добар учебник може да се смета оној кој задоволува низа услови, од кои најголемиот дел се однесуваат на неговата содржина, начинот на обработка на материјалот и техничката опременост. Услови кои треба да ги задоволува добар учебник по математика се:

- учебникот треба да е книга наменета за самостојно учење на ученикот во која со потребната стручна и научна заснованост се разработени содржините од наставната програма по математика за соодветното одделение, како по обем и длабочина на наставниот материјал, така и во остварување на целите и задачите на наставата по математика;

- учебникот треба да е приспособен на возраста, психофизичките способности и предзнаењата на учениците, да овозможува и поттикнува различни видови учење и со своите содржини да ги мотивира учениците на активно и самостојно учење, истражувачка работа и креативно поврзување и откривање на односите меѓу различните области на математиката;
- материјалот во учебникот треба да е разработен во заокружени програмски подрачја, целини, теми, поттеми и наставни единици, при што јазикот, стилот и начинот на презентирање на новите знаења (поими, тврдења и слично) да се приспособени на возраста на учениците и тие да се правилно распределени низ целиот текст во учебникот;
- текстовите во учебникот треба да се концизни, прецизни и уверливи, пишувани со терминологија доследна на научните стандарди, која истовремено е прилагодена и на возраста и на можностите на учениците;
- учебникот треба да ја обезбедува потребната корелација со содржините од сродните наставни дисциплини, која може да биде обезбедена преку основниот текст, но и во дополнителни текстови кои се неопходни за учениците кои побрзо напредуваат во учењето;
- илустративниот дел во учебникот по математика има особено значење и тој треба да е во функција на дополнување на основниот текст, цел која може да се постигне со едноставни, јасни и прецизни илустрации кои не смеат да доминираат;
- илустрации во учебникот најчесто треба да бидат цртежи, шеми, табели и дијаграми, кои без исклучок треба да се во функција на материјалот која се обработува;
- учебникот по математика, по правило, треба да содржи соодветна дидактичка апаратура, како што се, прашања, задачи, едноставни експерименти и слично, кои освен тоа што треба да служат за воведување на учениците во новиот материјал, треба да овозможат и водење и насочување при самостојното учење, проверување, утврдување, воопштување, систематизирање и практична примена на здобиените знаења и умеања.

Ученикот кој учи од добар учебник треба да знае дека не е доволно ако само ги усвои знаењата кои тој му ги дава, тука дека е неопходно самостојно да учи и своите знаења да ги проширува и дополнува и на друг начин, на пример, со користење дополнителна литература.

Покрај учебникот, важни текстуални дидактички средства се и *работните листови и збирката задачи*. Тие треба во целост да го следат учебникот кој се применува, т.е. да ги покриваат наставните содржини предвидени со програмата и да ги задоволуваат претходно изнесените барања за учебникот, кој мора да остане основно дидактичко средство. Се разбира, овие дидактички средства не смеат да бидат задолжителни, туку тие треба да се третираат како дидактички средства за кои учителот самостојно ќе одлучи дали ќе ги користи или не, а учебникот треба во целост да ги задоволува потребите на наставата.

Прирачната литература во наставата по математика ги опфаќа дополнителната и помошната литература која учениците ја користат. Според степенот на научноста севкупната прирачна литература може да се групира во две основни групи, и тоа:

- *научно-популарна*, во која спаѓаат математичките лексикони, речници, табlici и енциклопедии,
- *периодична*, во која спаѓаат математичките списанија и публикацииите кои се печатат како нивна дополнителна литература.

Секако, севкупната прирачна литература има свое значење во реализирањето на наставата, но овде посебно сакаме да го истакнеме значењето на периодичната прирачна литература, особено на списанијата. Имено, преку нив учениците не само што континуирано се здобиваат со за нив важни информации, туку тие се погодни и за поставување хипотези, со што учениците се ставаат во ситуација да анализираат, воопштуваат и творечки да решаваат проблеми, т.е. со еден збор се поттикнува нивната истражувачка работа.

3. ДЕМОНСТРАЦИОНИ ДИДАКТИЧКИ СРЕДСТВА

Како што може да се заклучи од самото име, намената на демонстрационите дидактички средства е да обезбедат нагледност во наставата. Ќе ги наведеме најважните од нив.

- 1) Најраспространет вид демонстрациони дидактички средства во наставата по математика се *моделите на разни геометриски тела*, изработени од дрво, жица, картон, пластика и слично. Јасно, секоја од овие изработки има свои предности при обработката на определени прашања.

- 2) Особено се корисни разните *подвижни модели* на рамнински и просторни фигури, како што се моделите на: агол, триаголник, тригонометриска кружница за менување на тригонометриските функции и други модели, при кои се менуваат “димензиите” на фигурите и се дава можност да се добие претстава за непрекинатиот процес на менување на фигурите или на функциите.
- 3) *Цртежите* се важно дидактичко средство во наставата по математика. Притоа еднакво се важни како готовите цртежи кои учителот ги користи, но и цртежите кои се нацртани на таблата за време на часот. Исто така, важно е учениците во своите тетратки да го репродуцираат цртежот на учителот, со што се постигнува тие да се концентрираат на содржините кои се предмет на обработка, а со тоа можат полесно да ги разберат и запомнат.
- 4) *Слајдовите*, всушност, се само техничко решение за цртежите, со што се овозможува нивно полесно користење. Слајдовите можат поединечно да се користат, но од нив можат да се направат и тематски серии чие користење е лесно, особено ако се имаат предвид можностите на современите проектори.
- 5) *Графофолиите* имаат слични методски карактеристики како слајдовите, со таа разлика што нивната подготовка е едноставна и затоа тие можат да го заменат цртањето на учителот и работата на табла. Повременото користење на ова дидактичко средство му овозможува на учителот подобар и подинамичен контакт со учениците.
- 6) *Персоналниот компјутер* како дидактичко средство во наставата по математика има сè позабележителна улога во развиените земји, особено при користењето на методите на програмирање и проблемска настава за кои ќе зборуваме понатаму. Овде нема детално да се осврнеме на потребите и на можностите за користење на компјутерот во наставата по математика, туку само ќе забележиме дека неговата примена значително е условена како од содржината која се усвојува, така и од квалитетот на неопходните *дијалошко-образовни програми*.
- 7) *Интерактивна табла*, која не е доволно застапена во нашиот образовен систем, но која има огромна методско-дидактичка вредност.

Додека е актуелна соодветната наставна тема, пожелно е некои цртежи повремено да бидат изложени во училницата. Јасно, ако има повеќе паралелки, тогаш училиштето мора да биде снабдено со неколку комплекти демонстрациони дидактички средства.

Дидактичките средства во наставата по математика треба да се во функција на нагледноста, која ќе овозможи активно и критичко учество во усвојувањето на новите знаења и умеења од страна на учениците. Затоа, основен критериум за методската вредност на одделните дидактички средства е колку тие придонесуваат ученикот активно да учествува во наставата и да учи со расудување.

Во однос на дидактичките средства важно е да се знае дека во текот на еден час не треба да се користат многу средства, туку само оние кои се најрепрезентативни за материјалот кој се обработува. Имено, претераното покажување на предмети во текот на еден наставен час ги деконцентрира и ги заморува учениците, т.е. може да биде контрапродуктивно.

Успешното користење на дидактичките средства зависи од тоа кака, како и зошто едно средство се користи. Поради тоа не е можно да се направи строга градација на дидактичките средства според нивната вредност. Имено, едно дидактичко средство за еден одреден час може да биде крајно ефикасно, а на друг час може да биде бескорисно. За да се обезбедат добри резултати треба да се изберат оние средства кои според бројот и содржината најдобро ќе соодветствуваат на целите на часот. Исто така, средствата кои се користат во текот на еден час мора да бидат разновидни, бидејќи средствата од ист вид (на пример, само цртежи или само слајдови) ги заморуваат учениците и стануваат досадни. Притоа, се што ќе се покаже во текот на еден час треба детално да се објасни. Затоа е важно учителот одлично да ги познава дидактичките средства кои ќе ги користи во текот на часот, бидејќи во спротивно може да се случи површно или погрешно да ги објаснува. Исто така, учителот мора да знае да ракува со опремата која ќе ја користи на часот.

4. КАБИНЕТ ПО МАТЕМАТИКА

Секое училиште треба да има барем еден кабинет по математика, кој треба да се наоѓа во посебна просторија и во него може, но не мора да се изведува настава. Пожелно е училиштето да располага со неколку кабинети-училници, во кои ќе се реализира наставата само за едно одделение (клас). Последново е особено важно, бидејќи во тој случај учителот ќе може навремено да ги користи сите потребни дидактички средства.

За секој кабинет по математика се одредува одговорен учител, кој се грижи за неговото оформување, одржување и постојано опремување. Опремувањето, главно, се врши преку купување на дидактички средства

од специјализирани продавници, но некои од нив учителот може да ги подготвува заедно со своите ученици.

Исто така, пожелно е во кабинетот да бидат истакнати портрети на видни математичари, нивни мисли за значењето на математиката, анегдоти и слично, што ќе придонесе учениците да ја засакаат математиката.

Кабинетот по математика треба да биде опремен со:

- основен прибор за цртање: шестар, агломер, триаголен линијар и линијар со тркала (најмалку толку комплети колку што има учители по математика во училиштето),
- разни модели за геометрија и нацртна геометрија,
- графоскоп, епископ, дијапроектор, компјутер и LCD проектор,
- збирки од паноа на графици, формули, табели и слики, и
- методски прирачници, учебници и збирки задачи за редовната настава, како и книги кои ќе се користат за работа со надарените ученици и друга соодветна стручна литература по математика.

5. ДИДАКТИЧКИ ПРИНЦИПИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Дидактичките принципи се почетни, основни поставки за организација и ефективна реализација на наставата по сите наставни предмети и за сите одделенија. Всушност, тие се аксиоми на наставата и заедно со целите на наставата служат како критериуми за оценување на правилноста на решавањето на една или на друга дидактичка задача.

За наставата по математика од особено значење се следниве дидактички принципи:

- принцип на сознајност,
- принцип на активност,
- принцип на нагледност,
- принцип на достапност,
- принцип на систематичност и последователност,
- принцип на индивидуален пристап и диференцираност во наставата,
- принцип на трајност на знаењата,
- принцип на соодветна организација и реализација на наставниот процес согласно средината во која се реализира, и

- принцип на успешност.

Некои дидактичките принципи главно се однесуваат на работата на учителот, други пак на дејноста на учениците, а трети на дејноста и на едните и на другите.

Дидактичките принципи се релативно стабилни иако во даден временски период едни имаат приоритет пред други, а во друг период доаѓа до промена.

5.1. ПРИНЦИП НА СОЗНАЈНОСТ

Од реализирањето на овој принцип во голема мера зависи успехот на наставата. Овој принцип има два аспекта и тоа:

а) *Сознавањето како однос кон наставната работа.* Учителот по математика треба постојано да се грижи за формирањето на позитивниот однос на учениците кон работата на часовите по математика. Ваков однос може да се формира со поттикнување на мотивите за изучување на математиката, преку формирање интерес за неа. Притоа треба да се истакнува значењето на математиката, нејзиното водечко место во науката и во техничкиот прогрес и слично. На сознателниот однос на учениците кон наставата по математика влијае односот на учителот кон предметот, како и заемниот однос ученик-учител.

б) *Сознавањето како разбирање на наставните содржини.* Разбирањето е процес во кој имаме сознавање. Тоа почнува со појаснување на проблемот кој треба да се реши. Се смета дека ученикот го разбира наставниот материјал кога може да го репродуцира со свои зборови, со променети ознаки и цртежи, знае на кои теореми, аксиоми и дефиниции се базира некој доказ, знае при кои услови може да го применува даденото својство и може да ги применува усвоените знаења во соодветен момент. Ученикот ги разбира дадената задача и нејзиното решение ако може да одговори на прашања од типот: *Кои операции треба да се извршат?, Како можат тие да се извршат?, Зошто токму тие операции?, Дали може и на некој друг начин?, Зошто?, Кој од начините е порационален? итн.* Ако задачата е геометриска, тогаш прашањата би биле: *Какви својства има разгледуваната фигура?, Кои дополнителни конструкции можат да се направат?, Зошто и со каква цел?, Дали тие ќе влијаат на постапката за решавање?, Дали решението има смисла? итн.*

Пример: Ученикот го напишал следново решение:

$$2\sqrt{x+3}\sqrt{x-2} = x+6, \quad D_x = [2, \infty)$$

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{x+3}\sqrt{x-2})^2 &= (x+6)^2 \\
4(x+3)(x-2)^2 &= x^2 + 12x + 36 \\
4x^2 + 4x - 24 &= x^2 + 12x + 36 \\
3x^2 - 8x - 60 &= 0 \\
x_1 = 6, x_2 &= -\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

и x_2 не е решение

Проверка: за $x=6$ имаме $2\sqrt{6+3}\sqrt{6-2}=6+6$, за $12=12$, така што 6 е решение.

Можеме да сметаме дека тој го разбрал решението ако може да ни одговори на прашањата: *Зошто бара D_x ? Зошто квадрира? Каква релација постои меѓу запишаните равенки? Зошто се прави проверка? Зошто $-\frac{10}{3}$ не е решение? Дали може и на друг начин да се реши задачата?* ♦

Сознавањето при усвојувањето на математичките знаења и при решавањето задачи ги намалува пропустите во знаењата и умењата на учениците, ги исклучува догматизмот и формализмот во учењето, кои се јавуваат во наставата по математика. Во наставата има несознавање кога ученикот:

- дава дефиниција за некој поим, а не може да даде пример;
- наоѓа извод на функција, а не знае што е тоа извод;
- наоѓа интервали на монотоност на функцијата $f(x)$, а потоа на прашањето која вредност е поголема $f(-3)$ или $f(2)$, иако броевите -3 и 2 се во еден ист интервал, врши пресметувања на одделните вредности на функцијата;
- решава системи со непознати x и y , а не може да решава такви со непознати p и k итн.

5.2. ПРИНЦИП НА АКТИВНОСТ

Под активност на ученикот се подразбира таква состојба на дејствување при која сознателно се вложуваат умствени напругнувања за здобивање со знаења, се пројавува иницијативност при решавањето проблеми, критичност кон добиената информација итн. Без активност на ученикот не е можно да се усвојуваат знаења и умења, а поради тоа таа мора постојано да се поттикнува од страна на учителот. Активноста на учениците во наставата по математика може да се иницира и поттикнува со:

- i) надминување на стравот дека ќе се направи грешка, креирање на дух на критичност и самокритичност при учењето, противречни и оригинални мислења, создавање коректни заемни односи и пријатна атмосфера во одделението,
- ii) формирање мотиви за учење заради задоволство од знаењата и можноста за целосна реализација на ученикот во училиштето и надвор од него,
- iii) обезбедување на таква подготовка на учениците, за во иднина сами да се справуваат со новите сознателни задачи,
- iv) предизвикување интерес преку парадокси, “нематематички” и други задачи, и
- v) почесто користење на проблемскиот пристап и на експериментите како форма на усвојување на нови знаења и умења.

Пример. При воведувањето на тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник, по мотивирањето на учениците со почетна практична задача, добро е да се разработат неколку задачи од типот:

- a) Нацртајте правоаголен $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, при што за учениците од првата редица важи $\angle A = 30^\circ$, од втората редица $\angle A = 45^\circ$ и од третата редица $\angle A = 60^\circ$.
- b) Измерете ги страните на нацртаниот триаголник.
- v) Најдете $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ (може да се користи дигитрон).

Дел од соопштените резултати од страна на учениците внесете ги во табела во облик

	$\angle A = 30^\circ$					$\angle A = 45^\circ$					$\angle A = 60^\circ$				
	a	b	c	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	a	b	c	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	a	b	c	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$
1															
2															
3															

- г) Споредете ги односите $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ во различни триаголници, за кои $\angle A$ е ист, и за триаголници во кои $\angle A$ не е ист.

На крај со споредување и со воопштување учениците треба да заклучат дека односите $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ во правоаголен триаголник се функции од остар агол α . ♦

5.3. ПРИНЦИП НА НАГЛЕДНОСТ

Овој принцип за прв пат се појавил кај Ј. А. Коменски, а потоа го разработиле Ј. Х. Песталоци и К. Д. Ушински. Принципот на нагледност е основен и во наставата по математика и го помага реализирањето на другите принципи, бидејќи нагледноста служи како надворешна потпора на умствените дејства. Во претходните излагања зборувавме за визуелните наставни средства со чија помош и се реализира принципот на нагледност.

Во наставата по математика најголема примена имаат цртежите, шемите, таблиците, графичите, моделите и слично, со чија помош теориските знаења стануваат опипливи, односно достапни за сетилата на учениците, со што се придонесува тие да станат поразбирливи.

Заради важноста на принципите на нагледност, овде уште еднаш ќе се осврнеме на моделите, цртежите, таблиците, шемите, графичите, математичките симболи, дијаграмите и нивната примена во наставата по математика.

а) Модели

Моделите се изработуваат од картон, дрво, стакло, метал и слично. Тие, главно, се користат при изучувањето на стереометријата, но ограничена примена имаат при изучувањето на планиметријата и алгебрата (модел на термометар при усвојувањето на операциите со негативни броеви, графичи од жица при изучувањето на функциите и слично). Моделите, главно, се користат при усвојувањето нови знаења, но може и при повторувањето на наставните содржини, особено со послабите ученици.

Користењето на моделите е пожелно при усвојувањето нови содржини, но нивната прекумерна употреба може да стане пречка во реализирањето на целите на наставата по математика, особено за развивање на апстрактното мислење.

Моделите треба да се воочливи (со поголеми димензии и соодветно обоени) и динамични. Уште подобро е ако моделите можат да се расклопуваат и склопуваат, со што учениците ќе можат да се запознаат со начинот на нивното конструирање. Пожелно е учениците сами да изработуваат некои модели.

б) Цртежи

Една од практичните цели на наставата по математика е учениците да се научат да разбираат и да цртаат цртежи на геометриски фигури, гра-

фици и слично. Во наставата по планиметрија учениците се здобиваат со навика цртежите да бидат соодветен одраз на рамнинските геометриски фигури и врските меѓу нив. Од една страна тоа е добро, но од друга страна се јавува како пречка при цртањето скици на геометриските тела. Јасно, тешкотијата е во тоа што во рамнина треба да се даде цртеж на тридимензионално тело. Многу ученици не можат да се ослободат од тоа што го гледаат на цртежот како, на пример, некои прави на цртежот се сечат, а во реалноста се разминуваат, аголот на цртежот е тап или остар, а во реалноста е прав и слично. Затоа, пожелно е при изучувањето на стереометрија паралелно да се користат и цртежи и модели. При тоа, комбинирањето може да се направи во следниве етапи:

- a) во почетна етапа: модел-цртеж-модел,
- b) во втора етапа: цртеж-модел-цртеж,
- c) во трета етапа: само цртежи.

Притоа е важно учителот да инсистира учениците да цртаат, бидејќи само во тој случај можат да се здобијат со трајни знаења и да се реализира спомнатата практична цел.

в) Таблицы

Таблиците се важно и многу корисно дидактичко средство. Ги имаат следниве предности:

- i) на мал простор се концентрирани многу информации,
- ii) ја намалуваат преоптовареноста на записите, бидејќи во нив се запишува само најважното,
- iii) помагаат во систематизирањето на знаењата, и
- iv) ги приближуваат информациите со кои учениците се среќаваат во подолг временски период.

Пожелно е таблиците да не бидат сосема пополнети, односно еден дел да го пополни ученикот. Тоа се таканаречени *програмирани* *таблицы*. Една ваква таблица веќе разгледавме, а овде ќе дадеме пример на таблица која може да се искористи при изучување на тригонометриски функции, односно при нивно менување кога аголот се менува од 0° до 360° .

α	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$
30°					
45°					
		0,6			
			-1		

По правило таблиците треба да се користат и при систематизирање на знаењата и умењата на учениците, што може да се направи и преку соодветно избрани задачи, а исто така, и при класифицирање на определени знаења како, на пример, движењата и сличностите во рамнината.

г) Шеми и дијаграми

Последниве години во наставата по математика се повеќе се применуваат шемите и дијаграмите. Тие се користат за систематизирање на усвоените поими, за констатирање на врските меѓу поимите, за анализирање на решавањето одделни задачи и слично. На следниов цртеж е дадена една таква шема.



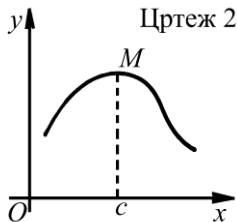
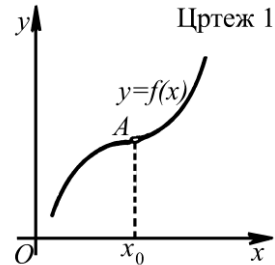
д) Графици

Графиците се еден од начините за претставување на функционалните зависимости и тие обезбедуваат голема нагледност и достапност до информациите. Графички претставените функционални зависимости се достапни и за учениците со пониска математичка култура. Во наставата граfiците се користат за:

- претставување на текот на функцијата,
- наоѓање на вредностите на функцијата, и
- како нагледно дидактичко средство при формирање на некои поими, како граница и непрекинатост на функција, растење и опаѓање и слично.

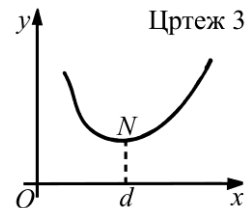
На пример, само лице со висока математичка култура може без користење на графици да ја разбере суштината на следните дефиниции:

Дефиниција. За точката $A(x_0, f(x_0))$ велиме дека е *превојна точка* за функцијата $y = f(x)$, ако постојат $x_1, x_2 \in D_f$ такви што $x_1 < x_0 < x_2$ и $y = f(x)$ е конвексна (конкавна) на $[x_1, x_0]$ и конкавна (конвексна) на $[x_0, x_2]$, (цртеж 1).



Дефиниција. Точката $M(c, f(c))$ ја нарекуваме точка на *локален максимум* за функцијата $y = f(x)$, ако постои реален број $\varepsilon > 0$ таков што $f(x) < f(c)$, за секој $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, $x \neq c$ (цртеж 2).

Дефиниција. Точката $N(d, f(d))$ ја нарекуваме точка на *локален минимум* за функцијата $y = f(x)$, ако постои реален број $\varepsilon > 0$ таков што $f(x) > f(d)$, за секој $x \in (d - \varepsilon, d + \varepsilon)$, $x \neq d$ (цртеж 3).



ѓ) Математичка симболика

Современата математика не може да се замисли без математичка симболика, но таа е и корисно нагледно средство, со што се подобрува достапноста.

При разгледувањето на важноста на графиците како визуелно дидактичко средство, во дефинициите од примерот е презентирано и користењето на математичката симболика. Јасно, нејзиното користење ја потпомага достапноста на материјалот кој се изучува, особено ако истото е комбинирани со останатите визуелни дидактички средства.

5.4. ПРИНЦИП НА ДОСТАПНОСТ

Овој принцип се состои во создавање хармонија меѓу наставните содржини, наставните методи и психофизичките можности на учениците, за тие да можат со нормално залагање и напругнување да ги усвојуваат предвидените знаења и умеења. Значи, не е доволно само да се достапни наставните содржини, туку тие треба и соодветно да се предаваат. Принципот на достапност повеќе се однесува на методите и на средствата на наставата. При тоа, под достапност не треба да подразбираме настава без

тешкотии, но и наставата по математика не треба да биде толку тешка, бидејќи таа кај учениците може да предизвика сомневање во нивните можности и способности, а со самото тоа и одбивност кон математиката како наставен предмет.

Во наставата по математика овој принцип се реализира преку:

- а) обезбедување соодветни нагледни средства,
- б) обезбедување на потребната психолошка и техничка подготовка на учениците за усвојување нови знаења, и
- в) подредување на задачите според сложеност и тежина.

Пример 1. За усвојување на формулата

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

потребно е решавање на систем задачи слични на следниов:

i) Применете ја формулата (1) за да пресметате

$$\cos(75^\circ - 40^\circ), \cos(\alpha - 30^\circ), \cos(60^\circ - \alpha), \cos(90^\circ - \beta), \cos(2x - 3y) \text{ итн.}$$

ii) Применете ја формулата (1) на изразите

$$\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ, \sin 100^\circ \sin 40^\circ + \cos 100^\circ \cos 40^\circ, \\ \frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ, \cos x + \sqrt{3} \sin x \text{ итн.}$$

iii) Без да користите таблици пресметајте

$$\cos 15^\circ, \cos 75^\circ, \cos 120^\circ.$$

Потоа треба да се премине кон решавање на посложени задачи. ♦

г) Конкретизација на добиените воопштувања.

Пример 2. По изведување на формулите

$$x = \alpha + 2k\pi \text{ и } x = -\alpha + (2k + 1)\pi$$

за решавање на равенката $\sin x = a$, при $|a| \leq 1$, потребна е конкретизација на параметрите како, на пример: Најдете x , ако $\alpha = 30^\circ$ и $k = 2$; $\alpha = -15^\circ$ и $k = 6$! Какви вредности можат да имаат a, α, k ? Дали може

$$k \in \{5; 0; -8; 200; 3, 5, \dots; -500\} ? \quad \blacklozenge$$

д) Погодна дидактичка преработка на наставните содржини.

Тоа може да се направи со преформулирање на дадена теорема или дефиниција, разместување, преформулирање и дополнување на задачите за дадена тема, давање на поприфатливи докази итн.

Пример 3. Теоремата: “Ако $\triangle ABC$ е правоаголен, со прав агол при темето C , CD е висината h_c повлечена кон хипотенузата и $\overline{AD} = b_1$, $\overline{BD} = a_1$ се ортогоналните проекции на катетите над хипотенузата, тогаш точни се равенствата: $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h_c = a_1b_1$.” -е со формулација која не е погодна за запомнување, со многу симболи и всушност, содржи две тврдења: за катетите и за висината кон хипотенузата. За второто тврдење можат да се дадат следниве еквивалентни формулации, во логичка, но не и во дидактичка смисла:

- I. Висината спуштена кон хипотенузата во правоаголен триаголник е геометриска средина на деловите на кои ја дели хипотенузата.
- II. Квадратот на висината кон хипотенузата во правоаголен триаголник е еднаков на производот од деловите на кои висината ја дели хипотенузата.

Сите формулации ги содржат поимите правоаголен триаголник, висина и хипотенуза, но освен тоа различните формулации содржат различен број и вид дополнителни поими. Во дидактичка смисла, до учениците е подостапна втората формулација, од која треба да се тргне, а потоа да се формулираат другите тврдења од теоремата. ♦

5.5. ПРИНЦИП НА СИСТЕМАТИЧНОСТ И ПОСЛЕДОВАТЕЛНОСТ

Овој принцип се појавува на два начина: како пристап за избирање и подредување на наставните содржини (систематичност) и како пристап при усвојување на знаењата. При систематското учење се постигнува повисока синтеза на знаења, во која се интегрирани одделни структури и се дава целост на сознательните процеси. Логиката на математиката како наука го определува и системот во кој се усвојуваат математичките знаења. Во наставата главен акцент се става на откривањето на суштинските врски меѓу поимите и теориите во еден наставен предмет и во неколку наставни предмети, при што соодветен одраз добиваат единството, интегралниот карактер на предметите и појавите од реалниот свет. Почитувањето на принципот за систематичност го помага намалувањето на информационата оптовареност на учениците.

Последователноста во наставниот процес се поврзува со алгоритмизацијата на дејствата во наставниот процес. Обучувањето со помош на алгоритми, усвојувањето алгоритми и обучувањето на учениците сами да составуваат алгоритми е особено значајно за наставата по математика.

Во наставата по математика принципот за систематичност и последователност се реализира со:

- a) внесување елементи од аксиоматски пристап, при кој се одделуваат основните поими и својства,
- b) составување и усвојување алгоритми,
- c) реализирање на посебни часови за повторување, систематизирање и обопштување, и
- d) составување дидактички системи од признаци.

5.6. ПРИНЦИП НА ИНДИВИДУАЛЕН ПРИСТАП И ДИФЕРЕНЦИРАНОСТ ВО НАСТАВАТА

Иако учениците во едно одделение се на еднаква возраст, сепак примањето, преработувањето и помнењето на математичките информации е различно, индивидуално кај секој ученик. Учениците имаат различни математички способности, различна математичка подготовка. Поради тоа не може да се постигне добар резултат во наставата, а да не се почитува оваа разновидност. Токму со почитувањето на разновидноста се изразува принципот на индивидуален пристап. Овој принцип е особено важен за наставата по математика, бидејќи со текот на времето се зголемуваат разликите во математичката подготовка на учениците од даден клас. Всушност, принципот на индивидуален пристап претставува грижа за секој ученик.

Во наставата по математика овој принцип се реализира на различни начини, и тоа:

- a) Изучување на индивидуалните математички способности и особености на секој ученик.
- b) Обработување на дадена лекција на различни начини во различни паралелки и за различни групи ученици во иста паралелка. Самостојната работа во паралелката, која на час може да се реализира преку подготвени системи на задачи со различно ниво на сложеност, или домашните работи треба да се диференцираат по тежина и обем.
- c) Иста математичка информација им се пренесува на учениците на различен начин, за да се одговори на различните индивидуални особености на учениците.
- d) Принципот за индивидуален пристап најефективно се реализира со различно реализирање на наставата како задолжителна, изборна и факултативна. Друг начин за негово реализирање се

консултациите, секциите и сличните “воннаставни” активности, каде има диференцирана настава на различни нивоа.

5.7. ПРИНЦИП НА ТРАЈНОСТ НА ЗНАЕЊАТА И УМЕЕЊАТА

Овој принцип произлегува од потребата знаењата и умеењата кои ги усвојуваат учениците да им користат во животот, да служат како основа за продолжување на образованието и да ги применуваат во практиката. Реализирањето на овој принцип е можно само ако тој е тесно поврзан со принципите на сознајност, систематичност и нагледност. Но, учителот треба да води и особена грижа за остварување на овој принцип, односно да создава и посебни услови за остварување на овој принцип. Еве некои од нив:

- a) Учителот треба да инсистира на помнењето на определена информација веднаш по нејзиното разбирање, при усвојувањето на знаењата и умеењата.
- b) Да се организира и поттикнува интензивна мисловна активност, проследена со соодветна нагледност.
- c) Наставните единици треба да бидат соодветно структурирани, при што тие мора да се поделени во логички целини. Особено важен е завршниот дел од часот кога треба да се истакнат најважните информации. Ова може да се постигне со пишување план на наставната единица, кој учениците мораат да го запишуваат во нивните тетратки, или преку користење на шеми, со чија помош ќе се согледа поврзаноста на елементите од дадена наставна единица, како и врската со претходно усвоените знаења.
- d) Организирање на систематско повторување на клучните знаења и умеења. Притоа, непосредното повторување по реализирањето на дадена тема мора да биде почесто, а потоа треба да се реализираат посебни часови за повторување, на кои низ добро одбран систем на прашања и задачи ќе се повторуваат клучните знаења и умеења.

Обезбедувањето трајност на знаењата и умеењата е можно само ако учителот инсистира на трајност на знаењата за основните конструктивни елементи на дадена тема, како што се поимите и основните теореми и нивната заемна поврзаност и условеност. Не треба секогаш да се инсистира трајно да се усвојуваат методите на докажување и методите на научно откривање. Затоа ученикот треба да се насочува да ги запомни елементите

кои можат да му дадат одговори на следниве прашања: *Како се применува методот?, Кои се постапките за негово применување?* итн.

5.8. ПРИНЦИП НА СООДВЕТСТВО НА ОРГАНИЗИРАЊЕТО И РЕАЛИЗИРАЊЕТО НА НАСТАВАТА СО РАБОТНАТА СРЕДИНА

Наставните (дидактичките) средства се исти за сите ученици и учители, но различни се условите за обучување во одделни средини, во различните училишта и паралелки. Затоа, за да има позитивни резултати во наставата, потребно е содржините, формите, методите и нивото на обучување да бидат приспособени на конкретните услови. Секако, во овој контекст треба да бидат приспособени и целите на наставата и критериумите за оценување, што значи треба да се имаат предвид следниве два момента:

i) Училишниот курс по математика треба да биде одраз на фундаменталните идеи и логиката на современата математика.

ii) Наставниот процес по математика треба да биде таков што ќе се инсистира на развивање на творечките способности на учениците, при што е неопходно тие да се сведат на оптимално ниво по својата тежина, со што ќе се обезбеди интензивен развој на математичките способности на учениците, особено на оние најперспективните.

5.9. ПРИНЦИП НА УСПЕШНОСТ

Суштината на овој принцип лежи во неспорниот факт дека една од целите која постојано треба да се постигнува во воспитно-образовниот процес е учениците во континуитет да постигнуваат позитивни резултати, како во рамките на училиштето, така и во животот воопшто. Последното е можно како со континуираното откривање и негување на потенцијалот на секој ученик одделно, т.е. развивање на зоната на актуелниот развој, така и со откривање на нови можности за развој на секој поединец, т.е. пронаоѓање на нова зона на блискиот развој. Ваквиот пристап овозможува грижа за индивидуалното напредување на секој поединец одделно, што во крајна линија сигурно ќе резултира со позитивни резултати. Имено, практиката покажува дека само позитивната атмосфера во рамките на училиштето не е доволна за успешност на поединецот, т.е. дека индивидуалниот успех се покажува како главна движечка сила.

*

* *

Претходно формулираните принципи не се изолирани и независни еден од друг. Напротив, некои од нив го помагаат реализирањето на другите, но често пати некои ги ставаат другите во втор план. Врските меѓу одделни принципи се многу сложени, па поради тоа овде ќе презентираме само една едноставна шема за нивната заемна поврзаност.



6. ДИФЕРЕНЦИЈАЦИЈА И ИНТЕГРАЦИЈА ВО НАСТАВАТА

Идејата за интеграција во наставата и воспитувањето произлегува од стремежот на младите генерации да им се презентира целосна и единствена претстава за природата, општеството и нивното место во нив.

Традиционалната поделба на наставните содржини во одделни самостојни предмети е иницирана од стремежот учениците да се здобијат со продлабочени знаења од определена област, кои самостојно ќе ги поврзуваат во една целина. Поради тоа, особено е важна меѓупредметната и внатрешнопредметната корелација на наставните содржини. Практиката покажува дека внатрешнопредметната корелација во наставата по математика се остварува на релативно високо ниво. Меѓутоа, состојбата со меѓупредметната корелација е повеќе од загрижувачка. Имено, не само што има појава на користење на математичките знаења во другите предмети како, на пример, во географијата во V одделение и во физиката од основно образование и I клас од средно образование, пред тие да бидат усвоени во наставата по математика, туку и во самата настава по математика не се обрнува внимание на оваа корелација. Така, на пример, при реализирањето на темата “Размер и пропорции” примерите кои се обработуваат се “чисто математички”, иако оваа тема дозволува успешна корелација со географијата, што може да се види од следниов пример.



Пример 1. На цртеж 4 е дадена географска карта. Воочи ги елементите на картата и најди ги растојанијата од местото *C* во шумата до

железничката пруга и патот, ако на еден сантиметар на картата соодветствуваат 100 *m* во природата. ♦

Што се однесува до различните видови корелација и нивното реализирање треба да напомниме дека нереализирањето на корелацијата се јавува како пречка во постигнувањето на целите и задачите на образованието како целина, која не може да се премости со други форми и методи. Во контекст на претходно изнесеното да забележиме дека голема пречка во постигнувањето на целите и задачите на образованието како целина се и различните способности и интереси на учениците за изучување на еден или на друг наставен предмет, а во погорните одделенија како неминовна пречка се јавуваат и пропустите во знаењата и умеењата на учениците од претходните одделенија.

Претходно изнесеното е основа за појавата на таканаречената “меѓупредметна интеграција”. Најчести се обидите оваа интеграција да се реализира во наставата од I до IV одделение во основното образование, при што како аргумент се користи фактот дека во овој степен на образование е доволно да се формираат исклучително важните навиките за читање, пишување и сметање. Меѓутоа, овие обиди се проследени со тешкотиите при создавањето на интегрални наставни предмети, кои ќе бидат корисни и достапни за сите ученици, потоа ненадминливите разлики меѓу уметностите, општествените и природните науки и слично. Токму затоа неоснованиот ентузијазам на овој план, присутен кон крајот на XX век, полска но сигурно го губи интензитетот, при што се оди во друга крајност, кон занемарување на меѓупредметната поврзаност. Ваквиот епилог на оваа иницијатива се наоѓа во фактот дека секое обединување на наставните предмети или нивни делови не е интеграција, како и тоа дека интеграцијата е повеќеваријантна. Имено, таа може да варира од делумна до целосна. Да напомниме дека неуспехот на обидите за интеграција е и во фактот дека за да се оформи нова генерација учители која ќе биде способна да ја реализира, е потребно време и се разбира поинаков пристап во обучувањето на овие учители, што значи целосна реформа на образовниот систем на сите нивоа. Сепак за нашите разгледувања најважна е внатрешнопредметната интеграција на наставата по математика. Една од основните причини за разгледување на ова прашање лежи и во фактот дека поделбата на математиката на голем број научни дисциплини во минатиот век доведе до значителна диференцијација на наставата по математика во средното образование, а сведоци сме дека оваа тенденција е присутна и во основното образование. Притоа, неспорен факт е дека преголемата диференцијација оневозможува на младите генерации да им се презентира целосна и единствена претстава за природата, општеството и нивното место во нив, а истата се јавува и како пречка за интегрално усвојување на математичките содржини и за здобивање со применливи знаења и умеења. Имајќи го

предвид претходно кажаното, а со цел да се надмине традиционалната поделба на наставните содржини во засебни изолирани целини, во изминатите децении присутна е тенденцијата на интеграција на наставата по математика, при што се настојува истата да се постигне преку изучувањето на математичката логика, теоријата на множества и алгебарските структури. Воглавно ваквите тенденции се оправдуваат во неспорниот факт, дека на споменатите области почива математиката како наука. Меѓутоа, се чини дека во случајов не се земаат предвид следниве моменти:

- содржините кои се предмет на разработка, дури и на елементарно ниво, се апстрактни за поголемиот број ученици,
- нивното целосно или делумно усвојување е неопходно за здобивање со структурни знаења на повисоко ниво, што секако не е примарна цел на наставата по математика, барем не за поголемиот број ученици, и
- усвојувањето на споменатите содржини дава незначителен допринос во здобивањето со операциони знаења на повисоко рамниште, кои се неопходни ако се сака учениците да се здобијат со применливи знаења и умеења.

Имајќи го предвид претходно кажаното, сметам дека посебно внимание треба да се обрне на внатрешнопредметната интеграција на наставата по математика, при што од особена важност е интеграцијата да се реализира максимално можно при усвојување на операционите знаења. Во натамошните разгледувања ќе разгледаме неколку примери, со кои ќе се обидеме да ги илустрираме можностите за интеграција на наставата на споменатото ниво и кои можат да послужат како модел за реализирање на интеграцијата на наставата во целина.

Пример 2. При усвојувањето на формулите за скратено множење

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ и } x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

се разгледува идентитетот на Софија Жермен

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab), \quad (1)$$

со чија помош за определена класа природни броеви можеме да констатираме дека се сложени. Имено, се решаваат задачи од следниов вид:

а) Докажи дека за секој природен број $n > 1$ бројот $n^4 + 4$ е сложен.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви x такви што за секој $n \in \mathbf{N}$, бројот $z = n^4 + x$ е сложен.

в) Докажи дека бројот $2^{10} + 5^{12}$ е сложен.

г) Докажи дека бројот од видот $4n^4 + 1$, $n \in \mathbf{N}$ е прост само ако $n = 1$.

д) Докажи дека за секој $n > 1$ природниот број $n^4 + 4^n$ е сложен. ♦

Пример 3. а) Се докажува тврдењето: ако M е точка во внатрешноста или на некоја од страните на рамностраниот триаголник ABC и x, y, z се растојанијата од M до страните BC, CA, AB на триаголникот, соодветно, тогаш

$$x + y + z = h, \quad (2)$$

каде h е висината на триаголникот.

б) Понатаму, на учениците им се задава задача од видот:

Овчарот Пејо има само 3 ведре, кои не се градуирани, т.е. нема ознаки за количества помали од целиот волумен. Едното собира 12 литри, другот 7 литри, а третото 5 литри. Најголемото ведро е полно со млеко, а Илија сака да кјупи 6 литри млеко. Како Пејо само со овие ведре ќе му измери на Илија 6 литри млеко?

в) На учениците им се објаснува како можат претходното тврдење да го искористат за решавање на оваа и сличните на неа задачи, т.е. им се образложува дека од претходната задача непосредно следува дека кога точката M се движи во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC или по неговите страни, тогаш збирот на растојанијата од точката до страните на триаголникот е константен. Притоа, ако M лежи на страната BC , тогаш $x = 0$ и обратно, ако $x = 0$, тогаш M лежи на страната BC . Слично, $y = 0$ ако и само ако M лежи на страната AC и $z = 0$ ако и само ако M лежи на страната AB . Понатаму, ако точката M се движи по права паралелна на страната BC , тогаш x не се менува, додека y и z зависат од положбата на точката M и притоа важи (1). Сега се образложува, дека

- бидејќи збирот $x + y + z$ е константен, истиот можеме да го разгледуваме како вкупното количество млеко во сите три ведре,
- движењето на точката по права паралелна на некоја од страните на триаголникот можеме да го сметаме како претурање од едно ведро во друго, со други зборови ако со x го означиме количеството млеко во првото ведро, тогаш движењето на точката M по права паралелна со страната BC го сметаме како претурање од второто во третото ведро и обратно, и

- секоја од страните на рамностраниот триаголник ABC со висина 12 ќе ја поделиме на 12 еднакви делови и низ точките на поделби ќе повлечеме прави паралелни со страните на триаголникот. Тогаш добиваме триаголна целобројна решетка, при што на темињата на решетката им соодветствуваат подредени тројки природни броеви, координати, кои всушност се растојанијата на темињата до страните BC, CA, AB , соодветно. Така, на пример, на точката A и соодветствува тројката $(12,0,0)$, на B тројката $(0,12,0)$ и на C тројката $(0,12,0)$ итн.

г) на учениците им објаснуваме дека со опишаната постапка можат да се решаваат задачи и во следниве два случаи и тоа:

- ако волуменот на поголемиот сад е поголем од збирот на волумените на другите два сада, тогаш допустливата област повторно е паралелограм кај кој едното теме е во внатрешноста на рамностраниот триаголник и
- ако волуменот на поголемиот сад е помал од збирот на волумените на другите два сада, тогаш допустливата област е петаголник со две темиња на страната BC . ♦

Пример 4. При воведувањето на формулите за скратено множење пожелно е истите геометриски да се илустрираат. Така, за формулата

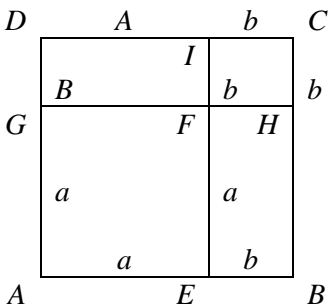
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

можеме да го искористиме цртежот десно. Притоа имаме:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= P_{ABHG} - P_{EDIH} = P_{ABEF} + P_{FEHG} - P_{EDIH} \\ &= P_{ABEF} + P_{BCIH} - P_{EDIH} = P_{ABEF} + P_{BCDE} \\ &= P_{ACDF} = (a-b)(a+b). \end{aligned}$$

За формулата

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



можеме да го искористиме цртежот лево. Притоа имаме

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= P_{ABCD} = P_{AEFG} + P_{GFID} + P_{EBHF} + P_{FHCI} \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Понатаму, користејќи тридимензионален модел, расекување на коцка, на две коцки и шест квадари, може да се илустрира формулата

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

а со погоден тридимензионален модел лесно се илустрира и формулата

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \blacklozenge$$

Пример 5. Во средното образование детално се изучуваат тригонометриските функции. Меѓутоа, нивната примена е ограничена на решавање на косоаголен триаголник и речиси да нема обид тоа да се направи и во алгебрата. Така, испитувањето на текот и скицирањето на графикот на функцијата $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$ може да се направи на следниов начин.

Ставаме $x = \operatorname{tg} t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Тогаш, $y = \frac{2}{\sin 2t}$ и како $\sin 2t$ за $t = \frac{\pi}{4}$ прима најголема вредност, еднаква на 1, добиваме дека функцијата $y = x + \frac{1}{x}$ за $x = 1$ прима најмала вредност $y = 2$. Кога t се менува од 0 до $\frac{\pi}{4}$ функцијата $\sin 2t$ расте од 0 до 1, па затоа кога x се менува од 0 до 1 почетната функција монотono опаѓа од ∞ до 2. Кога t се менува од $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, тогаш $\sin 2t$ опаѓа од 1 до 0, па затоа кога x се менува од 1 до ∞ почетната функција монотono расте од 0 до ∞ . \blacklozenge

Пред да го разгледаме следниот пример да забележиме дека успешното реализирање на интеграцијата на наставата во голема мерка зависи од подготвеноста на учителите, за која во дадениов момент сметаме дека не е најсоодветна за постигнување на оваа цел. Токму затоа потребно е да се оформи нова генерација на учители која ќе биде способна целосно да ја реализира интеграцијата на наставата по математика, што значи поинаков пристап во обучувањето на овие учители, т.е. целосна реформа на образовниот систем на сите нивоа. Потребата од поинаков пристап во обучувањето на идните учители ќе ја илустрираме на следниов пример.

Пример 6. При изучувањето на комплексните броеви на наставните насоки во универзитетските курсеви најчесто се постигнуваат следниве цели:

- да се согледа потребата од проширување на множеството реални броеви,
- да се усвојат поимите за комплексен број, коњугиран комплексен број, модул на комплексен број и операциите со комплексни броеви,
- да се усвои геометриската интерпретација на комплексните броеви,
- да се усвојат поимите комплексна рамнина и Риманова сфера,

- да се решаваат равенки во множеството комплексни броеви, и
- да се усвојат метричките и тополошките својства на множеството комплексни броеви, со што студентите ќе се подготват за изучување на комплексната анализа.

Во постојните програмски содржини во универзитетските курсеви комплексните броеви единствено се корелираат со изучувањето на одделни содржини во алгебрата и се разбира, содржините кои се наоѓаат во предметот комплексна анализа, каде што се изучуваат и конформните пресликувања, тема која треба да биде интегративен фактор, особено на наставните насоки. Притоа, темите *комплексни броеви*, *алгебарски структури* и *движења и сличности во рамнина* не се доволно интегрирани, иако за тоа постои одлична основа. Имено, при подготовката на идните учители неодминливо се изучува алгебрата, при што меѓу другото треба да се постигнат и следниве цели:

- да се изучуваат бинарните релации, а особено релацијата на подредување и на еквиваленција,
- да се изучуваат бинарните операции, а со самото тоа и групоиците, полугрупите, групите и полињата, и
- да се наведуваат примери на групоици, полугрупи и групи, односно да се согледаат можните примени на овие алгебарски структури,

а во Евклидовата геометрија се изучуваат движењата и сличностите во рамнината, при што меѓу другото треба да се постигнат и следниве цели:

- да се усвојуваат поимите за движење и сличност и нивната класификација,
- да се изучуваат груповите својства на движењата, и
- да се усвои примената на движењата и сличностите при решавањето задачи.

Забележуваме дека во различните наставни дисциплини се изучуваат содржини кои сами по себе се делумно интегрирани, но нема вистинска интеграција бидејќи при изучувањето на одделните содржини речиси и да не и посветува внимание на можноста тие пред студентите да се изнесуваат и со помош на друг математички апарат кој ни е на располагање. Ова особено се однесува на проучувањето на движењата, каде груповите својства се докажуваат по конструктивен пат, со што се создаваат фиксни претстави како за движењата, така и за комплексните броеви. Се разбира, ваквата поставеност на наставата има свои предности, но и низа недостатоци меѓу кои најголем е дезинтеграцијата на наставата по математика и нејзината парцијализација на навидум неповрзливи наставно-научни дис-

циплини. Делумното надминување на оваа состојба може да се постигне со поцелосно изучување на геометријата на комплексните броеви, при што е неопходно користејќи ја трансформацијата $S: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $S(z) = az + b$, $a \neq 0$ да се обработи алгебарската интерпретација на сличностите, нивната класификација и се разбира, да се докажат груповите својства на движењата.

Промените на подготовката на идните учители, во споменатата насока ќе овозможи:

- идните учители да се здобијат со уште еден поглед на овој дел од математиката, со што во иднина ќе бидат во можност поквалитетно да ги реализираат своите работни обврски,
- согледување на значењето на комплексните броеви ќе биде поттик за идните учители да обрнат поголемо внимание при обработката на соодветните наставни содржини во средното образование, и
- овој суптилен пример на внатрешнопредметна интеграција позитивно да влијае на идните учители континуирано да се грижат за внатрешнопредметната интеграција на наставата. ♦

Што се однесува до интеграцијата во наставата, со сигурност може да се каже дека нејзиното остварување е можно и со зајакнување на меѓупредметните врски, на пример, меѓу математиката, физиката, хемијата, географијата, биологијата и слично. Во следните разгледувања ќе дадеме еден ваков пример.

Пример 7. Во природно-математичката гимназија, во IV година во наставата по биологија се изучуваат елементи од генетиката. Меѓутоа, темата не е корелирана со наставата по математика, иако за тоа се стекнати сите предуслови. Имено, во наставата по математика се усвоени комбинаториката и елементите од теоријата на веројатноста, така што без никакви тешкотии можат да се обработат следниве содржини:

- *Стохастички карактер на законите на генетиката,*
- *Заемно дејствување на гените,*
- *Елементи на генетиката на популацијата и формула на Харди-Вајнберг,*
- *Популација под дејство на избор и распределба на “вредни” гени во популацијата, и*
- *Мутации во популации, мали популации.* ♦

Денешното училиште сè повеќе обрнува внимание на индивидуалните квалитети на учениците, на создавањето најдобри услови за развој и максимална реализација на нивните заложби и способности. Се ова може

успешно да се реализира преку диференцирањето во наставата. Диференцирањето може да се реализира на различни нивоа: при реализирање на наставна единица, на ниво на училиште преку различни форми на вонучилишни активности и на државно ниво преку натпревари.

Во следниов пример ќе наведеме како при реализирањето на наставните теми може успешно да се реализира диференцијацијата на наставата.

Пример 8. При изучувањето на темата “Квадратен трином. Квадратна равенка” учителот може да ги подели учениците од дадена паралелка во четири групи, на кои ќе соодветствуваат и определени степени на усвојување на темата:

а) Прв степен. Учениците треба да можат да решаваат потполни и непотполни квадратни равенки, зададени со конкретни коефициенти.

б) Втор степен. Освен барањето од *а)*, учениците треба да можат да решаваат и равенки еквивалентни на квадратните равенки со конкретни коефициенти, да разложуваат квадратен трином, да решаваат елементарни задачи за кои се потребни знаења за врските меѓу корените и коефициентите на квадратните равенки.

в) Трет степен. Кон барањата од *а)* и од *б)* се додаваат уште решавањето на дробно-рационални и ирационални равенки кои се сведуваат на квадратни равенки, биквадратни равенки, решавањето на параметарски квадратни равенки, примената на различни идеи за решавање на овие равенки (со формули, со разложување, графички, со смена), решавањето полесни задачи со составување на математички модели.

г) Четврт степен. Кон барањата *а)*, *б)* и *в)* се додаваат уште творечкото применување на претходните барања, составувањето посложени модели и решавањето посложени задачи со примена на Виетовите формули. ♦

Јасно, диференцирањето на учениците наведено во претходниот пример е проследено со големи тешкотии, меѓу кои основна е наставниот процес да се организира различно за различните групи. Притоа, групите треба да бидат со променлив состав и тие да се формираат според:

- а) индивидуалните разлики при примањето, преработувањето и помнењето на математичките информации,
- б) типот математичко мислење и математичките способности на учениците,
- в) умењето на учениците сами да се образуваат итн.

Самостојната работа на учениците е погодна за реализирање на диференцирањето во наставата по математика. Во следниов пример ќе дадеме едноставен систем на задачи според кои тоа може да се направи.

Пример 9. При реализирањето на темата квадратни равенки, самостојната работа на часовите за повторување и утврдување на знаењата и умеењата може да се реализира со помош на следниов систем задачи:

1. Решете ги равенките:

а) $-2x^2 + 4x + 5 = 0$,

б) $x^2 - 3x + 6 = 0$,

в) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$,

г) $(x-3)^3 - (x+3)(x-3) = x^2$,

д) $\frac{2-x}{x+1} = \frac{4}{x} - \frac{x+2}{x^2+x}$,

ѓ) $(x+2)^2 - 5x = (x-3)^2$,

е) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ и

ж) $\sqrt{2x+5} = x+3$.

2. Дадена е равенката $x^2 - p^2x + 2px - 2p^3 = 0$.

а) Решете ја равенката (x е непозната).

б) За кои вредности на p корените се позитивни.

в) За кои вредности на p збирот на корените е еднаков на 3.

3. Да се најде $x_1^3 + x_2^3$, каде x_1, x_2 се корени (решенија) на равенката $x^2 - (p+4)x + p^2 + 2 = 0$. ♦

Јасно, при диференцирањето со помош на систем задачи како во пример 9, учителот може да побара секој ученик, по своја желба да реши дел од задачите (три до четири) и притоа велите дека станува збор за самодиференцирање на учениците. Недостаток на овој вид диференцирање е тоа што учениците често пати си ги преценуваат способностите, така што тоа речиси и нема позитивен ефект. Поради тоа е неопходно, иако не е популарно, диференцирањето да го прави учителот. Обидете се во наведените четири степени за оваа тема да извршите распределба на дадените задачи, со што успешно ќе го спроведете диференцирањето во четирите групи ученици.

Друг вид диференцирање е диференцирањето според профилот на образование. Ова диференцирање треба да се спроведува во средното образование и тоа се решава со наставните планови и програми, со помош на таканаречените модули - групи предмети во рамките на една или на повеќе учебни години. Меѓутоа, во овој случај треба да се внимава понудените модули да овозможуваат хоризонтална проодност, што значи дека ако еден ученик направил грешка при изборот на образовниот профил, тој да има можност таа да ја поправи. Претходно кажаното претпочитува јадро од задолжителни предмети застапени во наставниот план, чии наставни програми ќе овозможат ученикот да се пренасочи кон друг профил, на пример на крајот од I или од II година или на почетокот од III година.

Ако се имаат предвид местото и улогата на математиката во севкупниот образовен систем, како и нејзиното значење како наставен предмет, тогаш е јасно дека таа барем до 10 години образование мора да биде во спомнатото задолжително јадро, при што е дозволиво минимално отстапување во I и во II година од средното образование. Може многу да се зборува за ова прашање, но ние нема да навлегуваме во детали, освен што ќе спомнеме дека во некои земји, како што се САД, Јапонија и слично, профилирањето се спроведува на три нивоа, и тоа: општо, академско и професионално, а што се однесува до математиката присутни се и продлабочени училишни курсеви од областа на алгебрата, геометријата, тригонометријата, математичката анализа итн. Така ученикот може да избере неколку курсеви по математика, но може и да не избере ниеден, што во САД предизвика снижување на математичките знаења. Ваквата практика во САД беше една од причините за пристапување кон сеопфатна реформа на образованието, при што математиката, освен тоа што стана задолжителен предмет, речиси и е задолжително да се избере еден од дополнителните математички предмети.

Што се однесува до овој степен на диференцирање на наставата по математика ќе наведеме неколку размислувања:

- a) големата разнообразност на профили во средното образование треба да овозможи наставата во горните класови да се сообрази, како со индивидуалните интереси и способности на учениците, така и со интересите на државата,
- b) секоја диференцирана математичка подготовка во горните класови треба да се потпира на задолжителна и единствена подготовка во основното и средното образование,
- c) постоењето на поголема изборност во математиката и минималниот број задолжителни предмети не можат да обезбедат задоволително базично математичко образование, и
- d) дали учениците на дадена возраст можат да направат вистински избор на модулите дадени во еден профил и како бројот на грешките да се сведе на минимум, односно тие да не остават видливи последици во натамошниот развој на младиот човек.

Претходно кажаното треба да се има предвид при воведувањето на овој вид диференцирање, се со цел да се намали влијанието на паушално изнесуваните оценки од типот: во овој профил нема потреба од математика, физика, хемија, биологија итн, тенденција присутна во нашите претходни, а и сегашни реформи, што може да предизвика долготрајни негативни последици, особено ако се има предвид дека еднаш направената грешка во образованието трае колку и работниот век на човекот и притоа таа неколкукратно се мултиплицира.

VII ГЛАВА

УЧЕЊЕ, ПОМНЕЊЕ И ЗАБОРАВАЊЕ

1. ПСИХОЛОШКО-ПЕДАГОШКИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА ЛИЧНОСТА НА УЧЕНИКОТ ОД 10 ДО 15 ГОДИШНА ВОЗРАСТ

Движечка сила на психичкиот развој на ученикот на возраст од 10 до 15 години е промената на улогата која тој ја има во севкупните општествени односи. Имено, на оваа возраст драстично се менуваат училишните услови, и тоа:

- се усложнува наставниот материјал
- се менуваат формите за работа на часовите,
- се менува начинот на комуникација со возрастните и меѓу учениците, и
- со појавата на предметните учители, од кои секој има свои барања кон работата на ученикот, се усложнува комуникацијата на релацијата ученик-учител.

Суштествено влијание на односот кон учењето има и средината во која ученикот се развива. Имено, на почетокот вниманието на ученикот е насочено кон учителите, за да во следниот период тоа последователно се насочува кон соучениците, чие мислење постепено но сигурно станува одлучувачко. Притоа стравот од негативниот однос на соучениците во многу случаи е причина за: намалување на интересот кон учењето и училиштето и појавата на отпор кон учителите кој се оправдува со желба за поголема независност. Во овој период имаме појава на необјективно оценување на учителите од страна на учениците, при што необјективноста најчесто е резултат на потребата да се намали сопствената одговорност за слабите резултати. Последното, до извесен степен може да се објасни со фактот дека мотивите за учење од почетното образование веќе се задоволени, а нови мотиви, кои од една страна соодветствуваат на условите во основното образование, а од друга страна и на возраста на учениците, сè уште не се формирани. За намалување на интересот кон учењето влијае и фактот, дека на оваа возраст кај ученикот се јавува потреба за активна и самостојна дејност, низ која тој се потврдува како личност, а во училиштето по правило не се создаваат услови за таков вид дејност.

Учениците од оваа возраст тежнеат да заземат нова позиција во односите со возрасните, да се здобијат со поголема самостојност и слобода во дејствувањето, квалитативно да го променат заемниот однос со другите ученици и слично.

Интересите во почетното образование (I-V одделение) лесно се побудуваат, но не се стабилни и истите во голема мера зависат од поединечните успеси или неуспеси. Исто така, учениците од оваа возраст, како и учениците од VI и VII одделение, се карактеризираат со низа специфичности во однос на усвојувањето на новиот материјал и неговото помнење. Имено, тие лесно усвојуваат нови знаења, но паралелно со тоа и лесно ги забораваат веќе усвоените знаења. Притоа, усвоените знаења, во некои случаи се продлабочени, но во други се површни и случајни. Често пати се усвојуваат својства на предмети и појави кои на ученикот му направиле впечаток на прв поглед, па затоа постои објективна опасност учениците да не се здобијат со суштински знаења за предметите и појавите кои ги проучуваат. Понатаму, во многу случаи учениците ги усвојуваат најопштите својства за даден предмет, без истиот да го анализираат, што доведува до формални знаења, кои се неприменливи кога при решавање на даден проблем треба да се примени некое конкретно својство на проучуваниот предмет.

Во периодот од V до IX одделение ученикот треба непрекинато да усвојува сè повеќе знаења и умења и истите да ги помни. Последното е можно само ако се разграничи конкретното од општото, па затоа на учениците треба да им се предлагаат факти за анализа и обопштување, со што процесот на размислување ќе се подигне од ниво на конкретно мислење (предметот на мислење се восприема и за него се гради претстава) на ниво на апстрактно мислење. Притоа, од конкретни операции, кои се реализираат врз конкретни предмети, постепено треба да се премине на разгледување на операциите на структурно ниво, т.е. процесот на усвојување на операциони знаења да прерасне во процес на усвојување на структурни знаења.

Како што знаеме нагледноста служи како надворешна потпора за умствените дејства. Во првите две години од почетното образование нагледноста треба да е предметна, што значи дека на учениците треба да им се обезбеди предметите и појавите кои ги усвојуваат да ги набљудуваат непосредно, т.е. во нивна вистинска големина и по можност во нивната природна средина. Меѓутоа, веќе во III, IV и V одделение, предметната нагледност треба да премине во нагледност во која централно место ќе имаат реалните претстави на предметите и појавите (модел, цртежи, шеми, табели, дијаграми и слично). Веќе во VI, а особено во VII одделение покрај користењето на модели, цртежи, шеми, дијаграми и табели, треба

да се премине и кон таканаречената говорна нагледност. Имено, учениците треба да се оспособуваат да формираат претстави за определени предмети и појави врз основа на устните искажувања на учителот. Последното е од особена важност бидејќи предимензионираната нагледност најчесто го забави развојот на апстрактното мислење. Затоа учителот нагледноста треба да ја организира така што претходно поставува определена цел, потоа организира набљудување, предлага да се анализираат деталите, да се споредат објектите, да се одделат суштинските својства и да се запишат резултатите од набљудувањето.

Во почетното образование кај учениците се формираат определени учебни навики, се гради култура за набљудување и се усвојуваат почетни математички знаења и умеања, кои се уште не се големи по обем и најчесто нивното помнење е непосредно и не е систематизирано. Меѓутоа, веќе од шесто одделение се тежнее кон систематизирани математички знаења и умеања, па затоа посебно внимание треба да се обрне на усвојување на начините на учење, а особено на сознајното усвојување на содржините кое е предуслов за нивно помнење во подолг временски период. Последното е од особена важност, ако се имаат предвид целите на секое обучување:

- ученикот да се стекне со систем од знаења и умеања од даден наставен предмет и да се оспособи самостојно да се здобива со нови знаења и умеања, и
- усвојувањето на новите знаења и умеања да е во функција на севкупниот психофизички развој на ученикот.

На оваа возраст кај учениците се формира “фонд на знаења” и паралелно со тоа се развива “продуктивното мислење”, што е и една од целите на обучувањето. Меѓутоа, треба да се има предвид дека специфичностите на психичкиот развој на детето треба да бидат сообразени и со барањата кои општеството ги поставува во дадениот период од развојот на детето, и обратно. Притоа, не треба да се заборава основната максима на секое обучување, а тоа е дека обучувањето треба да биде ориентирано кон иднината, како на општеството, така и на самиот развој на детето.

2. УЧЕЊЕ, ПОМНЕЊЕ И ТРАНСФЕР НА УЧЕЊЕТО

Од претходните разгледувања произлегува дека посебно внимание треба да се обрне на усвојување на начините на учење, а особено на сознајното усвојување на содржините кое е предуслов за нивно помнење во подолг временски период. Притоа треба да се има предвид дека всушност станува збор за процесот на усвојување на знаењата и за начините на стекнување со квалитетни знаења. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме

само на методите на учење и на помнењето и заборавањето¹⁾, т.е. подетално ќе ги разгледаме:

- учењето,
- методите на учење,
- помнењето и заборавањето,
- психолошките услови за успешно учење и
- трансферот на учењето.

2.1. УЧЕЊЕ

Во овој дел ќе се осврнеме на *учењето*, кое го подразбираме како менување на индивидуата. Притоа ќе се задржиме само на сложените облици на учење, без да навлегуваме во општата теорија на учење, бидејќи истата не е од интерес за нашите натамошни разгледувања. Всушност, како и во останатите точки од овој дел, ќе се осврнеме само на оние елементи од теоријата на учење кои ни се неопходни за нашите натамошни разгледувања.

Учењето како менување, предизвикано од дејноста на индивидуата, во основа се разликува од заморот кој е предизвикан од истата дејност. Имено, промената што е резултат на учењето претставува напредување и усовршување на личноста, што значи дека станува збор за позитивно менување на личноста, а додека заморот го намалува ефектот на учењето, т.е. има негативно влијание на личноста. Според тоа, станува збор за две антагонистички појави. Заморот е краткотрајна појава, предизвикана од наталожување на штетни материи во организмот, па затоа може брзо да се отстрани. Од друга страна, промените настанати со учењето се релативно трајни и можат да траат неколку денови, месеци, па дури и години. Значи, *учењето* е позитивно и релативно трајно менување на индивидуата, настанато под влијание на средината и предизвикано од потребите на индивидуата која се менува.

Од претходната дефиниција, непосредно следи дека усвојувањето на нови поими е учење. Исто така, изведувањето правила, принципи и закони преку согледување на односите меѓу предметите и појавите, како и примената на стекнатите знаења и умеења е условено од учењето. Сето ова придонесува, промените кои настануваат со учењето да не се однесуваат само на усвоените знаења, умеења и вештини. Всушност, со учењето постојано се менува човековата личност во потесна смисла. Имено, во процесот на учењето се учат желбите и целите кои не поттикнуваат кон ново учење, т.е. човекот се учи на амбициозност. Притоа, со усвојувањето на нови знаења, кои се резултат од учењето, се менуваат и навиките на инди-

видуата, што значи истата се преобразува. Со еден збор, учењето можеме да го сфатиме како постојано прогресивно менување на личноста.

Учењето кај човекот се јавува во разни облици, при што наједноставен облик на учење е условниот рефлекс. Во нашите разгледувања нема да се осврнеме на овој облик на учење, но ќе забележиме дека сложените облици на учење, како што се *учењето на одделно моторно дејство, вербалното учење и учењето во вид на решавање проблеми*, не се составени од меѓусебно поврзани и обусловени условни рефлекси. Имено, условниот рефлекс е посебен вид учење, на кој не можат да се сведат другите видови учења.

Моторното учење претставува учење на едно *моторно дејство* или *моторна вештина* која се состои од низа движења. Понатаму, при *вербалното учење* се усвојуваат знаења во најтесна смисла на зборот, што значи дека се учат песни, прозни состави, научни резултати, странски јазици и слично. *Учењето во вид на решавање проблеми* подразбира стекнување знаења и умења за решавање проблеми од областа на физиката, биологијата, хемијата, аритметиката, геометријата, логички или друг вид проблеми, за чие решавање е неопходно целисходно користење на претходно усвоените знаења и умења и снаоѓање во непозната ситуација. Според тоа, решавањето проблеми е највисокиот вид на учење и во овој случај учењето преминува во творештво.

Моторното, вербалното и учењето во вид на решавање проблеми, ги разгледуваме одделно само од теориска гледна точка. Меѓутоа, во практиката меѓу овие три вида учења не може да се повлече строга граница. Имено, во извесна смисла секое учење е еден вид решавање проблеми, а исто така моторните дејства се застапени во сите видови учења, што всушност важи и за вербалното учење, кое без исклучок ги прати како моторното, така и учењето во вид на решавање проблеми.

Во натамошните разгледувања нема да се задржуваме на проучување на различните видови учења, но ќе се осврнеме на проблемот на напредување во текот на учењето.

2.1.1. НАПРЕДУВАЊЕ ВО ТЕКОТ НА УЧЕЊЕТО

Пред да преминеме на разгледување на напредувањето во текот на учењето, да забележиме дека различните видови учење овозможуваат преку низа дејства да се постигне успех, што всушност е завршен дел на учењето. Притоа, секое решение до кое ќе дојде човекот доведува до остварување на поставената цел, па затоа учењето за момент престанува. Меѓутоа,

во повеќето случаи човекот со учењето, особено кога се учат сложени дејства, ретко доаѓа до степен кој не може да се надмине. Имено, постигнувањата во повеќето случаи се помалку или повеќе релативни. Тие пред се зависат од многубројни фактори и од особините на оној што учи, како на пример од:

- содржината која се учи,
- општественото признание,
- амбицијата, истрајноста и други лични особини,
- задоволството или незадоволството со веќе постигнатото итн.

Од друга страна, степенот на постигнатиот успех зависи од методот на учење, како и од времето потрошено за учење.

Напредувањето во текот на учењето најдобро може да се следи кај сложените дејства кои се учат во низа повеќекратни повторувања на едноставни дејства. Овие дејства можат да бидат моторни или вербални, при што анализа на напредувањето полесно може да се изврши кај моторните дејства, кај кои одделни степени на учењето се јасно видливи и за нивно совладување е потребен поголем број повторувања.

Природно е да се запрашаме дали и како можеме да го мериме напредувањето во учењето. Ова е особено важно, бидејќи учителот мора постојано да има увид во напредувањето на своите ученици. Одговорот на ова прашање не е едноставен, но сепак практиката покажала дека кога станува збор за напредувањето во учењето учителот мошне едноставно може да ги мери:

- 1) дејствата или материјалот што се совладува,
- 2) времето за кое дејствата или материјалот се совладуваат, и
- 3) точноста и знаењата и умењата кои произлегуваат од материјалот што се совладува.

Секако, начините за мерења на претходните параметри се разликуваат за различните видови учење, но тие зависат и од она што се учи. Така, не е исто дали овие параметри ги мериме при усвојување на знаења и умења од областа на геометријата или од областа на аритметиката, како и тоа дали мерењата ги реализираме кај ученици од V или VIII одделение. Имајќи го предвид претходно споменатото, пожелно е секој учител да изработи сопствени инструменти за мерење на напредувањето во учењето, кои пред се треба да бидат сообразени со она што се учи, но и со возраста на учениците и периодот во кој се усвојуваат знаењата, т.е. дали е на почетокот или на крајот од учењето на една тематска целина.

Напредувањето во текот на учењето најчесто графички се претставува со помош на дијаграм, од кој може да се согледа како напредува уче-

њето во определен временски период. Главно постојат три типови дијаграми со кои се претставува различното напредување во текот на учењето, и тоа:

- a) конкавна (испакната) крива линија,
- b) конвексна (вдлабната) крива линија и
- c) крива линија во вид на буквата S.

Конкавната крива линија соодветствува на напредување кое во почетокот на учењето е големо, а со натамошно продолжување на учењето на исто дејство или ист материјал станува сè помало и помало. Притоа може да имаме постојано напредување во текот на учењето, но тоа напредување споредено со постигнувањата на почетокот на учењето е сè послабо и послабо. Ваков случај имаме кога индивидуата има предзнаења во сродни области на областа која се учи или умеања во вештина која е многу блиска до моторното дејство кое се совладува. Исто така, овој дијаграм е карактеристичен доколку материјалот или дејството кое се усвојува е полесно. Имено лесниот материјал и едноставните дејства не само што побрзо се совладуваат на почетокот, туку тие по кратко време наполно се проучуваат, па затоа во овој случај дијаграмот на напредување во учењето може да не покажува понатамошно повишување. Исто така, за побрзото напредување во почетокот на учењето свое влијание има и посилниот мотив со кој се почнува учењето, а кој може во натамошното учење да се намалува. Имено, најчесто интересот и воодушевувањето, со кои се пристапува кон учење на некој материјал или некое дејство, можат во текот на понатамошното учење да слабеат.

Конвексната крива линија соодветствува на напредување кое на почетокот на учењето е помало, а со понатамошно учење на ист материјал или исто дејство станува се поголемо и поголемо. Ваково напредување имаме кога индивидуата нема предзнаења од областа која ја учи, ниту пак предзнаења од сродни области. Имено, во ваков случај на почетокот бавно се стекнуваме со нови знаења, но колку повеќе учиме и колку повеќе усвојуваме нови знаења и умеања, толку повеќе стекнуваме предуслови и создаваме можности за побрзо стекнување нови знаења и умеања. Имено, во случајот се проширува основата за стекнување нови знаења и умеања, што всушност ни овозможува побрзо усвојување на нови знаења од областа која ја учиме. По правило, конвексната крива линија во напредувањето се добива секогаш кога се учи многу тежок материјал или многу сложено дејство, а притоа учењето е пропратено со никакви или мали предзнаења и предумеања. Притоа, во почетокот напредувањето ќе биде бавно, но како ученикот сè повеќе и повеќе навлегува во сложената материја истата сè повеќе се разбира, а со самото тоа се овозможува полесно и побрзо напредување. Конвексната крива линија како типичен дијаграм се јавува при

учењето на странските јазици, но таа е карактеристична и за усвојувањето на математичките знаења и умеења.

Третиот дијаграм на учење во облик на буквата S, е комбинација на конвексниот и конкавниот дијаграм. Истиот се јавува кога имаме учење на потежок материјал без претходни знаења и умеења, при што напредувањето во учењето на почетокот е бавно, а доколку се продолжи со учењето напредувањето е сè побрзо. Но, натамошното продолжување со учењето постепено води кон завршниот степен на совладување на предвидениот материјал, па затоа напредувањето полака се успорува.

2.1.2. МЕТОДИ НА УЧЕЊЕ

Во врска со методите на учење, експерименталната психологија разгледува две основни прашања, кои се поврзани со:

- распределбата на учењето во текот на времето и
- поделбата на материјалот, или сложените дејства што се учат, на делови.

Во првиот случај се поставува прашање, дали некоја наставна содржина или дејство треба да сè учи или вежба непрекинато во времето кое е на располагање за негово учење се додека не заврши учењето, или учењето треба да се организира во повеќе временски интервали со помали или поголеми паузи меѓу нив. Во вториот случај се поставува прашањето дали наставната содржина треба да се усвојува одеднаш или треба да се подели на помали делови и треба да се учи дел по дел.

Во врска со првото прашање постојат два вида учење и тоа: *распределено* и *концентрирано (нераспределено) учење*, а во врска со второто прашање, исто така, имаме два вида учење и тоа: *глобално* и *партитивно учење* и истите ќе ги разгледаме одделно.

2.1.2.1. РАСПРЕДЕЛЕНО И НЕРАСПРЕДЕЛЕНО УЧЕЊЕ

Учењето во кое предвидената наставна содржина се усвојува во повеќе временски интервали со помали или поголеми паузи меѓу нив го нарекуваме *распределено учење*, а учењето при кое наставната содржина се усвојува одеднаш го нарекуваме *концентрирано (нераспределено) учење*.

Природно е да се запрашаме кое учење е поефективно, распределеното или концентрираното? Бројните експерименти потврдуваат дека рас-

пределеното учење е поефективно од нераспределеното. На пример, при усвојување на замена на цифри со броеви (употреба на шифра) со ученици кои имале приближно исти предиспозиции реализиран е следниов експеримент: учениците се поделени во четири групи, од кои:

- првата група вежбала по 10 минути двапати дневно во текот на шест дена,
- втората група вежбала по 20 минути еднаш дневно во текот на шест дена,
- третата група вежбала по 40 минути еднаш, секој втор ден во текот на шест дена и
- четвртата група вежбала 120 минути одеднаш.

Како што можеме да видиме сите ученици вежбале ист број минути, но кај различните групи вежбањето е различно распределено. Резултатите од овој експеримент покажале дека најголем успех постигнале учениците од првата група, која вежбала во време распределено на 12 периоди по 10 минути, а додека најслаби резултати покажала групата која вежбала 120 минути непрекинато. Резултатите од овој експеримент се потврдени и во бројни експерименти кои се реализирани во врска со распределеното и нераспределеното учење, при што се покажало дека методот на распределено учење е далеку поекономичен во случај кога содржината која се усвојува има помала логичка поврзаност. Секако, ова не е случај со наставните содржини во предметите математика, физика, хемија и биологија, но и во овој случај распределеното учење се покажало далеку поефективно.

Како да се објасни поголемата ефективност на распределеното учење? Едно од можните објаснувања е дека при концентрираното учење ученикот се заморува и дека заморот е една од причините што распределеното учење е поефективно од нераспределеното. Ова секако е точно, меѓутоа дури и концентрираното учење во релативно краток временски период, при кое не може да се говори за некој поголем замор, покажува дека распределеното учење повторно е поефективно. Според тоа, не можеме да земеме дека заморот е пресуден за послабите резултати при концентрираното учење. Ќе се обидеме да наведеме неколку моменти, за кои сметаме дека се причини за поголемата ефективност на распределеното во однос на концентрираното учење.

- a) При концентрирано учење, голема е веројатноста да се формираат и погрешни (нелогички) претстави. Природно, вакви претстави може да се формираат и при распределеното учење, меѓутоа тие во периодот кога не се учи се забораваат со поголема веројатност.
- b) Во паузите кога ефективно не се учи, често пати дури и без наша волја се навраќаме на содржините кои претходно сме ги

учеле. Во таквите случаи ние ненамерно го “повторуваме” материјалот што сме го учеле, иако тоа го правиме без план и несистематски.

- с) Во случај на распределено учење при секое ново учење, секое обновување, одново приоѓаме кон содржината што ја учиме. На тој начин во истите содржини постојано увидуваме нови врски и односи не само меѓу нивните одделни делови, туку и меѓу нив и порано усвоените содржини и содржините од другите области. На тој начин содржините кои се обновени повеќе пати се појавуваат во нова светлина и добиваат ново значење и нова смисла, со што содржините кои се усвојуваат се поврзуваат и утврдуваат. Последново всушност и го објаснува фактот дека содржините кои се усвојуваат со распределено учење не само што подобро се усвоени во дадениот момент, туку и нивното помнење е подолготрајно, т.е. помалку се забораваат отколку содржините кои се усвојуваат со концентрирано учење во даден временски период.

Меѓутоа, концентрираното учење не е секогаш бесполезно, бидејќи често пати сме во ситуација: за многу краток временски период да треба да освоиме определени содржини. Јасно, притоа расположивото време не ни дозволува распределено учење, па затоа во ваков случај мораме да преми-неме кон концентрирано учење. На пример, ваква ситуација имаме кај студентите за време на испитна сесија, при што закажаниот термин за полагање на испит се јавува како позитивен психолошки притисок, односно како мотивација за постигнување успех, која резултира со поголем работен замав и побрзо темпо на работа.

На крајот од овој дел да забележиме, дека имајќи ја предвид возраста на учениците, целите и задачите на наставата и фактот дека учениците треба да се стекнуваат со трајни знаења и умеења, учителот треба својата работа да ја организира така, што учениците најчесто ќе учат по распределено време, но да ги оспособува и за концентрирано учење. Последново може да се постигне со добро планирање на наставата, при што посебно внимание треба да се обрне на следењето, проверувањето и оценувањето на знаењата и умеењата на учениците. Јасно, во случајот тековното и етапното проверување претпочитаат учење по распределено време, а завршното проверување ќе овозможи оспособување за концентрираното учење.

2.1.2.2. ГЛОБАЛНО И ПАРТИТИВНО УЧЕЊЕ

При учењето на определена содржина во основа се можни два пристапи, и тоа:

- содржината ја учиме како една целина, при што велíme дека станува збор за *глобално учење* и
- содржината која ја учиме ја делиме на делови, па деловите се учат, при што велíme дека станува збор за *партитивно учење*.

Логично е да се запрашаме кој пристап дава подобри резултати? Резултатите на експериментите со кои се бара одговор на поставеното прашање се разликуваат во однос на она што се учи. Притоа, методот на целина дава подобри резултати кога се учат содржини со помала логичка поврзаност, а додека содржините кои имаат поголема логичка поврзаност многу подобро се учат ако тие се расчленат и се примени партитивното учење. Меѓутоа, ако при усвојувањето на содржините со поголема логичка поврзаност се примени методот на глобално учење и истиот се комбинира со распределеното учење, тогаш се постигнуваат одлични резултати.

Претходно изнесеното упатува на констатација дека методот на глобално учење дава подобри резултати. Меѓутоа, оваа констатација не може да биде заклучок без ограничување. Имено, се наметнува прашањето која содржина ќе ја земеме за целина? Во конкретен случај одговорот на ова прашање зависи од повеќе фактори, како што се:

- големината на самиот материјал кој се обработува,
- логичката поврзаност на разработуваниот материјал итн.

Притоа определувањето на оптималната големина на материјалот кој се учи како една целина е прашање на индивидуалните способности на личноста која учи и на нејзината возраст. Што се однесува до улогата на логичката поврзаност на материјалот кој се учи доволно е да напомниме, дека ако треба да научиме некоја песна која содржи една идеја, тогаш природно е при нејзиното учење таа да не се дели на делови. Имено, во овој случај секое делење на песната на делови негативно ќе се одрази на задржување на вниманието на основната идеја на песната, со што ќе се отежне и учењето на истата.

Зошто глобалното учење дава подобри резултати? Одговорот на ова прашање не е едноставен, но сепак може да се каже дека важна улога има смислата на она што се учи. Имено, смислата на она што се учи полесно се согледува при глобалното учење, отколку при партитивното учење, а тоа значи дека уште при самото учење се поврзуваат деловите од кои е составена целината, што во крајна линија придонесува за нивно полесно и подолготрајно помнење.

Од друга страна при партитивното учење имаме повеќекратно повторување на секој дел одделно. Притоа несвесно се поврзува крајот и почетокот на секој одделен дел, наместо да се формира врска меѓу крајот на еден дел и почетокот на следниот дел од материјалот кој се учи. Јасно, вака формираните врски не се природни и истите го намалуваат ефектот кој се постигнува при партитивното учење.

Веќе рековме дека глобалното учење дава подобри резултати од партитивното. Меѓутоа, при оспособувањето на учениците треба да земеме предвид дека при глобалното учење треба да се вложи многу поголем напор отколку при партитивното. Затоа примената на методот на глобално учење е толку потешка, колку што е помала возраста на учениците. Последното значи дека кај децата треба да се води сметка за колкав напор се тие способни, па затоа најчесто целините кои ги усвојуваат со глобално учење мора да се методски единици со помал обем. Од друга страна, партитивното учење не само што е полесно, туку најчесто доведува и до поголем привремен успех, па затоа учениците почесто го применуваат. Меѓу причините за прифаќањето на партитивното учење е и тоа, што на потешките делови од материјалот може да им се обрне поголемо внимание, а полесните не мора да се повторуваат онолку пати колку што се повторуваат потешките.

Како што видовме, дали ќе се учи со методот на глобално или партитивно учење зависи од големината и тежината на материјалот, од смислата што ја проткајува целината и од возраста и способноста на ученикот. Што ќе се смета за целина исто така е релативна работа, бидејќи најчесто и мал дел од материјалот кој се учи може да се оформи како методска единица. Од друга страна, методската единица која се усвојува на еден наставен час е дел од една поголема целина, наставна тема, која треба да се усвојува со методот на глобално учење. Со други зборови, умешното водење на наставата од страна на учителот, што подразбира и осмислено етапно и завршно проверување на учениците, треба да овозможи учениците да го совладаат методот на глобално учење, за кој веќе рековме дека е поефикасен од методот на партитивно учење.

Во многу случаи, особено кога содржината која се учи е релативно тешка и обемна, може да се комбинираат методите на глобално и партитивно учење. Еден од начините на комбинирање на овие методи може да биде следниов:

- на почетокот се чита целиот материјал, од почетокот до крајот, сè додека не се сфати смислата на целината,
- потоа материјалот се дели на делови и истите се учат со методот на партитивно учење и

- на крајот со методот на глобално учење материјалот се усвојува како една целина.

2.1.2.3. АКТИВНО УЧЕЊЕ

Познато е дека доброто изведување на едно дејство тешко ќе се усвои ако само се чита описот на дејството, а притоа не се прави обид дејството практично да се реализира. Така, на пример, пишувањето не може да се научи само со гледање на буквите, па дури и со набљудување како други пишуваат. Исто така, пишувањето не може да се научи и во случај кога ученикот вежба само со повлекување со прст по модели или по релјефни букви или со молив повлекува по букви кои се покриени со проѕирна хартија. Во претходно споменати случаи немаме активно усвојување на пишувањето. Можеме да говориме за активно учење на пишувањето, ако детето гледајќи ги примерите на напишаните букви се обидува самото да ги напише буквите. Истиот принцип важи за сите видови учење, што значи и за усвојувањето на нови знаења.

При усвојувањето на нови знаења, еден од најважните модалитети за активно учество на ученикот е *преслушувањето*. Што е преслушување? Различни автори даваат различни дефиниции за преслушувањето, но сите се согласуваат дека преслушувањето претставува презентирање на научениот материјал или наученото дејство на начин на кој треба тоа да се направи на испит или во секојдневниот живот. Едноставно речено, некој да се преслуша, значи некој да се испитува. Според тоа, кога ученикот сам се преслушува, тој всушност самиот се испитува, што значи дека кога учениците заемно се преслушуваат, тие всушност се испитуваат едни со други. Искуството покажува дека преслушувањето треба да биде дел од процесот на усвојување на нови знаења и умеења. Имено, за разлика од обичното читање или од слушањето во кое ученикот најчесто се сведува на пасивен учесник во наставата, при преслушувањето имаме сосема поинаква ситуација.

Бројните експерименти покажуваат дека, ако ученикот од 2,5 часа, колку што има на располагање да научи определена содржина, целото време го искористи само за читање, тогаш од таквото учење ќе има помалку полза, отколку ако најмалку половина час искористи за преслушување, а преостанатото време за читање. Експериментално е покажано дека, резултатите од учењето се подобри во случај кога е поголемо учеството на преслушувањето. Меѓутоа, треба да се земе предвид дека определено време мора да се искористи за читање, бидејќи прераното преминување на преслушување може да биде причина за појава на голем број грешки, кои се

јавуваат на почетокот и за чие отстранување подоцна е потребно повеќе учебно време.

Повеќето ученици преслушувањето не го практикуваат при усвојување на знаењата и умењата, туку истите се усвојуваат со повеќекратно читање на материјалот што се усвојува. Ваквиот начин на учење има низа недостатоци, меѓу кои ќе ги наведеме следниве.

- а) Повеќекратното непрекинато читање без преслушување на материјалот кој се усвојува, помалку или повеќе е само пасивно дејство. Ваквото дејство резултира со несвесно губење на интересот и оддалечување од она што се учи, што доведува до фантазирање. Притоа, дури по подолго изгубено време ученикот се оттргнува од фантазирањето и се враќа на содржината која ја чита. Наспроти тоа, преслушувањето овозможува ученикот постојано да е концентриран на материјалот кој го усвојува, а тоа овозможува постигнување подобри резултати.
- б) Читањето без преслушување, кај ученикот, формира лажна слика за неговите знаења. Имено, кога ученикот само ја чита лекцијата која ја усвојува, наместо активно знаење има појава на *рекогниција (препознавање)*. Притоа, кога еднаш ќе ја прочита лекцијата што треба да ја научи, особено во случај кога истата е разбрана, при второто читање лекцијата на ученикот му се чини позната. Се разбира, ова е природно бидејќи тој еднаш веќе лекцијата ја прочитал. Меѓутоа, ако понатаму продолжи лекцијата која ја учи само да ја чита, без притоа да се преслушува, кај ученикот неминовно ќе се создаде претстава дека оваа лекција ја знае добро. Притоа, штом ученикот доспее до ваква свест, дури и до нејасно чувство на познатост, тој го прекинува натамошното учење, што всушност претставува еден вид на самоизмама за стекнатите знаења. Резултат на ваквото учење се и изјавите на некои ученици, дека пред учителот да ги праша тие знаеле сè, но дека кога учителот ги прашал не можеле на ништо да се сетат. Се разбира, повеќето учители од ова излекуваат погрешен заклучок, дека ученикот не учел и се обидува да се оправда за своето неработење, без притоа да помислат дека станува збор не за неучење, туку за погрешен начин на учење.

Зошто учењето со преслушување е порационално отколку учењето без преслушување? За да одговориме на поставеното прашање ќе наведеме неколку моменти, од кои може да се види полезноста на учењето со преслушување.

- i)* Преслушувањето претставува дејност на ученикот во текот на самото учење. Притоа, наместо само да прима впечатоци, поими и податоци, кои само ги сфаќа и разбира, ученикот се обидува самостојно да ги среди, поврзи и искаже, со што всушност навлегува во суштината на она што го учи и со самото тоа формира логичка целина за материјалот кој е предмет на учење.
- ii)* Во текот на преслушувањето ученикот се запознава со потешките и полесните места на содржината која ја усвојува. Притоа, тој станува свесен и за грешките кои ги прави, па затоа на овие места обрнува поголемо внимание и повеќекратно се навраќа како при читањето, така и при преслушувањето. Се разбира, ваквиот пристап овозможува ученикот да се здобие со сеопфатни и трајни знаења и умеења.
- iii)* Во текот на преслушувањето кај ученикот се развива сознание за постигнатиот успех. Притоа, треба да се има предвид дека сознанието за сопствените постигнувања силно влијае на напредувањето во понатамошното учење, а тоа е од особена важност за континуираното напредување во усвојувањето на нови знаења и умеења.
- iv)* При преслушувањето ученикот се става во ситуација да ги искажува своите знаења во реална ситуација (испит, користење на знаењата во секојдневниот живот итн.). Имено, ние знаеме многу работи, но само мал број од нив сме во состојба да ги искористиме во определена ситуација. Ова се должи на фактот, дека голем дел од нашето знаење не сме во состојба да го искористиме во случај кога имаме потреба од истото. Меѓутоа, со преслушувањето ученикот се подготвува своето знаење да го искористи во определена ситуација и при определени услови, односно при испрашување во училиштето или во секојдневниот живот. Дека ова подготвување е важно, докажуваат многу случаи во кои поединецот не може да го искаже или примени своето знаење, само затоа што не се навикнал на ситуацијата во која во моментот има потреба од сопственото знаење.

На крајот од овој дел да забележиме, дека материјалот што се усвојува треба да се учи во подолг временски период и повеќе отколку што е потребно да се знае во дадениот момент. Ова пред сè се должи на фактот дека заборавањето почнува оној момент кога ќе се престане со учењето, при што процесот на заборавање е најинтензивен токму во првите денови по учењето, за што подоцна ќе говориме. Затоа, слободно може да се каже, дека и во случај кога учењето се реализира со преслушување, ако ученикот во моментот кога може наученото сознајно да го репродуцира, престане да учи, тогаш тој не се здобива со трајни знаења. Во прилог на претходно

кажаното оди и неспорниот факт дека дејствата кои се повторуваат во еден подолг временски период скоро и да не подлежат на забораване. Затоа, здобивањето со трајни знаења и умеања е можно само ако ученикот “претера” со учењето преку оној доволен степен за усвојување на новите знаења и умеања.

Имајќи го предвид претходно изнесеното, логично е да се запрашаме како да се обезбеди активно совладување на наставните содржини од страна на учениците, се со цел истите да се здобиваат со трајни и применливи знаења и умеања. Одговорот на ова прашање не е едноставен, но сепак ќе наведеме неколку моменти на кои учителот треба да обрне внимание и за кои сметаме дека ќе придонесат учениците да се здобиваат со трајни и применливи знаења и умеања. Во смисла на претходно изнесеното, потребно е:

- 1) учениците да се подготват за усвојување на новите наставни содржини, што може да се направи со задавање на домашна работа која ги опфаќа неопходните знаења и умеања за совладување на новото или со повторување на потребните наставни содржини;
- 2) оптимално користење на дидактичките средства и примена на научните методи од страна на учениците, како при усвојувањето на новите знаења и умеања, така и на часовите за повторување и утврдување;
- 3) континуирано да се задаваат домашни задачи, кои треба да бидат осмислени така што ќе се поттикнува учењето со преслушување и ќе се овозможи ученикот постојано да го повторува и утврдува еднаш наученото, со што ненаметливо ќе се стави во ситуација да “претера” со учењето преку оној доволен степен за усвојување на новите знаења и умеања; и
- 4) етапното проверување да се организира така што покрај темата која е предмет на непосредна проверка, ќе бидат опфатени и содржини од претходните наставни теми, со што ќе се придонесе учениците во подолг временски период да се преслушуваат на веќе усвоениот материјал, а со самото тоа да се здобиваат со потрајни и посеопфатни знаења и умеања.

2.2. ПОМНЕЊЕ И ЗАБОРАВАЊЕ

Во претходните разгледувања учењето го дефиниравме како менување на индивидуата. Во оваа смисла *помнењето* го сфаќаме како траење на извршените промени, а *заборавањето* како губење на извршените промени.

Помнењето во себе опфаќа три функции и тоа:

- задржување на впечатоците и податоците (ретенција),
- обновување (репродукција) на она што сме го доживеале и
- препознавање (рекогниција) на она што порано сме го доживеале или научиле.

Во нашите разгледувања нема да се задржиме на разгледување на функциите на помнењето, но ќе разгледаме некои практични аспекти на помнењето и заборавањето, т.е. подетално ќе се осврнеме на:

- помнењето и заборавањето на различен материјал,
- методите на учење и помнењето и
- причините за заборавањето.

2.2.1. ПОМНЕЊЕ И ЗАБОРАВАЊЕ НА РАЗЛИЧЕН МАТЕРИЈАЛ

Постои тесна врска помеѓу природата на материјалот што се учи и должината на помнењето, односно брзината на заборавањето. Притоа, *материјал кој претставува логичка целина не само што се учи побрзо и подобро, туку и подолго се помни* од материјал кој нема смисла и кој мора да се учи механички. Исто така, материјалот кој се учи со разбирање подолго се помни отколку материјалот кој се учи без разбирање, па затоа од посебно значење е учениците при усвојување на новите содржи тоа да го направат сознателно. Понатаму, при сознателното усвојување на материјалот најдолго се помни неговата смисла, неговата суштина ако истата е разбрана во текот на учењето. Конечно, колку одделните делови на материјалот кој се учи се повеќе поврзани меѓу себе, толку повеќе истите се помнат.

Од усвоеното знаење во училиштата *подолго се помнат општите идеи и сфаќања, општите правила, поставки и методи*, отколку поединечните факти, кои многу брзо се забораваат ако не се поврзани меѓу себе. Но, и самите идеи, сфаќања, поставки и методи подолго се помнат доколку учењето е индуктивно, т.е. доколку тоа се одвива од поединечното кон општото. Имено, повеќето ученици апстрактните идеи и закони не можат да ги осмислат ако истите не се потпираат на поединечни факти, ако во времето на учењето не произлегле од поединечните разгледувања, при што учениците полесно ги согледуваат односите меѓу предметите и појавите. Меѓутоа, ако овие идеи и закони се правилно усвоени, дури и во случај кога тие ќе се забораваат, многу полесно повторно се усвојуваат, т.е. полесно се обновуваат знаењата.

Што се однесува до помнењето, да споменеме дека научените моторни дејства се помнат подолго отколку другите усвоени знаења. Имено, еднаш усвоената вештина за возење велосипед, пливање, лизгање на мраз, скијање и слично, лесно се обновуваат дури и ако со истата не се занимавате дваесет, па и триесет години. Зошто усвоените моторни дејства се помнат подолго? Една од причините е надоврзувањето на некои моторни дејства на определени основни вродени движење, како што е случајот, на пример, со возењето велосипед, пливањето и лизгањето. Друга причина е тоа што при усвојувањето на сите моторните дејства еден релативно мал број движења “бесконечно” многу пати се повторуваат. Од друга страна, при усвојувањето на останатите знаења и умења, имаме голем број податоци, секој од кои многу ретко се повторува, а најчесто уште поретко се употребува, отколку што тоа е случај со моторните дејства.

Многу студии за заборавањето на наставните содржини по одделните предмети покажуваат дека во летниот распуст се забораваат најмалку 50% од усвоените знаења во текот на претходната учебна година. Притоа треба да се има предвид дека најмногу се забораваат усвоените знаења кои најмалку се повторуваат. Затоа искусните учители на почетокот на секоја учебна година, во првите неколку недели, организираат систематско обновување на претходно усвоените знаења од страна на учениците. Понатаму, забележано е дека решавањето на таканаречените текстуални математички задачи не е ништо послабо на почетокот на следната учебна година, отколку што тоа било на крајот од претходната учебна година. Последново може да се објасни на два начини, прво, логичките дејства се поотпорни на заборавањето, и, второ, децата се постари за три месеци, што значи и интелектуално позрели, а со самото тоа и поспособни за решавање на вакви проблеми.

Од почетокот на овој век континуирано се наметнуваат тезите дека учениците се преоптоварени, наставните содржини се преобемни и слично, што резултира со постојано неаналитичко ревидирање на наставните содржини, најчесто со нивно драстично редуцирање. Без да навлегуваме во овие суптилни прашања, од гледна точка на помнењето и заборавањето, овде само ќе споменеме дека експериментално е потврдено дека подолг и пообеман материјал повеќе се помни и потешко се заборава, отколку пократок материјал. Последново се должи на неколку причини, од кои ќе споменеме две:

- при усвојувањето на пообеман материјал потребен е поголем број повторувања за негово научување, и
- пообемниот материјал е поорганизиран, има поголем број врски што се воспоставуваат во текот на учењето, што придонесува истиот подолго да се помни.

2.2.2. МЕТОДИ НА УЧЕЊЕ И ПОМНЕЊЕ

Претходно, од гледна точка на побрзо и поекономично учење, ги разгледаваме методите на учење. Во овој дел ќе се осврнеме на улогата на методите на учење во траењето на наученото.

Што се однесува до *распределеното учење*, тоа не само што е поекономично, туку доведува и до подолго помнење на наученото. Имено, кампањското учење кое учениците често го практикуваат не само што дава положни резултати во моментот кога треба да се покаже знаењето, туку резултира и за побрзо заборавање на наученото.

Како што видовме, *учењето со преслушување* води кон поголем и побрз успех. Но, ова учење има голема предност и во однос на помнењето. Имено, ако определен материјал е усвоен со преслушување, тогаш како што кажавме се воспоставуваат логички врски во материјалот кој се усвојува, што од своја страна придонесува за негово подобро помнење.

При разгледувањето на методите на учење објаснивме дека во случај кога *материјалот што се усвојува се учи во подолг временски период и повеќе отколку што е потребно да се знае во дадениот момент*, истиот се помни во подолг временски период, т.е. учениците се здобиваат со потрајни знаења и умења.

Обично се мисли дека *кој брзо учи, тој брзо и заборава*. Меѓутоа, бројните експерименти во врска со ова прашање не го потврдуваат искажаното правило. Имено, оној што брзо учи, тоа го постигнува бидејќи подобро и побрзо ги согледува клучните моменти во материјалот што го учи, подобро и побрзо ги поврзува фактите кои ги учи, и затоа е концентриран да согледа повеќе значајни факти во материјалот што го учи и нивната заемна поврзаност и обусловеност. Имајќи го ова предвид, можеме да заклучиме дека од посебна важност е дека при реализирањето на наставата учителот треба вниманието на учениците да го задржи на клучните факти и да овозможи учениците, самостојно или со минимална помош, да ја откриваат причинско-последователната поврзаност и обусловеност на овие факти.

2.2.3. ПРИЧИНИ ЗА ЗАБОРАВАЊЕ

Штом ќе престане учењето на некоја наставна содржина, веднаш почнува заборавањето. Во почетокот темпото на заборавање е побрзо, а колку времето одминува темпото на заборавање е побавно, иако заборавањето кумулативно расте. Често пати може да се слушне мислењето, дека

главна, ако не и единствена, причина за заборавањето е престанувањето со учење, ако не се користат усвоените знаења и умееша и слично, што се поткрепува со фактот дека кумулативното заборавање е сè поголемо до колку изминатото време од последното учење на наставната содржина е подолго. Како што можеме да видиме, според ова мислење заборавањето се третира како пасивен процес. Меѓутоа, бројни експерименти укажуваат дека заборавањето е активен процес. Имено, времето што изминува после последното учење не е “празно” време, време во кое немало никакви активности. Напротив, токму активностите кои го исполнуваат времето после учењето се главната причина за заборавањето.

Во прилог на претходната констатација дека заборавањето е активен процес, се и резултатите што ни ги даваат експериментите за влијанието на спиењето и будната активност врз помнењето на наученото пред спиењето и пред будната активност. Притоа е испитуван текот на заборавањето во време на различни должини на спиење и соодветните должини на будност, како и соодветните должини на будна активност. Констатирано е дека во текот на спиењето заборавањето настапува во почетокот на првиот или првите два часа на спиење, но во понатамошниот тек на спиење нема заборавање. Постои мислење, дека причина за ваквиот тек на заборавањето при спиењето е разликата меѓу длабочината на сонот во првиот или првите два часа и длабочината на сонот во понатамошните часови на спиење. Понатаму, експериментите покажуваат дека и во првиот или првите два часа од спиењето заборавањето тече многу побавно отколку во истото време при будна активност.

Други експерименти покажуваат, дека од една страна подобро и подолго се помни смислата и суштината на научените наставни содржини, додека, пак, од друга страна неважните детали многу брзо се забораваат. Притоа, разликата меѓу помнењето и заборавањето на суштината и деталите е воочлива како во време на спиење, така и при будна активност после учењето. Меѓутоа, и во овој случај брзината на заборавање на неважните детали е далеку поголема при будна активност отколку при спиењето.

Што се однесува до заборавањето при будна активност и заборавањето при будно мирување или одмор, констатирано е дека во првиот случај тоа е со поголем интензитет. Причината за оваа разлика е во фактот, дека при будна активност непосредно после учењето усвојуваме нови знаења и умееша, кои ги потиснуваат старите знаења и умееша, процес кој во литературата е познат како *ретроактивна инхибиција*. Колку новото учење ќе му пречи на старото зависи од многу услови, но сепак може да се каже дека во овој процес доминантно место има изминатото време меѓу учењето на една наставна содржина и следното учење на друга наставна содржина. Имено, колку е пократко времето меѓу завршеното учење на ед-

на содржина и почетокот на учењето на друга содржина, толку е поинтензивна ретроактивната инхибиција. Притоа, учењето на нова содржина со својата временска блискост пречи не само кога тоа следи после првото учење, туку и кога непосредно следи после повторувањето на претходно научените наставни содржини. Во училишната практика ова се случува не само кога по усвојувањето на една содржина непосредно се предава друга содржина, туку и во случајот кога по учењето на нова содржина непосредно се испитува по претходно усвоените содржини. Затоа е неопходно да се менуваат навиките на учителите, кои ваквата своја постапка ја образложуваат со “заштеда” на времето, без притоа да водат сметка за вистинските потреби на учениците.

Како што рековме учењето на две наставни содржини една по друга резултира со појава на ретроактивната инхибиција, која е поизразена ако е поголема сличноста на содржините кои се учат една по друга. Притоа, сличноста на содржините кои се учат една по друга може да биде од различна природа, на пример, по смисла или по облик, што во секој случај доведува до ретроактивна инхибиција. Меѓутоа, понекогаш сличноста на содржините може да биде толку голема, што тие речиси се еднакви. Во ваков случај престанува ретроактивната инхибиција и имаме заемно потпомагање на двете учења.

Како да се надмине ретроактивната инхибиција? На ова прашање е тешко да се даде целосен одговор, но сепак овде ќе наведеме неколку корисни правила, со чија примена сметаме дека учителот ќе го намали дејството на ретроактивната инхибиција, а тоа се:

- да не се преминува на учење на нова наставна содржина, пред добро да се утврди стариот материјал, бидејќи ако една содржина целосно и сознателно се усвои, тогаш помнењето на истата помалку се нарушува со усвојување на нова содржина,
- на крајот од часовите кога се усвојува нова наставна содржина да не се врши повторување на претходно изучен материјал, а уште помалку оценување на учениците,
- часовите да се така организирани, што на истите се усвојуваат наставни целини, т.е. на крајот од часот да не се почнува со усвојување на содржина, што не може темелно да се обработи, бидејќи истата ќе се утврди на следниот час, но притоа материјалот усвоен во првиот дел од часот ќе подлежи на забрзано заборавување, и
- кај учениците да се формира навика при нивната самостојна работа едноподруго да не учат слични наставни содржини.

На крајот од овој дел ќе спомнеме дека, имајќи го предвид негативното влијание на ретроактивната инхибиција, од посебна важност е доброто планирање на претстојот на учениците во училиштето. Последното меѓу другото подразбира:

- одморите меѓу часовите треба да се правилно распоредени и тие да бидат во времетраење од најмалку 15 минути и
- при изготвувањето на распоредот на часовите да се одбегнуваат едноподруго да се изучуваат предмети со слични наставни содржини.

2.3. ПСИХОЛОШКИ УСЛОВИ ЗА УСПЕШНО УЧЕЊЕ

Може да се зборува за различни услови кои го зголемуваат или намалуваат успехот при учењето, како, на пример, физичките и атмосферските услови (светлината, температурата при која се учи и слично), економски, социолошки, психолошки и други услови. Во нашите разгледувања, заради нивното значење, но и заради можноста на нив да се влијае во рамките на училиштето накратко ќе ги разгледаме психолошките услови за успешно учење. Притоа, треба да знаеме дека и останатите услови стапуваат психолошки во моментот кога ученикот реагира на нив.

Еден од најважните психолошки услови за успешно учење е *намерата, желбата, волјата нешто да се научи*. Имено, само со едноставно читање на определена наставна содржина нема ништо да се научи ако не постои тежнеење и намера таа навистина да се научи. Во прилог на претходно изнесеното е и следниов експеримент. Во Мојмановата циришка психолошка лабораторија група од неколку испитаници требало да научи 8 бесмислени слогови. Обично, за да ги научат на памет, на почетниците им требале 6-10 читања на слоговите. Меѓу испитаниците се наоѓал и еден Романец, кој говорел француски, па не ја разбрал суштината на експериментот бидејќи комуникацијата била на германски. Така, иако слоговите ги прочитал 46 пати, Романецот никако не се јавувал дека е готов со учењето. Во еден момент експериментаторот на француски револтирано го прашал Романецот дали веќе завршил со учењето. Зачуден овој запрашал дали слоговите треба да се научат, а потоа само по 6 читања ги научили 8-те слогови кои претходно не можел да ги научи дури со 46 читања.

Претходно изнесениот, но и многу други експерименти, укажуваат дека ако се сака нешто да се научи, тогаш мора да се има сериозна намера тоа и да се направи. Истото се однесува и при усвојувањето на трајните

знаења и умеења, како и на случајот кога определени знаења и умеења треба да се усвојат за определен временски период.

Друг психолошки услов за успешно учење е *сознанието за важноста на задачата и одговорноста на ученикот*. Имено, ако ученикот е свесен за важноста на зададената задача, тогаш тој заема позитивен став кон истата. Ова го потврдуваат и бројните експерименти кога на две групи со приближно исти способности им се задава да учат иста, но тешка, наставна содржина. Притоа, ако на првата група и се укаже за важноста на задачата, а на втората група и се ускрати оваа информација, тогаш првата група не само што побрзо и моментално подобро ќе ја усвои предвидената наставна содржина, туку кај учениците од оваа група знаењата и умеењата ќе бидат усвоени потемелно, т.е. нивното помнење ќе биде за подолг временски период.

Меѓу психолошките услови за успешно учење се и *вербата и сигурноста во сопствените способности*, па затоа истата кај учениците треба да се негува. Имено, вербата и сигурноста во сопствените способности најчесто се темели врз претходно постигнатите успеси, но и самата се поткрепува со нови успеси. Затоа, од особена важност е да се создадат услови неколку пати едноподруго ученикот да постигне успех, кој успех од своја страна позитивно ќе влијае на натамошното учење и ќе генерира нови успеси. Притоа треба да се земе предвид дека постигнувањето успеси влијае на формирањето позитивни особини, од една страна, а постојаните неуспеси значително придонесуваат за формирањето негативни особини кај индивидуата. Овде треба да се има предвид дека, иако многу лични особини влијаат на постигнувањето успеси или неуспеси, сепак личните особини на индивидуата се повеќе обусловени од постигнувањата успеси или неуспеси. Затоа, во тежнењето да се формира позитивна личност од особена важност е кај ученикот да се негува вербата и способноста во сопствените способности.

Претходно изнесеното ни дава за право да заклучиме дека случајното и ненамерно учење не води кон вистинско усовршување, што значи дека:

- учењето туѓи јазици нема само по себе да го збогати и нашиот речник на мајчиниот јазик,
- читањето дела од врвни писатели нема само по себе да го подобри нашиот стил,
- учењето математика нема ненадејно да не научи логички да мислиме итн.

Меѓутоа, ако, на пример, систематски вежбаме логичко решавање математички проблеми, тогаш неминовно нашето логичко размислување ќе се подобри.

Што се однесува до случајното и ненамерно учење, бројните експерименти покажуваат дека тоа не дава резултати, бидејќи истото не се реализира со потребната будност и напрегнатост. Од друга страна, експериментално е потврдено дека напрегнатиот став на телото значително ја поттикнува будноста на духот. Затоа не треба да се практикува да се учи во удобна и мека фотелја, бидејќи таа е погодна само за читање лесна литература. Во оваа насока е реализиран експеримент при кој во една група учењето на определен број податоци е проследено со умерено стегање на динамометарот, а другата група истите податоци ги учела седејќи во удобни фотелји. Се покажало дека групата која податоците ги учела стегајќи го динамометарот имала подобар успех во учењето. Ваквата вештачки воведена напрегнатост во литературата е позната како *индуцирана тензија*, за разлика од *природната тензија* која се јавува како последица на нашето напрегање да совладаме одредена тешкотија при усвојување на нови знаења и умеења. И индуцираната и природната тензија имаат позитивно влијание на успешното учење, но не секогаш и не при исти услови. Затоа се тврди дека постои таканаречена *оптимална тензија* која всушност е состојба под која и над која учењето не е така успешно. Постигнувањето на оптималната тензија не е едноставно, а нејзиното ниво е индивидуално прашање, кое овде заради сложеноста нема да го разгледуваме.

За улогата на психолошките услови за успешно учење, во експерименталната психологија, се реализирани бројни експерименти, дел од кои се однесуваат на улогата на *пофалбата* и *укорот* како поттик за успешно учење. Така, во едно одделение учениците биле поделени на три групи, но тие не знаеле за поделбата. Првата група била постојано фалена за својата работа, втората постојано укорувана, а третата игнорирана. Учениците биле тестирани на тестови за собирање и множење на трицифрени броеви, врз основа на тестовите биле поделени во групи со приближно еднакви способности, а потоа собирале шест трицифрени броеви и множеле по три двоцифрени броеви. Паралелно со тоа постоела и четврта контролна група, која ги работела истите задачи, но не знаела за постоењето на останатите три групи. На крајот од тридневното вежбање се добиени следниве резултати:

- кај учениците од четвртата група немало промена во работата, т.е. ниту напредувале, ниту назадувале,
- учениците од првата група во текот на трите дена постојано напредувале,
- учениците од втората група првиот ден покажала еднакво напредување како и учениците од првата група, вториот ден малку напредувале, а веќе третиот ден нивните резултати биле исти како и на крајот од првиот ден,

- учениците од третата група покажале најслаби резултати меѓу првите три групи, но сепак биле подобри од учениците од четвртата група.

Од резултатите на овој, но и многу други експерименти, можеме да забележиме и пофалбата и укорот имаат свое влијание на успехот при учењето, при што влијанието најчесто е позитивно. Притоа, различните ученици различно реагираат на пофалбата и укорот, но генерално улогата на пофалбата и укорот како поттик за успешно учење може да се сублимира во следниве точки:

- 1) кај сиромашните деца пофалбата како поттик дејствува подобро, отколку укорот,
- 2) кај децата на кои им недостига самодоверба пофалбата како поттик дејствува подобро, отколку укорот,
- 3) кај интровертните деца, т.е. кај децата што се повлечени, осетливи, плашливи и срамежливи пофалбата како поттик дејствува подобро, отколку укорот,
- 4) кај натпросечно интелегентните деца укорот како поттик дејствува подобро отколку пофалбата, и
- 5) кај екстровертните деца, т.е. децата кои се послободни, поагресивни и порешителни укорот како поттик дејствува подобро отколку пофалбата.

Учителот, во својата секојдневна работа, често пати е во прилика да ги пофалува и укорува своите ученици. Меѓутоа, имајќи ја предвид улогата на пофалбата и укорот, во зависност од карактерот на ученикот, се наметнува потребата учителот претходно добро да се запознае, како со карактерите на своите ученици, така и со нивниот социјален статус, сè со цел пофалбите и укорувањата да бидат искористени како поттици за успешно учење.

Еден од најсилните поттици во учењето е *натпреварот*, кој може да биде индивидуален и во групи. За улогата на поединечното натпреварување и натпреварувањето во групи, како поттик во учењето, се реализирани бројни експерименти од кои највпечатлив е следниов. Илјада и петстотини ученици на возраст од 8-17 години се натпреварувале во собирање. Постоеле четири услови за работа:

- сите ученици прво работеле без експериментално мотивирана ситуација,
- секој ученик се натпреварувал поединечно,
- учениците биле поделени во екипи со приближно исти способности и екипно се натпреварувале, и

- учениците избирале како ќе се натпреваруваат, екипно или поединечно.

Притоа, кога учениците се натпреварувале поединечно, ја потпишувале задачата со своето име и презиме и им било соопштено дека ќе се изврши поединечно рангирање, врз основа на кое најдобрите ќе бидат наградени. При екипното натпреварување учениците ја потпишувале задачата со бројот на екипата и им било соопштено дека најдобрата екипа ќе биде наградена. Во случајот кога учениците избирале како ќе се натпреваруваат, екипно или поединечно, при што околу 75% избрале да се натпреваруваат поединечно, задачата се потпишувала со име и презиме или со бројот на екипата, во зависност од изборот на ученикот. По завршувањето на експериментот добиени се следниве резултати:

- учениците постигнале најдобри резултати при поединечното натпреварување, а особено во третата ситуација кога поединечниот натпревар бил избор на поединецот, и
- при екипното натпреварување учениците постигнале послаби резултати, но сепак постигнувањата биле подобри отколку во случајот кога учениците работеле без експериментално мотивирана ситуација, што веројатно се должи на мотивот за соработка на екипата во натпреварот со останатите екипи.

Во овој експеримент важно е да споменеме, дека при изборот како ќе се натпреваруваат помладите ученици го избрале екипното натпреварување. Слична ситуација имаме и при други експерименти, со чија помош е дојдено до сознание дека помалите ученици со поголема волја учествуваат во екипните натпревари и притоа тие повеќе напредуваат во учењето, отколку постарите ученици. Последното не треба да не изненадува, особено ако се има предвид фактот дека многубројните поттици во училиштето (оценките, пофалбите, укорите и слично), иако формално не претставуваат индивидуално натпреварување, сепак психолошки дејствуваат како натпревар.

Во оваа насока, треба да се разбере и оценувањето на учениците. Имено, учениците треба да научат и да чувствуваат потреба од постојано оценување, т.е. да навикнат на постојана контрола и самоконтрола на успехот во своето учење. Како што знаеме оценувањето е законска обврска, која учителот мора да ја исполни. Но, пожелно е тестови со кои се мерат постигнувањата во учењето да си ги задава и самиот ученик, со што тој ќе добие сознание за напредувањето во текот на учењето. Така, ученикот ќе биде во состојба да го споредува својот постигнат успех со утврдените стандарди во дадената област, кои треба да бидат изработени и доволно разбирливи за секој наставен предмет. Со ваквиот пристап се развива жел-

ба за *натпревар со самиот себе*, желбата за постојано самоусовршување која е од примарно значење за развојот на личноста.

Што се однесува пак до *оценувањето на учениците*, тоа треба да биде *афирмативно*, т.е. да го мери напредувањето во учењето на поединецот. Притоа на ученикот треба јавно да му биде соопштена и образложена оценката, бидејќи во тој случај оценувањето може да послужи:

- како средство за поправање на грешките во текот на учењето и
- како поттик за понатамошно напредување во учењето.

Имено, сознанието дека е точно она што е сработено (научено) предизвикува задоволство, со што всушност се утврдуваат точните знаења. Обратно, сознанието дека она што е сработено, или негов дел, не е точно ученикот го насочува истото да не го утврдува, туку да го корегира. На потребата на ученикот да му биде соопштена и образложена оценката, нема посебно да се задржуваме, но ќе спомнеме дека оценката мора да биде соопштена веднаш после испитувањето или во што е можно пократок временски рок, доколку станува збор за изработка на писмена задача. Притоа, одма после соопштувањето на оценките, треба да се повикаат сите ученици кои не се задоволни од своите оценки и да се подготват истите да ги поправат. Последното е од особена важност, бидејќи практиката покажува дека честото повторување на тестовите и писмените работи не е во функција на успешно учење, ако претходно направените писмени работи и тестови не се поправаат, т.е. ако учениците не станат свесни за пропустите во своите знаења и умеања и ако не се обезбеди правовремено и во што поголема мерка отстранување на истите.

Претходните разгледувања несомнено укажуваат на позитивната улога на натпреварувањето, како поттик за успешно учење, при што од посебна важност и оценувањето да се сфати како специфичен вид натпреварување. Овие сознанија се доволна причина за:

- континуирано одржување на натпревари по одделните наставни предмети, кои натпревари по правило треба да се реализираат во различни степени и тоа: одделенски, училишни, општински, регионални, државни и меѓународни, и
- игнорирање на мислењата од типот: “Да, системот на натпревари ви е добар, но тој не придонесува за подобро образование, па затоа не сме сигурни колку е целисходно истиот да се одржува.”, дадени од наводните експерти кои изминатава деценија во голема мера придонесоа за рунирање на нашиот образовен систем.

Општо е познато, дека *содржински пријатен материјал*, т.е. материјал кој има пријатна содржина, полесно се учи и подолго се помни. Веројатно, мотивот за ваквиот став кон содржински различните материјали лежи во интересот на индивидуата, односно во нејзиното убедување. Имено, бројни експерименти покажуваат дека полесно се учи она што соодветствува со личното уверување на индивидуата, односно со нејзиното воспитување, а додека најлошо се помни, т.е. најлошо се учи материјал кон кој индивидуата е индиферентна. Долго време се мислело дека најлошо се учи материјал со непријатна содржина, меѓутоа, експериментално е потврдено дека непријатниот материјал полесно се учи отколку материјалот на кој сме индиферентни.

2.4. ТРАНСФЕР НА УЧЕЊЕТО

Под *трансфер на учењето* го подразбираме рационалното користење на претходно стекнатото искуство при снаоѓање во нови ситуации, што значи рационална примена на стекнатото искуство кога треба да се учи. Според тоа, трансферот на учењето има значајна улога при разрешувањето на проблемските ситуации и во творечката работа. Притоа, и во двата случаја поранешното искуство не го применуваме буквално, бидејќи се наоѓаме во нови ситуации кои помалку или повеќе се разликуваат од нашето искуство. Затоа е неопходно прво да ги согледаме односите меѓу предметите и појавите, после што можеме да го искористиме претходно здобиеното искуство. Јасно, користењето на претходно здобиеното искуство е условено од степенот на согледување на односите меѓу предметите и појавите, што повторно претставува трансфер на учењето. Во нашите разгледувања нема да се осврнеме на процесот на согледување на односите меѓу предметите и појавите, бидејќи тоа излегува надвор од рамките на нашиот интерес.

Кога станува збор за трансферот на учењето, експерименталната психологија констатирала дека истиот може да се јави во најразлични видови. Најчест вид на трансферот на учењето е таканаречениот *вкрстен* или *билателарен трансфер*, т.е. пренесувањето на извежбаноста од еден на друг симетричен орган на нашето тело. Така, на пример, констатирано е дека хирургот кој е деснак, ако ја вежба спретноста на својата лева рака, тогаш и без некое посебно вежбање на десната рака со истата спретност ќе може да ја реализира увежбаната постапка. Што е тоа што се пренесува при вкрстениот трансфер? Бројните експерименти покажуваат дека се пренесува она што е општо. Имено, не се пренесуваат поединечните движења на одделните мускули, бидејќи тие не се наполно идентични кај два различни, иако симетрични органи, како што се рацете и нозете. Така, на при-

мер, при жонглирањето со две топки се пренесува искуството како да се избегне судрувањето на топките, се пренесува методот на фрлање и слично.

Дали е можен трансфер на помнењето? Одговорот на ова прашање е негативен, што е потврдено со бројни експерименти, каков што е експериментот на психологот Вилјем Џемс. Имено, Џемс со своите четворица соработници прво напамет учел 158 реда од поемата “Latur” од Виктор Иго, при што Џемс овие редови ги научил за околу 132 минути. Потоа, цели 38 денови, секој ден по 20 минути, напамет ја учел поемата “Изгубен рај” од Милтон. После тоа учење продолжил да ги учи следните 158 редови од поемата на Иго за што му требале околу 151 минута. Меѓу соработниците на Џемс тројцата сосема малку напредувале, додека четвртиот, како и самиот Џемс, назадувал.

Според тоа, кога станува збор за трансферот на учењето, не подразбираме трансфер на помнењето, туку го подразбираме користењето на стекнатото искуство, односно знаењето на методите за успешно учење, за кои претходно говоревме. Така, кога учиме ги вежбаме дејствата на учењето, а она што се пренесува од една на друга област на учење се воопштените методи и принципи на учењето, т.е. стекнатото знаење за најдобрите методи и психолошките услови за успешно учење.

На сличен начин се јавува и трансферот во областа на мислењето. И овде она што се пренесува од една на друга област се воопштените методи, кои успешно се пренесуваат ако истите се конкретизирани на поединечни случаи. Дали вежбањето на дејствата на мислењето, дури ако тоа е реализирано за релативно кус временски период, може да ја унапреди способноста на учениците? Бројните експерименти даваат потврден одговор на поставеното прашање. Така, на пример, реализиран е експеримент во кој експериментална група ученици само 12 часови вежбала аналогии, апстракции и генерализации, како и анализа на однесувањето на поединецот во различни ситуации. Потоа, на експерименталната и контролната група им се дадени петнаесетте Езопови басни и од нив е побарано да извлечат соодветни “поуки”. Констатирано е дека учениците од експерименталната група дури 64% биле подобри во извлекувањето на поуките од учениците во контролната група. Истиот експеримент е повторен со возрасни особи, но овде е констатирано дека експерименталната група “само” 16% покажала подобри резултати од контролната група. Како што можеме да забележиме иако вежбањето не се состоело во извлекување “поуки” од други басни, сепак резултатите од вежбањето се видливи и во двата случаја. За што всушност станува збор. Имено, самото вежбање аналогии, апстракции и генерализации не оспособува да ги согледуваме битните од небитните врски меѓу предметите и појавите, со што ние на конкретни примери ги усвојуваме научните методи, а потоа истите ги применуваме

во сосема подруга ситуација. Ваквиот трансфер се јавува и при решавањето на проблеми од подруг карактер, бидејќи на решавањето на истите ученикот им приоѓа користејќи ја стекнатата навика да ги воочува и разграничува битните од небитните врски меѓу предметите и појавите. Притоа, тој небитните и случајните врски ги занемарува, а своето внимание го насочува кон битните врски. Претходно изнесеното укажува колку е важно учениците уште во основното образование да ги усвојуваат научните методи, процес во кој математиката како наставен предмет има посебна улога.

На крајот од овој дел, без да навлегуваме во детали, ќе наведеме неколку основни принципи за правилен трансфер на учењето, како што се:

- усвојувањето на општи знаења, без тие уште при самото усвојување да се поврзат со нивна конкретна реализација не придонесува за успешен трансфер на учењето, што значи дека, на пример, усвојувањето на математичките знаења мора да е пропратено со внатрешнопредметна корелација, но и со силна меѓупредметна корелација со сродните наставни дисциплини, но и со секојдневниот живот,
- од методите на учење на еден наставен предмет најмногу зависи дали учениците ќе се здобиваат со знаења и умења, кои покрај тоа што ќе ги надградуваат нивните способности, ќе придонесат и за успешен трансфер на учењето, и
- релативно полесното и подолго помнење на општите принципи, придонесува за успешен трансфер на учењето, па затоа на нивното правилно усвојување треба да се посвети поголемо внимание.

Се разбира, запазувањето на овие принципи за правилен трансфер на учењето, од своја страна, бара соодветно образувани учители, кои пред се треба да имаат широка научна култура и соодветна психолошка, педагошка и методско-дидактичка наобразба. Последното добива на тежина, ако се има предвид дека при денешниот сестран развој на науката и техниката скоро и да е невозможно да се стане стручњак во определена област, а таа област да не биде тесно специјализирана. Сите научници денеска се тесно специјализирани, што несомнено пречи во заемното поврзување на различните области и обезбедување успешен трансфер на учењето. Имајќи го предвид претходно изнесеното сметаме дека подготвувањето на идните учители по одделните наставни дисциплини треба да се одвива според посебно изготвени студиски и предметни програми, кои пред сè треба да бидат во функција на идната професија. Последното е од особена важност, ако се има предвид дека на одделни наставни групи на нашите факултети е изразена доминацијата на тесно специјализираните наставни дисциплини, од кои повеќето се во функција на идниот научен развој на дел од студентите,

отколку во функција на оформување на учители кои успешно ќе се носат со својот иден позив.

2.5. ПРИНЦИПИ ЗА УСПЕШНО УЧЕЊЕ

Во претходните разгледувања се осврнавме на психолошките услови за успешно учење и на трансферот на учењето. Во овој дел накратко ќе се задржиме на петте принципи за успешно учење.

1. *Учење со сопствени интелектуални напори.* Знаењето што поединецот го усвојува преку многубројните активности и го вградува во сопствениот систем на знаења според логиката на сопственото расудување и размислување се разликува според квалитетот, применливоста и трајноста на знаењето. Вака стекнатото знаење, откако ќе биде вклопено и усугласено со претходните знаења, всушност е активно стекнато знаење со кое располага поединецот. Тоа е стварно знаење кое не се усвојува во готов облик, туку само преку сопствени интелектуални напори.
2. *Самостојно сознавање.* Основно дидактичко правило е, дека нешто до кое ученикот може самостојно да стигне да не му се дава во готов облик, туку да се применуваат сите средства, тој, тоа да го постигне со самостоен напор. Само тогаш ученикот ќе може новите знаења да ги применува во изменет контекст, во нови и поинакви ситуации и при решавање на нови проблеми.
3. *Откривање на вистините.* Во текот на сознавањето ученикот се наоѓа во многу слична ситуација во која се наоѓа и научникот при откривањето на нови научни вистини, па затоа во случајот разликите се незначителни. Имено, содржината што учениците ја учат за нив претставува нова научна вистина, па затоа сознајниот процес во наставата има карактеристики на научна вистина со таа разлика што ученикот осознава веќе откриени научни откритие. Јасно, со ваквиот процес на повторното откривање на научните вистини раководи наставникот, кој притоа врши прилагодување, упростување и дидактичко оформување на содржините кои се предмет на разработка.
4. *Ученикот е субјект во процесот на учење.* Овој принцип може да е содржан во осознаеноста на ученикот дека *тој учи*, а не дека *него некој го учи*. Во таква ситуација, ученикот има силен внатрешен мотив за напредување во учењето, кој дополнително треба да биде поттикнуван со погодно избрани надворешни влијанија: пофалби, покуди и слично, т.е. треба да биде

пропратен со исполнување на психолошките услови за успешно учење и на трансферот на учењето.

5. *Користење на претходните искуства и знаења.* Стекнувањето на новите знаења и умеења треба да се потпира на претходните искуства, знаења и умеења со кои располага ученикот. Тоа значи дека новите знаења и умеења треба да се надоврзуваат на претходно стекнатите, да се одбегнува ситуациите во кои се почнува од “нулта точка”, што значи дека во новите знаења и умеења треба да се вградуваат севкупните предзнаења со кои располага поединецот.

2.6. УЧЕЊЕ ПРЕКУ РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМИ. БАРМАНОВ ЦИКЛУС НА УЧЕЊЕ

Циклусот на учење е инструкциски модел, кој е развиен да ги прилагоди промените во формирањето на поими и тврдење во процесот на поучување на учениците. Примарниот модел, кој потекнува од шеесеттите години од минатиот век, неколку пати е менуван. Иако циклусот на учење е модификуван неколку пати, секоја негова адаптација е во согласност со начинот на кој когнитивните науки го гледаат учењето и развојот на поимите и тврдењата. Во 1997 година Барман понуди верзија за која се смета дека е најприфатлива. *Бармановиот циклус на учење* се состои од четири различни фази и тоа: *ангажирање, истражување, дискусија и примена* и истиот овде ќе го презентираме во целост.

1. **ФАЗА I. Ангажирање.** Во оваа фаза се користат стратегии кои треба да им помогнат на учениците да ги разоткријат своите предконцепти и концепти. При реализирање на оваа фаза, од особена важност е да не ги осудуваме идеите на учениците, туку само да ги прифатиме сите разумни идеи на учениците и истите накратко да ги анализираме.
2. **ФАЗА II. Истражување.** На учениците им се задава проблем за чие решавање тие можат да применат различни стратегии и методи, но сепак проблемот е доволно конкретен, а начинот на неговата формулација дава и насока за изборот на стратегија и методи за негово решавање. Активностите кои се реализираат во оваа фаза треба да се искористат како основа за учениците да ги преиспитаат своите тековни идеи во однос на проблемот кој го решаваат, но и да оформат рамка за развивање на нови поими, терминологија и тврдења во согласност со проблемот кој го решаваат.

3. **ФАЗА III. Дискусија.** Наставникот иницира и развива дискусија со учениците за нивните откритија и прашањата кои си ги поставиле во текот на истражувањето. Ги поттикнува учениците на различни начини да бараат дополнителни информации за проблемот кој го решаваат, со што всушност се негува принципот за учење со сопствени интелектуални напори и ученикот се стекнува со трајни знаења.
4. **ФАЗА IV. Примена.** Во оваа фаза на учениците им се презентираат дополнителни примери за главните концепти и тврдења кои се поврзани со проблемот кој го решаваат или, пак, им се поставува нов проблем кој може да биде решен со информациите, знаењата и умеењата стекнати во претходните три фази. Притоа, во идеален случај едно или повеќе искуства при примената ќе имаат директна врска со секојдневниот живот на учениците, што значи дека учениците покрај со трајни се стекнуваат и со применливи знаења и умеења. Важно е да напоменеме дека наместо една активност на применување, се препорачува учениците да го применат главниот дел на новите знаења во неколку активности, со што се зголемува можноста за воспоставување врски со предметите и појавите кои се среќаваат во секојдневниот живот.

2.7. МИСЛЕЊЕТО, МЕТОДИТЕ НА ЗАКЛУЧУВАЊЕ, НАУЧНИТЕ МЕТОДИ И ЦИКЛУСОТ НА УЧЕЊЕ

Во претходните разгледувања одделно се задржавме на мислењето и неговите квалитети, научните методи, методите на заклучување и циклусот на учење. Меѓутоа, иако разгледувањата беа одделени, сепак се забележува заемната поврзаност на мислењето, методите на заклучување, научните методи и циклусот на учење. Имајќи го ова предвид, група научници во 1968 година идентификуваат вештини кои тие ги користат при научните истражувања и истите ги делат на основни и интегрирани вештини. Според оваа поделба во основни вештини спаѓаат: *набљудувањето, претпоставувањето, предвидувањето, класифицирањето, мерењето и комуницирањето*, а во интегрирани вештини спаѓаат: *толкувањето на податоци, формирањето на прашања и хипотези, оперативното дефинирање, експериментирањето и формирањето модели*. Како што можеме да забележиме, основните вештини се поврзани една со друга, но сепак тие можат да се развиваат независно една од друга. Од друга страна, интегрираните вештини се покомплексни и стекнувањето способности за користење на интегрираните вештини бара ефикасна употреба на две или повеќе основни вештини. Во натамошните разгледувања основните и интегрираните вештини, кои очигледно се интегрален дел од нашиот секојдне-

вен живот, со еден збор ќе ги нарекуваме *вештини на размислување*. Накратко ќе се задржиме на секоја од споменатите вештини на размислување.

1. *Основни вештини на размислување.*

- 1.1. *Набљудување.* Оваа вештина подразбира користење на истоимениот научен метод. Јасно, при набљудувањето е дозволена употреба на инструменти како лупа, микроскоп, вага, термометар и слично, кои всушност се во функција на засилување на сетилата на набљудувачот сè со цел набљудувањата да се попрецизни.
- 1.2. *Мерење.* Мерењето на карактеристиките на предметите и појавите може да се постигне со директна споредба или индиректна споредба при која се користат мерни единици. Притоа, за потребите на комуникација мерните единици најчесто се стандардизирани.
- 1.3. *Претпоставување.* Претпоставката е идеја базирана на набљудување или серија набљудувања. Јасно, изнесувањето на претпоставка се заснива на проценка и заклучување врз основа на претходните искуства на набљудувачот.
- 1.4. *Предвидување.* Предвидувањето всушност е изјава за очекуван резултат. Јасно, предвидувањето најчесто се заснова на претходното искуство и исполнувањето на истото зависи од прецизноста на претходните набљудувања и од природата на настанот кој се предвидува, т.е. дали настанот е детерминистички или случаен.
- 1.5. *Комуницирање.* Комуницирањето всушност е размена на информации по устен или писмен пат, при кој најчесто се користат: табели, графикони и други инструменти на нагледност.

2. *Интегрирани вештини на размислување.*

- 2.1. *Толкување на податоци.* За толкувањето на податоците се користат дел од основните вештини и научните методи, како што се: претпоставувањето, предвидувањето, класификувањето и комуницирањето. Во постапката на толкување на податоците всушност ние ја утврдуваме корисноста на добиените податоци за решавање на проблемот кој го разгледуваме.
- 2.2. *Формулирање на прашања и хипотези.* Прашањата се формулираат врз основа на спроведените набљудувања. Вообичаено прашањата претходат на обидот да се процени некоја

ситуација или настан. Формулирањето хипотези, директно зависи од набљудувањата, прашањата, претпоставките и предвидувањата, при што добиваме тврдење кое најчесто подлежи на доказ или тестирање.

- 2.3. *Експериментирање*. Експериментирањето е процес во кој ги пропишуваме (дизајнираме) процедурите за прибирање на податоците кои ќе ни овозможат да тестираме определена хипотеза.
- 2.4. *Оперативно дефинирање*. Оперативните дефиници се засноваат на видливите карактеристики на предметите и појавите кои се проучуваат и истите се користат за да се поедностави комуникацијата во врска со предметот или појавата која е предмет на проучување.
- 2.5. *Формирање модели*. Моделите, било да се физички или апстрактни, се изработуваат врз основа на прифатлива хипотеза или хипотези кои допрва треба да се тестираат. Моделите се користат за опишување и објаснување на заемната поврзаност на идеите. Во многу случаи, моделот подразбира формулирање на нова хипотеза, а ако тестирањето на хипотезите резултира со нови информации, тогаш моделот се менува сè со цел да се земат предвид и новите информации.

Како што можеме да забележиме, вештините на размислување всушност се одраз на квалитетите на мислењето, а нивното унапредување всушност подразбира усвојување на научните методи и методите на заклучување. Имајќи го ова во предвид, важно е да се детерминира во кој временски период треба да се обрне внимание на усвојувањето и унапредувањето на вештините на размислување. Практиката покажува дека основните вештини на размислување треба да се усвојуваат во нижите одделенија од основното образование и да се користат во текот на целото образование. Интегрираните вештини на размислување претпоставуваат посифистицирано користење на методите на заклучување и научните методи, па затоа најдобро е со нивното усвојување да се започне во средните одделенија на основното образование и истите континуирано да се унапредуваат до крајот на основното и во текот на целото средно образование. Од претходно реченото следува дека усвојувањето и унапредувањето на вештините за размислување треба да се реализира на секој наставен час, но кои вештини и како тие ќе се усвојуваат пред се зависи од психофизичките способности на учениците, т.е. од нивната подготвеност за усвојување и развивање на овие вештини.

Циклусот на учење е извонредно средство за воведување и развивање на вештините на размислување. Притоа, во секоја негова фаза треба да се планираат активности кои ќе овозможат усвојување и унапредување на една или повеќе вештини на размислување.

VIII ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ

1. СОДРЖИНА И ОБЕМ НА ПОИМ

Поимот претставува мисловно репродуцирање, т.е. мисловна копија на дадена класа објекти и се искажува со реченица која содржи определен *договор* за таа класа објекти. Секој математички поим се означува со *термин* кој, обично е составен од еден или од неколку зборови, но може да биде претставен и со симбол (знак). Поимот е одраз на реалниот свет во свеста на човекот и тој се формира по пат на воопштување и апстракција.

Формирањето на определен поим е сложен мисловен процес, кој обично почнува со *перцепција* (метод на набљудување), продолжува со запомнување на определени својства и формирање претстава за класата објекти (метод на обопштување), за на крај да заврши со формирање сознание за некоја *апстрактна карактеристика* за разгледуваната класа објекти (метод на апстракција).

Секој математички поим во себе обединува множество објекти или релации, а тоа се нарекува *обем на поимот* и карактеристично својство кое го имаат елементите на тоа множество и само тие, а тоа својство се нарекува *содржина на поимот*.

Пример 1. За природниот број n ќе велиме дека е сложен ако има барем три природни делители.

Обемот на поимот сложен број е множеството $\{4,6,8,9,10,12,\dots\}$, а неговата содржина е претставена со својството: *број што има барем три природни делители*. ♦

Јасно, содржината и обемот на поимот се заемно поврзани. Имено, содржината строго го определува обемот на поимот и обратно, обемот во целост ја определува содржината на поимот. Зависноста меѓу содржината и обемот на поимот во одредена смисла е обратнопропорционална. Имено, ако *содржината на еден поим се збогати*, тогаш *неговиот обем се намалува*, а ако *обемот на поимот се зголеми*, тогаш *неговата содржина ќе се осиромаши*.

Пример 2. Да ја разгледаме класата: “паралелограми, такви што, во кој било од нив, сите страни и сите агли се еднакви меѓу себе”. Очигледно се работи за поимот квадрат, т.е. тоа е класата квадрати.

Ако содржината “сите страни и сите агли се еднакви меѓу себе” се осиромаша на делот “сите агли се еднакви меѓу себе”, тогаш ќе ја добиеме класата: “паралелограми, такви што, во било кој од нив, сите агли се еднакви меѓу себе”. Очигледно се работи за поимот правоаголник, т.е. тоа е класата правоаголници.

Значи, со стеснување на содржината се проширува обемот. ♦

При *воопштувањето* на некој поим неговата содржина се стеснува и обемот се проширува, а додека во процесот на *специјализацијата* се случува обратното: содржината се проширува, а обемот се стеснува.

Како што видовме во пример 1 обемот на поимот сложен број се содржи во обемот на поимот природен број.

Нека поимот **A** има обем $O(A)$, а поимот **B** има обем $O(B)$. Ако $O(A) \subset O(B)$, тогаш за **A** велиме дека е *видов поим* во однос на **B**, а **B** дека е *родов поим* во однос на **A**.

Пример 3. *Четириаголник* е многуаголник со четири страни. *Паралелограм* е четириаголник кај кој спротивните страни, две по две, се паралелни.

Според тоа, паралелограм е вид четириаголник, а четириаголник е вид многуаголник. Значи, поимот многуаголник е родов поим во однос на поимот паралелограм, но исто така, и поимот четириаголник е родов поим во однос на поимот паралелограм. Јасно, поимот четириаголник е *најблискиот род* за паралелограм. ♦

Да разгледаме уште еден пример.

Пример 4. Дијаметар на кружница е тетива што минува низ центарот на кружницата.

Од множеството тетиви на една кружница ние издвоивме едно подмножество, со помош на својството “тетиви кои минуваат низ центарот на кружницата”. Со ова својство сосема се определени дијаметрите на кружницата, т.е. тоа е *нивно карактеристично својство*. Значи, со него се издвојува еден вид тетива, па затоа ова својство го нарекуваме *видова одлика* за поимот дијаметар. ♦

2. ДЕФИНИРАЊЕ НА ПОИМИ И ВИДОВИ ПОИМИ

Реченицата со која се открива содржината на еден поим ја нарекуваме *дефиниција* на тој поим. Со други зборови со дефиницијата се набројуваат суштинските својства со чија помош се издвојуваат сите објекти коишто ги имаат споменатите својства.

Реченицата од пример 4 во точка 1 претставува дефиниција на поимот дијаметар. Таа е составена од:

- *дефиниран поим*, т.е. поимот кој се дефинира (*дефиненд*), а тоа е дијаметар на кружница,
- *логичка врска* (во примерот “е”, а може да биде и “го нарекуваме”, “се нарекува”, “го викаме” и сл.), и
- *дефинирачки поим*, т.е. родовиот поим со видовите одлики (*дефинирач*), а тоа е: тетива која минува низ центарот на кружницата.

Како што веќе видовме најчесто поимите се наоѓаат во родов-видов однос. Затоа *дефиницијата според најблискиот род и видовите одлики* е најдобар и најраспространет начин на дефинирање на поими. Меѓутоа, дефиницијата може да се даде и преку род кој не е најблизок до дефинираниот поим, но во такви случаи се потребни повеќе видови признаци, чиј број може да се намали само ако се најде најблискиот род за дефинирање на нов вид.

Дефиницијата ќе биде логички правилна, ако дефинирачкиот поим и дефинираниот поим *се еквивалентни*. Поради тоа, секоја реченица што претставува дефиниција на некој поим мора да се подразбира во смисла “*ако и само ако*”, дури и тогаш кога е искажана само со условот “*ако*”. Така, на пример, дефиницијата од пример 1 точка 1 треба да се сфати вака:

Природниот број n е сложен ако и само ако има барем три природни делители.

При дефинирањето на поимите треба да се запазат основните правила за дефинирање. Имено, дефиницијата треба:

1. *Да биде потполна, јасна и без непотребни податоци*, т.е. да биде логички совршена, без да вклучува својства коишто се логички зависни едно од друго како што е во примерот: “Четириаголникот кај кој спротивните страни две по две се паралелни и еднакви се вика паралелограм”. Во овој пример е вклучено

својството за еднаквост на спротивните страни, што е последица од својството “спротивните страни две по две се паралелни”.

2. *Да биде усогласена*, т.е. обемот на дефиницијата да се совпаѓа со обемот на дефинирачот. На пример, дефиницијата од пример 1, точка 1 е усогласена. Доколку дефиницијата не е усогласена, тогаш се можни грешки во кои обемот на дефинирачкиот поим е *поширок* од обемот на поимот кој се дефинира, како на пример: “Дијаметар на кружница е отсечка која минува низ центарот на кружницата” или *потесен*, како на пример: “Ромб е правоаголник со две еднакви соседни страни”.
3. *Да не се влегува во логички бесмислен круг*, т.е. не смее **A** да се дефинира со **B**, а потоа **B** да се дефинира со **A**, како што тоа е направено во следниов случај: “Еден агол се вика прав ако неговите краци се заемно нормални.” Потоа “За две прави велиме дека се заемно нормални ако се сечат под прав агол”.
4. *Во дефиницијата не смее да се допушта тафтологија*, т.е. објектот да се дефинира сам со себе иако се искажува со други зборови, бидејќи во тој случај ништо не се дефинира, како што е во примерот: “За два триаголника велиме дека се слични, ако тие се слични меѓу себе”.
5. *Да не отсуствува родовиот (дефинирачкиот) поим* кој е дел од дефинирачкиот поим, како што е во случајот: “Сложен број е она што има барем три делители”.
6. По можност *дефиницијата да не е негативна*, како на пример: “Ако природниот број не е прост, тогаш велиме дека е сложен” или “Број кој што не е рационален се нарекува ирационален.”
7. *Дефиницијата треба да биде “минимална”*, т.е. карактеристичното својство по својата структура треба да биде минимално, на пример: “Правоаголник е паралелограм со прав агол”. Да забележиме дека дефиницијата е *минимална ако е дадена со помош на најблискиот род*. Претходната дефиниција е минимална, што не е случај со следната дефиниција на правоаголник: “Правоаголник е четириаголник кој има прав агол и два пара паралелни страни”.
8. *Дефиницијата да не е противречна*, т.е. при дефинирањето на еден поим неговиот обем не смее да биде празно множество, како што е случај со следнава “дефиниција”: “За природниот

број велиме дека е едноставен ако бројот на неговите делители е еднаков на нула”. Јасно, не постои природен број кој нема делители, така што обемот на претходната “дефиниција” е празно множество.

Разгледувајќи ги правилата за дефинирање наведовме и некои карактеристични грешки кои се јавуваат при дефинирањето на математичките поими. Важно е учителот да ги воочува грешките кои учениците ги прават при повторувањето на дефинициите на поимите и нив да ги коригира. Притоа, да забележиме дека најдобар начин за корегирање на грешките во дефинирањето на даден поим е спроведувањето на *соодветна логичка анализа на поимот* и по можност *наведување на контрапример*. Ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. На дефиницијата на ученикот: “Квадратна равенка е таква равенка којашто го содржи вториот степен на непознатата.” учителот задава контрапример $x^2 + 5x - 2x^3 = 0$ и објаснува дека квадратната равенка не смее да содржи степени на непознатата поголеми од 2, а со наведување на равенките

$$x^2 + 5x - x^{-1} = 0, \quad x^2 + 5x - y = 0 \text{ итн.},$$

тој објаснува други непрецизности во искажаната “дефиниција”. ♦

Во досегашните разгледувања се задржавме на основните правила за дефинирање на поимите, што може правилно да се направи на повеќе начини. Со други зборови, постојат повеќе видови дефиниции. Пред да ги разгледаме различните видови дефиниции, ќе направиме класификација на поимите. За таа цел ќе го разгледаме поимот квадрат: “Квадрат е ромб со прав агол”. Овој поим е дефиниран со родовиот поим ромб и соодветна карактеристика (прав агол). Поимот ромб можеме да го дефинираме со поимот паралелограм и соодветна карактеристика итн. Процесот на градење на поимите доведува до една од следните две можности:

- а) или еден поим **A** смее да се дефинира со поим **B** за чие дефинирање веќе е употребен поимот **A**, т.е. ќе дозволиме логички бесмислен круг во дефиницијата,
- б) или некои од поимите ќе ги прифатиме без да ги дефинираме.

Секако, втората можност е логична, па затоа истата е прифатена со цел да не се дозволи логички бесмислен круг.

Поимите кои не ги дефинираме, т.е. ги прифаќаме без дефиниција, ги нарекуваме *основни поими*. Имено, овие поими се во основата на науката и не можат да се изразат со други поими од таа наука.

Обично, една математичка дисциплина се гради врз основа на неколку основни поими и врските меѓу нив. Тие овозможуваат да се дефинираат сите други поими од таа дисциплина и овие поими ги нарекуваме *изведени*.

Така, основни поими во геометријата се: *точка, права, рамнина и растојание*, а сите другите поими се изведени. Други основни математички поими се: *множество, елемент и број*, кои се среќаваат како основни поими во сите математички дисциплини.

Како што веќе рековме, математичките поими можат правилно да се дефинираат на повеќе начини. Во таа смисла, има неколку видови дефиниции. Ќе наведеме некои од нив:

1) *Дефиниција со помош на најблизок род и видова карактеристика*. За овој начин на дефинирање веќе зборувавме во п. 3.1 и такви се на пример дефинициите во примерите 1 и 4 од точка 1.

Како што веќе кажавме, дефиницијата со помош на најблизок род и видова карактеристика е најраспространета во математиката, но сепак се користат и други видови дефиниции, како што се:

2) *Генетичка дефиниција*. Тоа е дефиниција со која се опишува процесот на формирање на поимот кој се дефинира. Пример за генетичка е следнава дефиниција на топка.

- *Топка е геометриско тело, кое се добива со ротација на круг околу еден негов дијаметар.*

Да забележиме дека поимот топка, обично се дефинира на следниов начин:

- *Топка е множеството од сите точки во просторот чиешто растојание до една фиксна точка O е помало или еднакво на даден позитивен број r .*

Забележуваме дека опишувањето на процесот на формирање на поимот, даден во генетичката дефиниција на топка, го занемарува нејзиното карактеристично својство кое доаѓа до израз во втората дефиниција со помош на најблизок род и видова карактеристика.

3) *Рекурзивна дефиниција*. Тоа е дефиниција со која се даваат:

- i) почетни елементи од класата објекти кои се дефинираат,

- ii) правила за формирање нови објекти од веќе формираните (тоа најчесто се рекурзивни врски), и
- iii) ограничување, т.е. логичко толкување дека со i) и ii) се исцрпуваат сите објекти од разгледуваната класа.

Пример 2. Со помош на рекурзивната дефиниција геометриската прогресија се задава на следниов начин:

- i) даден е реален број a_1 ,
- ii) дадено е правило: $a_n = a_{n-1}q$, $n = 2, 3, 4, \dots$ каде q е фиксиран број.
- iii) членови на геометриската прогресија се a_1 и секој број кој е добиен со а) и б) и никои други. ♦

4) *Дефиниција искажана со симболичен јазик.* Овој вид дефиниција често пати се користи во математиката. Ке наведеме неколку примери на дефиниции искажани со симболичен јазик.

Пример 3. Следниве дефиниции се искажани со симболичен јазик.

- a) $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$,
- b) $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- c) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ако постои границата на десната страна,
- d) $a^0 = 1, a \neq 0$. ♦

5) *Опис на поим.* Често пати употребуваме логички реченици, кои не се дефиниции, но се блиски до нив. Имено, во некои случаи тие ја заменуваат дефиницијата или неа ја дополнуваат. Најчесто се прибегнува кон опис на поимот тогаш кога не е можно да се даде дефиниција на разгледуваниот поим. Таков е случајот со основните поими: точка, права, рамнина, број итн, кои најчесто ги објаснуваме со некој модел. На пример:

- *точката* се претставува со допир на моливот до хартијата,
- *правата* ја замислуваме како бескраен затегнат конец, итн.

6) Во училишната математика се среќаваме и со таканаречената *индиректна дефиниција*, т.е. со дефинирање на поимите преку аксиоми. Така, во елементарната геометрија аксиомите ги откриваат својствата и врските меѓу основните поими: точка, права, рамнина и растојание, а притоа да не се презентира директен опис на овие поими. Често пати индиректна-

та дефиниција со помош на аксиоми се применува во математиката како наука и таа е позната како аксиоматска дефиниција. Ќе наведеме еден пример.

Пример 4. Со Пеановите аксиоми множеството природни броеви \mathbf{N} се дефинира како што следува:

Множеството \mathbf{N} е непразно и важи:

i) $1 \in \mathbf{N}$.

ii) За секој природен број k постои единствен природен број k^+ , кој го нарекуваме *следбеник* на k .

iii) Ако $k^+ = n^+$, тогаш $k = n$.

iv) $1 \neq k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

v) Ако $S \subseteq \mathbf{N}$, $1 \in S$ и од $k \in S$ следува дека $k^+ \in S$, тогаш $S = \mathbf{N}$. ♦

3. МЕТОДИКА НА ВОВЕДУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ

Математичките поими претставуваат една од најважните компоненти не само на математиката како наука, туку и како наставна дисциплина. Поради тоа разбирливо е што во наставата по математика се посветува особено внимание на нивното воведување и усвојување.

Прво ќе се задржиме на прашањето за воведувањето на математички поими во почетниот курс по математика.

На почетокот од I одделение учениците вежбаат набројување на конкретни предмети од средината која ги опкружува или кои се нацртани на таблата, во учебникот, во работната тетратка и слично, да издвојуваат множества елементи и да ги согледуваат соодносите меѓу множествата и елементите. Со овие постапки тие се подготвуваат за усвојувањето на поимот природен број. Јасно, притоа тие се запознаваат со наједноставните геометриски фигури: триаголник, правоаголник, квадрат, круг и слично, иако тие не ги дефинираат, дури и не ги опишуваат. Паралелно тие учат да споредуваат величини, а малку подоцна се запознаваат и со соодветните знаци: $=$, $<$, $>$, \leq и \geq .

Откако ќе ја изучат нумерацијата на природните броеви од првата десетка, учениците преминуваат на усвојување на операциите собирање и одземање. Во овој дел учениците учат за собирок, збир, наоѓање на непоз-

нат собирок, промена на редоследот на собироците, равенка, намаленик, намалител, разлика итн.

Почетниот курс по математика обилува со поими кои се од особено значење за натамошното образование воопшто. Овие поими се воведуваат нагледно, преку конкретни предмети или преку практично оперирање со предметите. Притоа, учителот се потпира на искуствата и знаењата на учениците, со коишто тие се здобиле во предучилишната возраст. Според тоа, во почетните одделенија првото запознавање со даден математички поим е нагледно и обично, неговото усвојување се затврдува со термин или со симбол, при што поимот ниту се опишува ниту се дефинира.

Учителот по математика во горните одделенија на основното образование и во средното образование треба добро да го познава почетниот курс по математика (содржината и методите), а особено добро треба да знае кои математички поими се усвојуваат од I до IV одделение и како тие се воведуваат. Тоа е неопходно бидејќи само со добро познавање на основниот курс може да се обезбеди континуитет во наставата по математика, што покрај правилното усвојување на новите знаења и умеања, подразбира и ненаметливо преминување од нагледно усвојување на поимите кон нивно индуктивно и дедуктивно усвојување.

Систематизираните курсеви од одделни математички дисциплини се изучуваат веќе од V одделение во основното образование. За прв ваков курс можеме да ги сметаме аритметиката и геометријата во V одделение, а потоа во VII и во VIII одделение тоа е алгебрата. Во овие курсеви, како и во курсевите во средното образование и на високообразовните институции, дефиницијата е основен начин за воведување на математичките поими.

Во петто одделение основен поим на аритметиката е поимот *број*, кој е воведен уште во прво одделение како поим-термин, без да се дефинира или да се опишува, а како таков се користи сè до шесто одделение. Притоа, обемот на поимот број постепено се проширува и се воведува поимот *дропка*, за потоа да се воведат поимот *децимален број* (*десетична дропка*), со што терминот “број” станува претесен. Со тоа се наметнува потребата да се воведат терминот *природен број*. Да забележиме дека на учениците од оваа возраст веќе им се познати својствата на множеството рационални броеви, а поради тоа тие сега под поимот број ги подразбираат рационалните броеви. Натамошното проширување на поимот број продолжува во шесто одделение, со воведување на *иррационалните броеви*, за тоа да се заокружи во прва година од средното образование со изучување на темата “*поле на реални броеви*”. Притоа, реалните броеви се воведуваат како *бесконечни децимални броеви*. На крај да забележиме дека проширувањето на

поимот број завршува во втора година од средното образование, со воведување на поимот *комплексен број*. Со тоа завршува воведувањето на поимот број, за кој слободно можеме да кажеме дека е најважниот поим во математиката.

Во врска со броевите и операциите со нив се воведуваат и многу други поими, како што се: прости и сложени броеви, делител, НЗД, НЗС, реципрочна вредност на број, степен и корен на број итн. Јасно, овие поими се изведени.

Како што веќе кажавме во училишниот курс по математика поимите се воведуваат и се усвојуваат нагледно, индуктивно и дедуктивно. Меѓутоа, воведувањето и усвојувањето на математичките поими најчесто е проследено со низа тешкотии. Имено, ако еден поим е поапстрактен, тогаш е неопходно за неговото воведување да се направи сеопфатна *претходна подготовка*. Досегашните истражувања покажуваат дека при воведувањето на поимите алгебарски израз, равенка, функција, геометриско тело и слично е потребна сеопфатна претходна подготовка. Исто така, при воведувањето на поапстрактните поими важна улога има и мотивацијата која, главно, се спроведува на два начини:

а) преку претходно целисходно карактеризирање на обемот на поимот, со користење на соодветни примери и објаснување на неопходноста од воведување општ термин на сите елементи од обемот на поимот кој сакаме да го воведеме, и

б) со помош на обработка на соодветни задачи.

Првиот начин најчесто се користи при воведување на поимите за објектите, а вториот при воведување на поимите за релациите и операциите.

По мотивирањето следува негово воведување, кое во училишниот курс по математика, главно, се прави на два начина: *конкретно-индуктивен* и *апстрактно-дедуктивен*. Апстрактно-дедуктивниот метод на воведување на поимите доминира при строгото изложување на математичките дисциплини, а конкретно-индуктивниот преовладува во училишниот курс по математика, особено во основното образование.

При *конкретно-индуктивниот метод* на воведување на математичките поими се почнува од разгледување на конкретни примери и со помош на мисловните операции (анализа, споредување, воопштување, апстракција и синтеза), учениците се упатуваат кон формирањето на новиот поим.

Со вешто и со осмислено водење на процесот на воведување на поимот речиси секогаш учениците ќе бидат во можност да ја формулираат

дефиницијата на новиот поим. Во случај на потреба учителот ја доведува дефиницијата до логички правилна форма, укажува на потеклото на терминот, на неговото значење во наставата и ги организира повторувањето и утврдувањето на дефиницијата.

Со конкретно-индуктивниот метод се воведуваат поимите во подготвителните курсеви по алгебра и по геометрија во основното образование. Во овие курсеви, оние поими кои не се основни, се воведуваат опишно, без дефиниција и почнувајќи од шесто одделение тие треба да се користат како познати.

Апстрактно-дедуктивниот метод на воведување на поими, како што рековме, преовладува во факултетските курсеви, но тој значително се користи како во средното, така и во основното образование. Кај овој метод, за новиот поим веднаш се дава дефиницијата, без некоја претходна подготовка. Притоа, се докажува дека *воведениот поим постои и е единствен*, т.е. дека тој е еднозначно определен со точност до изоморфизам. Последново најчесто се прави при воведување на поимите во факултетските курсеви, додека доказот за единственост до изоморфизам се испушта во основното и средното образование.

Јасно, при користењето на овој метод во училишниот курс неопходно е воведувањето на новиот поим да биде добро подготвено. Тоа подразбира дека треба да се изучени претходните поими со кои се дефинира новиот поим, а видовата карактеристика треба да биде доволно едноставна и разбирлива за учениците. Како што веќе кажавме, најчесто во училишниот курс се дава доказ за постоење на воведениот поим, но секогаш не се докажува неговата единственост. Така, на пример, во геометријата тоа најчесто се прави со конструирање на барем еден објект кој ги има наведените својства во дефиницијата.

Пример 1. Во втори клас од средното образование, поимот квадратна равенка може да се воведат со апстрактно-дедуктивниот метод на следниов начин:

i) Се дефинира новиот поим: “Равенката од видот

$$ax^2+bx+c=0,$$

каде што a, b и c се дадени реални броеви и $a \neq 0$, ја нарекуваме квадратна равенка”. Притоа, терминот “квадратна равенка” се мотивира со тоа што најголемиот показател на степените од променливата (непознатата) е два.

ii) Се разгледуваат специјалните случаи на овој поим:

$$x^2+px+q=0, ax^2+bx=0, ax^2+c=0 \text{ и } ax^2=0,$$

при што се прави и соодветна класификација (потполна, нормирана, непотполна квадратна равенка и се даваат врските меѓу овие типови квадратни равенки).

iii) Се илустрира воведениот поим: $5x^2+3x+7=0$, $-x^2+4x-6=0$ итн., при што се прави проверка дали секој од наведените примери ја задоволува дефиницијата за квадратна равенка, а потоа се даваат контрапримери, како на пример:

- a) Дали равенката $x^2-4x^{-1}+6=0$ е нормирана квадратна равенка.
- b) Дали равенката $4x-12=0$ е непотполна квадратна равенка.

iv) Се наведуваат конкретни примери за примената на воведениот поим, на пример: познатата формула $s=gt^2/2$ може да се разгледува како квадратна равенка $gt^2-2s=0$ по непозната t . Потоа се наведуваат примери на текстуални задачи кои се сведуваат на квадратна равенка итн. ♦

Како што може да се види, со апстрактно-дедуктивниот метод уште веднаш на почетокот се открива новиот поим, така што ако се изостават следните чекори од наведениот пример (разгледување специјални случаи и нивна класификација, конкретни примери и контрапримери и укажување на примената), како што тоа честопати се прави при реализирањето на универзитетските курсеви, тогаш овој метод е поефективен во однос на искористеното време за воведување нови поими. Меѓутоа, неговото користење во училишните курсеви и изоставањето на наведените чекори со сигурност ќе предизвика тешкотии при усвојувањето нови поими.

Во однос на воведувањето на поимите, без разлика кој метод ќе се применува, корисно е да се уважат следниве препораки:

- a) поимот да се воведува по најприроден пат,
- b) поимот, терминот и дефиницијата добро да се мотивираат,
- c) новиот поим да се доведе во врска со претходно изучените поими,
- d) апстрактните поими детаљно да се конкретизираат, што значи тие да не се наведуваат само формално, и
- e) учениците неколку пати да ја повторат дефиницијата на новиот поим, при што внимателно треба да се следат нивните искажувања и да се бара: јасност, краткост и прецизност во формулациите.

Во врска со поимите основна задача на учителот е да обезбеди секој нов поим правилно да се разбере од сите ученици и точно да се усвои при неговото воведување. Како што кажавме, усвојувањето на поимот треба да биде проследено со конкретни примери, при што треба да се направи логичка анализа на дефиницијата, да се илустрира примената на новиот поим во разни тврдења. Притоа, пожелно е да се наведуваат примери кои не се наведени во учебникот, со што на учениците ќе им се овозможи проширување на видикот.

Учителот треба да бара од секој ученик да ги знае дефинициите на изучените поими, но не смее да бара тие да бидат научени напамет, зашто најчесто тоа доведува до формално усвојување на поимите. Затоа треба да се инсистира поимите да се усвојуваат логички, бидејќи тоа е и една од целите на учењето. Тоа може да се постигне ако на учениците постепено им се открива логичката структура на дефиницијата, да се одделат родовиот поим и видовите одлики, а потоа да се наведат разновидни примери на кои ќе се направи проверка дали се задоволени сите услови од дефиницијата.

Претходно изнесеното е неопходно бидејќи ваквата творечка работа го развива мислењето кај ученикот и помага сознателно, длабоко и трајно да се усвојат суштината на содржината и обемот на поимот. Сѐ ова овозможува да се намалат формалното усвојување на поимот и механичкото запомнување на дефиницијата.

Доколку поимите се усвојуваат формално и површно, тогаш неминувано настанува нивно помешување, неточно сфаќање и неправилно користење. Поимите кои се воведуваат со помош на лошо усвоени поими уште полошо ќе се усвојуваат, со што практично е невозможно нивното правилно користење во расудувањата. Се разбира, учениците брзо ги забораваат вака усвоените поими, со што крајниот ефект од учењето, а со тоа и нивниот умствен развиток е незначителен.

Неспорно е дека учениците треба дословно да ја знаат формулацијата на дефиницијата која е дадена во учебникот. Меѓутоа, учителот треба да ги навикнува учениците дека тие можат да отстапат од таа форма, т.е. можат дефиницијата да ја искажат делумно со свои зборови, при што мора точно да ја зачуваат целата содржина на формулацијата во учебникот. Пожелно е учителот да ги поттикнува учениците и сами да доаѓаат до сопствени формулации, коишто во некоја смисла ќе бидат подобри од дадените, поприватливи за нивната возраст.

Кога ученикот ја искажува дефиницијата со свои зборови можно е да се направат грешки, кои учителот треба да им ги посочи и задолжително да ги отстрани, за што веќе говоревме. Пожелно е исправката да ја прават учениците, со што ќе се овозможи нивно поактивно учество во наставниот процес и подобро усвојување на дефиницијата од страна на сите ученици.

Ако ученикот дословно ја репродуцира формулацијата на дефиницијата од учебникот, учителот треба да провери дали тој правилно ја разбрал и дали сознателно ја усвоил, што може да се утврди со барање да се наведат сопствени примери за поимот кој се дефинира.

Да забележиме дека постојат и такви формулации при кои не смее да се испушти ниеден збор, така што во вакви случаи е неопходно учителот само да провери дали учениците сознательно ја усвоиле дефиницијата и дали ја разбрале логиката на истата.

При воведувањето нови поими не смее учениците непотребно да се побрзуваат, бидејќи прекумерното брзање при изучувањето на нов поим подоцна ќе предизвика тешкотии, кои неминовно ќе доведат до намалување на нивото на знаења и умења. Практиката покажува дека времето кое е потрошено за сестрано и сознательно усвојување на определен поим ќе има повеќекратен ефект подоцна, при усвојувањето на натамошниот материјал.

Усвојувањето на математичките поими се реализира при сите видови повторувања. Јасно, при повторувањето учениците треба да се насочуваат кон творечка работа со поимите, бидејќи само со неа се овозможува нивно правилно користење, што е и основна цел на наставата по математика. Така, на пример, при повторувањето и систематизирањето на знаењата корисни се вежбите за класификација на поимите и согледување на системите од поими. Тука може да се објасни дека дефинициите претставуваат договори со кои се одразува објективната реалност, но можна е и определена слобода на дејствување при што објективната реалност не се искажува целосно.

Пример 2. Да го разгледаме поимот *трапез*. Ако содржината на овој поим се стесни, т.е. ако се земе видовиот признак: две страни се паралелни (без зборчето само), тогаш обемот на вообичаениот поим трапез ќе се зголеми и во него ќе се содржат и паралелограмите. Во тој случај, најблискиот родов поим за поимот паралелограм ќе биде поимот трапез, а не четириаголник. ♦

Ваквите примери се двојно корисни, бидејќи од една страна се истакнуваат суштинските елементи на дефиницијата која е прифатена во училишниот курс, а од друга страна, го прошируваат видикот на учениците и ја развиваат еластичноста на мислењето.

На крајот од овој дел да се осврнеме на прашањето: “Кога ученикот го совладал предметниот математички поим?” Од се што е изнесено одговорот на ова важно прашање може да се сублимира во следново:

- *ученикот точно ја искажува дефиницијата на поимот, дури и ако таа е искажана со негови зборови,*
- *ученикот го распознава поимот според дефиницијата и го користи во различни ситуации и*
- *ученикот ги разликува дефинираниот и дефинирачкиот поим.*

IX ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

1. ПОИМ ЗА МАТЕМАТИЧКО ТВРДЕЊЕ

Тврдење е логичка форма на мислење, со која се потврдуваат или се одречуваат некои својства на дадени објекти, појави или на некои релации меѓу нив. Тврдењата во кои се среќаваат својства и релации на математички објекти се нарекуваат *математички тврдења*.

Пример 1. а) Еден број е делив со 3 ако збирот на неговите цифри е делив со 3.

б) Дијагоналите на паралелограмот заемно се преполовуваат.

в) Збирот на внатрешните агли во триаголникот е еднаков на 180° .

г) Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.

д) Ако $p \mid a$, тогаш $p \mid ab$, за секој $b \in \mathbf{Z}$.

ѓ) Ако еден број е делив со 5, тогаш неговата последна цифра мора да е 0. ♦

Како што можеме да забележиме, секое тврдење е составено од три главни елементи, и тоа:

а) логички *подмет* (или *субјект*) на мислата (S) - тоа е оној поим или објект за кој се искажува нешто во тврдењето,

б) логички *прирок* (или *предикат*) на мислата (P) - тоа што се искажува,

в) логички *сврзник* (е, има итн.).

Пример 2. а) Да го разгледаме тврдењето:

“За секој природен број n , $2^n > n^2$.”

Во ова тврдење субјект е “бројот 2^n “, предикат е “поголем од бројот n^2 “, а сврзник е “е”.

б) Во тврдењето од примерот г) субјект е “дијагоналите на ромбот“, предикат е “заемно нормални“, а сврзник е “се”.

в) Во тврдењето од примерот в) субјект е “збирот на внатрешните агли во триаголникот”, предикат е “поголем од 180° “, а сврзник е “е”. ♦

Ако со \mathbf{O}_X го означиме обемот на поимот X , тогаш од “ S е P “ следува $\mathbf{O}_S \subseteq \mathbf{O}_P$, а ако “ S не е P “, тогаш имаме $\mathbf{O}_S \not\subseteq \mathbf{O}_P$, што значи дека ако нешто се тврди за субјектот и ако искажаното тврдење е точно, тогаш обемот на субјектот се содржи во обемот на предикатот, и обратно, ако во тврдењето нешто се одречува за субјектот и ако искажаното тврдење е точно, тогаш обемот на субјектот не се содржи во обемот на предикатот.

Да забележиме дека содржините на субјектот и на предикатот се однесуваат обратно од нивните обеми.

Во примерот: “ $f(x) = a^x$, $a > 1$ е строго монотono растечка функција”, обемот на субјектот ($f(x) = a^x$, $a > 1$) е вклучен во обемот на предикатот (строго монотono растечка функција), а содржината на предикатот влегува во содржината на субјектот, што значи сè што важи за строго монотono растечките функции важи и за функцијата $f(x) = a^x$, $a > 1$.

2. ВИДОВИ МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

Да забележиме дека во зависност од тоа дали едно тврдење важи за сите објекти од дадена класа или само за некои од нив, разликуваме **општо и делумно тврдење**. Ако, пак, на објектите од дадена класа им се припишува, односно одрекува некое својство, тогаш имаме *потврдно*, односно *одречно тврдење*. Комбинирајќи ги овие две поделби на тврдењата, ги добиваме следниве видови тврдења:

1) Општо потврдно тврдење, кое се искажува во обликот: “За било кој објект x , ако x го има својството S , тогаш x го има и својството P “. Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x)).$$

Пример 3. а) Во секој паралелограм спротивните агли се еднакви.

б) Во секој рамнокрак трапез дијагоналите се еднакви.

в) Секој природен број поголем од 1 е или прост или сложен. ♦

2) Делумно потврдно тврдење, кое се искажува во обликот: “Постои објект x којшто го има својството S , а го има и својството P “. Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\exists x)(S(x) \wedge P(x)).$$

Пример 4. а) Некои правоаголници имаат заемно нормални дијагонали.

б) Некои триаголници имаат два еднакви агла.

в) Во некои триаголници висината и тежишната линија повлечени од едно теме се совпаѓаат. ♦

3) Општо одречно тврдење, кое се искажува во обликот: “Ниеден објект x којшто го има својството S , го нема својството P “. Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow \bar{P}(x)).$$

Пример 5. а) Ниеден природен број не е истовремено и прост и сложен број.

б) Ниеден триаголник не е истовремено и правоаголен и тапоаголен. ♦

4) Делумно одречно тврдење, кое се искажува во обликот: “Постои x којшто го има својството S , а го нема својството P “. Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\exists x)(S(x) \wedge \bar{P}(x)).$$

Пример 6. а) Некои трапези немаат еднакви дијагонали.

б) Некои триаголници немаат еднакви страни.

в) Некои природни броеви немаат повеќе од два природни делители. ♦

Како и секое тврдење, така и математичките тврдења се карактеризираат со нивната вистинитост. Според начинот на утврдување на вистинитоста на математичките тврдења тие се поделени во две групи, и тоа: аксиоми и теореми.

Како што знаеме, тврдењата под а), б), в), г) и д) од пример 1 се вистинити, т.е. точни, а тврдењето под ѓ) не е вистинито. Јасно, како и секое тврдење, така и математичките тврдења се карактеризираат со нивната вистинитост. Вистинитите тврдења имаат особено значење во математи-

ката. Затоа, за секое математичко тврдење се поставува задача да се установи неговата вистинитост. Според начинот на утврдување на вистинитоста на математичките тврдења, тие се поделени во две групи, и тоа: *аксиоми* и *теореме*.

2.1. ТЕОРЕМИ

Математичкото тврдење кое е вистинито, а неговата вистинитост е констатирана со доказ, т.е. тоа е логичка последица од други точни тврдења, го нарекуваме *теорема* или *изведено тврдење*.

Пред да преминеме на разгледување на структурата на теоремите, да забележиме дека барањето за минималност на дефиницијата е причина за појавата на теоремите. Имено, со запазувањето на ова барање, за да се утврдат другите својства на поимите кои ги нема во дефиницијата, се појавиле теоремите.

Да ја разгледаме следнава теорема за паралелограмот.

Пример 7. Ако еден четириаголник е паралелограм, тогаш неговите дијагонали се преполовуваат. ♦

Во оваа теорема прво се разгледува математичкиот објект четириаголник при условот: “*тој четириаголник да е паралелограм*”, а потоа за таквиот четириаголник се тврди дека: “*неговите дијагонали се преполовуваат*”. Со други зборови, од претпоставката (условот) дека четириаголникот е паралелограм се заклучува дека неговите дијагонали се преполовуваат.

Како и во претходниот пример, во секоја теорема мора јасно да е исказано:

- под кои услови се разгледува некој математички објект, и
- што се тврди за тој објект, т.е. кое негово својство следува.

Условите под кои се разгледува математичкиот објект се нарекуваат *претпоставки*, а својството кое следува за тој објект се нарекува *заклучок на теоремата*.

Пример 8. Во теоремата

“*Ако четириаголникот е рамнокрак трапез, тогаш неговите дијагонали се еднакви*”,

претпоставката е “*четириаголникот е рамнокрак трапез*”, а заклучокот е “*дијагоналите му се еднакви*”. ♦

Условна и категорична форма. Како што може да се забележи, теоремите од примерите 7 и 8 се искажани со користење на формулацијата “Ако ..., тогаш ...”. Во овој случај велиме дека теоремата е искажана во *условна форма*, т.е. во форма на импликација:

$$p \Rightarrow q$$

и притоа јасно се разграничува условот од заклучокот, т.е. кај оваа формулација делот од реченицата p е услов, а делот од реченицата q е заклучок на теоремата.

Теоремите од примерите 7 и 8 можат да се искажат и на следниов начин:

- Пример 9.** а) Дијагоналите кај паралелограмот се преполовуваат.
б) Дијагоналите кај рамнокракиот трапез се еднакви. ♦

Забележуваме дека во овој случај истите теореме се искажани со “категорични” реченици. При ваквото искажување на теоремите, велиме дека тие се дадени во *категорична форма*. Ќе наведеме уште неколку теореме искажани во категорична форма.

- Пример 10.** а) Дијагоналите кај ромбот се заемно нормални.

- б) Збирот на внатрешните агли во триаголникот е еднаков на 180° .
в) Спротивните агли кај тетивниот четириаголник се суплементни.
г) Збировите на спротивните страни кај тангентен четириаголник се еднакви. ♦

Забележуваме дека категоричната форма за искажување на теоремите се карактеризира со краткост во формулацијата, па затоа оваа формулација честопати се применува. Меѓутоа, оваа форма има и еден не така мал недостаток, а тоа е што условот и заклучокот не се експлицитно одделени. Поради тоа, во случај кога една теорема е искажана во категорична форма пожелно е таа да се искаже во условна форма, а потоа да се докаже, односно да се користи.

Директна и обратна теорема. Како што веќе кажавме кај теоремите постои причинско-последична врска меѓу условот (претпоставката) p и заклучокот q , која во условна форма се искажува со импликацијата $p \Rightarrow q$. Логично е да се прашаме што се случува ако претпоставката и заклучокот си ги заменат местата. Во оваа смисла ја имаме следнава дефиниција.

Ако $p \Rightarrow q$ е теорема, тогаш импликацијата $q \Rightarrow p$ ја нарекуваме *обратно тврдење* на теоремата $p \Rightarrow q$, која уште се нарекува и директно тврдење.

Пример 11. а) За теоремата:

“Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални”

обратното тврдење гласи:

“Ако дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални, тогаш тој е ромб”.

б) За теоремата:

“Дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат”

обратното тврдење гласи:

“Четириаголникот во кој дијагоналите се преполовуваат е паралелограм”. ♦

Бидејќи кај делтоидот дијагоналите се заемно нормални и делтоидот не е ромб, заклучуваме дека обратното тврдење на теоремата во примерот 11 а) не е точно. Меѓутоа, точно е обратното тврдење на теоремата во примерот 11 б) т.е. во овој случај обратното тврдење е повторно теорема. Така, ја имаме следнава дефиниција.

Ако обратното тврдење на една теорема е точно, тогаш тоа го нарекуваме *обратна теорема*.

Математиката како наука тежнее, колку што е можно, записите да се поедноставни и пократки. Токму затоа, ако обратното тврдење $q \Rightarrow p$ на теоремата $p \Rightarrow q$, исто така, е теорема, тогаш двете теореми најчесто, со помош на еквиваленцијата $p \Leftrightarrow q$, се запишуваат како една. Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 12. а) Теоремите во примерот 11 б) можеме да ги искажеме на следниов начин:

“Четириаголникот е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат”.

б) Теоремата:

“Ако бројот n е делив со 3, тогаш збирот на неговите цифри е делив со 3”

и нејзината обратна теорема:

“Ако збирот на цифрите на бројот n е делив со 3, тогаш тој е делив со 3”

заедно ги искажуваме на следниов начин:

“Бројот n е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3”. ♦

Потребен и доволен услов. Како што веќе кажавме, секоја теорема може да се искаже во условна форма, т.е. во форма на импликација $p \Rightarrow q$. Јасно, при искажувањето на теоремите во форма на импликација, исказите p и q се во причинско-последична врска, т.е. меѓу себе тие се содржински поврзани. Ваквите импликации ги нарекуваме *условни искази*.

Всушност, според својата логичка структура секоја математичка теорема, е условен исказ:

“Ако p , тогаш q .” ($p \Rightarrow q$),

чијашто вистинитост е докажана за множеството објекти за кои е формулирана теоремата.

Ако имаме променлива x , тогаш условот p и заклучокот q на теоремата $p \Rightarrow q$ се предикати кои ги означуваме со $p(x)$ и $q(x)$, соодветно, и притоа импликацијата $p(x) \Rightarrow q(x)$ е вистинита за секоја вредност на променливата x , што значи дека за секој x е точен исказот $p(x) \Rightarrow q(x)$. Притоа, велíme дека исказот $q(x)$ логички следува од исказот $p(x)$, односно дека заклучокот q на теоремата $p \Rightarrow q$ е *логичко следство* од условот p , што значи дека кога е вистинито p , задолжително е вистинито q . Тоа значи дека заклучокот на теоремата q е *неопходно следство (потребен услов)* на условот p , а условот p на таа теорема е *доволна основа (доволен услов)* за нејзиниот заклучок q .

Гореспомнатите термини потребен услов и доволен услов имаат особено значење во математиката, токму поради нивната тесна врска со поимот теорема. Имено, секоја теорема може да се искаже со помош на овие два термина, поради што на нив и подетално ќе се осврнеме.

Потребен услов на некое тврдење е таков услов без чие исполнување тврдењето не може да биде точно. Да разгледаме еден пример.

Пример 13. Да ја разгледаме теоремата:

“Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални”.

Заклучокот “дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални” е потребен услов за тврдењето “четириаголникот е ромб”, бидејќи за четириаголник кај кој дијагоналите не се заемно нормални, тврдењето “четириаголникот е ромб” со сигурност не е точно како, на пример, кај рамнокракиот трапез.

Со помош на терминот потребен услов, оваа теорема може да се искаже на следниов начин:

“Потребен услов за еден четириаголник да биде ромб е неговите дијагонали да се заемно нормални”. ♦

Од друга страна, потребниот услов на една теорема може да биде исполнет за некоја класа математички објекти, но не мора да биде последица на претпоставката. Последново ќе го илустрираме на следниов пример.

Пример 14. Во теоремата:

“Ако четириаголникот е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви меѓу себе”,

потребен услов е тврдењето “четириаголникот има еднакви дијагонали”. Меѓутоа, овој услов го задоволува и секој рамнокрак трапез, а како што знаеме рамнокракиот трапез не е паралелограм, што значи дека во случајот на рамнокракиот трапез потребниот услов не е последица од претпоставката. ♦

Од досега изнесеното следува дека ако теоремата е искажана во условна форма $p \Rightarrow q$, наместо “Ако p , тогаш q “, во терминот потребен услов таа може да се искаже на еден од следниве начини:

- а) “Потребен услов за p е q “ или
- б) “ q е потребен услов за p “,

што значи дека во секоја теорема *последицата е потребен услов за претпоставката.*

Доволен услов за едно тврдење е таков услов при чие исполнување даденото тврдење е задолжително вистинито.

Пример 15. Во теоремата

“Ако збирот на цифрите на природниот број n е делив со 9, тогаш тој се дели со 3”

претпоставката “збирот на цифрите на природниот број n се дели со 9” е доволен услов за тврдењето “природниот број n е делив со 3”, бидејќи

природниот број чијшто збир на цифри е делив со 9 сигурно е делив со 9, што значи и со 3.

Со помош на терминот доволен услов, оваа теорема може да се искаже на следниов начин:

“Доволен услов за природниот број n да се дели со 3 е збирот на неговите цифри да се дели со 9”. ♦

Да забележиме дека во претходниот пример доволниот услов “збирот на цифрите на природниот број n се дели со 9” не е и потребен за условот “природниот број n е делив со 3”. Навистина, постојат и други броеви кои се деливи со 3, а чијшто збир на цифри не се дели со 9, а тоа се сите природни броеви чијшто збир на цифри се дели со 3, а не се дели со 9. Всушност, овој пример непосредно укажува на разликата на термините потребен и доволен услов.

Од досега изнесеното следува дека ако теоремата е искажана во условна форма $p \Rightarrow q$, наместо “Ако p , тогаш q ”, во терминот доволен услов таа може да се искаже на еден од следниве начини:

- а) “Доволен услов за q е p ” или
- б) “ p е доволен услов за q ”,

што значи дека во секоја теорема *претпоставката е доволен услов за последицата*.

Како што видовме, ако теоремата е искажана во условна форма $p \Rightarrow q$, тогаш претпоставката p е *доволен услов* за заклучокот q , а заклучокот q е *потребен услов* за претпоставката p . Според тоа, иста теорема којашто е искажана со помош на потребен услов за еден поим може да се искаже со помош на доволен услов за друг поим. Последното ќе го илустрираме на следниов пример.

Пример 16. а) Теоремата од примерот 13 во терминот доволен услов се искажува на следниов начин:

“Доволен услов за еден четириаголник да има заемно нормални дијагонали е тој четириаголник да биде ромб”.

б) Теоремата од примерот 10 в) во терминот доволен услов се искажува на следниов начин:

“Доволен услов за спротивните агли на еден четириаголник да се суплементни е тој четириаголник да е тетивен”. ♦

Во претходните разгледувања видовме дека теоремите можат да бидат искажани во условна форма, категорична форма и со помош на термините потребен услов и доволен услов. Притоа, рековме дека условната форма има предност во однос на категоричната форма, бидејќи кај оваа форма лесно можат да се разликуваат претпоставката и заклучокот. Од овие причини пожелно е да се избегнува искажувањето на теоремите со помош на термините потребен услов и доволен услов, бидејќи практиката покажува дека учениците тешко се справуваат со оваа терминологија, особено во основното образование и првите години од средното образование. Меѓутоа, при реализирање на наставата во средно образование пожелно е по усвојувањето на една теорема да се разграничи потребниот од доволниот услов.

2.2. АКСИОМИ

Како што кажавме, теорема е математичко тврдење чија вистинитост е констатирана со доказ. Докажувањето на вистинитоста на теоремата е направено со помош на други тврдења, чија вистинитост претходно е констатирана. Како и кај математичките поими и овде или *ќе навлеземе во бесмислен логички круг* или *некои тврдења ќе ги прифатиме за точни, без притоа да ги докажуваме*. И тука ќе ја прифатиме втората алтернатива.

Математичките тврдења кои ги прифаќаме за точни без доказ ги нарекуваме *аксиоми*. Јасно, аксиомите се *основни тврдења*, па во таа смисла, за теоремите често пати се користи терминот *изведени тврдења*.

Аксиомите се тврдења кои се наоѓаат во основата на дедуктивните науки, како што е математиката која во нејзините различни дисциплини користи различни системи на аксиоми. Еден систем на аксиоми овозможува логички да се изгради некоја наука, ако тој систем е:

1) непротивречен, што значи дека меѓусебно не смеат да си противречат како аксиомите, така и сите тврдења кои се докажуваат со нивна помош,

2) комплетен, што значи дека секои две негови интерпретации мора да се изоморфни и да можат да се докажат сите тврдења во дадената наука и

3) независен, што значи дека не смее ни една од аксиомите да може да се докаже со помош на другите аксиоми, што само по себе значи бројот на аксиомите да се сведе на минимум, а со самото тоа и да се упрости системот на аксиоми.

3. МЕТОДИКА ЗА УСВОЈУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

Во овој дел ќе се осврнеме на методите за усвојување на математичките тврдења, при што одделно ќе ги разгледаме:

- а) аксиоматскиот метод,
- б) методиката за воведување на теоремите, и
- в) методиката за усвојување на теоремите.

3.1. АКСИОМАТСКИ МЕТОД ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Во математичките дисциплини е присутен стремежот од конечен број аксиоми логички да се изведат другите тврдења на соодветната дисциплина. Ваквиот метод на градење на некоја дисциплина го нарекуваме *аксиоматски метод*, а за теоријата велиме дека е *аксиоматска теорија*.

Повеќегодишните експерименти довеле до два основни начина на користење на аксиоматскиот метод, и тоа:

- на почетокот се презентираат сите аксиоми кои ќе се користат при градењето на научната дисциплина, а потоа се докажуваат теоремите кои, по правило, се распределени во одделни параграфи, и
- аксиомите се презентираат на различни места, пред соодветните теореми за чии докази се користат.

Може да се каже дека аксиоматскиот метод во основното образование е најприсутен во наставата по геометрија, што веројатно се должи на влијанието на Евклидовите “Елементи” во формирањето на геометријата како наставна дисциплина. Што се однесува до аксиоматскиот метод, ако се имаат предвид психофизичките способности на учениците, пожелно е да се употреби вториот начин за негово користење. Исто така, треба да се има предвид дека при реализирањето на наставата, како во основното, така и во средното образование, не е можно целосно аксиоматски да се изгради ниту една математичка теорија, така што е пожелно само да се презентираат идеите за аксиоматскиот пристап на структурирањето на знаењата. Основно барање при реализирањето на оваа идеја е да се мотивира неопходноста од основните поими и основните тврдења, за потоа да може да се дефинираат други поими и да се докажуваат други тврдења. Практиката покажува дека оваа мотивација може да биде успешна само ако учениците веќе се навикнале на користењето на дефинициите и докажувањето на елементарните тврдења. Поради тоа е пожелно кај учениците кои се на возраст од 13 до 14 години директно да не се користи аксиоматскиот метод,

туку врз основа на нагледно усвоените геометриски знаења постепено да се изградуваат и да се оформуваат одделни “логички острови”, во кои сè повеќе ќе се воведуваат нови поими и ќе се докажуваат нови тврдења. Потоа, веќе оформените “логички острови” треба постепено да се обединуваат, со што ќе се достигне потребното ниво на строгост на излагањето на планиметријата, ниво кое би се достигнало и при првичното задавање на аксиомите. Ако се прифати ваквиот пристап, тогаш учениците за прв пат директно ќе се запознаат со аксиоматскиот пристап при изучувањето на стереометријата. Се разбира, и водниот и во другиот случај, аксиоматиката која се задава при реализирањето на наставата во основното и во средното образование не е целосна, така што можеме да зборуваме само за давање идеја за аксиоматски пристап при изградбата на една математичка дисциплина.

При реализирањето на аксиоматскиот пристап не смееме премногу внимание да му посветиме на “убедувањето” за точноста на соодветните аксиоми, бидејќи тоа може да внесе забуна кај учениците, затоа што тие се доведени во ситуација да ги убедуваме дека е точно тоа што веќе го знаат или само по себе е точно. Со други зборови, најдобар начин за мотивирање на аксиоматскиот пристап е методот на “враќање наназад” кога од дадена теорема се враќаме кон теоремите кои ги користиме при нејзиното докажување, а потоа кон претходно докажаните теореми итн., за на крај да стигнеме до почетните тврдења-аксиомите (на оваа проблематика подетално ќе се осврнеме при реализирањето на идејата за аксиоматски пристап во наставата по геометрија). Јасно, за да даде резултати ваквиот пристап на враќање наназад потребно е да им се посвети поголемо внимание на врските меѓу поодделните теореми и тоа треба да се прави како при усвојувањето нови знаења, така и при решавањето задачи и на часовите за повторување и систематизирање на знаењата.

Во втората половина од XX век бил направен обид идејата за аксиоматски метод да се спроведе и во наставата по алгебра и аритметика, со оправдување дека аксиомите за поимот група се многу поедноставни од некои геометриски аксиоми. Меѓутоа, овие обиди воглавном се покажаа неуспешни. Иако не може со сигурност да се зборува за причините на овој неуспешен обид, сепак се чини дека основна причина за тоа е отсуството на нагледност при користењето на аксиоматскиот пристап во овие две дисциплини.

3.2. МЕТОДИКА ЗА ВОВЕДУВАЊЕ НА ТЕОРЕМИ

Во наставата по математика, главно, теоремите се воведуваат и се усвојуваат на два начина, и тоа: *генетски* и *догматски*.

При догматскиот начин теоремата директно им се соопштува на учениците, а потоа се докажува или се образложува нејзината вистинитост. Затоа овој метод го нарекуваме и *апстрактно-дедуктивен метод* на воведување на теоремите.

Воведувањето на една теорема на *генетски начин*, за разлика од догматскиот, претпочитува активно учество на учениците во откривањето на теоремата. Имено, под раководство на учителот, учениците извршуваат низа активности (потсетување на претходно изучените поими и тврдења кои се во врска со теоремата која се воведува, проверка на поединечни ситуации и слично), со чија помош најчесто го насетуваат потеклото на теоремата, нејзината точна формулација и патот за нејзино докажување. Точно поради овие карактеристики, генетскиот начин во литературата е познат и како конкретно-индуктивен метод за воведување на теоремите.

Јасно, користењето на генетскиот метод бара повеќе наставно време отколку користењето на догматскиот метод. Меѓутоа, генетскиот метод има низа предности, од кои ќе спомнеме неколку:

- кај учениците се активира сознателната компонента во процесот на наставата,
- се стимулира самостојната работа на учениците, со што тие се оспособуваат за усвојување на знаења и умеења и надвор од училиштето,
- учениците најчесто покажуваат поголем интерес за изучување на предметната теорема, и
- се открива внатрешната логика на развојот на изучуваната наставна дисциплина.

Догматскиот метод е погоден при строгото изложување на математичките теории врз основа на аксиоми и дедуктивни методи, бидејќи тој овозможува оптимално користење на времето. Токму затоа овој метод на воведување на теоремите често пати се среќава во учебниците по математика за средното образование, што најчесто им е и недостаток бидејќи со вака концептираните учебници им се овозможува самостојна работа само на мал број ученици. Претходно наведените карактеристики на генетскиот метод отсутнуваат кај догматскиот, така што тој треба минимално да се користи во наставата по математика во средното образование, а пожелно е во основното образование да се користи само во исклучителни ситуации.

Пожелно е генетскиот метод да се комбинира и со таканаречениот *лабораториски метод* (мерење, сечење, пресметување и слично). Исто така, воведувањето на определена теорема може да почне и со давање на погодна избрана задача, преку чие решавање учениците самостојно или со

помош на учителот ќе постават хипотеза, а можеби и ќе го насетат патот за докажување на теоремата.

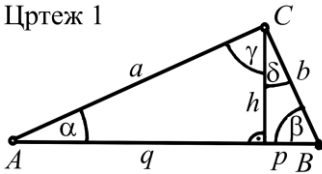
Заради важноста на наставата по математика во основното и во средното образование ќе дадеме пример за воведување на теорема со помош и на конкретно-индуктивниот метод и на апстрактно-дедуктивниот метод.

Пример 1. а) Еден од начините за воведување на Евклидовите теореми со генетскиот метод е следниов.

Учителот со неколку реченици или со неколку погодни прашања ги повторува поимите и тврдењата кои му се потребни за изучување на Евклидовите теореми. Потоа продолжува:

1. Колку е геометриската средина на две отсечки со должини 2cm и 8cm ? А колку на отсечки со должини $a = 3\text{cm}$ и $c = 12\text{cm}$?

Цртеж 1



2. Нацртајте правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C , спуштете ја висината од темето C и означете ја ги аглие $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (како на црт. 1). Каква е заемната положба на краците на аглие α и δ ?

3. Кои парови агли на цртежот имаат заемно нормални краци?

4. Кои од означените агли се еднакви меѓу себе?

5. Именувајте ги правоаголните триаголници на цртежот. Кои од нив се слични меѓу себе?

6. Разгледајте ги сличните триаголници: $\triangle ABC$ и $\triangle CBD$ и составете пропорција од страните a, c и $p = \overline{BD}$. Потоа, изразете ја страната a со помош на страните p и c .

7. Со зборови искажете го равенството $a = \sqrt{pc}$, кое го добивте од претходната задача.

8. Разгледајте ги триаголниците $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ и изведете аналоген заклучок на заклучокот од задачите 6 и 7.

9. Разгледајте ги сличните триаголници: $\triangle ACD$ и $\triangle CBD$. Составете пропорција за висината $h = \overline{CD}$ и отсечките p и q и со зборови искажете го добиеното равенство.

По завршувањето на претходно наведените задачи учителот соопштува дека задачите 7, 8 и 9, всушност се Евклидовите теореми. Со тоа, овие теореми се воведени и останува учителот прецизно да ги формулира или тоа да го направат учениците со негова помош, доколку тоа е по-

требно. На крај, учителот треба да ги организира утврдувањето и примената на Евклидовите теореми.

б) Воведувањето на Евклидовите теореми со догматскиот метод е директно и тоа може да се направи на следниов начин:

Ако во правоаголниот триаголник катетите се проектираат на хипотенузата, тогаш од сличноста на добиените триаголници се добиваат неколку интересни врски меѓу страните, проекциите и висината спуштена кон хипотенузата. Овие врски, познати како Евклидови теореми, се:

1. Секоја од катетите во правоаголниот триаголник е геометриска средина од хипотенузата и проекцијата на таа катета врз хипотенузата.

2. Висината на правоаголниот триаголник спуштена кон хипотенузата е геометриска средина на проекциите на катетите врз хипотенузата на триаголникот.

Потоа учителот го црта горниот цртеж и ги докажува Евклидовите теореми. ♦

3.3. МЕТОДИКА ЗА УСВОЈУВАЊЕ НА ТЕОРЕМИ

Усвојувањето на теоремите е важен момент при нивната обработката. Еден од начините за правилно усвојување на теоремите е следниов:

1. се анализираат претпоставката и заклучокот на теоремата,
2. теоремата ја повторуваат повеќе ученици, при што навремено се коригираат грешките кои тие ги прават,
3. се укажува на можностите за примена на теоремата и нејзиното значење за натамошната обработка на соодветната област,
4. се решаваат задачи, за чие успешно решавање клучна е разработуваната теорема, и
5. во текот на учебната година се одделуваат часови за повторување и за систематизирање на знаењата.

Нормално е учениците да прават грешки при усвојувањето на теоремите, но учителот треба да ги открие причините за тие грешки и да настојува да се отстранат. Најчесто учениците ги прават следниве видови грешки:

- недоволно владеење на основните теореми од соодветната област,
- грешки од логички карактер, поврзани со неразбирањето на дедуктивната градба на курсот по математика, и

- неправилно користење на цртежите.

Во секој случај кога ученик ќе направи грешка, тогаш учителот треба да укаже на неа, да ја анализира заедно со учениците и да ја поправи. Ваквата постапка е важен елемент во процесот на усвојување на теоремите.

Можеме да сметаме дека ученикот добро усвоил дадена теорема, ако:

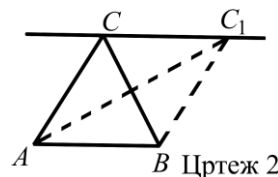
- правилно ја формулира теоремата,
- умеа да ги оддели објектите и врските меѓу нив и ја разбира содржината на секој од нив,
- без грешка ги издвојува претпоставката и заклучокот на теоремата,
- умеа на различни начини да ја искаже теоремата, и
- умеа теоремата да ја примени на соодветни едноставни задачи.

Во врска со користењето на теоремите добро е да се има предвид следново: иако учениците почнуваат да користат теореме во VI одделение, повеќето ученици кои се на оваа возраст не умеат правилно да ги користат теоремите, па затоа е добро развивањето на овие умеања да продолжи барем до III година од средното образование. Истражувањата покажуваат дека при користењето на теоремите од видот $p \Rightarrow q$ учениците на оваа возраст размислуваат врз основа на шемите

$$\frac{p \Rightarrow q, q}{p} \text{ и } \frac{p \Rightarrow q, \neg p}{\neg q},$$

иако овие не се правила за извод. За да се отстранат овие пропусти добро е на учениците да им се задаваат задачи при кои се очекува да ги направат токму овие грешки, но истовремено, на соодветен начин треба им да се укаже на грешките.

Пример 2. Ако по докажувањето на тврдењето, дека плоштината на рамностран триаголник со страна a е еднаква на $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, се постави задачата:



“Плоштината на триаголник со страна a е еднаква на $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Да се определи видот на триаголникот”, многу од учениците ќе одговорат дека триаголникот е рамностран. Лесно се забележува дека во овој случај тие размислуваат според шемата $\frac{p \Rightarrow q, q}{p}$. За да ги увериме дека ваквото разми-

слување не е правилно доволно е да се каже дека постои триаголник ABC_1 со плошина $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и страна a , кој не е рамностран (види црт. 5). ♦

4. МЕТОДИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

Во најопшта научна смисла под *доказ* ќе подразбираме расудување кое има цел да ја утврди вистинитоста или неvistинитоста на некое тврдење, при што се користат други тврдења за кои е констатирано дека се вистинити. Јасно, во строга смисла, доказ на едно математичко тврдење може да се даде само во рамките на формалниот аксиоматски пристап на изградба на една математичка дисциплина. Како што веќе знаеме, една математичка дисциплина (теорија) се гради во вид на формален аксиоматски (дедуктивен) систем ако:

- се определат основните поими, кои се наведуваат експлицитно,
- натамошното дефинирање на поимите се прави со помош на почетните, или со веќе дефинираните поими,
- се определи системот на аксиоми потребен за изградба на математичката дисциплина,
- сите тврдења, освен аксиомите, се непосредни логички следства од аксиомите или нивни посредни логички следства, при што се користат веќе докажаните тврдења, и
- сите тврдења јасно се формулираат со помош на основните или изведените поими.

Во една теорија изградена во вид на формален аксиоматски систем, *доказ на математичкото тврдење* претставува конечната низа од реченици T_1, T_2, \dots, T_k во таа теорија, такви што секоја од нив е или аксиома или дефиниција или тврдење чија вистинитост е претходно докажана според правилата за изведување на заклучоци. Ако постои една таква низа тврдења T_1, T_2, \dots, T_k која завршува со тврдењето T , тогаш за тврдењето T велиме дека е *теорема* во таа теорија.

Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на методите на докажување на теоремите, кои според начинот на нивното реализирање ги делиме на *директни* и *индиректни*, а според формата на заклучување на *дедуктивни* и *индуктивни*.

Нека е дадена теоремата $A \Rightarrow B$.

Под *директен метод* на докажување го подразбираме оној метод кај кој заклучокот B се изведува со директно користење на претпоставката A . По својата форма директниот метод може да биде:

- *метод со напредување (синтетички метод)*, при кој се поаѓа од претпоставката и се стигнува до заклучокот, и
- *метод со враќање (аналитички метод)*, при кој се поаѓа од заклучокот и се стигнува до претпоставката.

Индириктен метод на докажување на теоремата $A \Rightarrow B$ го нарекуваме оној метод при кој вистинитоста на теоремата се докажува со помош на тврдење кое е еквивалентно на теоремата. Од индириктните методи најчесто се користи методот на докажување од спротивното, при кој се докажува дека тврдењето $\neg B$ не е вистинито.

Што се однесува до поделбата на индуктивни и дедуктивни методи, да забележиме дека *индуктивните методи* подразбираат користење на методот на потполна индукција, а додека *дедуктивните методи* подразбираат примена на математичката индукција или на логичките закони и претходно докажани тврдења.

Пред да преминеме на подетално разгледување на методите за докажување на теоремите, да забележиме дека при реализирањето на наставата по математика треба да се имаат предвид следниве факти:

- “училишните докази” најчесто не се строги докази во современа смисла на подразбирање на доказ на математичко тврдење,
- ако при “докажување” на едно тврдење се мешаат интуицијата и логиката, кај учениците не смее да се создава привид дека се работи за строг доказ, и
- покорисно е на учениците отворено да им се каже дека тврдењето се прифаќа без доказ, отколку да се презентира нејасен и неиздржан доказ и тој да се прогласи за строг.

Во натамошните разгледувања подетално ќе се осврнеме на директните и индириктните методи на докажување, при што особено ќе се задржиме на методот на математичка индукција, како заради неговото значење, така и поради фактот дека ова е еден од најелементарните дедуктивни методи.

4.1. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Еден од основните методи кој се користи при докажување на математичките тврдења е *принципот на математичка индукција* (ПМИ), кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T , кое зависи од природниот број n , и ако за T знаеме дека:

- (1) T е точно за природниот број 1;
- (2) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq 1$, следува дека T е точно и за $k + 1$;

тогаш ова тврдење T е точно за секој природен број n .

Доказ. Непосредно следува од петтата Пеанова аксиома за индукција, која гласи:

Ако $S \subseteq \mathbf{N}$ и ако важи:

- $1 \in S$ и
- $k \in S$ повлекува $k + 1 \in S$,

тогаш $S = \mathbf{N}$.

Навистина, ако со S го означиме множеството природни броеви за кои е точно тврдењето T , тогаш од (1) следува дека $1 \in S$. Но, од (2) добиваме дека од $k \in S$ следува $k + 1 \in S$, што според аксиомата за индукција следува дека $S = \mathbf{N}$, т.е. тврдењето T е точно за секој природен број n . ♦

ПМИ симболички може да се искаже со формулата

$$T(1) \wedge (\forall k \in \mathbf{N})[T(k) \Rightarrow T(k + 1)] \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N})[T(n)].$$

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Докажете дека збирот на првите n природни броеви е еднаков на $\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Да означиме $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 2$; ..., $S_n = 1 + 2 + \dots + n$, т.е. S_n е збирот на првите n природни броеви. Треба да докажеме дека

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (*)$$

Прв чекор. Да провериме дека оваа формула е точна за бројот 1. Навистина $S_1 = 1$, а од (*) добиваме дека $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Втор чекор. Да претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 1$ формулата (*) е точна т.е. за збирот на првите k природни броеви знаеме дека $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Ќе докажеме дека формулата (*) важи и за следниот природен број $k+1$ т.е. дека $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Имаме:

$$S_{k+1} = \underbrace{(1+2+\dots+k)}_{S_k} + (k+1) = S_k + (k+1).$$

Сега од претпоставката во вториот чекор следува

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според тоа, во првиот чекор докажавме дека условот (1) од ПМИ е исполнет, а во вториот чекор дека условот (2) од ПМИ е исто така исполнет. Следствено, согласно со ПМИ формулата (*) важи за секој природен број $n \geq 1$. ♦

Забелешка 1. Често пати проверката во првиот чекор се нарекува база на индукцијата (БИ), а претпоставката во вториот чекор индуктивна претпоставка (ИП).

Забелешка 2. За да бидеме сигурни дека при примената на ПМИ добиваме точни резултати, мораме последователно да ги реализираме двата чекора во доказот. Имено, БИ и ИП се подеднакво важни етапи при примената на ПМИ. Ако не појдеме од БИ, тогаш можеме да добиеме погрешен резултат, како што може да се види од следниов “пример”.

Да се докаже дека секој природен број е еднаков на својот следбеник, т.е.

$$n = n + 1 \tag{**}$$

за секој природен број n .

“Доказ”. Да претпоставиме дека равенството (**) е точно за некој природен број k , т.е. $k = k + 1$. Ако во последното равенство, на двете страни додадеме по 1 добиваме $k + 1 = k + 2$, што значи дека равенството (**) е точно и за природниот број $k + 1$, така што од ПМИ треба да следува дека равенството (**) е точно за секој природен број $n \geq k$.

Знаеме дека претходното тврдење не е точно. Каде е грешката? Дали ПМИ не е добар? Проблемот е во тоа што ние се обидовме да распространиме едно тврдење на сите природни броеви, без да докажеме дека тоа е точно за еден природен број. Имено, прескокнувањето на БИ е причината

за “доказот” на едно апсурдно тврдење, а на прв поглед ни изгледа дека овој доказ е коректен. ♦

Забелешка 3. Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже и *вториот принцип на математичка индукција*, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T , кое зависи од природниот број n , и ако за T знаеме дека:

- (1) T е точно за некој конкретен природен број m ;
- (2) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq m$, следува дека T е точно и за $k + 1$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$. ♦

Забелешка 4. При докажувањето на некои тврдења се користи и т.н. *индукција со двојна основа*. Имено,

$$[T(1) \wedge T(2)] \wedge (\forall k \in \mathbf{N})[T(k) \wedge T(k+1) \Rightarrow T(k+2)] \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N})[T(n)].$$

Во следниов пример ќе покажеме како ПМИ се применува во задачи од деливост.

Пример 2. Докажете дека за секој природен број n бројот

$$A_n = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$$

се дели со 25.

Решение. Прв чекор. БИ: Ќе провериме дали бројот A_1 се дели со 25. Имаме $A_1 = 2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \cdot 1 - 4 = 2^3 \cdot 3^1 + 5 - 4 = 25$ што значи дека $25 | A_1$.

Втор чекор. ИП: Да претпоставиме дека за некој природен број k важи $25 | A_k = 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4$.

Ќе докажеме дека

$$25 | A_{k+1} = 2^{(k+1)+2} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4.$$

Од својствата на степените добиваме

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 3 \cdot 3^k + 5k + 5 - 4 \\ &= 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4 + 5(2^{k+2} \cdot 3^k + 1) = A_k + 5(4 \cdot 6^k + 1). \end{aligned}$$

За секој природен број k бројот $4 \cdot 6^k$ завршува на цифрата 4, па затоа за секој природен број k бројот $4 \cdot 6^k + 1$ завршува на цифрата 5, т.е. тој е делив со 5. Според тоа, за секој природен број k важи

$$25 \mid [5(4 \cdot 6^k + 1)]$$

и бидејќи според ИП важи $25 \mid A_k$ добиваме дека

$$25 \mid [A_k + 5(4 \cdot 6^k + 1)] = A_{k+1},$$

со што задачата е решена. ♦

Во следниов пример ќе покажеме како ПМИ се применува при докажување на неравенства.

Пример 3. Докажете дека $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, за $n > 1$.

Решение. Чекор 1. БИ: За $n = 2$ имаме

$$(2 \cdot 2)! = 4! = 24 < 64 = 2^{2 \cdot 2}(2!)^2,$$

т.е. неравенството важи.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека за некој природен број k важи $(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$. Од ИП за $k + 1$ имаме

$$\begin{aligned} [2(k+1)]! &= (2k)!(2k+1)(2k+2) < 2^{2k}(k!)^2(2k+1)2(k+1) \\ &< 2^{2k+1}k!(k+1)k!2(k+1) = 2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2, \end{aligned}$$

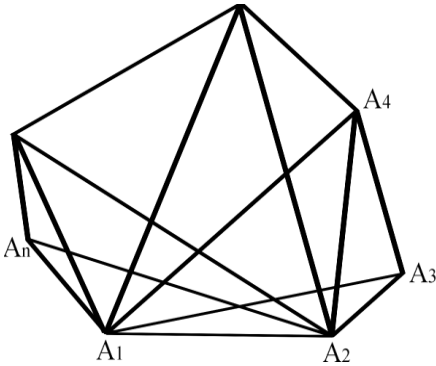
т.е. неравенството важи и за $k + 1$, така што значи важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ♦

Методот на математичка индукција широко се применува во наставата како, на пример, во: докажување на теореми и решавање задачи во множеството на природните броеви, изведување на формули во врска со аритметичката и геометриската прогресија, докажување на биномната формула итн. Меѓутоа, овој метод кој по својата структура е дедуктивен, иако во себе вклучува и елемент на индукција (непосредната проверка на точноста на тврдењето T за бројот 1), е *тежок* за учениците, дури и за оние од погорните класови во средното образование. Причина за тоа е *необичноста на методот, новините кои тој ги носи*, но и фактот што повеќе потсетува на *индиректен отколку на директен метод на докажување*, а како што покажува практиката, по правило, индиректните методи се потешки и понеприфатливи за учениците (за нивно разбирање се потребни значително поголеми знаења од математичката логика).

Претходно кажаното ја наметнува потребата добро да се објасни методот на математичка индукција, при што е неопходно тој да се поткрепат со бројни едноставни примери, преку кои учениците ќе ги согледаат значењето на овој метод за докажување и можностите за негова примена.

На крајот од овој дел, преку примери, ќе покажеме како методот на математичка индукција може да се примени во геометријата.

Пример 4. Најди правило за пресметување на бројот $P(n)$ на начините, со кои конвексен n – аголник може да биде поделен на триаголници со негови дијагонали кои не се сечат.



Решение. За триаголник овој број очигледно е еднаков на еден, т.е. $P(3) = 1$.

Нека претпоставиме дека сме ги определиле броевите $P(k)$, $k < n$. За да го определиме бројот $P(n)$ ќе го разгледаме конвексниот n – аголник $A_1A_2\dots A_n$. При секоја негова поделба на триаголници страната A_1A_2 ќе биде страна на еден од добиените триаголници, чие трето теме може да се совпадне со секоја од точките A_3, A_4, \dots, A_n . Притоа, бројот на начините на поделба на n – аголникот, при кои третото теме на триаголникот ќе се совпадне со точката A_3 е еднаков на бројот на начините на поделбата на $(n-1)$ – аголникот $A_1A_3A_4\dots A_n$, т.е. тој е еднаков на $P(n-1)$. Бројот на начините на поделба, при кои третото теме ќе се совпадне со точката A_4 е еднаков на бројот на начините $P(n-2)$ на поделба на $(n-2)$ – аголникот $A_1A_4\dots A_n$ помножен со бројот на поделба $P(3)$ на триаголникот $A_2A_3A_4$ (зошто?). Бројот на начините на поделба, при кои третото теме се совпаѓа со точката A_5 е еднаков на $P(n-3)P(4)$, бидејќи секоја поделба на $(n-3)$ – аголникот $A_1A_5\dots A_n$ се комбинира со секоја поделба на четириаголникот $A_2A_3A_4A_5$. Продолжувајќи ја постапката ја наоѓаме релацијата:

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2)P(3) + P(n-3)P(4) + \dots + P(4)P(n-3) + P(3)P(n-2) + P(n-1) \quad (3)$$

Ако ја искористиме релацијата (3) последователно наоѓаме:

$$P(4) = P(3) + P(3) = 2,$$

$$P(5) = P(4) + P(3)P(3) + P(4) = 5,$$

$$P(6) = P(5) + P(4)P(3) + P(3)P(4) + P(5) = 14,$$

$$P(7) = P(6) + P(5)P(3) + P(4)P(4) + P(3)P(5) + P(6) = 42,$$

$$P(8) = P(7) + P(6)P(3) + P(5)P(4) + P(4)P(5) + P(3)P(6) + P(7) = 132 \text{ itn.}$$

На крајот, пожелно е на учениците да им се соопшти дека користејќи ја формулата (3) може да се докаже, дека за секој $n \geq 3$ важи формулата

$$P(n) = \frac{2(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}$$

и дека истата нема да ја докажуваме, бидејќи доказот излегува надвор од рамките на нашите разгледувања. ♦

Како што видовме, во претходните три примери покажавме како принципот на математичка индукција може да се искористи при посложени пресметувања во геометријата. Меѓутоа, во геометријата принципот на математичка индукција може да се искористи и за пресметувања според димензијата во која се разгледува дадена задача, т.е. кога определена задача последователно се разгледува на права, во рамнина и во простор. Последново ќе го покажеме на следниве три примери.

Пример 5. а) На колку делови n точки ја делат правата.

б) На колку делови ја делат рамнината n прави такви, што секои две од нив се сечат и никои три немаат заедничка точка (прави во општа положба)

в) На колку делови го делат просторот n рамнини такви, што секои три рамнини се сечат и никои четири рамнини немаат заедничка точка (рамнини во општа положба).

Решение. а) Ако со $F_1(n)$ го означиме бараниот број, тогаш очигледно

$$F_1(n) = n + 1.$$

б) Една права ја дели рамнината на два дела.

Нека претпоставиме, дека е познат бројот $F_2(n)$ на деловите, на кои n прави во општа положба ја делат рамнината и нека се дадени $n + 1$ права во општа положба. Првите n прави ја делат рамнината на $F_2(n)$ делови, а според условот $(n + 1)$ -та права p ги сече останатите n прави во n различни точки. Според задачата под а) овие n точки ја делат правата p на $F_1(n) = n + 1$ делови. Според тоа, правата p сече $F_1(n) = n + 1$ од веќе добиените делови на кои првите n прави ја делат рамнината и истите ги удвојува, што значи дека таа на веќе добиените $F_2(n)$ додава нови $F_1(n) = n + 1$ делови. Значи, за бројот на деловите на кој $n + 1$ права во општа положба ја делат рамнината важи

$$F_2(n + 1) = F_2(n) + F_1(n) = F_2(n) + (n + 1). \quad (4)$$

$$F_3(3) = F_3(2) + \frac{2^2+2+2}{2}$$

$$F_3(2) = F_3(1) + \frac{1^2+1+2}{2}.$$

Ако ги собереме последните равенства и земеме предвид дека $F_3(1) = 2$ наоѓаме

$$\begin{aligned} F_3(n) &= F_3(1) + \frac{1}{2}[(n-1)^2 + \dots + 1^2] + \frac{1}{2}[(n-1) + (n-2) + \dots + 1] + \frac{1}{2}[\underbrace{2 + \dots + 2 + 2}_{(n-1)\text{-na dvojka}}] \\ &= 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1), \end{aligned}$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$F_3(n) = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}. \quad \blacklozenge$$

Пример 6. Најди го бројот на деловите на кои е поделена рамнината од n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе.

Решение. Нека е даден бројот $\Phi_2(n)$ на делови на кои е поделена рамнината со n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе. Бидејќи n кружници ја сечат $(n+1)$ -та кружница во n парови точки и тие истата ја делат на $\Phi_1(n) = 2n$ (зошто?), добиваме дека $(n+1)$ -та кружница сече $\Phi_1(n) = 2n$ од $\Phi_2(n)$ деловите на кои е поделена рамнината со n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе. Оттука го добиваме равенството

$$\Phi_2(n+1) = \Phi_2(n) + \Phi_1(n) = \Phi_2(n) + 2n. \quad (6)$$

Во равенството (6), наместо n последователно ставаме $n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1$ и со аналогна постапка како во пример 7 наоѓаме $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$. \blacklozenge

Пример 7. На колку делови го делат просторот n сфери такви, што секои две се сечат меѓу себе.

Решение. Бидејќи n сфери ја сечат $(n+1)$ -та сфера во n кружници и како тие нејзината површина ја делат на $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ делови (докажи), добиваме дека ако n сфери од кои секои две се сечат меѓу себе го делат просторот на $\Phi_2(n)$ делови, тогаш $n+1$ сфера просторот го делат на

$$\Phi_3(n+1) = \Phi_3(n) + \Phi_2(n) = \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)$$

делови. Сега постапувајќи аналогно како во решението на пример 8 наоѓаме

$$\Phi_3(n+1) = \frac{n(n^2-3n+8)}{3}. \blacklozenge$$

4.2. ДИРЕКТНИ МЕТОДИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ

Како што веќе кажавме под *директен метод* на докажување на теоремата $A \Rightarrow B$ го подразбираме оној метод кај кој заклучокот B се изведува со директно користење на претпоставката A . Претходно спомнавме дека според својата форма директниот метод може да биде:

- метод со напредување (синтетички метод), и
- метод со враќање (аналитички метод).

4.2.1. МЕТОД СО НАПРЕДУВАЊЕ (СИНТЕТИЧКИ МЕТОД)

Да ја разгледаме теоремата $A \Rightarrow B$. За да ја докажеме оваа теорема треба да докажеме дека нејзиниот заклучок B е логичко следство од претпоставката A . За да докажеме една теорема $A \Rightarrow B$ треба да се располага со:

- 1) определена фамилија F од искази I_1, I_2, \dots, I_k , кои се вистинити за разгледуваното множество објекти, и
- 2) правила за заклучување.

Притоа, ако доказот на тврдењето $A \Rightarrow B$ се реализира според логичката шема:

$$(A \wedge F) \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \dots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow B$$

каде што F е фамилијата вистинити искази од математичката теорија, во чии рамки се докажува теоремата и на која и припаѓа конечната низи реченици $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n, B, A$.

Според тоа, директен доказ со напредување претставува низа од правилни расудувања, таква што заклучокот на секое од нив влегува како претпоставка на некое од следните расудувања, а заклучокот на последното расудување е заклучокот во теоремата.

Обично, доказите се изложуваат нецелосно, при што некои или цела низа претпоставки се подразбираат. Претставувањето на еден доказ во

облик на потполна низа расудувања го нарекуваме логичка анализа на доказот. Притоа, расудувањата обично се даваат во облик на хипотетички силогизам, во кој исказите I_1, I_2, \dots, I_k јавно се наведуваат. Имено, логичката анализа најчесто се запишува во обликот

$$I_1 \wedge I_2 \wedge \dots \wedge I_k \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Тврдењата во следниве примери ќе ги докажеме со методот на напредување.

Пример 8. Ако $a, b \in \mathbf{N}$, $a|b$ и $b|a$, тогаш $a = b$.

Претпоставки A : “ $a, b \in \mathbf{N}$, $a|b$ и $b|a$ ”.

Заклучок B : “ $a = b$ ”.

Тврдење V_1 : “постои $q \in \mathbf{N}$, таков што $b = aq$ и постои $p \in \mathbf{N}$, таков што $a = bp$ ”.

(следува од претпоставките и дефиницијата за деливост).

Тврдење V_2 : “ $b = b(pq)$ ”.

(следува од V_1 : $b = aq$, $a = bp$ и асоцијативниот закон за множење на природни броеви: $b = aq = (bp)q = b(pq)$).

Тврдење V_3 : “ $pq = 1$, $p, q \in \mathbf{N}$ ”.

(следува од V_2 : $b = b(pq)$, $b \neq 0$ и законот за кратење).

Тврдење V_4 : “ $p = q = 1$ ”.

(следува од V_3 : $pq = 1$, $p, q \in \mathbf{N}$ и својствата на природните броеви),

Тврдење B : “ $a = b$ ”.

(следува од V_4 : “ $p = q = 1$ и $a = bp = b \cdot 1 = b$ ”).

Конечно, имаме

$$A \Rightarrow V_1, V_1 \Rightarrow V_2, V_2 \Rightarrow V_3, V_3 \Rightarrow V_4, V_4 \Rightarrow B$$

од што според хипотетичкиот силогизам добиваме $A \Rightarrow B$. ♦

Пример 9. Ќе ја докажеме теоремата:

“Ако еден трапез е рамнокрак, тогаш дијагоналите на тој трапез се еднакви”.

Претпоставка p : “Трапезот $ABCD$ е рамнокрак”.

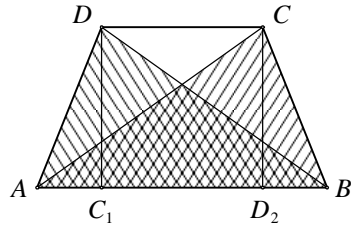
Заклучок q : “Дијагоналите AC и BD се еднакви: $\overline{AC} = \overline{BD}$ ”.

Од темињата C и D повлекуваме нормали DC_1 и CD_2 на страната AB (види цртеж).

Тврдење r_1 : “четириаголникот CDC_1D_2 е правоаголник”,
(следува од конструкцијата и p : трапезот $ABCD$ е рамнокрак).

Тврдење r_2 : “ $\angle AC_1D = \angle BD_2C = 90^\circ$ ”,
(следува од r_1 : четириаголникот CDC_1D_2 е правоаголник).

Тврдење r_3 : “ $\triangle AC_1D \cong \triangle BD_2C$ ”,
(следува од r_2 : $\angle AC_1D = \angle BD_2C = 90^\circ$, p : трапезот $ABCD$ е рамнокрак и признакот за складност ССА).



Тврдење r_4 : “ $\angle C_1AD = \angle D_2BC$ ”,
(следува од r_3 : $\triangle AC_1D \cong \triangle BD_2C$).

Тврдење r_5 : “ $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ ”,
(следува од r_4 : $\angle C_1AD = \angle D_2BC$, p : трапезот $ABCD$ е рамнокрак и признакот за складност САС).

Тврдење q : “дијагоналите AC и BD се еднакви: $\overline{AC} = \overline{BD}$ ”,
(следува од r_5 : $\triangle ABD \cong \triangle BAC$).

Конечно, имаме

$$p \Rightarrow r_1, r_1 \Rightarrow r_2, (r_2 \wedge p) \Rightarrow r_3, r_3 \Rightarrow r_4, (r_4 \wedge p) \Rightarrow r_5, r_5 \Rightarrow q$$

од што според хипотетичкиот силогизам добиваме $p \Rightarrow q$. ♦

Пример 10. Ќе го докажеме тврдењето:

“Нека $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, $a = b + c$ и $d \mid b$. Тогаш, $d \mid a$ ако и само ако $d \mid c$ ”.

На читателот му препорачуваме да направи логичка анализа на доказот на ова тврдење.

Решение. Ако $d \mid c$, тогаш постои $p \in \mathbf{N}$, таков што $c = dp$. Но, бидејќи $d \mid b$, постои $k \in \mathbf{N}$, таков што $b = kd$. Според тоа,

$$a = b + c = kd + pd = (k + p)d$$

што значи $d \mid a$.

Ако $d \mid a$, тогаш постои $q \in \mathbf{N}$ таков што $a = qd$. Но, бидејќи $d \mid b$, постои $k \in \mathbf{N}$, таков што $b = kd$. Според тоа,

$$c = a - b = qd - kd = (q - k)d$$

што значи $d \mid c$. ♦

На крајот од овој дел да забележиме дека синтетичките докази имаат низа предности, како што се:

- концизноста во излагањето,
- едноставната логичка структура, и
- елегантното запишување на доказот.

Меѓутоа, овие докази имаат и низа недостатоци, како што се:

- неопределеноста при изборот на последиците B_1, \dots, B_n од условот A ,
- учениците тешко се справуваат со дедуктивната природа на овие докази,
- често пати на учениците не им се јасни мотивите за преземањето на некои чекори (особено при докажувањето на тврдењата од геометријата, каде што има доцртување на помошни елементи на даден цртеж), и
- често пати на учениците не им е јасен текот на доказот сè додека не се дојде до крај.

4.2.2. МЕТОД СО ВРАЌАЊЕ (АНАЛИТИЧКИ МЕТОД)

Процесот на размислување при докажувањето на теоремата $A \Rightarrow B$ со аналитичкиот метод се одвива на следниов начин:

- се поаѓа од заклучокот на теоремата B се избира доволен услов B_1 , таков што импликацијата $B_1 \Rightarrow B$ и B_1 да се вистинити,
- се избира доволен услов B_2 за B_1 , таков што импликацијата $B_2 \Rightarrow B_1$ и B_2 да се вистинити,
- постапката се продолжува сè додека не се добие доволен услов B_n за B_{n-1} , таков што импликацијата $B_n \Rightarrow B_{n-1}$ и B_n се вистинити и притоа да е вистинита и импликацијата $A \Rightarrow B_n$.

Јасно, при докажувањето на теоремата се користат, како условот A , така и фамилијата F од вистинити искази од математичката теорија, во чии рамки се докажува теоремата.

Симболички, процесот на размислување со аналитичкиот метод може да се запише со помош на шемата:

$$B_1 \Rightarrow B, B_2 \Rightarrow B_1, \dots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, (A \wedge F) \Rightarrow B_n$$

Претходната шема е еквивалентна на шемата

$$(A \wedge F) \Rightarrow B_n, B_{n-1} \Rightarrow B_n, \dots, B_2 \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B,$$

што значи дека секој доказ добиен со аналитичкиот метод може да се запише во облик на доказ добиен со синтетичкиот метод, од што следува дека доказите добиени со аналитичкиот метод се коректни и строги.

Пред да наведеме пример на доказ добиен со аналитичкиот метод, да забележиме дека овој метод има низа дидактички предности во однос на синтетичкиот метод. Имено, тој е поефективен во наставата затоа што им овозможува на учениците активно да учествуваат во реализирањето на наставата, ги учи да расудуваат и со тоа да го развиваат математичкото мислење.

Пример 11. Да ја докажеме теоремата:

“Ако во правоаголниот триаголник со хипотенуза c ортогоналната проекција на катетата a врз хипотенузата е p , тогаш $a^2 = pc$ ”.

Решение. Дадено е (A): $\triangle ABC$ е правоаголен, со прав агол во темето C , $c = \overline{AB}$, $p = \overline{BD}$ и $a = \overline{BC}$. Треба да докажеме:

$$a^2 = pc \tag{B}$$

Да појдеме од равенството (B), кое е еквивалентно на равенството:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{DB},$$

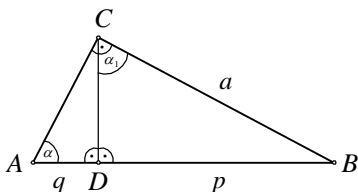
односно на равенството:

$$\overline{BC} : \overline{DB} = \overline{AB} : \overline{BC} \tag{B_1}$$

кое е пропорција на четири отсечки, па затоа постои можност да имаме слични триаголници за кои овие отсечки се нивни страни. Разгледувањето на цртежот нè доведува до $\triangle ABC$ и $\triangle CDB$. Значи, за да биде точно тврдењето (B₁) доволно е да биде исполнето

$$\triangle ABC \sim \triangle CDB. \tag{B_2}$$

Понатаму, за да биде исполнето тврдењето (B₂) доволно е овие два триаголника да имаат по два еднакви агли, а за тоа да биде исполнето доволно е да биде исполнето (види цртеж лево)



$$\angle CAB = \angle DCB . \quad (B_3)$$

Последново тврдење е точно, ако е исполнето тврдењето:

$$CD \perp AB \text{ и } AC \perp BC , \quad (B_4)$$

кое е очигледно точно, бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен и CD е негова висина.

Според тоа, важи $B_1 \Rightarrow B, B_2 \Rightarrow B_1, B_2 \Rightarrow B_3, B_3 \Rightarrow B_4, A \Rightarrow B_4$ односно важи

$$A \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_3 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow B ,$$

со што теоремата е докажана. \blacklozenge

4.3. ИНДИРЕКТНИ МЕТОДИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ

Понекогаш откривањето на импликациите

$$(A \wedge \mathbf{F}) \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \dots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow B$$

при синтетичкиот метод или на импликациите

$$B_1 \Rightarrow B, B_2 \Rightarrow B_1, \dots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, (A \wedge \mathbf{F}) \Rightarrow B_n$$

при аналитичкиот метод за докажување е многу тешко или речиси невозможно. Во вакви случаи најчесто се користи некоја од следниве еквиваленции:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &\Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A \\ A \Rightarrow B &\Leftrightarrow \neg B \wedge A \Rightarrow \neg A \\ A \Rightarrow B &\Leftrightarrow \neg B \wedge A \Rightarrow B \\ A \Rightarrow B &\Leftrightarrow \neg B \wedge A \Rightarrow C \wedge \neg C \\ A \Rightarrow B &\Leftrightarrow \neg B \wedge A \Rightarrow \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1)$$

(каде \mathbf{T} е аксиома или пред тоа докажана теорема) и потоа преку докажување на импликациите кои се наоѓаат на левата страна од овие еквиваленции се докажува теоремата $A \Rightarrow B$. Всушност, овие еквиваленции се и основа на индиректните методи за докажување на теоремите, кои се реализираат со докажување дека негацијата на теоремата не е вистинита. Бидејќи овие еквивалентности не можат јавно да се користат во наставата по математика во основното и во средното образование, ќе дадеме уште еден опис на индиректните методи. Имено,

- a) се формира негацијата на теоремата,
- b) со помош на правилото за извод

$$\frac{A \Rightarrow B, \neg B}{\neg A} \text{ (mod.tol.)}$$

се докажува дека негираното тврдење не е точно, и

с) со помош на законот за исклучување на третото:

$$T(A \vee \neg A) = 1$$

се прави извод за вистинитоста на докажуваното тврдење.

Пред да разгледаме примери на индиректни докази, во врска со индиректните методи за докажување ќе дадеме две забелешки.

Забелешка 1. При користењето на индиректните методи за докажување на математичките тврдења лесно може да се случи учениците да се најдат во *логички бесмислен круг*, поради што е неопходно учителот постојано да ги предупредува на оваа опасност.

Забелешка 2. Како што веќе кажавме, при индиректните методи за докажување важна улога има законот за исклучување на третото

$$T(A \vee \neg A) = 1.$$

Меѓутоа, тој секогаш не е применлив, особено во таканаречените констративни докази кои и тоа како се присутни во современата математика.

Пример 12. Ќе ја докажеме теоремата:

“Ако $d = \text{NZD}(a, b)$, $a = \alpha d$ и $b = \beta d$, тогаш $\text{NZD}(\alpha, \beta) = 1$ “.

Претпоставка A: “ $d = \text{NZD}(a, b)$, $a = \alpha d$ и $b = \beta d$ “.

Заклучок B: “ $\text{NZD}(\alpha, \beta) = 1$ “.

Го негираме заклучокот $\neg B$: $\text{NZD}(\alpha, \beta) = k > 1$.

Тврдење B_1 : “постојат природни броеви α_1 и β_1 , такви што $\alpha = k\alpha_1$ и $\beta = k\beta_1$ “, (следува од $\neg B$).

Тврдење B_2 : “ $(kd) | a$ и $(kd) | b$ “, (следува од A и B_1).

Тврдење $\neg A$: “ kd е заеднички делител на a и b , кој е поголем од d “, (следува од B_2).

Значи, $\neg B \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B_2$, $B_2 \Rightarrow \neg A$, така што од правилото хипотетички силогизам имаме $\neg B \Rightarrow \neg A$. Според тоа, за теоремата искажана во условна форма $A \Rightarrow B$, ја докажавме импликацијата $\neg B \Rightarrow \neg A$, така што од првата еквиваленција во (1) следува точноста на теоремата. ♦

Пример 15. Ќе ја докажеме теоремата:

“Постојат бесконечно многу прости броеви”.

Тврдење p : “Постојат бесконечно многу прости броеви”.

Тврдење $\neg p$: “Постојат конечно многу прости броеви и тоа се броевите:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n = p \text{ “} . \quad (2)$$

Тврдење q : “Бројот $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ е прост или има прост делител различен од $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n = p$ “; (следува од $\neg p$ и дефиницијата за деливост).

Тврдење $\neg \neg p$: “Постои прост број кој не се содржи во низата (2)”, (следува од q).

Точноста на теоремата следува од тавтологијата $p \Leftrightarrow \neg \neg p$. ♦

5. МЕТОДИКА ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА ТЕОРЕМИ

Во претходните разгледувања се задржавме на начините за воведување и за изучување на математичките тврдења, при што нагласивме дека ученикот треба да ги усвојува предвидените формули, теореме и правила, неопходно е нив да ги запомни, да ги разбира и да знае да ги применува при решавањето проблеми. Што се однесува до прашањето дали ученикот треба да ги усвојува и докажете на теоремите, често пати може да се слушне мислењето дека тоа не е потребно, бидејќи нема зашто да се проверува вистинитоста на дадена теорема за која однапред се знае дека е точна.

Но, дали тоа е така? Имено, важно е ученикот да ги усвојува доказите на одделни теореме, при што е неопходно во рамките на своите можности самостојно и да ги докажува. Само така ќе се придонесе да се подобри расудувањето на ученикот, што е и една од основните задачи во наставата по математика. Притоа, треба да се имаат предвид следниве моменти:

- потребата од строг логички доказ на теоремите подобро може да се разбере при усвојувањето на теореме чија вистинитост не е очигледна, и
- при реализирањето на доказите во училишните курсеви по математика неминовно се користат и интуитивни елементи, т.е. доказите во училишниот курс не се строго дедуктивни, бидејќи училишниот курс по математика не се гради строго дедуктивно.

При реализирањето на наставата по математика можеме да сметаме дека изучувањето на доказот на една теорема ја постигнува целта ако ученикот:

- ја разбира потребата од доказ на дадената теорема,
- може да ги разграничи претпоставката и заклучокот на теоремата, како и аргументите кои се користени во заклучувањето при реализирањето на доказот, и
- умее самостојно или со минимална помош на учителот да го репродуцира доказот на теоремата.

Реализирањето на претходно изнесените моменти за постигнување на целта при изучувањето на доказите на теоремите, а особено обучувањето на учениците самостојно да докажуваат теореми е можно само ако учителот ги почитува следниве дидактички правила:

- Пред да се пристапи кон докажувањето на дадена теорема да се спроведе повторување на дефинициите и тврдењата кои ќе се користат во нејзиниот доказ. Притоа, ако некои од дефинициите и тврдењата не се користеле во наставата подолг временски период, добро е нивното повторување да се зададе како домашна задача, со што ќе се добие во ефективноста на часот.
- Учителот прво треба да се убеди дека учениците ја разбрале содржината на теоремата и нив да ги убеди во потребата од докажување на истата.
- Секој ученик, пред да пристапи кон докажување на дадена теорема, треба да знае дека се вистинити сите тврдења кои се користат во нејзиниот доказ.
- Доколку во доказот се користи цртеж, учителот треба да обрне внимание дека цртежот ништо не докажува, туку може да се користи за да се добие идеја за откривање на доказот и негово реализирање, така што е потребно цртежот правилно да биде разбран.
- При докажувањето на теоремите пожелно е учителот да ги реализира доказите со различни методи, со што учениците ќе се оспособат самостојно да ги докажуваат теоремите.

Ваквиот пристап во реализирањето на доказите на теоремите ќе им овозможи учениците да се оспособат да одговорат на три едноставни, но мошне важни прашања: *Што? Од каде? Како?*

Што се однесува до првото прашање, всушност ученикот треба да одговори на следниве прашања: *Што се докажува? Што е дадено, а што*

треба да се докаже? Дали тврдењето може да се формулира поинаку и дали сè е јасно во неговата формулација?

Важно е ученикот да најде точни одговори на овие прашања, бидејќи како што кажавме, тој може да пристапи кон докажување на дадена теорема само ако ја разбрал нејзината содржина, ги разграничил условот и заклучокот на теоремата и ако му се јасни поимите кои се користат во формулацијата.

Во второто прашање се вклучени низа прашања, како што се: *Дали од претпоставките на теоремата непосредно следува заклучокот? Што е доволно за да се изведе заклучок? Од кои познати тврдења во дадената теорија може да следува точноста на теоремата?*

Најчесто одговорите на оваа група прашања следуваат од веќе докажаните слични теореми. Исто така, пожелно е условот на теоремата да се преформулира со што ќе се доближи до заклучокот или пак, тоа да се направи со заклучокот со што тој ќе се доближи до условот.

Всушност, третото прашање е: *Какво треба да биде расудувањето и притоа кои правила треба да се почитуваат за докажуваната теорема да следува од претходно докажаните тврдења во дадената теорија?*

Одговорот на ова прашање не е ни малку едноставен, но без разлика на тоа дали јавно или нејавно се користат правилата за извод, при расудувањето треба да се имаат предвид следниве правила:

- условот на теоремата мора целосно да се искористи, и
- пожелно е наместо дефинициите на поимите да се користат нивните признаци, при што е неопходно да се примени оној признак кој го скратува патот за докажување на теоремата.

На крајот од овој дел уште еднаш да забележиме дека секој ученик мора да ги помни формулациите на изучените теореми, но не е неопходно од учениците да се бара целосно да ги интерпретираат нивните докази. Имено, многу поцелисходно е учениците да можат да ја интерпретираат идејата за доказ на една теорема и да умеат да ја применат при докажувањето на слични тврдења, како и да ја применат теоремата во решавањето задачи.

Х ГЛАВА

МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ

1. ПОИМ ЗА МАТЕМАТИЧКА ЗАДАЧА

Најважно средство за формирање на математичката култура кај учениците и нивно активно учество во наставата по математика е ефективно организирање и управување на наставниот процес при решавањето математички задачи. Притоа, учениците сознательно и трајно го усвојуваат системот на математичките знаења, умеења и навики.

Како што веќе кажавме, основна содржина на училишниот курс по математика се математичките поими и тврдењата (теоремите) поврзани со нив. Меѓутоа, нивно успешно усвојување е можно само преку решавање соодветни задачи. Оттука произлегува и важноста на задачите во наставата по математика, како и оспособеноста на учителот за ефективно организирање и управување на наставниот процес при решавањето математички задачи. Може да се каже дека учителот е оспособен да ја реализира оваа важна задача ако:

- успешно ги посочува целите при решавањето конкретна задача,
- врши правилен избор и подредување на задачите во дадена лекција, тема, учебен предмет и во целиот училишен курс, и
- успешно ја организира работата на учениците при решавањето конкретна задача.

Многу често во математиката се поставува барањето: *Од дадено множество математички објекти U да се оддели подмножество S , чии елементи имаат дадени својства.* Притоа, велиме дека со ова барање е поставена *математичка задача* или *едноставно задача*.

Во овој дел подетално ќе се осврнеме на поимот математичка задача. Но, пред тоа ќе разгледаме неколку примери.

Пример 1. Најдете ги целобројните решенија на равенката

$$x^2 - 4y^2 = 17.$$

Со оваа задача описно е зададено множеството S (тоа е множеството решенија на равенката $x^2 - 4y^2 = 17$) и се бара тоа множество да се зададе конструктивно, односно со непосредно посочување на неговите елементи. Притоа треба да се има предвид дека множеството S е подмножество од некое множество броеви U , кое се нарекува множество на дозволиви вредности на непознатата и во овој случај $U = \mathbf{Z}$. ♦

Пример 2. Симон треба да се јавува на лекарска контрола на секои седум месеци по еднаш, почнувајќи од октомври. Така, Симон втор пат бил на контрола во месец мај. Кое по ред било првото одење на контрола во јануари?

Во оваа задача, преку низа од мисли, описно се задава множеството S , кое има само еден елемент, а се бара множеството S да се зададе конструктивно. Притоа, S е подмножество од множеството $U = \mathbf{N}$. ♦

Пример 3. Да се конструира триаголник, ако се зададени

$$a + b + c, \alpha, \beta.$$

Со оваа задача описно е зададено множеството S од тројки неколинеарни темиња на триаголникот кој ги задоволува дадените услови. Се бара множеството S да се зададе конструктивно, т.е. да се посочи секој елемент на S . Притоа, се бара елементите на S да се добијат со конечен број применувања на определени правила. Јасно, во овој случај множеството U е множеството од сите тројки неколинеарни точки. ♦

Пример 4. Над страните BC, CA, AB од еден произволен триаголник ABC , надвор од него се конструирани рамнострани триаголници BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Да се докаже дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1}$.

Во оваа задача е зададено множеството $S = \{\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}\}$. Треба да се докаже дека ова множество е подмножество од графикот на релацијата “=” . ♦

Претходните размислувања ја наметнуваат следнава дефиниција за математичка задача:

Математичка задача е низа од мисли со кои, на некој начин, се задава подмножество S на дадено множество U од математички објекти и притоа треба:

- ако множеството S е конечно, тоа да се најде конструктивно, или
- да се докаже дека S е подмножество на веќе зададено подмножество на множеството U , или

- да се докаже дека $S = S'$, каде S' е дадено множество, или
- да се докаже дека елементите на S можат да се добијат со конечна примена на правилата за примена на шестар и линијар.

Притоа, за секој од начините за задавање на S велите дека е *претставување* на S , а за задачата дека е *определена* во множеството U . Множество S го нарекуваме *множество решенија* на задачата во U .

Со поимот задача се поврзани и следниве термини:

- *текст на задачата* е низата од зборови од говорниот јазик и математичките симболи со кои се задаваат множеството U , својствата на елементите од множеството S и барањето за претставување на S ,
- *услов на задачата* (A) е текстот со кој S се задава описно, а U се задава описно или конструктивно,
- *заклучок на задачата* (B) е делот од задачата со кој се посочува бараното претставување на S ,
- *решавање на задачата* е дејност со која од даденото задавање на S во текстот се оди кон бараното претставување на S . Притоа, како резултат на таа дејност се формира конечна низа од начините на задавање на S , што овозможува да се добие бараното претставување на S и секое такво претставување го нарекуваме *решение на задачата* (R), и
- *база на решението на задачата* (C) е множеството од теореми, аксиоми, дефиниции и др., со чија помош се наоѓа решението на задачата.

Во основа, секоја математичка задача е составена од компонентите A, C, R, B , кои ќе ги илустрираме на еден елементарен пример.

Пример 5. Во множеството реални броеви решете ја равенката

$$\log_3(x^2 - 2x + 7) = 2.$$

A) Услов на задачата: дадена е логаритамска равенка со непознатата x , која се содржи во израз под знакот за логаритмирање со основа 3. Левата страна на равенката содржи еден логаритам, а десната страна е бројот 2.

B) Заклучок на задачата: непознат и тоа е таква вредност на x , со чија замена на местото на x , условното равенство ќе премине во точно бројно равенство.

R) *Решение на задачата*: низа од равенки поврзани со релациите \Rightarrow и \Leftrightarrow :

$$\log_3(x^2 - 2x + 7) = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 7 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

Проверка: $\log_3[(1 \pm \sqrt{3})^2 - 2(1 \pm \sqrt{3}) + 7] = \log_3 9 = 2$. $x = 1 \pm \sqrt{3}$ се решенија на равенката.

C) *База на решението*: дефиницијата на логаритмот и теоремите за еквивалентност на равенките. ♦

2. ВИДОВИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ

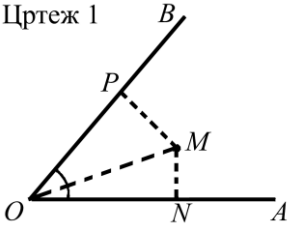
Ако се искористи карактеризацијата на задачите поврзана со четирите основни компоненти A, C, R, B , задачите можат да се типизираат според бројот на непознатите компоненти. Непознатите компоненти ќе ги означуваме со буквите X, Y, Z, \dots . Поаѓајќи од стационарната положба $ACRB$ можеме да ги определиме следниве типови задачи:

- *Прв тип*, кога е непозната само една компонента: $XCRB$, $AHRB$, $ACXB$, $ACRX$. Задачите од овој тип ја образуваат содржината речиси на секој учебник и за нив можеме да кажеме дека се *задачи за обучување (осознавање)*.
- *Втор тип*, кога се непознати две компоненти: $AXYB$, $XCRY$, $XYRB$, $ACXY$, $AXRY$, $XCYB$. Задачите од овој тип се поставуваат на натпреварите по математика и, обично тие се од видот $AXYB$, што значи дека јавно се одделени условот и заклучокот на задачата, а непознати се не само решението, туку и теоријата на која тоа се заснова. Според тоа, за овие задачи може да се каже дека се *творечки*.
- *Трет тип*, кога се непознати три компоненти: $XYZB$, $AXYZ$, $XCYZ$, $XYRZ$. Задачите од овој тип речиси и не се среќаваат во наставата по математика, но тоа не значи дека тие не постојат и не се корисни за наставата. Доколку задачите од овој тип се користат во наставата по математика, пожелно е тие да се од типот $AXYZ$. На пример, ако паралелопипедот се дефинира како вид на призма, тогаш може да се постави следнава задача: “*Да се испита паралелопипедот и да се определат неговите својства*”, која очигледно е од типот $AXYZ$. Задачите од овој тип можеме да ги типизираме како *проблемски* задачи.

Опишаната типологија на задачи овозможува да се стандардизира секоја задача од училишниот курс по математика, што може да се види од следниов пример.

Пример 6. Почетна задача: Во $\angle AOB = 60^\circ$, (црт. 11) важи

Цртеж 1



$$MP \perp OB, MN \perp OA, \overline{MN} = a, \overline{MP} = b.$$

Да се најде должината на отсечката OM .

Вака формулираната задача, ако не е позната темата од учебникот во кој таа се наоѓа, е од типот $AXYB$ и спаѓа во посложените наставни задачи.

Но, разгледуваната задача можеме да ја стандардизираме ако ја преформулираме: *Условот останува ист, а на место постојниот заклучок да се постави прашањето: “Што може да се најде или докаже?”* На тој начин задачата преминува во типот $AXYZ$.

Ако текстот на задачата го преформулираме во: *“Разгледајте го дадениот цртеж. Кои податоци се потребни за да се најде должината на отсечката OM ?”*, тогаш задачата е од типот $XYZB$. ♦

Да забележиме дека ако учителот сака да ја реши почетната задача, тогаш тој може да почне од некоја од преформулираните задачи, усно да ги соопшти можните варијанти и подетално да се осврне на почетната задача или на некоја задача слична на неа, но формулирана од учениците.

Покрај веќе направената поделба на задачите, можат да се извршат и низа други поделби, од кои ќе ги спомнеме поделбите според: *условот, барањето, структурата, содржината, видот на мислењето и дидактичките цели.*

Според *условот*, задачите се делат на определени, *неопределени* и *преопределени*.

- Задачата во која условот (A) содржи доволно и само доволно податоци за исполнување на заклучокот (B) ја нарекуваме *определена задача*.
- Ако од условот (A) на некоја определена задача се испушти некој податок, тогаш велиме дека станува збор за *неопределена задача*.
- Ако пак во условот (A) на некоја определена задача се додаде некој податок кој не бил во (A), тогаш се добива *преопределена*

на задача. Притоа, ако новиот податок следува од условот (A), тогаш новата задача останува определена, а ако новиот податок е во спротивност со условот (A), тогаш новата задача нема решение и велеме дека станува збор за *противречна задача*.

Пример 7. а) Даден е рамнокрак трапез со основи $a = 13\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$ и висина $h = 4\text{cm}$. Да се пресмета периметарот на трапезот.

Јасно, оваа задача е определена, бидејќи условот содржи доволно и само доволно податоци за исполнување на барањето.

б) Да се пресмета периметарот на трапезот со основи $a = 13\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$ и висина $h = 4\text{cm}$.

Оваа задача е добиена од претходната, со испуштање на условот рамнокрак трапез и таа е неопределена, бидејќи постојат бесконечно многу трапези со дадените податоци и меѓу нив има трапези со различни периметри.

в) Даден е рамнокрак трапез со основи $a = 13\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$, висина $h = 4\text{cm}$ и крак $c = 5\text{cm}$. Да се пресмета периметарот на трапезот.

Оваа задача е добиена од задачата под а), со додавање на податокот “крак $c = 5\text{cm}$ ” и таа е преопределена, но останува определена бидејќи додадениот податок следува од претходните податоци.

г) Даден е рамнокрак трапез со основи $a = 13\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$, висина $h = 4\text{cm}$ и крак $c = 7\text{cm}$. Да се пресмета периметарот на трапезот.

Оваа задача е добиена од задачата под а), со додавање на податокот “крак $c = 7\text{cm}$ ” и таа е преопределена, но и противречна бидејќи новиот податок противречи на претходните податоци (проверете!). ♦

Според *барањето*, задачата може да биде: *нумеричка, конструктивна и теориска*.

Според *содржината*, што значи според припадноста кон определена математичка дисциплина, задачите можат да бидат:

- *аритметички* како, на пример, задачите кои ги вклучуваат основните операции во множеството рационални броеви, задачите од елементарната теорија на броеви и слично,
- *алгебарски*, во кои спаѓаат задачите со решавање на равенки и неравенки и нивни системи, задачите поврзани со докази на алгебарски идентитети и неравенства итн.,
- *геометриски*, во кои спаѓаат задачите од планиметрија, стереометрија и аналитичка геометрија, без разлика дали тоа се задачи со докажување, пресметување или конструирање,

- *тригонометриски*, во кои спаѓаат задачите поврзани со тригонометриските функции, како што се, тригонометриските равенки и неравенки, решавањето на триаголник и слично,
- *аналитички*, кои ги опфаќаат задачите поврзани со трансцедентните функции, со поимите извод, интеграл итн.

Според *структурата* задачите можат да бидат:

- *едноставни* и тоа се задачи кои не можат или нема потреба да бидат разбиени на повеќе помали задачи, и
- *сложени* и тоа се задачи кои задолжително се разбиваат на две или на повеќе подзадачи од дадената задача.

Според *видот на мислењето* кој преовладува при решавањето, задачите се делат на:

- *алгоритамски* и тоа се задачите кај кои решавањето е еднозначно определено со помош на точно определена постапка (формула, правило или алгоритам),
- *полуалгоритамски*, во кои спаѓаат задачите чие решавање не е определено со строго ориентациона шема и за решавање на овие задачи е потребен дополнителен интелектуален напор (случајот со геометриските задачи во кои, по правило, е потребно доцртување на дополнителни елементи на зададениот цртеж), и
- *евристички*, во кои спаѓаат нестандартните задачи, т.е. задачите од третиот тип во првичната класификација.

Според *дидактичките цели*, задачите се делат на:

- *задачи за осознавање*, во кои спаѓаат задачите за усвојување нови знаења,
- *задачи за увежбување*, кои се применуваат за добивање на трајни знаења, умеења и навика, и
- *творечки задачи*, т.е. задачи во кои изразено се застапени елементите на творечкото мислење и кои, по правило, се нестандартни и посеопфатни од гледна точка на базата на решението.

На крајот од овој дел да забележиме дека претходните класификации на задачите како такви можат да се прифатат само условно, бидејќи во текот на последниве десетина години, во завршните одделенија на основното и во текот на средното образование, постои тенденција за обработка на нестандартни задачи за увежбување на обработуваниот материјал. Овие

задачи се компонирани на тој начин што тешко може строго да се класифицираат, дури и според еден од наведените критериуми.

3. ФУНКЦИИ НА ЗАДАЧИТЕ

До неодамна функциите на задачите се поврзуваа само со изучувањето на конкретни теми од наставната програма, т.е. се формулираа само од гледна точка на наставата. Но, во последно време на задачите им се посветува внимание и во дидактиката, психологијата и кибернетиката, со што прашањето на функциите на задачите почна посебно да се разгледува и во методиката на наставата по математика.

Ќе наведеме неколку принципи од кои ќе се раководиме при разгледувањето на функциите на училишните математички задачи.

1. Практиката на наставата по математика покажува дека секоја конкретна задача, која се поставува и се решава во една или во друга етапа од наставата, има разновидни функции, кои во дадените конкретни услови се пројавуваат јавно или скриено. Поради тоа има смисла да се говори за една или за друга водечка функција на задачата во дадена конкретна ситуација.

2. Водечката положба на една или на неколку функции на задачата има динамичен карактер. Имено, во зависност од конкретните услови некоја скриена функција на дадена задача може да стане водечка, а нејзината претходно декларирана водечка функција може да остане нереализирана. Често пати, во практиката учителот не ја согледува водечката функција на една задача (според замислата на авторите на учебникот) и затоа нејзиното решавање не ја постигнува саканата цел, и обратно, чести се случаите кога при решавањето на дадена задача инвентивната работа на учителот открива и реализира пошироки и покорисни функции од оние, кои ги предвиделе авторите на учебникот.

3. Системот од училишни математички задачи треба да соодветствува со целите на наставата по математика во училиштето. Затоа секоја одделна задача или систем од задачи треба да е насочен кон реализирањето на една или на друга конкретна цел на наставата.

4. Бидејќи образовната, воспитната и развојната компонента се основни во наставата по математика, можеме да сметаме дека основни водечки функции на задачите се тие да образуваат, воспитуваат и да ги развиваат творечките способности на учениците.

5. Секоја од основните функции на задачите практично никогаш не е изолирана од другите, па затоа за неа можеме да зборуваме само како водечка при решавањето на една задача или на систем од задачи. Јасно, учителот прво треба да се грижи да се реализира водечката функција на задачата, но истовремено треба да има предвид дека ненавременото потенцирање на другите функции на задачата може негативно да се одрази на ефектите од решавањето на соодветната задача во рамките на наставната единица.

Природно е да постојат и такви задачи кои во себе содржат повеќе водечки функции. Во нашите разгледувања нема да се задржиме на овие прашања, туку ќе ги разгледаме функциите на задачите во наставата по математика.

Под *образовни функции* на задачите се подразбираат оние функции кои се насочени кон формирање на систем од математички знаења, умееша и навики кај учениците. Образовните функции можат да бидат од заеднички, посебен и конкретен карактер.

Под *заеднички образовни функции* ги подразбираме оние функции на задачите кои се важни не само во наставата по математика, туку и во наставата од сите дисциплини на природно-математичкото подрачје. Под *посебни образовни функции* на математичките задачи ги подразбираме функциите од општ карактер кои се важни само за наставата по математика. Под *конкретни образовни функции* на задачите ги подразбираме поединечните специјални функции.

На пример, формирањето на некои поими на ниво на претстави е заедничка образовна функција; формирањето претстава за природен број е посебна функција, а формирањето претстава за бројот 2 е конкретна образовна функција.

Заради нивното значење, подетално ќе ги разгледаме само заедничките образовни функции на задачите, а тоа се:

1. повторување на поимите, со цел тие правилно и трајно да се усвојат,
2. констатирање на врските меѓу поимите (од род кон вид и обратно, внатрешнопредметните и меѓупредметните врски),
3. усвојување на основните правила за заклучување и оспособување за нивна правилна примена,
4. формирање на поимот *математички модел*,

5. откривање на процесите и разбирање на соодносите,
6. формирање на умеења и навики за правилно усно и писмено изразување, како на говорен, така и на симболички јазик, и
7. формирање на умеења и навики за работа со прибор, инструменти, користење на литература и слично.

Познато е дека образованието, пред сè, воспитува преку содржините, односно преку фактите и нивното толкување. Меѓутоа, остварувањето на воспитната функција зависи и од тоа како пред учениците е презентирана наставната материја и од самата организацијата на работата на часот, како со целата паралелка, така и со секој ученик поединечно.

Всушност, секоја задача во себе содржи една или друга воспитна функција, а од учителот и од авторот на учебникот или на збирката зависи дали таа ќе се оствари и во која мера. Притоа, изучуваниот материјал и наставниот процес, што значи и секоја задача, треба целисходно да се искористи за:

1. кај учениците да се побудува и да се развива интересот за математиката,
2. воспитување за одговорно однесување кон наставниот предмет,
3. формирање навики за континуирано и планско работење.

На крај, под функции кои ги развиваат творечките способности на учениците (развојни функции) ги подразбираме оние кои се насочени кон развивање на мислењето на учениците, кон формирање квалитети својствени за научното мислење и совладување на пристапи за ефективна умствена работа.

Во заедничките развојни функции на задачите спаѓаат:

1. совладувањето на методите на научното сознавање,
2. развивањето на способностите за индуктивно и за дедуктивно заклучување,
3. развивањето на умеењата да се извршува елементарно моделирање и да се користат постојните или да се составуваат нови модели за изучување на својствата на објектите,
4. развивањето на умеењата да се класифицираат изучуваните објекти, да се систематизираат знаењата, да се откриваат причинско-последователните и структурните врски меѓу објектите на ниво на стекнатите знаења,
5. развивањето на умеењата да се врши избор на средства и на методи за реализирање на поставената цел, согласно конкретните услови,

6. развивањето на умеењата да се открива поврзаноста на изучува- ниот материјал со практичната дејност на човекот, и

7. совладувањето на основните квалитети, својствени на научното мислење.

Во посебните развојни функции на задачите спаѓаат:

1. формирањето и развојот на знаења и умеења дедуктивно да се докажуваат или да се негираат математичките тврдења,

2. развивањето на умеења да се планира решавањето на дадена задача, да се исклучат непотребните податоци од условот, условот да се дополни со податоци кои недостасуваат, да се изберат методи, средства и операции за решавање на задачата и да се проверат точноста и смислата на добиеното решение,

3. формирањето јасна претстава за логичката структура на курсот по математика, за фактот дека апстрактниот карактер на математиката како наука е основна причина за нејзините многубројни примени во останатите науки, во техниката и воопшто во животот,

4. формирањето умеења да се дефинираат математичките поими,

5. развивањето и усовршувањето на умеењата брзо и точно да се извршуваат најразлични пресметувања, со или без помош на технички помагала, и

6. усовршувањето на умеењата да се користи јазикот на математичката симболика.

4. МЕТОДИКА НА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ

Во досегашните разгледувања се задржавме на прашањата:

- Што е тоа математичка задача?
- Какви видови математички задачи има?
- Кои се функциите на математичките задачи?

Во овој дел ќе се осврнеме на методската работа, поврзана со конкретно решавање на дадена задача и како со решавањето конкретна задача кај учениците се формираат умеењата за решавање задачи.

При обработката на методиката за решавање на дадена задача ќе се задржиме на четирите етапи, кои според многу автори се среќаваат при ре-

шавањето на дадена задача, иако активностите во нив секогаш не се подредени по дадениот редослед.

А) ПРВА ЕТАПА - РАЗБИРАЊЕ НА ЗАДАЧАТА

Во оваа етапа се прави елементарна анализа на задачата, односно се деталзираат условот и заклучокот, при што се деталзираат сите искази кои се дадени во условот и заклучокот, се забележува кои од објектите во задачата се познати, а кои се непознати, т.е. што во задачата треба да се пресмета, докаже или конструира. Со еден збор, спомнатата елементарна анализа е во функција на оценка на информацијата на задачата, која може да биде:

1. *Основна информација.* Оваа информација го карактеризира типот на задачата и ги насочува учениците кон заедничките идеи и методи за решавање задачи од определен тип. Одделувањето на оваа информација има за цел учениците да го согледаат суштественото во задачата, кое е претпоставка за воопштување на знаењата. Ако учителот не го надмине конкретното во дадената задача и не се осврне на нејзините суштествени елементи, тогаш може да се каже дека при решавањето на дадената задача е занемарена образовната функција.

2. *Специфична информација.* Тоа е информација која е карактеристична за конкретната задача, но не и за типот задачи. Оваа информација ја определува индивидуалноста на задачата и ги насочува учениците кон конкретизирање на заедничките идеи и методи, определени со основната информација и кон составување план за решавање на конкретната задача. Одделувањето на специфичната информација ги насочува учениците во секоја задача, покрај општото, да бараат и низа специфичности, со што се формираат навика за внимателно набљудување на објектите и за суштинско проучување на релациите меѓу објектите и податоците поврзани со нив.

3. *Несуштествена информација.* Тоа е информација која не влијае на решението на задачата, но може да влијае на педагошката вредност на задачата. На пример, преку содржините на т.н. текстуални задачи може да се зајакне воспитната компонента, потоа да се изврши корелација со другите наставни предмети и слично.

Пример 1. Во $\triangle ABC$ се дадени $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ и $h_c = 5\text{cm}$. Пресметајте ја плоштината на триаголникот.

Основна информација. За $\triangle ABC$ се дадени два агла и должината на висината h_c , со што триаголникот е определен до складност. Со помош на зависностите меѓу страните и аглиите можат да се најдат сите елементи на $\triangle ABC$, вклучувајќи ја и плоштината.

Специфична информација. Едниот агол е $\angle B = 30^\circ$, затоа $\overline{BC} = 10\text{cm}$. Другиот агол е $\angle A = 75^\circ$, затоа третиот агол е $\angle C = 75^\circ$ и $\overline{AB} = \overline{BC} = 10\text{cm}$. Според тоа, $P = \frac{\overline{AB} \cdot h_c}{2} = 25\text{cm}^2$. ♦

Разбирањето на задачата го раководи учителот. Притоа се користат различни пристапи, како што е читањето на целиот текст на задачата или на негови одделни делови, илустрирање на задачата со цртеж, шема, скица или модел, симболичко запишување на задачата и слично. Без оглед на тоа кој пристап ќе се избере важно е учениците добро да ја разберат задачата. Имено, учителите кои веднаш преминуваат на втората етапа во решавањето на задачата, без таа добро да биде разбрана, прават груба методска грешка.

Б) ВТОРА ЕТАПА - ГРАДЕЊЕ ИДЕЈА И СОСТАВУВАЊЕ ПЛАН ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧАТА

За да се реши дадена задача, покрај тоа што таа треба да биде добро разбрана, потребни се знаења и умеења, искуство и упорност. Оваа етапа, која по својата содржина е најбогата со интелектуална дејност, почнува паралелно со разбирањето на задачата. При реализирањето на оваа етапа учителот треба постепено да го открива патот на создавањето, патот до решението. Меѓутоа, во интерес на времето, често пати учителот или некој ученик презентира готово решение, со што се анулираат значењата на градењето на идеја и составувањето план за решавање на задачата. Се разбира, ваквиот пристап методски е погрешен. Имено, на разбирањето на задачата и на составувањето план за решавање треба да им се посвети најмногу време, бидејќи при остварувањето на овие етапи најдобро се остваруваат функциите на задачите. Да напоиме дека само ако задачата се задава за проверка на знаењата и умеењата на учениците и за нивно оценување, тогаш можат да се занемарат овие две важни етапи во решавањето на една задача. При реализирањето на оваа етапа можни се следниве два случаја:

1. Решаваната задача е од познат тип, позната е структурата на решението и познат е методот на решавање. Во овој случај планот за решавање се состои во конкретизација на познатите структура и метод и нивна примена. При решавањето задачи од овој тип ученикот ги реализира

следните активности: *го распознава видот задача, го избира соодветниот алгоритам и го применува на конкретната задача, го формулира одговорот и го коментира.*

Јасно, задачите од овој тип се користат за усвојување на важни алгоритми, кои се компоненти на посложени задачи. Поради тоа задолжително е нивно целосно и трајно усвојување.

2. Дадената задача е со непозната структура на решението, не е познат алгоритмот за нејзино решавање. За овие задачи не постои шема со чие реализирање сигурно се решава задачата, така што за нив може да се каже дека имаат најголема образовна и развојна вредност. При решавањето задачи од овој тип корисно е да се имаат предвид следниве упатства:

- Формулирајте ги односите меѓу непознатото и дадените елементи.
- Трансформирајте го непознатото (или воведете ново), приближувајќи го кон даденото.
- Обидете се со аналитичкиот метод да најдете доволен услов за да биде исполнет заклучокот на задачата или блиска последица. Внимавајте, бидејќи најчесто постојат повеќе доволни услови, можни се повеќе планови за решавање на дадената задача. Изборот на најдобриот план зависи, како од знаењата и умеењата на ученикот, така и од неговото искуство.
- Побарајте аналогија со познати задачи и искористете ја идејата за решавање на аналогната задача.
- Дали можете задачата да ја формулирате поинаку: да составите аналогна, но поедноставна задача која можете да ја решите или да составите поопшта задача од дадената?
- Направете дополнителни конструкции, прегрупирања на броевите и на изразите, воведете нови непознати со цел да се доближат дадените и непознатите елементи и да се откријат познати задачи (компоненти).
- Обидете се дадената задача да ја поделите на низа помошни задачи, од чии решенија можете да го составите решението на дадената задача.
- Направете определени измени на некои елементи на задачата и согледајте како тие измени ќе се одразат на другите елементи. Врз основа на претходните согледувања и на добиените резултати, обидете се да искажете хипотеза во врска со разгледуваната задача.
- Разгледајте ги граничните случаи за одделни елементи и согледајте како тие влијаат на задачата во целина.

- Обидете се да најдете индиректен доказ, на пример, со допуштање на спротивното итн.

В) ТРЕТА ЕТАПА - ПРАКТИЧНА РЕАЛИЗАЦИЈА НА СОСТАВЕНИОТ ПЛАН ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧАТА

При реализирањето на оваа етапа учениците се среќаваат со најмалку тешкотии, но во практиката за неа се одделува најмногу време. Имено, се бара решението да биде точно, целосно и по можност најкратко, па затоа во определени периоди повеќе внимание треба да се посвети на обучувањето на учениците да ги оформуваат решенијата на задачите. Пожелно е на овој проблем да му се посвети внимание од V одделение во основното образование до I година во средното образование, кога учениците го усвојуваат поголемиот дел од математичката симболика и терминологија, кога се обучуваат да оформуваат решенија и докази на теореми, односно кога се оформуваат умеења за подредување на расудувањата во логичка последователност. На оваа етапа треба да и се посвети поголемо внимание, бидејќи токму при нејзиното реализирање најинтензивно се утврдуваат знаењата и умеењата на учениците и тие се учат на правилно писмено изразување.

Г) ЧЕТВРТА ЕТАПА - ДОПОЛНИТЕЛНА РАБОТА ОТКАКО ЗАДАЧАТА Е РЕШЕНА

По наоѓањето на решението на задачата брзо се намалува интересот на учениците за неа. Точно тука може да дојде до израз мајсторството на учителот, да го задржи или дури и да го засили вниманието на учениците кон решената задача, со цел да ги искористи можностите кои таа ги нуди. Дополнителната работа на задачата по нејзиното решавање не следува од логиката на решението, туку од логиката на наставниот процес. Во оваа етапа решената задача треба да се разгледува како претставник на определена класа задачи. Затоа, по решавањето на задачата или по решавањето на група сродни задачи пожелно е да се разгледаат некои од следниве прашања:

- Дали добиениот резултат е точен и зошто? (Ако има можност да се направи проверка.)
- Дали за сите вредности на параметрите може да се искористи применетиот метод за решавање на задачата?
- Кои други задачи можат да се решат со најдениот метод за решавање на дадената задача?

- Со кои други методи може да се реши оваа задача и кој метод е најекономичен во случајот?
- Што е интересно и важно во решението?
- Дали оваа задача може да се воопшти?
- Што друго може да се најде во задачата, освен бараното?
- При какви други податоци можат да се најдат бараните елементи?

Со други зборови, во оваа етапа треба да се реализира творечката работа по преформулирањето на задачата, за што претходно зборувавме. Оборот и длабочината на работата во оваа етапа многу зависи од одделението во кое се реализира наставата и учителот треба многу внимателно да им приоѓа на учениците при реализирањето на оваа не помалку важна етапа.

На крај од овој дел да забележиме дека учениците треба да ја усвојат изнесената дидактичка шема за решавање задачи преку нејзино повеќекратно повторување. Притоа, имајќи предвид дека најважна етапа во процесот на решавање на задачата е градењето на идеја и составувањето план за решавање, која е поврзана со разбирањето на задачата, уште еднаш да напоменеме дека на овие две етапи треба да им се посветува поголемо внимание, а не во интерес на времето на учениците да им се нудат готови решенија.

5. МЕТОДИ НА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ

Во претходниот параграф зборувавме за методиката на решавање на задачите. Притоа издвоивме четири етапи кои се среќаваат при решавањето на една задача. Во овој дел ќе се осврнеме на методите кои се користат при решавањето на задачите.

Решавањето на една сложена задача најчесто се сведува на решавање на неколку поелементарни задачи, од кои е составена почетната задача. Притоа, основен проблем е задачата да се подели на елементарни задачи, со чие решавање всушност ќе ја решиме почетната задача.

При решавањето на една задача, покрај поделбата на елементарни задачи, важен елемент е и методот со кој се бара решението на задачата. Во основа, постојат два метода за решавање на задачите, и тоа:

- синтетички, и
- аналитички метод.

5.1. СИНТЕТИЧКИ МЕТОД

Дадена е задача која е запишана во условна форма $A \Rightarrow X$. Основата на синтетичкиот метод се состои од следново:

- се зема некој податок од условот A на задачата и кон него се придружува друг податок,
- ако земените податоци формираат елементарна задача, тогаш таа се решава и со тоа се добива нов помошен податок,
- потоа се составува нова елементарна задача, при што може да се користи и новиот помошен податок, па и таа се решава, со што се добива нов помошен податок,
- постапката се повторува сè додека не се состави елементарна задача, со чие решавање се добива решението на почетната задача.

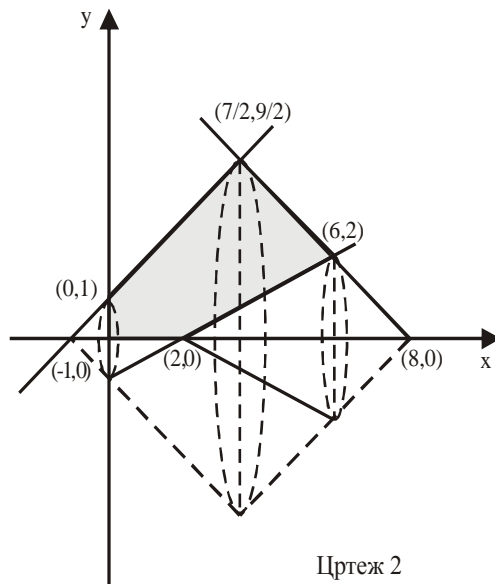
Претходно изнесеното ќе го илустрираме на следниве два примера.

Пример 1. Правите

$$x - y = -1, \quad x + y = 8 \text{ и} \\ x - 2y = 2$$

и двете координатни оски формираат петаголник. Пресметајте го волуменот на телото кое се добива со ротација на овој петоаголник околу x -оската?

Решение. Добиениот петаголник е шрафиран на црт. 12. Телото кое се добива со ротација на петаголникот околу x -оската е составено од два конуса со заедничка основа, од кои се “извадени” три конуси, од нив два се заедничка основа.



1) Прва елементарна задача. Да се најдат координатите на темињата на петаголникот, кој го формираат дадените прави и координатните оски и пресеците на правите $x - y = -1$ и $x + y = 8$ со x -оската.

Решението на оваа задача се добива со наоѓање на пресеците на соодветните прави. На пример, решавајќи го системот

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

ги наоѓаме координатите на едно од темињата на петаголникот, т.е. наоѓаме $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$. Аналогно ги наоѓаме координатите на другите темиња: $(6, 2)$; $(2, 0)$; $(0, 0)$ и $(0, 1)$.

Пресеците на правите $x - y = -1$ и $x + y = 8$ со x -оската се $(-1, 0)$ и $(8, 0)$, соодветно.

2) Втора елементарна задача. Да се најдат радиусите на основите и висините на конусите, со чија комбинација се добива ротационото тело.

Решението на оваа задача се добива непосредно од решението на претходната елементарна задача. Имаме:

$$\text{I конус: } r_1 = \frac{9}{2}, h_1 = \frac{7}{2} - (-1) = \frac{9}{2},$$

$$\text{II конус: } r_2 = \frac{9}{2}, h_2 = 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\text{III конус: } r_3 = 2, h_3 = 6 - 2 = 4,$$

$$\text{IV конус: } r_4 = 2, h_4 = 8 - 6 = 2, \text{ и}$$

$$\text{V конус: } r_5 = 1, h_5 = 0 - (-1) = 1.$$

3) Трета елементарна задача. Да се пресмета волуменот на телото кое се добива со ротација на петаголникот околу x -оската.

Решението на оваа задача се добива со примена на формулата за волумен на конус и со дискусијата на почетокот на решението на основната задача. Имаме,

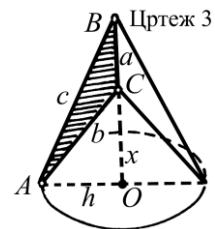
$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 - V_3 - V_4 - V_5 = \frac{\pi r_1^2 h_1}{3} + \frac{\pi r_2^2 h_2}{3} - \frac{\pi r_3^2 h_3}{3} - \frac{\pi r_4^2 h_4}{3} - \frac{\pi r_5^2 h_5}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{9}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{3} \left(\frac{9}{2}\right)^3 - \frac{\pi 2^2 \cdot 4}{3} - \frac{\pi 2^2 \cdot 2}{3} - \frac{\pi 1^2 \cdot 1}{3} = \frac{629\pi}{12}, \end{aligned}$$

со што е решена почетната задача. ♦

Пример 2. Триаголникот ABC со страни $a = 5$, $b = 6$ и $c = 9$ ротира околу најмалата страна. Да се пресмета волуменот на така добиеното тело.

Решение. Телото кое се добива со ротација на триаголникот околу најмалата страна е остаток на конус кога од него ќе се извади помал конус (црт. 3).

Задачата ќе ја решиме со решавање на четири елементарни задачи.



1) Прва елементарна задача. При дадени страни a, b и c да се најде полупериметарот s на $\triangle ABC$.

Решението на оваа задача $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+9}{2} = 10$ е првиот помошен податок.

2) Втора елементарна задача. Со помош на a, b, c и s , ќе ја пресметаме плоштината P на $\triangle ABC$.

Користејќи ја Хероновата формула добиваме:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = 10\sqrt{2}.$$

3) Трета елементарна задача. Со помош на a и P ќе ја пресметаме висината $h = \overline{AO}$ на $\triangle ABC$.

Решението на оваа задача

$$h = \frac{2P}{a} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2}$$

е третиот помошен податок.

4) Четврта елементарна задача. Со помош на a, h и x (црт. 3) ќе го пресметаме волуменот на ротационото тело.

Ако ги искористиме формулата за волумен на конус и дискусијата на почетокот на решението на основната задача, добиваме:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi h^2(a+x)}{3} - \frac{\pi h^2 x}{3} = \frac{\pi h^2 a}{3} = \frac{\pi \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 5}{3} = \frac{160\pi}{3}.$$

При решавањето на четвртата задача фигурира непозната x , но нема потреба неа да ја пресметуваме. ♦

Да забележиме дека ако дадената задача е запишана во условна форма $A \Rightarrow X$, а решенијата на првата и на последната задача во конечната низа елементарни задачи, од кои се добива решението на почетната задача, ги означиме со A_1, A_2, \dots, A_k , соодветно, тогаш постапката за решавање задачи со помош на синтетичкиот метод најчесто може да се запише во обликот $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \dots, A_k \Rightarrow X$, од каде што според правилото за хипотетички силогизам (можно е да се користат и други правила за логичко заклучување), добиваме дека е точна импликацијата $A \Rightarrow X$.

При работата на час, а и во литературата најчесто е даден краток запис на решението на задачата, при што се испуштаат некои “очигледни” дејства. Така, на пример, решението на задачата од пример 2 може да се запише во видот:

“За $\triangle ABC$ (црт. 13) имаме: полупериметар $s = \frac{a+b+c}{2} = 10$, плоштина $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 10\sqrt{2}$ и висина $h = \frac{2P}{a} = 4\sqrt{2}$. Конечно, за бараниот волумен добиваме

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi h^2(a+x)}{3} - \frac{\pi h^2 x}{3} = \frac{\pi h^2 a}{3} = \frac{160\pi}{3} \text{ „}.$$

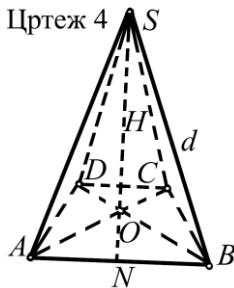
Меѓутоа, ученикот треба да знае да ги формулира подзадачите, а потоа да ги објасни добиените резултати, т.е. од вака дадениот краток запис на решението треба строго и целосно да го образложи секој чекор во решението. Се разбира, ова може да се постигне со постојано унежбување, со што ќе се придонесе да се развива математичкото мислење на учениците.

На крајот од овој дел да забележиме дека елементарните задачи во пример 1 и 2, всушност ја даваат *структурата на решението на соодветната задача*. Во тој случај, оваа структура е разгледувана кај синтетичкиот метод, но треба да се напомене дека таа е со поопшт карактер бидејќи се јавува кај системите задачи (види пример 10, II. 1.4), а како што ќе видиме и кај аналитичкиот метод, како и кај методот на алгебарска анализа.

5.2. АНАЛИТИЧКИ МЕТОД

При аналитичкиот метод на решавање задача се поаѓа од барањето во задачата. Основното прашање кое ученикот треба да си го постави е:

“Што треба да се знае за да се исполни барањето на задачата?”



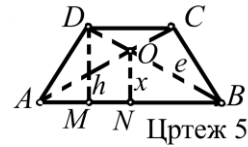
Цртеж 4

На ова прашање може правилно да се одговори само ако добро се разбере условот на задачата и ако се согледаат релациите кои него го поврзуваат со поставеното прашање.

Пример 3. Да се пресмета волуменот на пирамидата чија основа е рамнокрак трапез со основи $a = 5$, $b = 3$ и крак $c = 7$, ако нејзината висина минува низ пресечната точка на дијагоналите на основата и поголемиот бочен раб е $d = 10$.

Решение. 1) Волуменот на пирамидата го пресметуваме според формулата $V = \frac{BH}{3}$, каде со B е означена плоштината на основата на пирамидата $ABCD$, а со H нејзината висина, кои треба да ги најдеме (црт. 4).

2) Плоштината на основата на пирамидата ја пресметуваме според формулата за плоштина на рамнокрак трапез $B = \frac{a+b}{2}h$, каде со h е означена висината на трапезот (црт. 5).



3) За да ја најдеме висината h на рамнокракиот трапез ја користиме Питагоровата теорема

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

4) За да ја најдеме висината на пирамидата ја користиме Питагоровата теорема. Имаме $d = \overline{BS}$ и ако означиме $e = \overline{OB}$ (црт. 15), добиваме $H = \sqrt{d^2 - e^2}$. Според тоа, треба да го најдеме $e = \overline{OB}$.

5) За да го најдеме $e = \overline{OB}$, повторно ја користиме Питагоровата теорема за $\triangle OBN$ и добиваме $e = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Според тоа, треба да го определиме $x = \overline{ON}$ (црт. 5).

6) Од $\triangle BMD \sim \triangle BON$ наоѓаме

$$x : h = \frac{a}{2} : \left(\frac{a-b}{2} + b\right)$$

и ако се има предвид резултатот од чекорот 3), добиваме:

$$x = \frac{ah}{a+b} = \frac{5 \cdot 4\sqrt{3}}{5+3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

7) Сега, ако се земат предвид резултатите во 3) и во 6), враќајќи се во 5), 4), 2) и 1), последователно добиваме

$$e = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 5, \quad H = \sqrt{d^2 - e^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3},$$

$$B = \frac{a+b}{2}h = \frac{5+3}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \quad \text{и} \quad V = \frac{BH}{3} = \frac{16\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}}{3} = 80. \quad \blacklozenge$$

Пример 4. На првата автобуска постојка во автобусот влегле неколку патници. На втората постојка слегле половина од нив и се качиле двајца. На третата постојка слегле половината патници, а се качиле тројца. На четвртата постојка повторно се симнале половината од патниците, а се качиле уште четворица и во тој момент бројот на патниците бил седум. Колку патници се качиле во автобусот на првата постојка?

Решение. Ако оваа задача им ја зададеме на учениците од погорните одделенија во основното образование тие ќе ја решаваат со методот на алгебарска анализа за кој ќе зборуваме во следната точка.

Бројот на патниците кои се качиле во автобусот на првата постојка да го означиме со x . Тогаш, по втората постојка во автобусот ќе имаме $x:2+2$, а по третата $(x:2+2):2+3$ патници. Според тоа, по четвртата постојка ќе имаме $[(x:2+2):2+3]:2+4$ патници, од што ја добиваме равенката

$$[(x:2+2):2+3]:2+4=7,$$

чије решение е $x=8$.

Меѓутоа задачата можеме да ја решиме со користење на аналитичкиот метод и притоа ваквото решавање е прифатливо дури и за учениците од IV одделение. Имено, ќе појдеме од бројот на патниците по четвртата постојка и ќе се враќаме наназад, со што последователно ќе определуваме колку патници имало во автобусот по третата, втората и првата постојка.

На четвртата постојка се качиле 4 патници и бидејќи потоа имало 7 патници, заклучуваме дека пред да се качат овие патници во автобусот имало 3 патници и тоа е половина од бројот на патниците кои патувале меѓу третата и четвртата постојка, што значи дека овој број е еднаков на 6. Според тоа, имаме $7 \rightarrow 3 \rightarrow 6$.

На третата постојка слегле половина од патниците и се качиле тројца, а бидејќи имало 6 патници добиваме $6 \rightarrow 3 \rightarrow 6$. Значи, пред третата постојка бројот на патниците бил 6.

На втората постојка слегле половината патници и се качиле двајца, така што имаме $6 \rightarrow 4 \rightarrow 8$. Конечно, бројот на патниците кои патувале меѓу првата и втората постојка е 8, што значи дека на првата постојка се качиле 8 патници.

Претходно изнесеното можеме да го запишеме со помош на следнава шема

$$7 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 8. \blacklozenge$$

Како што можеме да видиме, изложувањето на решението со аналитичкиот метод не е така концизно како со синтетичкиот метод. Но, сепак може да се каже дека аналитичкиот метод има низа предности, како што се:

- учениците самостојно го откриваат решението на задачата, процес кој придонесува да се развива математичкото мислење на учениците,
- наоѓање на различни патишта за решавање на иста задача итн.

Аналитичкиот метод се јавува во повеќе варијанти, од кои овде ќе ги разгледаме методот на алгебарска анализа и методот на анализа при решавањето конструктивни задачи во геометријата.

5.2.1. МЕТОД НА АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

Под *метод на алгебарска анализа* ги подразбираме сите методи за решавање на задачи во алгебрата. Во оваа група методи најважен е методот на равенки и токму затоа често пати под метод на алгебарска анализа се подразбира всушност овој метод. Методот на равенки може да се подели на три етапи.

Во *првата етапа* се воведуваат една или повеќе непознати и врз основа на условот и на барањето во задачата се составува равенка или систем равенки (помошна задача). Според тоа, во првата етапа основната задача се трансформира во помошна задача.

Втората етапа на овој метод содржи низа трансформации на помошната задача, со чија помош се добиваат корените на првобитната равенка, односно решенијата на првобитниот систем.

Во *третата етапа* се врши проверка дали се совпаѓаат бараното и добиеното множество решенија. Ако овие множества не се совпаѓаат, тогаш се бараат условите кои треба да бидат исполнети при низата трансформации на почетната равенка или системот равенки за да се добие множеството решенија на основната задача. Со други зборови, треба да се провери дали секоја од добиените равенки е еквивалентна на почетната.

Дадена е основна задача $A \Rightarrow X$ и нека е составена равенка или систем равенки $A(X)$. Ако во низата трансформации се запазува еквиваленција, тогаш процесот на решавање на помошната задача може да се запише во обликот

$$A(X) \Leftrightarrow A_1(X) \Leftrightarrow A_2(X) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_{k-1}(X) \Leftrightarrow A_k(X) \quad (1)$$

и во овој случај се совпаѓаат бараното и добиеното решение.

Меѓутоа, во практиката новодобиените равенки најчесто се последица од почетната. Имено, ако во шемата (1) на решавање на помошната задача еквиваленцијата $A_r \Leftrightarrow A_{r+1}$ се замени со импликацијата $A_r \Rightarrow A_{r+1}$, тогаш последната равенка ги содржи сите решенија на основната задача, но може да содржи и решенија кои не се решенија на почетната равенка, а со тоа и на почетната задача. Поради тоа треба да се изврши проверка на секое решение со условите на почетната задача. Во практиката е особено важно учителот да инсистира учениците да ја разберат неопходноста од таквата проверка и да умеат да ја направат.

Пример 5. Бегајќи од кучето лисица направила 60 скокови пред кучето да потрча по неа. Лисицата прави 3 скока, додека кучето направи 2

скока. Освен тоа, познато е дека 7 скокови на лисицата имаат иста должина колку и 3 скокови на кучето. Колку скокови треба да направи кучето за да ја стигне лисицата?

Решение. *Прва етапа.* Нека кучето направи x скокови додека ја стигне лисицата. За тоа време лисицата ќе направи $\frac{3}{2}x$ скокови, што заедно со предноста која ја имала на почетокот се $\frac{3}{2}x + 60$ скокови. Знаеме дека 7 скокови на лисицата имаат иста должина колку и 3 скокови на кучето, па затоа

$$\frac{\frac{3}{2}x+60}{7} = \frac{x}{3}. \quad (2)$$

Втора етапа. Од равенката (2) со еквивалентни трансформации последователно добиваме:

$$\frac{3x+120}{14} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3(3x+120) = 14x \Leftrightarrow 9x+360 = 14x \Leftrightarrow 5x = 360 \Leftrightarrow x = 72.$$

Трета етапа. Ако кучето направи 72 скока, тогаш тие ќе имаат должина колку и $(72:3) \cdot 7 = 24 \cdot 7 = 168$ скокови на лисицата. За тоа време лисицата ќе направи $(72:2) \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108$ скокови, а бидејќи на почетокот таа имала предност од 60 скокови, добиваме дека таа ќе се најде на оддалеченост од $108 + 60 = 168$ свои скокови и местото каде што на почетокот се наоѓало кучето. Значи, кучето треба да направи 72 скока за да ја стигне лисицата. ♦

Пример 6. Најдете ги сите вредности на параметарот k , за коишто равенката

$$\lg(x^2 + 2kx) - \lg(8x - 6k - 3) = 0$$

има двоен корен, а потоа одредете го тој корен.

Решение. *Прва етапа.* Дадената равенка ја трансформираме во квадратна равенка

$$x^2 + 2(k-4)x + 6k + 3 = 0. \quad (3)$$

Последната равенка има двоен корен ако и само ако нејзината дискриминанта е еднаква на нула т.е. ако и само ако

$$4(k-4)^2 - 4(6k+3) = 0. \quad (4)$$

Втора етапа. Равенката (4) е еквивалентна на равенката

$$k^2 - 14k + 13 = 0$$

чии решенија се $k_1 = 1$ и $k_2 = 13$.

За $k_1 = 1$, од (3) ја наоѓаме равенката $x^2 - 6x + 9 = 0$, од што добиваме $x_1 = x_2 = 3$.

За $k_2 = 13$, од (3) ја наоѓаме равенката $x^2 + 18x + 81 = 0$, од што добиваме $x_1 = x_2 = -9$.

Трета етапа. Ако во почетната равенка замениме $k = 1$ и $x = 3$ добиваме $\lg(3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3) - \lg(8 \cdot 3 - 6 \cdot 1 - 3) = \lg 15 - \lg 15 = 0$, што значи дека едно решение на почетната задача е $k = 1$ и $x = 3$.

За $k = 13$ и $x = -9$, изразите под знакот на логаритмот во почетната задача добиваат вредност -153 . За оваа вредност логаритмот не е дефиниран, што значи дека имаме решение на равенката (3) кое не е решение на почетната равенка и кое е резултат на фактот дека

$$\lg(x^2 + 2kx) - \lg(8x - 6k - 3) = 0 \Rightarrow x^2 + 2(k - 4)x + 6k + 3 = 0,$$

но притоа обратната импликација не важи.

Конечно, единствено решение на почетната задача е $k = 1$ и $x = 3$. ♦

5.2.2. МЕТОД НА АНАЛИЗА ПРИ РЕШАВАЊЕ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Како што кажавме, една варијанта на аналитичниот метод се јавува и при решавањето конструктивни задачи. Имено, ако една конструктивна задача е сложена и патот до нејзиното решавање не е очигледен, тогаш се спроведува следнава постапка за нејзино решавање, која е составена од четири етапи: анализа, конструкција, доказ и дискусија.

Анализата е првата етапа во решавањето на конструктивните задачи, а се состои во тоа што бараната фигура ќе ја нацртаме како да ни е позната. Цел на оваа етапа е да се открие врската меѓу дадените и бараните елементи на фигурата која треба да ја нацртаме. Истовремено се наоѓа по која постапка или метод може најцелисходно да се реши задачата. Обично, анализата почнува со скицирање на цртеж, и тоа речиси секогаш со зборовите: “*Да претпоставиме дека задачата е решена*”. Потоа на направената скица се воочуваат познатите елементи, се одделуваат попусти фигури (или се формираат со дополнување на цртежот) и меѓу нив се бара таква помошна фигура која ќе ги задоволува следниве два услова:

- 1) *таа фигура може да се конструира од дадените елементи на основната задача и*
- 2) *поаѓајќи од неа може да се конструира бараната задача.*

Конструкцијата е втората етапа која се реализира врз основа на извршената анализа и често пати таа непосредно следува од анализата.

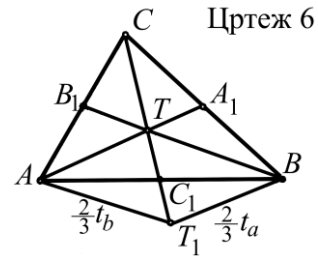
Доказот е третата етапа во овој метод и негова цел е да се докаже дека фигурата која сме ја конструирале ги задоволува условите на задачата.

Дискусијата е четвртата етапа во овој метод, во која се проверува како решението на задачата зависи од дадените елементи и дали тоа е еднозначно или повеќеоднозначно т.е. дали со дадените елементи можат да се конструираат само една или повеќе нескладни фигури, кои се решение на задачата.

Пример 7. Конструирајте триаголник со дадени тежишни линии t_a, t_b и t_c .

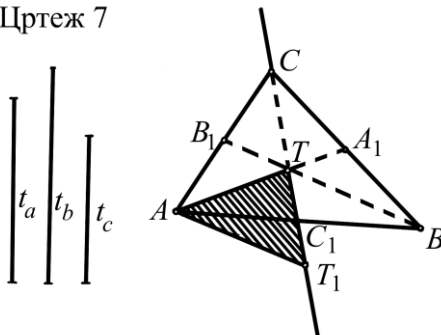
Решение. *Анализа.* Нека бараниот триаголник ABC со тежишни линии t_a, t_b и t_c е конструиран и T е негово тежиште (црт. 6).

Познато е дека тежиштето T ги дели тежишните линии во однос 2:1 (поаѓајќи од темето). Да ја продолжиме тежишната линија t_c преку точката C_1 за $\frac{1}{3}t_c$. Ако добиената точка T_1 ја поврземе со темињата A и B , ќе добиеме паралелограм AT_1BT , за кој страните се $\frac{2}{3}t_a$ и $\frac{2}{3}t_b$, а дијагоналите се $\frac{2}{3}t_c$ и $\overline{AB} = c$.



Конструкција. Го конструираме ΔAT_1T со страни $\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}t_c$ и повлекуваме тежишна линија AC_1 , која е половина од страната AB , па од овој услов го наоѓаме темето B . Темето C ќе се добие ако страната TT_1 ја продолжиме преку темето T за должина $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ (црт. 7).

Цртеж 7



Доказ. Доволно е да докажеме дека добиениот триаголник има тежишни линии t_a, t_b и t_c . Бидејќи $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на TT_1 добиваме дека точката T ја дели тежишната линија на ΔABC во однос 2:1. Од

$$\overline{BT} = \overline{AT_1} = \frac{2}{3}t_b \text{ и } \overline{AT} = \overline{BT_1} = \frac{2}{3}t_a$$

следува дека $\triangle ABC$ има тежишни линии t_a, t_b и t_c .

Дискусија. Ако со тежишните линии t_a, t_b и t_c може да се конструира триаголник, тогаш $\triangle AT_1T$ е еднозначно определен, така што задачата има единствено решение. ♦

6. КОНТРАПРИМЕРИТЕ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Усвојувањето на поимите, решавањето на задачи, усвојувањето на аксиомите и докажувањето на теоремите се основните дејства во наставата по математика. Притоа под формулација “*да се докаже дека ...*” учениците најчесто ја подразбираат следнава задача “*да се констатира, дека дадено тврдење е точно*”. Последното се должи на фактот, дека како теоремите, така и задачите во кои се бара да се докаже определено тврдење, најчесто се со барање да се докаже дека тврдењето е точно, т.е. во основа учениците се среќаваат со општи потврдни тврдења, многу ретко со делумни потврдни тврдења, а општите и делумните одречни тврдења скоро и да не се застапени во наставата по математика.

Имајќи го предвид претходно кажаното, ќе разгледаме три начини кои најчесто се користат при докажување дека дадено тврдење не е точно.

Прв начин за докажување дека дадено тврдење не е точно е користењето на дефинициите, аксиомите и претходно докажаните тврдења, при што заклучувањето се реализира користејќи го правилото *модус толенс*.

Втор начин кој се користи при докажување на општите одречни тврдења е користењето на потполната индукција, како што е во следниов пример.

Пример 8. Дали постои трицифрен број A , на кој цифрите можат да се разместат така, што збирот на дадениот и новодобиениот број да е 999.

Бројот на трицифрените броеви е 900, па затоа може да се направат сите проверки, што се разбира бара многу време и не е целисходно. Меѓутоа, задачата може да се реши ако трицифрениот број го запишеме во видот \overline{abc} и од него со разместување на цифрите ги добиеме следниве пет броеви: \overline{acb} , \overline{bca} , \overline{bac} , \overline{cab} , \overline{cba} . Понатаму, за дадениот број и за секој од добиените пет броеви треба да се провери бараното равенство, на пример

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 999.$$

Лесно се гледа дека ниту едно од петте равенства не е можно, со што се докажува дека за секој трицифрен број \overline{abc} и секој број \overline{xyz} , добиен на опишаниот начин, равенството $\overline{abc} + \overline{xyz} = 999$ не е можно. ♦

Третиот начин се користи при докажување на делумните одречни тврдења и истиот подразбира наоѓање на елемент x кој го има својството $S(x)$ и го нема својството $P(x)$. Притоа, најдениот елемент x го нарекуваме контрапример и во практиката ваквиот начин на докажување на математичко тврдење е познат под името “оповргнување на тврдење со посочување на контрапример”.

6.1. ФОРМИРАЊЕ УМЕЕЊА КАЈ УЧЕНИЦИТЕ ЗА КОРИСТЕЊЕ КОНТРАПРИМЕРИ

Формирањето умеења кај учениците за користење на контрапримерите како средство за расудување, може да се направи на два начина и тоа:

- a) преку учество на ученикот во колективните размислувања, раководени од учителот во случаи, во кои учителот ги користи контрапримерите и
- b) преку целенасочено обучување на учениците при решавање на задачи, кои се поврзани со конкретна наставна содржина, во текот на целата учебна година.

Во случајот под a) ќе наведеме неколку можности во кои контрапримерите можат умешно да се искористат.

a1) При откривање на грешки во формулирање на тврдењата. Имено, тврдењата можат да бидат нецелосно формулирани, да содржат непотребни услови, да содржат противречни услови и да имаат неправилна логичка структура (спореди со поделбата на задачите според условот).

Пример 9. Да го разгледаме тврдењето: *ако краците на еден агол се паралелни со краците на друг агол, тогаш или агли се еднакви, или нивниот збир е 180^0 .*

Забележуваме, дека при формулацијата на ова тврдење е искористена исклучна дисјункција, т.е. тоа има неправилна логичка структура. Затоа најдобро е да се нацртаат два прави агли со паралелни краци, од што ќе се види дека постои пример кој го задоволува условот на тврдењето но не и заклучокот, во случајов агли се и еднакви и нивниот збир е 180^0 . ♦

a2) При утврдување дека обратното тврдење не е теорема.

Пример 10. За теоремата:

“Ако два агли се соседни, тогаш нивниот збир е еднаков на 180^0 .”

Обратното тврдење гласи:

“Ако збирот на два агли е еднаков на 180^0 , тогаш тие се соседни.”

Јасно, обратното тврдење не е теорема, што учениците може сами да го заклучат, доколку им се предочат два спротивни агли во правоаголник. ♦

a3) При откривање грешки во дефинирањето на поимите. Во случајов најчесто се среќаваат грешки од следниве видови: непотребни услови, нецелосни услови, неправилен избор на родовиот поим итн.

Пример 11. Во “дефиницијата”:

“Средна линија на триаголник ја нарекуваме линијата, која поврзува теме на триаголникот со средината на страна на триаголникот.”

Имаме случај на нецелосни услови и на неправилен избор на родовиот поим. Имено, наместо *отсечка* искористен е поимот *линија*, а исто така наместо *средината на спротивната страна* даден е условот *средината на страна*. Учениците лесно ќе увидат дека станува збор за грешка во дефинирањето на поимот, доколку едно теме на триаголникот се поврзе со искршена линија со средината на една од страните на која лежи темето. ♦

Пример 12. Во “дефиницијата”:

“Паралелограм се нарекува многуаголник на кој спротивните страни му се две по две паралелни.”

Во случајов имаме неправилен избор на родовиот поим, кој треба да биде четириаголник. Учениците лесно ќе увидат дека станува збор за грешка, ако како контрапример се даде правилен шестаголник. ♦

Пред да преминеме на натамошните разгледувања, овде само ќе споменеме дека откривањето на грешките во формулациите на тврдењата или дефинициите е поврзано со прецизирањето на нивната структура, што од своја страна значи и нивно продлабочено осмислување и усвојување.

a4) При откривање на грешки во формулациите на задачите.

Пример 13. Во задачата:

“Да се докаже, дека $a^8 + 3a^4 + 4$ се дели со 100, каде a е природен број, кој не е делив со 5.”

е направена грешка во формулацијата. Имено, наместо изразот

$$a^8 + 3a^4 + 4$$

треба да стои

$$a^8 + 3a^4 - 4.$$

Последново може да се воочи ако последователно се земе $a=1, 2, 3$ и 4 при што изразот $a^8 + 3a^4 + 4$ ги прима вредностите 8, 308, 6808 и 66308, соодветно и тоа се броеви кои при делење со 100 даваат остаток 8. Меѓутоа, доколку со учениците на се разгледуваат вакви и слични примери, природно е учениците првенствено да се посомневаат во сопствените знаења, т.е. да помислат дека тие направиле грешка при решавањето на задачата. ♦

Последниот пример јасно укажува на потребата за користење на контрапримерите во случајот б), т.е. за целенасочено обучување учениците да користат контрапримери при решавање на задачи, кои се поврзани со конкретна наставна содржина, во текот на целата учебна година. Притоа, задачите треба да бидат избрани така, што ќе се постигнат и следниве дополнителни цели.

б1) Определување дали дадено тврдење искажано со помош на квантификатори е точно или не е точно.

Пример 14. Дадено е множеството $A = \{84, 201, 224\}$. Кои од следниве тврдења се точни:

Секој број кој припаѓа на A е делив со бројот 7.

Множеството A содржи барем еден парен број.

Множеството A содржи најмногу еден број, кој е делив со бројот 3. ♦

б2) Негирање на тврдење искажано со помош на квантификатори.

Пример 15. Дадено е множеството $E = \{27, 29, 37, 57, 58\}$. Негирајте ги следниве тврдења и определете кој од трите искази е точен, а кој не е точен.

Во множеството E се содржи барем еден број кој завршува на цифрата 7.

Во множеството E се содржи барем еден број, кој е делив со бројот 5.

Во множеството E постои барем еден број, кај кој цифрата на десетките е 5. ♦

б3) Анализирање на текстот на задачата, информацијата во неа и оформување на решението на задачата. Имено, за да можат учениците да се здобијат со умеења за користење на контрапримерите како средство за решавање задачи, целесобразно е на часовите да се решаваат задачи кои учениците ќе ги насочуваат кон различните алтернативи, докажување на точноста на тврдењето или негово оповргнување. Ќе разгледаме неколку примери од овој вид.

Пример 16. Нека $M = \{6k - 1 \mid k \in \mathbf{N}\}$ и со P да го означиме множеството прости броеви. Дали е точно тврдењето:

“Множеството M е подмножество од множеството P .”

При решавањето на оваа задача пожелно е да се искористи табелата:

k	1	2	3	4	5	6	...
$6k - 1$	5	11	17	23	29	35	...

Од табелата се гледа дека за $k = 6$ се добива бројот $6 \cdot 6 - 1 = 35$, кој не е прост број. Според, даденото тврдење не е точно. ♦

Пример 17. Нека $k \in \mathbf{N}$, а $P_k = k^2 + 3k + 1$. Оповргнете го тврдењето:

“За секој $k \in \mathbf{N}$ бројот од видот P_k е прост број.”

При решавањето на задачата може да се искористи табелата:

k	1	2	3	4	5	6	...
P_k	5	11	19	29	41	55	...

Од табелата се гледа дека за $k = 6$ бројот $P_6 = 6^2 + 3 \cdot 6 + 1 = 55 = 5 \cdot 11$ е сложен број, т.е постои $k \in \mathbf{N}$ таков, што бројот P_k е сложен, со што е оповргнато даденото тврдење. ♦

Пример 18. Дали е точно тврдењето:

“За секој $n \in \mathbf{Z}$ важи $4n^2 + 40n + 99 > 0$.”

Очигледно дека за секој позитивен цел број n неравенството е исполнето. Меѓутоа, ако $n < 0$, тогаш од табелата

n	-1	-2	-3	-4	-5	...
$4n^2 + 40n + 99$	63	35	15	3	-1	...

Се гледа, дека за $n = -5$ неравенството не е исполнето. Оттука следува дека одговорот на поставеното прашање е: “Тврдењето не е точно.” ♦

Пример 19. Да се докаже или оповргне тврдењето: “Секој природен број, за кој збирот на делителите е непарен број е точен квадрат.”

Природниот број 2 има два делители: 1 и 2, чиј збир на делители е еднаков на $1+2=3$ и бројот 2 не е точен квадрат. Според тоа, даденото тврдење не е точно. ♦

На крајот од овој дел да споменеме дека умешното користење на контрапримерите во наставата по математика во голема мера придонесува за негување на својствата на мислењето. Последното посебно се однесува на: длабочината, целесообразноста и критичноста на мислењето. Исто така, да забележиме дека барањето на контрапримери најчесто претставува сериозна задача, која претпочита наведените својства на мислењето да се посебно развиени и се разбира продлабочени математички знаења. Покрај тоа, во многу случаи наоѓањето контрапримери е поврзано и со неформален пристап во расудувањето за даден проблем и го насочува ученикот кон елементарна евристичка дејност.

XI ГЛАВА

СТРАТЕГИИ, МЕТОДИ И ФОРМИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Усовршувањето на наставата на некоја наставна дисциплина не зависи само од оптималниот избор и од структурирањето на наставните содржини, туку и од изборот и примената на наставните стратегии, методите и средствата. Имено, со совладувањето на наставните содржини во определен училишен курс учениците ќе ги усвојат основните поими и теории, а ќе се здобијат со определен квантум знаења и умеења. Но, за да се постигнат целите на наставата, за управување на сознателната дејност на учениците, за усвојување на методите за самостојна работа и за развивање на творечките способности на учениците, потребно е да се изврши правилен избор на наставните стратегии, методи, форми и средства. Во оваа глава ќе ги разгледаме наставните стратегии и наставните методи.

1. НАСТАВНИ СТРАТЕГИИ

Стратегија е начин за постигнување на образовните и на воспитните цели на наставата, начин кој е детерминиран од прифатената теориска концепција. Со стратегијата се определуваат наставните методи, форми и средства, и таа се реализира со помош на систем од наставни методи и форми. Постојат повеќе наставни стратегии, но најчесто се применуваат: *егземпларната, евристичката и истражувачката стратегија*.

1.1. ЕГЗЕМПЛАРНА СТРАТЕГИЈА

Егземпларната настава како наставна стратегија се состои во издвојување на суштинското од целината, односно на концентрирање на суштественото со што треба да се постигне брзо и ефикасно усвојување на предвидените содржини. Стратегија се состои од неколку чекори, и тоа:

- а) Учителот ги проучува наставните содржини предвидени со програмата и ги издвојува содржините кои се слични меѓу себе. Потоа, според однапред утврден критериум, од наставните со-

држини го одделува тоа што е битно, суштинско и репрезентативно и го дели во две групи: *егземпларни* и *аналогни* содржини.

- b) Егземпларната содржина се обработува и при тоа учениците мораат целосно да ја разберат и да усвојат модел за обработваната егземпларна содржина.
- c) Учениците преминуваат кон самостојна работа на аналогните содржини. Јасно, во оваа фаза, самостојната работа на учениците мора да биде под раководство на учителот.
- d) На крај, учителот организира целосно повторување на обработваните наставни содржини, по што следува и проверување на знаењата и умењата на учениците.

1.2. ЕВРИСТИЧКА СТРАТЕГИЈА

Суштината на *евристичката стратегија* е во организирањето на самостојно решавање на делови од поставената сознателна задача. Имено, учителот ја разбива задачата на релативно самостојни задачи, кои последователно им ги задава на учениците и го раководи, помага и дополнува решението на овие сознателните задачи.

Основен метод за реализирање на оваа стратегија е еврестичката беседа. Имено, добро осмислените, последователно поставени прашања можат да им овозможат на учениците тие делумно или целосно самостојно да ги усвојуваат потребните знаења и умења. Притоа, учителот најчесто ги поставува следниве прашања: “

- Помислете, што треба да најдеме?,
- Што треба да знаеме, за да ја решиме поставената задача?,
- Дали треба да воведеме некој помошен елемент?,
- Што добивме?,
- Дали правилно заклучуваме? итн.

Работата на учениците при еврестичката стратегија се карактеризира со поголема сознателна самостојност. Тие ги анализираат поставените подзадачи, споредуваат, апстрахираат и воопштуваат, искажуваат хипотези, докажуваат, а на моменти и самостојно ја планираат својата работа. Меѓутоа, во наставата која се реализира со еврестичка стратегија, постојано се чувствува раководната функција на учителот.

Еврестичката стратегија во наставата по математика наоѓа широка примена при формирањето на поимите, при искажувањето и докажување-

то на теоремите, при решавањето на нестандартните (неалгоритамски) задачи и во слични ситуации. Поради тоа, оваа стратегија дава резултати ако учениците имаат соодветни предзнаења и ако учителот има на располагање доволно наставно време за правилно и целосно реализирање на истата.

1.3. ИСТРАЖУВАЧКА СТРАТЕГИЈА

Истражувачката стратегија се состои во организирање на творечката работа на учениците за самостојно решавање на сознательните задачи. Таа се реализира во следниве етапи:

- a) набљудување и проучување на предметите и на појавите,
- b) набележување на непознатите објекти, кои се предмет на истражувањето,
- c) составување план за истражување на непознатите објекти,
- d) формулирање на решението,
- e) проверка на решението, и
- f) практични заклучоци потребни за примена на усвоените знаења.

При реализирањето на оваа стратегија учителот постапува слично како и при користењето на евристичката стратегија, но по обратен редослед. На пример, прашањата и упатствата при евристичката стратегија му претходат на решавањето на сознательната задача, а при истражувачката стратегија тие се даваат откако задачата ќе се реши и имаат цел таа задача повторно да се реши, но со други методи. Притоа учениците кои веќе ја решиле задачата имаат можност да направат самоконтрола, а оние кои не ја решиле сега можат тоа да го направат. Да го спомнеме и тоа дека при реализирањето на оваа стратегија учениците треба сосема самостојно да работат.

Пример 1. При изучувањето на својствата на тежишните линии на триаголникот се поставува следнава сознательна задача: “*Да се најдат некои својства на тежишните линии на триаголникот*”. Решавањето на задачата најчесто почнува со цртање на неколку различни триаголници, цртање на нивните тежишни линии, набљудување и мерење, споредување, анализа итн. Како резултат на претходните постапки се наметнуваат хипотезите:

- a) било кои две тежишни линии се сечат во точка, која е внатрешна за триаголникот,
- b) сите тежишни линии се сечат во една точка,

- c) пресечната точка ги дели тежишните линии во однос 2:1, и
- d) секоја тежишна линија го дели триаголникот на два еднакво-плошни триаголника, а трите тежишни линии го делат триаголникот на шест еднаквоплошни триаголници.

Се разбира, доколку учениците не успеат да ги формулираат спомнатите хипотези, учителот треба да им помогне, при што може да ги формулира некои од следниве задачи:

- *Да се испита прашањето на пресечните точки на тежишните линии во триаголникот.*
- *Да се испита односот на деловите, на кои произволна тежишна линија е поделена.*
- *Да се споредат плоштините на триаголниците, добиени со цртање на тежишните линии на триаголникот. ♦*

За реализирање на истражувачката стратегија е потребно повеќе време во споредба со другите стратегии. Затоа, проучувањата, набљудувањата и експериментите најчесто се прават во домашни услови, а на часовите само се презентираат резултатите од нив, односно на сознательните задачи. Да забележиме дека со истражувачката стратегија, освен со знаења, учениците се здобиваат и со умеања за самостојно усвојување на знаења и за планирање и организирање на нивната сознательна дејност, бидејќи со оваа стратегија е најголема можноста за манифестирање и развивање на творечките способности на учениците. Затоа, во практиката најчесто се користи егземпларната стратегија, која успешно се комбинира со евристичката стратегија, а додека примената на истражувачката стратегија главно се сведува на целонасочена самостојна работа на учениците, која по правило се организира низ задавање домашни задачи или пак при реализација на проектни задачи во функција на учество на најразлични натпревари.

1.4. ПРИМЕР НА ИНДИВИДУАЛЕН И ГРУПЕН ПРИСТАП НА ИЗРАБОТКА НА УЧЕНИЧКИ ПРОЕКТИ

Едукаторите на полето на природните науки главно се согласуваат дека вештините на истражувањето кои ги користат научниците исто така можат да ги користат индивидуите при решавање на секојдневните проблеми. Имено, од секој поединец секојдневно се бара да реализира најразлични задачи. Повеќето од овие задачи бараат внимателно набљудување, споредување, анализирање, синтетизирање, воопштување, систематизирање и правилно заклучување, што значи дека бараат примена на научните методи и методите на заклучување. Последното значи дека, доколку пое-

динецот е оспособен за правилно користење на научните методи и методите на заклучување, тогаш најверојатно подобро ќе може да согледува како науката е поврзана со неговото секојдневие, а и многу поуспешно да ги решава проблемите со кои се среќава секојдневно.

Имајќи го предвид претходно изнесеното, природно е да се заклучи дека проучувањето на науките како средство за истражување треба експлицитно да се истакне во курикулумот во основното и средното образование. Токму затоа од особена важност е учениците самостојно или со помош, поединечно или групно да изработуваат ученички проекти, со што практично ќе се воведуваат во научната работа, но и ќе ги негуваат квалитетите на мислењето, ќе ги усвојуваат научните методи и видовите заклучувања. Во натамошните разгледувања од овој дел ќе презентираме како учителот може да зададе ученички проект за индивидуална работа.

Пример 2. Индивидуален ученички проект: Проблем на паркетање. На учениците им се нуди да изработат проект во врска со орнаментиката, т.е. изработка на шари од разновидни плочки, украсување на фасади (изработка на арабески) и слично. Притоа учителот ги формулира главните правци според кои треба проектот да се реализира, што може да биде направено на следниов начин:

- дефинирање на орнаментиката, односно проблемот на паркетање,
- историски развоток на орнаментиката (старите египќани, арапската цивилизација и модерната орнаментика),
- што е “грчки” крст и негово претворање во квадрат со помош на сечење,
- примена на паркетањето во математиката: докажување на Питагоровата теорема, пресметување на некои зборови и слично,
- да се испита можноста за паркетање на рамнината со помош на правилни многуаголници (еден, два, три или повеќе многуаголници),
- геометриска да се претстават добиените решенија,
- пишување статија, со која ученикот евентуално би учествувал на натпревар, на трибина организирана за презентација на ученички проекти и слично.

Во текот на изработка на проектот учителот треба да ја контролира и да ја насочува активноста на ученикот. Притоа пожелно е учителот низ дискусија да настојува ученикот правилно да ги применува научните методи и видовите заклучувања. Исто така, доколку е неопходно учителот тре-

ба на ученикот да му ја достави потребната литература за успешно реализирање на проектот. ♦

2. НАСТАВНИ МЕТОДИ

Постојат повеќе дефиниции за поимот наставен метод. Во нашите разгледувања, под *наставен метод* ќе подразбираме начин на организирање на наставниот материјал и начин на извршување на сознателната и на практичната дејност на учителот и на учениците во текот на наставниот час, за остварување на целите на наставата. Секој наставен метод содржи опис на активностите на учителот, активностите на учениците и на врските меѓу нив во процесот на наставата.

Исто така, постојат повеќе класификации на наставните методи, кои пред се зависат од признаците според кои тие се прават. Овие поделби нема да ги разгледуваме, туку ќе се задржиме на обработката на методите кои најчесто се применуваат во практиката, а за кои сметаме дека и во иднина ќе го најдат своето место при реализирањето на наставата по математика.

Пред да преминеме на разгледување на некои методи, да забележиме дека во однос на наставните методи има низа проблеми, како што се:

- a) оценката за местото и за улогата на даден метод во наставата по математика, имајќи ги предвид специфичностите на математиката како наставен предмет,
- b) конкретизирање на општите дидактички наставни методи и нивно приспособување на специфичностите на наставата по математика, и
- c) оптимален избор на наставните методи при усвојувањето конкретни наставни содржини и давањето приоритет на еден или на друг метод.

Прашањето за избор на наставните методи при усвојувањето конкретни наставни содржини нема еднозначен одговор. Имено, една и иста наставна содржина може да се усвои со различни системи од методи, но и еден ист метод кој е применет на различни места најчесто дава различни резултати. Затоа, слободно може да се каже дека изборот на методи при конкретни услови на реализирање на наставата е творечка дејност на учителот. Овој избор, пред сè зависи од целите на наставата, од наставната содржина која се усвојува, од расположливите наставни средства во училиштето, од логиката на сознателниот процес итн.

2.1. МЕТОД НА БЕСЕДА

Методот на беседа е еден од најчесто употребуваните методи во наставата по математика, за активно усвојување на наставните содржини.

Суштината на методот е во дијалогот на учителот со учениците во паралелката, при што чекор по чекор се разрешува сознателната задача. Притоа, наставниот материјал предвиден за даден наставен час, учителот го расчленува на прашања и на одговори (за да можат учениците полесно да ја усвојат или да ја запомнат предвидената содржина). Обично, прашањата ги поставува учителот, а одговорите ги даваат учениците, така што оваа етапа од часот личи на разговор (беседа, дијалог).

Една од основните функции на методот на беседа е да го стимулира, насочува и раководи самостојното усвојување на знаења и умења од страна на учениците. Јасно, остварувањето на овие функции, пред сè зависи од тоа дали се исполнети потребните услови за ефективно користење на беседата како наставен метод. Може да се каже дека методот на беседа ќе биде ефективен ако:

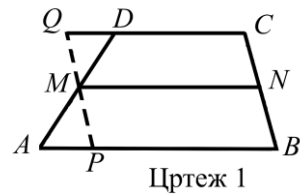
- a) Покрај општата подготовка за часот, учителот направи и посебна подготовка со која ќе го определи делот од методската единица која ќе се усвојува со овој метод, времето и местото на неговото користење во структурата на часот, нагледните средства кои ќе бидат употребени во текот на беседата и содржината и обемот на потребните предзнаења за успешно користење на овој метод.
- b) Учителот умее да ги формулира и преформулира прашањата кои ќе ги користи, а тие треба да бидат кратки по форма, јасни по содржина, јазично и стилски правилно искажани и да не наведуваат на погрешни одговори. Притоа, прашањата треба да се поставуваат јасно и гласно пред сите ученици, а да бидат така формулирани што ќе ја поттикнуваат нивната самостојна работа.
- c) Учителот ги предвиди можните одговори на прашањата кои ги поставува, а доколку учениците не дадат точен одговор на некое поставено прашање, да може да постави дополнителни прашања кои на учениците ќе им овозможат и помогнат самостојно да одговорат на прашањето кое претходно не го одговориле. Во однос на одговорите на учениците, учителот треба да настојува тие да бидат искажани колку што е можно посамостојно и со содржински и јазично правилно формулирани реченици.

- d) Учителот ги резимира усвоените знаења и умења со кои учениците се здобиваат преку методот на беседа.

При методот на беседа секогаш се поаѓа од предзнаењата на учениците, новиот материјал се надоградува и тој функционално се поврзува со претходно изучениот материјал. Поради тоа може да се каже дека овој метод сосема ги уважува дидактичките принципи на последователност и систематичност, па затоа на прв поглед се чини дека истиот нема недостатоци, што секако не е точно, бидејќи различната брзина на мислење на учениците создава ситуации на активни и на пасивни ученици.

Пример 1. Беседа за откривање на доказот на тврдењето: “Средната линија на трапезот е паралелна на основите”.

Учителот. Сакаме да докажеме дека средната линија на MN е паралелна на основите на трапезот $ABCD$ (црт. 1). Што е доволно да докажеме?



Можни се следниве одговори:

1а) Правите AB и MN лежат на спротивните страни на паралелограмот.

1 б) $\overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{AB}$.

1 в) $\angle NMD = \angle BAM$.

Учителот ги слуша сите одговори, заедно со учениците констатира кои од нив се точни, избира еден од точните одговори и продолжува со следното прашање.

Учителот. Како тоа да го докажеме?

2 а) Низ M да повлечеме права паралелна на BC и да докажеме дека четириаголникот $PBNM$ е паралелограм.

2 б) Да означиме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Бидејќи $DC \parallel AB$, имаме $\overrightarrow{DC} = \alpha \vec{a}$. Со помош на овие вектори да го изразиме векторот \overrightarrow{MN} .

2 в) Да ги разгледаме аглиите $\angle NMD$, $\angle BAM$ како агли на некои складни (слични) триаголници.

Третото прашање зависи од доказот кон кој учителот сака да ги насочи учениците. На пример, ако се искористи одговорот 2 а), тогаш прашањето ќе биде:

“Кој е доволен услов за четириаголникот $PBNM$ да е паралелограм? Како ќе докажеме дека овој услов е исполнет?”

а ако се искористи одговорот 2 б), тогаш прашањето ќе биде:

“Како да го изразиме \overrightarrow{MN} со помош на \vec{a} и \vec{b} ?”

Откако тврдењето ќе се докаже на еден начин, тогаш е пожелно учителот на учениците да им препорача тврдењето да го докажат и на другите начини, до кои учениците дошле при одговорите на првите прашања. ♦

2.2. МЕТОД НА УСНО ИЗЛОЖУВАЊЕ

Основна карактеристика на *методот на усно изложување* е догматското усно соопштување на материјалот, т.е. предавањето на готови знаења од страна на учителот и слушање и настојување да се запомни тоа што ќе кажат учениците. Доколку овој метод доминира при реализирањето на наставата, тој е контрапродуктивен бидејќи доаѓа до израз пасивноста на учениците, развивање на помнењето и на репродуктивното мислење. Секако, ваквата поставеност на наставата не е пожелна, а поради тоа со низата реформи на образованието овој метод бил потиснат во втор план.

Методот на усно изложување е обновен во современата настава со внесување на елементи на раскажување и објаснување, а суштински се подобрува кога се комбинира со другите методи.

Овој метод се јавува во следниве основни варијанти: *раскажување, објаснување и предавање.*

Раскажувањето како наставен метод во математиката има помошна улога. Со овој метод само се соопштуваат информации за изучуваното прашање, за историското потекло на одделни важни факти и слично.

Објаснувањето широко се применува во наставата по математика и се употребува за монолитно изложување на мал дел од изучуваниот материјал, како: воведување поими, докажување на теореми, изведување формули итн. Тоа трае 2-5 минути. Често пати тоа не се планира, туку зависи од проценката на учителот или од поставените прашања од учениците. Всушност, кога станува збор за методот на усно изложување, во математиката најчесто се мисли на методот на објаснување.

Предавањето како наставен метод е вид усно изложување при кое доминира догматското соопштување на готовите резултати. Овој метод се применува на факултетите, но може да се користи и во наставата во средното образование. Пожелно е во основното и средното образование воопшто да не се користи предавањето како наставен метод.

2.3. МЕТОД НА ПРОГРАМИРАНА НАСТАВА

Методот на програмирана настава се јавува кон средината на XX век, со претензии да ги отстрани недостатоците на традиционалната настава: нискиот степен на самостојна работа на учениците, слабата повратна врска, недоволната сообразеност на наставниот процес со индивидуалните квалитети на учениците и слично.

Методот на програмирана настава се состои во следново. Секој ученик работи самостојно по специјална програма која е содржана во учебникот, со што на секој ученик му се овозможува на часовите да работи по свое темпо, кое за него е оптимално. Наставниот материјал е поделен на помали *целини (порции)* и секоја целина е составена од неколку *делови (кадри)*:

а) *информационен дел*, којшто содржи минимум нови информации, т.е. основни податоци од теоријата,

б) *операционен дел*, во кој се формулираат соодветното прашање, вежба или друг вид барање,

в) *дел за повратна врска*, којшто содржи упатство или одговор на операциониот дел, со што ученикот самостојно ја контролира својата работа, остварувајќи “внатрешна повратна врска”, и

г) по неколку целини следува *контролен дел*.

Разработени се два система на програмирана настава, и тоа: *линеарен*, во кој за сите ученици е предвидена една “линија” за усвојување на знаењата и *разгранет*, во кој натамошното усвојување на знаењата и умеењата зависи од одговорите на ученикот.

При линеарното програмирано учење, независно од одговорите на ученикот кои сам ги формулира, тој добива точни одговори и преминува кон следната целина. При разгранетото програмирано учење ученикот може да премине кон следната целина на наставната содржина, само доколку точно одговорил на поставените прашања. Притоа, ученикот ги избира одговорите меѓу неколкуте формулирани одговори. Ако одговорот не е точен, тогаш според направената грешка ученикот се упатува на дополнителна помош, задачи и слично, кои завршуваат со контролни прашања.

Предностите на програмираната настава се во тоа што таа обезбедува максимална сообразеност со индивидуалните квалитети на ученикот, многу самостојна работа, непрекината повратна врска од типот самоконтрола и индивидуално темпо во усвојувањето на знаењата и умеењата.

Но, овој метод има и низа недостатоци, како што се:

- се намалува соработката на линија ученик-ученик и учител-ученик,
- се намалува раководната функција на учителот во процесот на наставата (тој често пати не знае до каде дошол ученикот во усвојувањето на знаењата и умеењата), и
- потребни се програмирани учебници и прирачници.

Во развиените земји, со масовното применување на персоналните компјутери во наставата, некои од споменатите технички тешкотии во реализирањето на програмираната настава се надминуваат, но се чини дека и во тие средини таа е се уште далеку од тоа што е замислено. Исто така, дел од спомнатите недостатоци на програмираната настава можат да се надминат со подготовка на таканаречените *програмирани материјали* (*наставни ливчиња* и слично), за што се потребни дополнителен ангажман и поголема креативност на учителот.

2.4. МЕТОД НА САМОСТОЈНА РАБОТА СО УЧЕБНИК

При реализирањето на овој метод ученикот самостојно ги исполнува поставените барања и самостојно доаѓа до нови знаења и умеења или, пак, ги утврдува веќе здобиените. Самостојната работа на ученикот е основен метод за работа дома над наставниот материјал, но, исто така, е важен и за работата на часовите, бидејќи од успехот на самостојната работа на ученикот зависи успехот на севкупната настава. Имено, со овој метод учениците се здобиваат со квалитетни знаења, но уште поважно е што тие формираат умеења за самостојно здобивање со знаења. Задолжителна е употребата на овој метод на почетните часови од наставата по алгебра и геометрија, бидејќи освен тоа што на овие часови учениците треба да усвојат нови знаења, треба да се оспособат и како да ги користат учебниците. Секако, овој метод може да се употребува и во текот на целата учебна година, ако тој се применува според следната шема:

- a) Насочена подготовка на учениците со која се актуелизираат потребните знаења, нивно мотивирање за усвојување на нови знаења и евентуално создавање на проблемска ситуација.
- b) Упатство како да се користи учебникот, при што методската единица дадена во учебникот се разбива на самостојни делови, кои учениците самостојно ги усвојуваат (самостојно ги докажуваат тврдењата или бараат нови докази, самостојно ги цртаат цртежите, но со истите ознаки). При првото читање учениците треба да ја следат основната идеја, да го одделат нај-

важното во методската единица, да не се задржуваат на некои детали и да ги пререшат предвидените задачи од учебникот, со тоа што доколку има нејасни работи да го консултираат учителот.

- c) Самостојната работа со учебникот се реализира во времетраење од околу 20 минути, учителот ја надгледува и им помага на учениците, доколку за тоа има потреба.
- d) Проверката на резултатите од самостојната работа преку делумно или целосно повторување на методската единица, се реализира во вториот дел од часот од страна на учениците или со помош на учителот, се појаснуваат некои делови, се решаваат задачи и слично. Во овој дел, учителот треба да инсистира да се образложи секој чекор, особено при решавањето на задачите, а со цел да се избегне формалното усвојување на знаењата и умењата.
- e) Во зависност од резултатите на учениците учителот пристапува кон коригирање на самостојната работа на учениците.

2.5. МЕТОД НА ПРОБЛЕМСКА НАСТАВА

Методот на проблемската настава се јавува во триесеттите години на XX век, но вистинска теориска разработка и практична потврда оваа настава добива во втората половина на XX век. Иако не постои единствено сваќање за суштината на проблемската настава, сепак може да се каже дека оваа настава е еден од пристапите за реализирање на целите на воспитно-образовниот процес. Затоа не треба да се стравува дека проблемската настава му противречи на постојниот образовен систем, туку на неа треба да се гледа како на метод кој него го дополнува, го збогатува.

Методот на проблемската настава се карактеризира со:

- a) создавање на проблемска ситуација,
- b) формулирање и решавање на проблемот,
- c) управување на дејноста на учениците според барањето, откривање и решавање на проблемот, и
- d) усвојување знаења, но и умења за самостојно усвојување на знаења.

Во натамошните разгледувања подетално ќе се осврнеме на одделни карактеристики на методот на проблемската настава.

2.5.1. ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА, ПРОБЛЕМ, ПРОБЛЕМСКА ЗАДАЧА И ПРОБЛЕМСКО ПРАШАЊЕ

Една од основните цели на проблемската настава е да се развива мислењето, а според психолозите проблемската ситуација е почетен момент на мислењето, т.е. мислењето почнува со возникнување на проблемската ситуација.

Поимот *проблемска ситуација* може да се опише како посебен вид мисловна дејност на субјектот (ученикот), насочена кон објектот (проблемот), така што кај субјектот се предизвикува потреба од сознавање, го побудува да открие, односно да усвои нови знаења или нови начини на дејство. Притоа, објектот на осознавање треба да се наоѓа во границите на интелектуалните способности на субјектот, но истовремено да предизвикува психичка состојба на определен интелектуален напор. Исто така, потребно е субјектот да “влезе” во проблемска ситуација, т.е. да ги забележи и да ги осознае тешкотиите, а потоа да посака да ги отстрани. Според тоа, проблемска ситуација не може да постои надвор од субјектот. Јасно, учителот може само да создаде услови за појавување на проблемска ситуација, но не може да создаде проблемска ситуација.

Појавувањето на проблемската ситуација го помага остварувањето на следниве дидактички цели:

- a) привлекување на вниманието на ученикот и предизвикување на сознателен интерес,
- b) доведување на ученикот во состојба на тешкотии, кои го активираат неговото мислење,
- c) создавање можност за пројавување на личноста на ученикот, и
- d) зголемување на творечкиот карактер во наставата и нејзината ефективност.

Во однос на проблемските ситуации, секако дека едно од најважните прашања е тоа под кои услови тие се појавуваат. Како што знаеме, противречностите се основа на секое мислење. Овој неспорен факт нè упатува на заклучокот дека развивањето на мислењето кај учениците е можно само ако се создаваат, појавуваат, изоструваат и разрешуваат противречностите. Појавувањето и осознавањето на противречностите во знаењата на учениците е најважен услов за појавувањето на проблемските ситуации. Други услови за појавување на проблемска ситуација се:

- a) достапноста на формулацијата на проблемската задача, т.е. терминологијата и содржината да им се достапни на учениците,

- b) задачата да има определена тежина која кај учениците ќе поттикне желба да ја решат, но да не биде толку тешка при што тие ќе се посомневаат во своите способности, и
- c) формулацијата на проблемот треба да ги заинтересира учениците, а тоа најдобро може да се постигне со примери од применетата математика, од секојдневниот живот и слично.

Како што кажавме, учителот може само да создаде услови за појавување на проблемска ситуација. Во наставата по математика, услови за појавување на проблемска ситуација најчесто се создаваат со:

- a) логичка организација на наставната материја,
- b) заклучување по пат на аналогичја, индукција или интуиција,
- c) експериментирање,
- d) соодветно избрани математички задачи,
- e) ситуации од секојдневниот живот, и
- f) правење намерни грешки во размислувањето, записите и цртежите од страна на учителот или користење на грешките на учениците итн.

Кога субјектот е во проблемска ситуација, тој истата ја анализира. Како резултат на таа анализа, со помош на некој јазик се опишуваат тешкотиите и објектот во проблемската ситуација. Токму ова опишување се нарекува проблем. Според тоа, *проблемот* е израз на осознаената дијалектичка противречност од страна на субјектот во проблемската ситуација. Од претходно наведеното може да се заклучи дека проблемот е објект кој е производ на субјектот. Затоа, проблемот може да се пренесе на друг субјект, да се преформулира, да се разбие на потпроблеми итн.

Задачата која определен субјект го доведува во проблемска ситуација, ја нарекуваме *проблемска задача*. Според тоа, ако субјектот знае сè или не знае ништо за задачата, тогаш таа не е проблемска задача.

Проблемско прашање е она прашање за кое одговорот јавно не се содржи во претходно усвоените знаења или во информацијата која е содржана во самото прашање. На пример, проблемски се прашањата:

- *Во кои прави призми може да се впише сфера?*
- *Каков е трапезот впишан во кружница?* и слично.

2.5.2. УСЛОВИ ЗА РЕАЛИЗИРАЊЕ НА ПРОБЛЕМСКА НАСТАВА И НИВОА НА ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА ПРОБЛЕМСКА НАСТАВА

Иако методот на проблемска настава има низа предности, сепак не е пожелно со овој метод да се реализира севкупната настава. Практиката покажува дека тој е најефективен кога се исполнети следните услови:

- a) учителот да е оспособен за реализирање на ваков вид настава,
- b) за реализирање на предвидените содржини со овој метод треба да се располага со повеќе наставно време,
- c) соодветна подготовка на учениците, која ќе им овозможи тие да го согледаат проблемот, да го формулираат, да го преформулираат, да искажуваат хипотези и нив да ги докажуваат, и
- d) содржините кои ќе се обработуваат со овој метод да се погодни за усвојување со него, што значи тие да се обмислени според степенот на сложеност и да може да се воспостави непосредна логичка врска со веќе усвоените знаења и умења.

Во зависност од тоа колку се исполнети претходните услови, има неколку нивоа на примена на методот на проблемската настава. Пред да ги определиме овие нивоа, да забележиме дека во една методска единица по математика има елементи на проблемска настава ако учителот сознательно го користи барем “создавањето проблемска ситуација”.

a) *Прво ниво*. Учителот создава услови за појавување на проблемска ситуација, но нив ги користи само за да го привлече вниманието на учениците, за кај нив да предизвика сознателен интерес.

b) *Второ ниво (проблемско изложување)*. Учителот создава услови за појавување на проблемска ситуација, го формулира проблемот и тој го решава, а притоа настојува да презентира постапка за поставување, испитување и целосно решавање на проблемот. Во овој случај, учителот не ги избегнува, туку ги изострува објективните противречности во наставниот материјал, но ги решава сам. Во изложувањето на учителот преовладуваат расудувања, барање на излез од тешкотиите, искажување на хипотези, отфрлање на едни и докажување на други хипотези. На овој начин учителот дава постапка за испитување на проблемот и негово решавање.

v) *Трето ниво (дијалогско изложување)*. Учителот се стреми да ги активира учениците, да го зголеми нивниот интерес, да ги насочи кон потребните претходно усвоени знаења и да ги мотивира за решавање на проблемот. На ова ниво се користи истата конструкција на наставниот материјал како и при проблемското изложување, но е присутен и систем од ин-

формациони прашања, на кои одговараат учениците. На проблемските прашања, како и при проблемското изложување, најчесто одговара учителот. Притоа се користи евристичката беседа, која содржи проблемски и информациони прашања, упатства, задачи за набљудување, пресметување, конструирање, споредување, реализирање на дејствија според определен редослед и формулирање на заклучоци. Информацијата која ја дава учителот треба да го иницира правилното заклучување на учениците, но не смее да го преудицира, а поради тоа на проблемските прашања не им се дава показно решение, туку со помош на соодветно избрани прашања учениците се насочуваат кон решението.

Дијалогското изложување овозможува повисок степен на сознателна активност на учениците, бидејќи тие непосредно учествуваат во решавањето на проблемот, иако во голема мера се чувствува раководната улога на учителот. На ова ниво учителот создава услови за појава на проблемска ситуација, формулирање на проблемот и мотивирање на учениците за негово делумно решавање.

г) *Четврто ниво.* На ова ниво учителот создава услови за појава на проблемска ситуација, ги привлекува учениците да ја анализираат ситуацијата и да го формулираат проблемот, формулира потпроблеми и ги мотивира учениците тие целосно да се решат под негово раководство. Притоа, наставната материја се конструира на сличен начин како и при дијалогското изложување, но се дополнува со сознателни задачи. Основна задача на учителот е да ја организира самостојната спознателна работа на учениците, кои ја анализираат проблемската ситуација, споредуваат, апстрахираат и воопштуваат, искажуваат хипотези и ги докажуваат, ја планираат својата работа итн.

2.6. МЕТОД НА КОРИСТЕЊЕ ТЕХНИЧКИ ПОМАГАЛА

На одреден наставен час наставата може успешно да се организира ако предвидената наставна материја се усвојува со употреба на технички средства. Во овој случај велиме дека се применува *метод на користење технички помагала*. Улогата на техничките помагала во наставата сè повеќе се зголемува, особено со користењето на методите на програмирање и на проблемска настава. Во современата настава најчесто употребувани технички средства се: графоскоп, дијапроектор и компјутер. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на примената на компјутерот во наставата по математика, односно на примената на новите информационални технологии во наставата по математика.

2.6.1. ПОТРЕБИ И МОЖНОСТИ ЗА КОРИСТЕЊЕ КОМПЈУТЕРИ ВО НАСТАВАТА

Според некои предвидувања, во блиска иднина, професионалниот живот на поголемиот дел од населението ќе се организира така што тоа ќе може работните обврски да ги исполнува и од својот дом, употребувајќи го компјутерот како средство за работа и комуникација. Тоа значи дека луѓето ќе можат повеќе да им помагаат на своите деца во учењето, кои ќе учат дома. Предвидувањата одат до таму што се претпоставува дека секој ученик дома ќе има персонален компјутер и со негова помош ќе може да ги усвои потребните знаења и умеења, почнувајќи со читањето, сè до математиката, биологијата, историјата, економијата и слично. Од своја страна, пак, персоналниот компјутер ќе биде поврзан со училишниот, со други компјутерски системи, дури и со светски банки на податоци. Така, секој ученик сам ќе си го организира своето образование, при што ќе се стреми, пред сè, кон она што него го интересира.

Можностите кои ни ги нудат новите информационални технологии се огромни. Но, што ќе се случи ако се остварат претходните предвидувања? Идејата за учење исклучително со помош на компјутер остава низа отворени прашања, како што се:

- a) Дали нема драстично да се намали интересот за читање?
- b) Колку детето ќе има интерес да направи нешто со свои раце?
- c) Дали секој ученик, дури и со соодветна стручна помош, може да направи правилен избор на содржините кои ќе ги обработува и кои ќе му овозможат да се здобие со квалитетно образование?
- d) Како учениците ќе се здобиваат со квалитетни знаења и умеења, а за чие усвојување од пресудно значење се живите дидактички средства и експериментите (физика, хемија, биологија и слично), односно дали воопшто е можно филмовите, сликите, шемите, графиконите и компјутерските симулации да бидат замена за искуството и знаењата здобиеени во лабораториите.
- e) Училиштето истовремено е и место каде што се усвојуваат нови знаења и умеења и место за социјализација на децата. Ваквата негова поставеност кај учениците го негува натпреварувачкиот дух, придобивка од која не смееме така лесно да се откажеме. Оттука и дилемата дали училиштето може да биде само место за социјализација на децата, улогата која му ја предвидуваат повеќето светски футуролози.
- f) Дали домашното учење со помош на компјутер може да биде соодветна замена за подучувањето на учителот? Ова прашање

е значајно ако се има предвид неспорниот факт дека добриот учител не е само трансмисионер на знаења и умеања.

- г) Дали со ваквиот начин на учење нема да дегенерираат особините на личноста, како што се: способноста за концентрација, способноста за владеење со волјата, мислата и слично?

Се разбира, ова е само еден од можните погледи на нашата иднина, втемелен на развојот на новите информациона технологии. Но, дали тој има реална основа во сегашниов степен на развојот на новите информациона технологии?

Пред да се обидеме да дадеме одговор на ова прашање да забележиме дека образовниот потенцијал на компјутерската информациона технологија е повеќе од очигледен и дека таа сè повеќе станува реалност во повеќето развиени земји, а полека и сигурно и наше секојдневие.

Десеттина години наназад сме сведоци на усвојување на знаења и умеања во компјутерски училиници. Повеќето експерти за образование ги истакнуваат следниве предности за работењето во овие училиници:

- а) можноста за перманентно, евтино и едноставно комуницирање меѓу учениците од различни училишта во рамките на една држава, а и пошироко,
- б) интерактивниот режим за остварување на образовни влијанија на релација учител - ученик и ученик - ученик,
- в) задоволството на учениците од новите познанства со своите врсници, и
- г) можноста за истовремено користење на слика и на звук при учењето.

Сепак, заради претходно искажаните дилеми во однос на гледањето на футуролозите, сметам дека барем во блиска иднина учењето со помош на компјутер треба да биде само дополнување на традиционалното учење, а не тоа да го исклучува. Во прилог на оваа констатација е и следнава споредбена анализа на можностите на учителот и на компјутерот.

1. Учителот може да работи во непредвидливи ситуации и со поголема можност за приспособување на промените на условите за работа.

Компјутерот нема таква можност. Тој работи во предвидени ситуации, а предвидувањето на сите можни ситуации и одговори (точни и неточни) практично е невозможно.

2. Учителот има големи можности да го избира начинот на работа во даден момент.
Можностите на компјутерот и во овој однос се ограничени и тие се во рамките на предвидените.
3. Учителот практично има неограничени можности за организирање на колективната работа на учениците во паралелката.
Можностите на компјутерот и во овој поглед се ограничени.
4. Учителот има можност да ја проверува точноста на самиот мисловен процес при решавањето на даден проблем, а не само точноста на резултатот од тој мисловен процес.
Можностите на компјутерот, барем засега, и за ова се ограничени.
5. Учителот со својата работа, постапки, мимики и слично влијае врз формирањето на младата личност.
Можностите на компјутерот и во однос на ова се ограничени.
6. Компјутерот има неограничени можности во споредба со човекот при обработувањето на количество информации во единица време.
Во овој поглед можностите на учителот се ограничени.
7. Компјутерот практично е со постојана работоспособност. Тој не се заморува и не губи концентрација.
Работоспособноста на учителот се намалува ако подолго време работи, тој се заморува, губи концентрација и слично.
8. Компјутерот ги извршува нумеричките операции со исклучителна брзина и точност.
Учителот ги извршува нумеричките операции многу побавно и со определена зачестеност на појавување на грешки.
9. Компјутерот има неограничени можности за организирање и за контролирање на индивидуалната работа на учениците во паралелката, кога со еден компјутер работи еден ученик.
Во однос на ова можностите на учителот се ограничени.

Претходно изнесената споредбена анализа на можностите на учителот и на компјутерот, покажува дека:

- повеќето работи учителот ги извршува поквалитетно и поефективно од современиот компјутер,
- некои работи компјутерот ги извршува неспоредливо побрзо, поточно и поефективно од учителот, и
- обично таму каде што се ограничени можностите на учителот, можностите на компјутерот се поголеми, и обратно, во повеќето случаи можностите на компјутерот се ограничени таму каде што на учителот се поголеми.

Од досега изнесеното може да се заклучи дека во иднина ќе има “заедничка работа” на учителот и на компјутерот во реализирањето на воспитно-образовниот процес, и не само што таа е можна, туку е и пожелна. Меѓутоа, не треба да се преувеличуваат можностите за примена на компјутерот во наставата, особено во наставата по математика. Имено, за било која работа со компјутер и за решавање на било која задача со компјутер, треба да се располага со соодветен алгоритам за таа работа и за решавање на таа задача, преведен на еден од програмските јазици, разбирлив за компјутерот и за човекот, кој го користи.

Освен тоа, користењето на можностите на компјутерот не е секогаш целисходно. Така, на пример, решавањето на систем од две линеарни равенки со две непознати може да се направи при разработка на примери од информатиката, физиката, хемијата и слично, но не е добро тоа да се прави во математиката, кога тоа е конкретна цел на наставата. Меѓутоа, за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати компјутерот може да се искористи подоцна, при усвојување на други содржини (решавање текстуални задачи, наоѓање плоштини на геометриски фигури и тела и слично), каде што решавањето на системите не е конкретна цел на наставата.

2.6.2. ДИЈАЛОШКИ ОБРАЗОВНИ ПРОГРАМИ

Постојат различни можности за користење на компјутерите во наставата, меѓу кои поважни се:

- a) Реализирање на наставата преку моделирање, симулирање, експериментирање или демонстрирање.
- b) За извршување на пресметувања.
- c) Реализирање на наставата преку дијалогски образовни програми.
- d) Користење на компјутерот за контрола на знаењата на учениците.

е) Користење на компјутерот за обука преку игри итн.

Долгогодишната практика покажува дека посочените различни начини за користење на компјутерот во наставата не треба да се спротивстават еден на друг. Меѓутоа, одредена предност може да му се даде на третиот и на првиот начин, по овој редослед.

Освен тоа, кога станува збор за компјутеризацијата на образовниот систем, вниманието треба да се насочи кон наставниот процес, бидејќи во однос на него собирањето и обработката на статистичките податоци, административно-организационите и финансиските работи во училиштата имаат второстепено значење.

За реализирање на определен предмет или на негов дел со помош на компјутер преку дијалог, треба да се располага со претходно разработена *дијалошка образовна програма* (ДОП) за дадениот предмет (дел од предмет). Меѓутоа, засега не се разработени теориските основи врз база на кои треба да се создаваат ДОП и тоа е една од основните кочници за вистинската примена на компјутерите во наставата.

Постојат различни мислења во врска со теориските основи врз база на кои треба да се изработуваат ДОП. Едни предлагаат да се примени таканаречената теорија на *модулни системи*. Суштината на оваа теорија е во тоа што наставната содржина е поделена на наставни единици. Секоја наставна единица има релативна самостојност, определена цел и тест за проверување на степенот на нејзиното усвојување. Во зависност од резултатот од проверката се одлучува дали е целисходно да се премине на изучување на следната наставна единица. Понатаму, наставните единици се обединуваат во наставни пакети, а наставните пакети во наставни модули.

Други, пак предлагаат како теориска основа за изработката на ДОП да се земе теоријата на програмирана настава. Имено, оваа теорија не го најде своето место во практиката токму заради низата недостатоци кај програмираните учебници. Со помош на современите персонални компјутери се отстрануваат поголем дел од овие недостатоци на програмираната настава.

ДОП овозможуваат индивидуализирање на активностите на учениците, при што секој ученик активно ќе работи на развивање на *зоните на актуелен и иден развој*. Меѓутоа, практиката покажува дека во секоја методска единица и во секој нејзин дел не може целисходно да се индивидуализираат активностите на учениците. Индивидуализирањето на активностите со помош на ДОП е можно при реализирањето на методските единици за повторување и за утврдување на знаењата, или во оние методски

единици во кои се усвојуваат нови знаења, а учениците можат самостојно или со минимална помош да ги совладаат предвидените содржини. Секако, во овој случај компјутерот се покажува како исклучително помошно средство за реализирање на наставата по математика.

При решавањето задачи, докажувањето на теореми и одговарањето на прашања ученикот, може сосема случајно да го избере вистинскиот пат, да добие точен резултат и да даде точен одговор. Ова не значи дека ученикот ја разбрал суштината на обработуваниот материјал, т.е. дека правилно е реализиран мисловниот процес кој го довел ученикот до точниот одговор. Оваа ситуација наметнува едно суштинско прашање, а тоа е каква треба да биде ДОП и како да се реализира обучувањето со помош на компјутер, за да можат да се проверуваат не само крајните резултати, туку и самиот мисловен процес на ученикот при решавањето задачи, докажувањето теореми и одговарањето на прашања?

Засега ДОП се карактеризираат со поделба на наставните содржини на делови, во кои се дава определено количество информации, кои ученикот треба да ги совлада според строго утврден редослед. Притоа е исклучена можноста за дополнителна иницијатива на ученикот, бидејќи претходно сè е програмирано, а тоа секако не е пожелно. За да се надмине оваа состојба можат да се воведат алгоритми за генерирање на наставните содржини, алгоритми кои ќе ги приспособат наставните содржини во зависност од корисникот на ДОП и алгоритми кои ќе генерираат прашања од дадена област. На овој начин обучувањето со ДОП ќе стане блиско до идеалниот случај кога еден добар учител обучува само еден ученик.

Релативно успешното користење на персоналните компјутери во наставниот процес го поттикнува размислувањето дека во догледно време тие ќе ги заменат учителите. Ваквото размислување е крајно опасно и деструктивно, бидејќи и најсовремената машина не е во состојба да се ориентира во сложените ситуации на воспитно-образовниот процес, како што тоа може да го направи учителот. Во прилог на последнава констатација е и претходно направената споредба на можностите на компјутерот и на учителот за реализирање на одделни активности во рамките на воспитно-образовниот процес.

2.7. ИЗБОР И КОМБИНИРАЊЕ НА НАСТАВНИТЕ МЕТОДИ

При подготовката за определен наставен час, учителот треба да одлучи кое наставно прашање со кој метод ќе го обработува. За да се донесе правилна одлука учителот треба да се раководи од фактот дека ни еден од

претходните наставни методи не е универзален, а дека изборот на наставниот метод во голема мера зависи од:

- карактерот и содржината на наставниот материјал,
- возраста на учениците и степенот на нивната математичка подготовка,
- расположливите технички и дидактички средства и слично.

Претходно изнесеното укажува на тоа дека за решавање на основната дидактичка задача на часот, учителот треба да избере “главен” наставен метод, со чие користење ќе се обезбедат максимална активност и креативност на учениците при реализирањето на часот. Најчесто, главниот метод е помогнат со “помошни” наставни методи, кои ќе се применуваат паралелно со него.

За успешно применување на определен наставен метод, било како главен или како помошен, неопходно е учителот да владее со методот, што значи:

- да ја разбира суштината на методот и да умее да го применува во најразлични ситуации, и
- да ги знае позитивните и негативните страни на методот и да умее да ја оценува неговата ефективност.

При реализирањето на определена наставна содржина воопшто не е едноставен изборот на главниот метод. Причина за ова е фактот дека наставните методи не се јавуваат изолирано еден од друг, како што може да се добие впечаток при нивната теориска обработка. Најчесто, во наставата се применуваат по неколку наставни методи во текот на еден наставен час, така што од голема важност е да се направи правилен избор на главниот наставен метод, потоа во согласност со овој избор да се определат помошните наставни методи и на крај да се усогласи нивната примена, се со цел да се постигнат максимални ефекти на часот. Притоа, наставните методи кои ќе се применуваат на часот треба да се приспособуваат и комбинираат така што ќе овозможуваат активна и креативна дејност на учениците, која се карактеризира со:

- согледување и формулирање на наставните проблеми,
- одделување и користење на информациите кои се поврзани со разгледуваниот наставен проблем,
- формулирање на хипотези и нивна натамошна разработка и
- планирање на дејноста и нејзино остварување согласно планираното.

На крај од овој дел да забележиме дека во наставата не смее да до-мира само еден наставен метод. Имено, само разновидниот избор и пра-вилното комбинирање на наставните методи овозможуваат да се усогласат работата на учителот и активностите на учениците.

2.8. ДОМАШНАТА РАБОТА ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Домашната работа е продолжување на работата на часот и таа е највисок степен на самостојна работа на ученикот. Имајќи го предвид зна-чењето на самостојната работа на ученикот, може да се каже дека домаш-ната работа е речиси со идентично значење како и работата на часот. Ток-му затоа, од особена важност е домашната работа да биде добро осмислена и правилно реализирана, бидејќи во спротивно е илузорно да очекуваме забележителни резултати од наставата по математика.

Функциите на домашната работа се:

1. Учениците да го утврдат наставниот материјал обработен на часот.
2. Учениците да се подготват за активно и за успешно усвојување на наставниот материјал, кој ќе се усвојува на следниот час.
3. Повторување и систематизирање на наставниот материјал кој е обработен на претходните часови.

Со задавањето и со изработката на домашната работа се обезбедува трајноста на знаењата, бидејќи успехот на работата во училиштето е усло-вен и со организирањето на самостојните активности на учениците, при што усвоеното се утврдува, систематизира, проширува, продлабочува и збогатува со нови знаења. Меѓутоа, значењето на домашната работа е и во тоа што родителите добиваат увид во начинот на работата на нивното дете во училиштето, увид во наставниот материјал и во работата на учителот. Сè ова ги зајакнува врските меѓу училиштето и родителскиот дом, но исто така, дава можност и за јавна непосредна проценка на работата на учи-телот, т.е. на училиштето како воспитно-образовна институција.

Ако се има предвид претходно изнесеното, тогаш е сосема јасно дека при задавањето на домашната работа учителот треба да ги има пред-вид следниве моменти:

1. содржината на домашната работа мора да произлегува од на-ставата, т.е. мора да се базира на материјалот кој се обработува на часот или на неколку претходни часови,

2. домашната работа да биде приспособена на возраста на учениците,
3. времето потребно за изработка на домашната работа,
4. техничките и материјалните средства кои се потребни за изработка на домашната работа,
5. за обемот и тежината на домашната работа, што подразбира дека неа треба да можат да ја изработат поголем број ученици, а не само најдобрите во паралелката,
6. домашната работа не смее да биде прелесна, така што учениците не ќе треба да вложат напрегнувања, но не смее да биде и претешка,
7. да се даваат задачи кои учителот може лесно и сеопфатно да ги проверува, и
8. домашната работа да биде јасно и прецизно формулирана.

Од претходно изнесеното можеме да заклучиме дека домашната работа мора да биде *правилно* и *навремено* зададена. Може да се каже дека домашната работа е правилно зададена, ако таа може самостојно да се изработи речиси од сите ученици, за што понатаму ќе говориме. Во однос на навременото задавање на домашната работа, важно е да спомнеме дека таа не смее да се задава на самиот крај на часот. Ако домашната работа се задава набрзина и на самиот крај на часот или по своненњето на училишното свонче, тогаш учениците, особено оние послабите, во поголемиот број случаи нема добро да ја разберат, што несомнено ќе им предизвика тешкотии при нејзината изработка. Затоа, пожелно е во рамките на часот, учителот да предвиди посебно време за задавање на домашната работа. Притоа, треба да се инсистира учениците да ја запишат домашната работа во своите тетратки, а мора да има и упатство за нејзина изработка. Освен упатството за изработка на домашната работа, на учениците треба да им се укаже и на тешкотиите на кои можат да наидат при работата, како и на најтешките елементи во домашната работа. По правило, колку учениците се на помала возраст, толку подетални треба да бидат упатствата кои им се даваат за изработка на домашната работа.

Веќе наведовме повеќе моменти кои учителот треба да ги има предвид кога ја задава домашната работа. Сепак, главни карактеристики на секоја домашна работа се нејзината *содржина* и *обем*.

Содржината на домашната работа може да биде разновидна. Задачите кои се задаваат во една домашна работа мораат да бидат разновидни и подредени според нивната сложеност. Типот задачи кои се задаваат во домашната работа може да биде во функција на:

- усното искажување,
- писменото искажување, и
- практичната работа (изработка на шеми, цртежи, графици и модели, разни мерења и слично).

По правило, содржината на домашната работа треба да произлегува од нејзините функции, па затоа секоја домашна работа во наставата по математика најчесто е составена од два дела, и тоа:

- задачи за утврдување на новоизучениот материјал, дел од кој можат да бидат така компонирани што ќе овозможат повторување и систематизирање на она што е изучено од една или од неколку тематски целини, и
- задачи кои учениците непосредно ќе ги подготват за совладување на новиот наставен материјал, а кој ќе се изучува на следниот наставен час.

Содржината на домашната работа треба да биде збогатена и со потешки задачи, наменети за учениците кои сакаат да научат повеќе. Овие задачи не смее да бидат задолжителни за сите ученици, бидејќи тие се во функција на дополнителната работа. Меѓутоа, одвреме навреме, со цел да се поттикне дополнителната работа на учениците, пожелно е пред сите нив учителот да ги презентира решенијата на овие задачи, како и нивните автори.

Во однос на обемот на домашната работа, треба да се има предвид дека тој мора да биде “оптимален”. Имено, ако домашната работа е со премал обем, тогаш таа секако нема да ја исполни својата функција, а ако е преобемна, тогаш постои опасност поголем дел од учениците да ја препишат, со што повторно доаѓаме до ситуација таа да не ја исполнува својата функција. Кога сме кај обемот на домашната работа треба да се има предвид и неспорниот факт дека учениците не одат на училиште да учат само математика, односно да знае дека учениците имаат обврски да ги изучуваат и другите предмети предвидени со наставниот план. Токму затоа, учителот треба да води сметка и за времето кое е потребно да се изработи домашната работа. Постојат повеќе мислења во врска со времетраењето на изработката на домашната работа. Пред се, тоа зависи од повеќе фактори, како што се: возраста на учениците, типот час на кој се задава домашната работа, нивото на знаења на учениците, периодот од неделата, тежината на изучуваниот материјал и слично, така што не може универзално да се определат времетраењето за изработка на домашната работа, кое ќе важи во секоја ситуација. Сепак, искуството покажува дека домашната работа по математика смее на ученикот да му одзема околу 80% од потрошеното учебно време во денот кога имал час по математика, што во наши услови значи околу 35 минути.

Пред да се осврнеме на значењето на проверувањето на домашната работа, ќе дадеме пример на домашна работа која учителот може да им ја зададе на учениците во VIII одделение, на часот на кој се обработува методската единица *Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати*, при што задачите означени со * се наменети за учениците кои сакаат да научат повеќе.

Пример 2. 1. Збирот на два броја е 35, а нивната разлика е 5. Кои се тие броеви?

2. Киро купил вкупно 8 тетратки со квадрати и линии и платил 250 денари. Една тетратка со квадрати чинела 50 денари, а една тетратка со линии чинела 20 денари. По колку тетратки од секој вид купил Киро?

3. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 8. Ако цифрите си ги променат местата се добива број кој е за 18 поголем од дадениот. Кој е дадениот број?

4. Еден автомобил тргнал од местото А. По половина час, по него тргнал друг автомобил и го стигнал по 2,5 часа возење. Двата автомобили продолжиле да возат во иста насока. Забележано е дека побрзиот автомобил по 1,5 час од моментот на среќавањето бил 24 km пред побавниот автомобил. Најдете ги брзините на двата автомобили, ако се знае дека секој од нив се движел со константна брзина.

5*. Базен се полни со две цевки. Ако цевките се пуштат истовремено, тогаш базенот се полни за 12 часа. Ако првата цевка сама го полни половина од базенот, а потоа втората цевка сама ја полни другата половина од базенот, тогаш тој ќе се наполни за 25 часа. За кое време секоја цевка сама може да го наполни базенот?

6*. Атанас патува со чамец по реката Дрим, од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу Струга и Глобочица е 18 km и тој патува вкупно 8 часа. Колкава е брзината на реката Дрим, ако Атанас патува за исто време 4 km низводно, а 2 km во обратна насока? ♦

На крајот од овој дел ќе се осврнеме на проверувањето на домашната работа, кое треба да се планира при нејзиното задавање. Проверувањето на домашната работа, по правило, влијае и на квалитетот на нејзината изработка. Поради тоа, при проверувањето на домашната работа не е доволно само да се констатира дали ученикот ја изработил работата, туку и како тоа го направил. Тоа значи дека учителот треба да ги анализира домашните работи и притоа на ученикот да му укаже на пропустите и на грешките. Исто така, со анализирање на домашната работа, меѓу другото, учителот има можност да воочи кои грешки се заеднички за целата паралелка, а кои за одделни ученици и да преземе активности за нивно отстранување.

Што се однесува до проверувањето на домашната работа, слободно може да се каже дека груба грешка е тоа да се занемари или да се минимизира. Имено, на почетокот ученикот најчесто својата домашна работа ја работи темелно и во најдобро уверување дека направил нешто добро, ако не и исклучително. Затоа, ако домашната работа не е проверена, тогаш по враќањето од училиште тој тоа им го соопштува на родителите. Ваквата постапка на учителот може да биде оправдана ако се случи еднаш или два пати, но ако тоа се повторува повеќе пати, тогаш родителите добиваат неповолна слика за училиштето, а ученикот сè почесто ќе ги запоставува своите обврски и станува површен во работата.

Постојат повеќе начини за проверување на домашната работа, од кои ќе ги наведеме следниве:

- *Летимично проверување* на домашната работа, што се реализира на почетокот на часот, со прошетка низ паралелката. Ваквото проверување не одзема многу време, но тоа дава само увид кои ученици имаат, а кои немаат домашна работа, при што не може да се добие сознание во самостојноста и сознателноста на изработката на домашната работа. Исто така, при ваквото проверување на домашната работа учениците се пасивни, па затоа е пожелно тоа да се комбинира со некој од другите начини на проверување на домашната работа.
- *Кратката писмена работа* составена од задачи од една или од повеќе домашни работи, која може да се реализира во времетраење од десетина минути, како и *усното испрашување* на почетокот од часот во кое се бара да се изнесат клучните моменти при решавањето на задачите, овозможуваат подобар увид во самостојноста и сознателноста на изработката на домашната работа.
- *Целосното проверување* на домашната работа, што се реализира со земање на тетратките и нивно проверување надвор од часот, бара најголема ангажираност на учителот. Постои мислење дека ваквото проверување е најдобро, но притоа како да се испушта од вид дека при тоа учителот нема контакт со учениците, а затоа и не може да има увид во самостојноста на изработката на домашната работа, а со самото тоа и во сознајноста.

Изборот на методот за проверување на домашната работа, пред сè, зависи од:

- содржината на домашната работа,
- расположливото време за проверување,
- бројот на учениците во паралелката,

- врската на домашната работа со новата лекција итн.

Сепак, имајќи го предвид веќе кажаното, се чини дека комбинирањето на летимичното проверување и кратките писмени работи или усното проверување, ќе дадат најефективни резултати. Имено, ваквата комбинација овозможува да се има увид дали домашната работа воопшто е изработена, но дава можност да се добијат сознанија за самостојноста и за сознателноста при нејзината изработка.

3. ОСНОВНИ ФОРМИ НА ОРГАНИЗАЦИЈАТА НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Организираното обучување се разликува од неорганизираното по тоа што истото се реализира според определен систем. Во дидактиката се познати три основни системи на обучување:

- индивидуално,
- лекцијашко во училиште, и
- семинарско.

Секој друг систем на обучување, всушност е варијанта или комбинација од овие три системи. За современите образовни системи најпогодно е лекцијашкото обучување во училиштата, па затоа и подетално ќе се осврнеме на него.

Наставниот час е основна форма во лекцијашкото обучување во училиштето. Под *наставен час* ќе подразбираме логички оформен и заокружен сегмент на воспитно-образовниот процес, кој се реализира за однапред утврдено време и има цел организирано и плански да реализира однапред утврдени задачи и цели. Во текот на еден наставен час се реализира заокружена целина на наставниот материјал, која ја нарекуваме *методска единица (лекција)*. Часот како организациона форма на обучување, покрај тоа што овозможува да се интегрираат воспитната и образовната компонента на наставата и да се развиваат сознателните способности и интереси на учениците, тој дава можност и да се оствари:

- планирање на воспитно-образовниот процес,
- систематизирано изучување на наставната материја, која се усвојува како логичка целина,
- раководната улога на учителот, и
- тимска работа на учителот и на учениците.

За успешно реализирање на наставните задачи, за секој наставен час пред учителот се поставуваат следниве барања:

- дефинирање на основната наставна цел и на посебните воспитни задачи,
- избор на наставните содржини кои ќе се реализираат во рамките на часот,
- избор на дидактичките средства и наставните методи, и
- детаљно организирање на часот.

Во зависност од основната наставна цел часовите можат да бидат:

1. час за усвојување на нови знаења и умеења,
2. час за утврдување на знаењата и умеењата и здобивање на навики,
3. час за повторување и систематизирање на знаењата,
4. час за проверување и оценување на знаењата и умеењата на учениците, и
5. комбиниран час.

Како што кажавме, оваа поделба е врз основа на основната наставна цел. Меѓутоа, при организирањето и реализирањето на час од определен тип неминовно се појавуваат елементи од часовите од другите типови.

3.1. СТРУКТУРА НА ТИПОВИТЕ ЧАСОВИ ПО МАТЕМАТИКА

На почетокот на овој параграф ги наведовме типовите часови кои се јавуваат во системот на лекцијашко обучување во училиштето. Во оваа точка подетално ќе се осврнеме на структурата на секој од наведените типови часови по математика.

3.1.1. СТРУКТУРА НА ЧАСОТ ЗА УСВОЈУВАЊЕ НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Часовите од овој тип се наменети за почетно усвојување на нови знаења: поими, аксиоми и теореми, чие усвојување најчесто е проследено со решавање на елементарни задачи. Часот започнува со кратко повторување на содржините кои се неопходни за усвојување на новите знаења.

Структурата на лекцијата за усвојување нови знаења е следната:

1. *Се соопштува темата на наставниот час*, при што се истакнува нејзиното значење за математиката и нејзината примена. Во рамките на овој дел од часот, учителот го доведува новиот наставен материјал во тесна врска со претходно изучениот, односно го рекапитулира веќе реализираното повторување на содржините, кои се неопходни за изучување на новиот материјал.

2. *Се изложува новиот материјал*, при што се користат експерименти, набљудување, споредување, анализа на познати примери и слично. Притоа, учителот мора да ја организира работата на учениците така што тие активно и систематски ќе учествуваат во откривањето на својствата, нивното формулирање и докажување.

3. Преку повторување на поимите, својствата и со решавање на погодно избран систем од задачи *се утврдуваат новите знаења*.

4. Преку соодветни прашања и други активности на учениците, учителот го организира *заокружувањето на методската единица*, ставајќи акцент на тоа што треба трајно да се запомни од неа.

5. *Се задава домашна работа*, во која зададените задачи мора да ја опфатат целата методска единица. Обично, домашната работа се задава на крајот на часот, но тоа може да се направи и во текот на целиот час.

3.1.2. СТРУКТУРА НА ЧАСОТ ЗА УТВРДУВАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА И УМЕЕЊАТА И ЗДОБИВАЊЕ НАВИКИ

Утврдувањето на знаењата и умеењата во наставата по математика се реализира со решавањето задачи, докажувањето теореми и изработувањето цртежи. За задачите и за нивната улога во наставата по математика детаљно зборувавме, па поради тоа тука ќе спомнеме дека една од целите на решавањето задачи е да се утврдат здобиените знаења и да се стекнат нови умеења.

Структурата на овој тип час е:

1. На почетокот учителот ја *соопштува темата на часот*.

2. *Се врши кратко повторување на теоријата* која ќе се користи за решавање задачи на часот.

3. *Учителот ги задава задачите* кои учениците, по правило, треба самостојно да ги решаваат.

4. *Се решаваат задачите и се анализираат* нивните решенија.

При реализирањето на часот од овој тип голема примена имаат принципите на активност, индивидуален пристап кон учениците и нивната самостојна работа.

3.1.3. СТРУКТУРА НА ЧАСОТ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И СИСТЕМАТИЗИРАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА

Основната цел на часот од овој тип е со повторување, воопштување и со систематизирање да се утврдат и да се прошират здобиените знаења. На овој час, знаењата на учениците треба да добијат нови квалитети, а тоа се широчината и длабочината. Структурата на овој час е следнава:

1. На почетокот учителот ја *соопштува темата на часот*.
2. Под раководство на учителот и со активно учество на учениците *се прави план според кој ќе се реализира часот*.
3. Според направениот план, а со активно учество на учениците преку припомнување, споредување, систематизирање и воопштување *се реализира направениот план*.
4. *Учениците се подготвуваат за следниот час*, при што некои прашања ги разработуваат на часот, а некои треба да ги разработат дома.

3.1.4. СТРУКТУРА НА ЧАСОТ ЗА ПРОВЕРУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА И УМЕЕЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Основна цел на овој тип час е да се провери и да се оцени степенот на усвоените знаења и умеења кај учениците. Во овој тип часови спаѓаат часовите за изработка на писмените работи и за нивна поправка, тестовите и контролните писмени вежби, потоа часовите за усна проверка на знаењата и умеењата на учениците, иако по правило, таа треба да биде содржана во тековното проверување.

Да забележиме дека кратките контролни писмени работи за кои веќе зборувавме и кои можат да се реализираат во првите десетина минути од часот, всушност немаат оценувачка улога, туку тие служат за обучување, па затоа при нивното реализирање учениците можат да добиваат помош од учителот.

3.1.5. СТРУКТУРА НА КОМБИНИРАНИОТ ЧАС

Комбинираниот час содржи составни елементи од претходно разгледуваните типови часови, па затоа целите на овој час се поразновидни од целите на претходните типови часови. Структурата на овој тип час е:

1. Организационен дел.
2. Почеток на часот во кој е вклучено и соопштувањето на темата.

3. Проверка на знаењата од претходните часови, кои се потребни за изложување на новите знаења, изложување на нови знаења и нивно утврдување и задавање домашна работа.

4. Резимирање на новите знаења.

Како што можеме да забележиме, според структурата комбиниранiot час е најбогат. Меѓутоа, иако тој е најраспространет во наставната практика, сепак во многу случаи, заради времетраењето на часот, тој не е и најпогоден.

Не е знаење, знаење да знаеш,
туку знаење е, знаење да дадеш.

Народна поговорка

Мисијата на училиштето е подобрување на
квалитетот на живеењето на поединецот
и општеството во целина.

Авторот

Кој знае и знае дека знае, учи од него.
Кој знае и не знае дека знае, освести го.
Кој не знае и не знае дека не знае, научи го.
Кој не знае и не знае дека не знае, бегај од него.

Конфучие

Наставникот треба да го гради својот час, како што
архитектот, користејќи различен материјал, ги гради
своите градби за истите бидат цврсти, складни и
убави во сите делови и за да може од нивните
височини да се откриваат широките пространства.

Н. М. Верзиљин

Талентот не е само “дар од боговите”, т.е. не е само
резултат на наследната еволуција на човекот, туку е
и многу работа и постојан развој на личноста.

Авторот

Училиштето е институција во која се учи. Ако со
игра може да се стекнуваат квалитетни знаења и
умеања, тогаш доволно е децата да одат само на
игралиште.

Авторот

ХП ГЛАВА

СЛЕДЕЊЕ ПРОВЕРУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

1. ЗНАЕЊЕ. ВИДОВИ ЗНАЕЊЕ

Обезбедувањето и контролата на квалитетот на образованието, најчесто се поврзува со синтагмата: “високо ниво на *знаење, компетенции и вештини*.” Имајќи го предвид претходно кажаното, природно ни се наметнуваат следниве прашања:

- Што е знаење, а што компетенции?
- Дали е можно да се поседува вештина без притоа да се поседува знаење?
- Дали вештините се вклучени во знаењето?
- Што подразбираме кога за некогo велeме дека нешто знае? На пример, дали за ученикот што *умее* од неколку покажани фигури да го препознае правоаголникот се подразбира дека *знае* што е правоаголник, или ќе побараме од него да ја искаже дефиницијата за правоаголник?
- Како ќе судиме за знаењето на ученикот кој ја *знае* формулата за плоштина на правоаголник, *умее* да ја применува во задачи, *вешто* решава шаблонизирани задачи со оваа формула, но не е во состојба да објасни зошто $P = ab$?

1.1 ДЕКЛАРАТИВНО И ПРОЦЕДУРАЛНО ЗНАЕЊЕ

Во граматичка смисла, зборот *знаење* е глаголска именка, па затоа постојат два аспекти според кои тој може да се толкува. Првиот аспект е неговото именско, односно пасивно значење. Гледано од овој аспект, *знаењето претставува систем од факти и генерализации* и вака дефинираното знаење во литературата е познато како *декларативно знаење*. Според тоа, можеме да сметаме дека декларативното знаење е систем на информации, па затоа тоа може, според својата општост, хиерархиски да се систематизира. Притоа, ако декларативното знаење го систематизираме, на пример во три нивоа, тогаш во првото ниво на оваа хиерархиска система-

тизација се наоѓаат податоците, во второто ниво се наоѓаат основните поими и тврдења, а во третото ниво се концептите и генерализациите.

Ваквото сфаќање на знаењето имплицира, во практиката, под знаење да се подразбира меморирање на податоци, поими, тврдења и нивни генерализации, па оттука произлегува и начинот на проверувањето на знаењето, кој најчесто се сведува на репродукција на меморирани факти. Непосредна последица на ваквото сфаќање на поимот знаење е и реализацијата на наставата по одделни наставни дисциплини, при што најчесто наставата се сведува на часови на кои учителот пренесува готови знаења, т.е. истите ги соопштува или ги објаснува и генерализира и на часови наменети за проверување и оценување на стекнатите знаења. Исклучок од ова непишано правило е наставата по одделни наставни дисциплини, во кои може да се каже е и математиката. Имено, ретко кој учител по математика за квалитетно знаење ја смета способноста на ученикот на памет да “изрецитира” одредена дефиниција или да репродуцира определено правило. На пример, ученик во основно образование може да ја искаже дефиницијата за линеарна функција, доколку истата ја научил “напамет”, но сигурно нема да биде позитивно оценет сè додека не се оспособи да црта график на поедноставни линеарни функции и да решава елементарни задачи во кои се применува линеарната функција.

Претходно изнесеното е во непосредна врска со Блумовата таксономија на наставните цели, на која е даден осврт во Додаток А. Имено, декларативното знаење соодветствува на нивото на познавање и на нивото на разбирање од когнитивното подрачје на оваа таксономија. Тоа значи дека ако под знаење го подразбираме само декларативното знаење, тогаш целосно се запоставени повисоките четири нивоа на когнитивното подрачје на образовните и наставните цели и комплетно се отфрлени психомоторното и афективното подрачје.

Во наставата по математика е присутен и еден специфичен проблем во врска со рангирањето на нивоата од когнитивното подрачје. Иако делува логично ако се каже дека за да се стигне на третото ниво – нивото на примена, неопходно е да се усвојат првите две нивоа – нивото на знаење и нивото на разбирање, во наставната практика се случуваат несекојдневни ситуации. На пример, во наставата по математика ученикот вешто решава квадратни равенки (ниво на елементарна примена), што значи ја познава формулата за решавање на квадратни равенки и успешно ја применува, но воопшто не разбира како е добиена таа формула, на која класа равенки се однесува, ниту пак умее да дефинира што е квадратна равенка. Овој проблем во наставата по математика е познат како *шаблонизација* и тој е непосредна последица од самата настава, т.е. од вкоренетата традиција да се оценува решавањето на задачи, па затоа голем дел од учениците

целата своја активност ја насочуваат кон вежбање на алгоритмите прифаќајќи ги здраво за готово, без воопшто да се потрудат да ја разберат суштината на самиот алгоритам.

Вториот аспект на зборот знаење е неговото глаголско, односно значење кое подразбира некое дејство. Од овој аспект, *знаењето опфаќа умеења, вештини и стратегии*. Вака дефинираното знаење во литературата е познато како *процедурално знаење*, што значи дека процедурално знаење поседува лице кое владее со процедурите. Процедуралното знаење најлесно можеме да го илустрираме во наставата по математика. Притоа, за да провериме дали ученикот поседува процедурално знаење треба да провериме дали тој успешно реализира активности кои опфаќаат некоја дејност, на пример, цртање, конструкции, извршување пресметки, решавање на равенки и слично. Значи, во наставата по математика под процедуралното математичко знаење подразбираме претежно примена на *алгоритми*, при што некои од нив во даден момент може да преминат во технички процедури.

Доколку учителот под знаење подразбира процедурално знаење, тогаш постои опасност од шаблонизирање на наставата. Имено, ако под поимот знаење подразбираме процедурално знаење, тогаш наставата се организира на учење постапки за усвојување готови алгоритми, па и проверувањето се организира за проверување на истите. Притоа, од аспект на Блумовата таксономија на наставните цели, ова соодветсува на *нивото на примена* од когнитивното подрачје. Сепак, процедуралното знаење може да се сфати и на повисоко когнитивно ниво. Имено, при решавањето на проблеми имаме анализирање на дадена проблемска ситуација, па потоа синтеза, при што до израз доаѓа критичкото мислење, проверувањето и изведувањето на заклучоци, дејства кои се застапени во последните три нивоа од когнитивното подрачје.

На крајот од овој дел да споменеме дека во наставата по математика учениците често се водат кон овие когнитивни нивоа, неретко и по неколку пати во текот на само еден наставен час. На пример, при решавање на даден проблем од ученикот се бара да ја искаже дефиницијата за правоаголник (ниво на познавање), да конструира правоаголник и да ги искаже неговите својства (ниво на разбирање), потоа низ евристичен разговор се води кон анализа на проблемот за пресметување на плоштина на правоаголник, потоа се наведува да изведе заклучок како се пресметува плоштина на правоаголник (ниво на анализа и ниво на синтеза). Понатаму, се врши систематизација на формулите за плоштина користејќи ја класификацијата на паралелограмите, по што се отвора нов проблем за откривање на формула за плоштина на ромбоид (уште еднаш патот познавање – разбирање – анализа – синтеза – оценка) за на крај да се постават задачи со

примена на откриените формули (ниво на примена), кои по извесно време може да преминат во вистински проблеми сами за себе, кои повторно ќе го одведат ученикот кон повисоките когнитивни нивоа.

Пред да преминеме на натамошните разгледувања, важно е да споменеме дека при ваквиот приод, иако наставата е целосно насочена кон активности на ученикот (интелектуална дејност), не е запоставена компонентата од поимот знаење означена како декларативно знаење. Јасно, при тоа декларативното знаење не се смета за доволно, па затоа истото се надополнува со барањата на процедуралното знаење.

На прв поглед се наметнува заклучокот дека за да одговориме на прашањето што е тоа знаење, доволно е да ги поврземе претходно разгледаните аспекти на знаењето, декларативното и процедуралното знаење, и истите да ги сметаме за негови компоненти. Јасно, во таква поставеност ќе подразбираме дека *знаењето е усвоеност на систем од факти и генерализации и поседување на со одредени умеења и вештини.*

На крајот од овој дел само ќе напоменеме дека дури и ако се подразбере дека знаењето во себе ги опфаќа и двете компоненти – декларативното и процедуралното знаење, сепак ние сме го расветлиле само *потесното значење* на поимот знаење. Имено, ваквото дефинирање на поимот знаење ги опфаќа само материјалната и до некаде функционалната задача на наставата и притоа имаме застапеност само на когнитивното подрачје од Блумовата таксономија, при што целосно е запоставено психомоторното и афективното подрачје. Токму затоа, ако знаењето го дефинираме само како декларативно и процедурално знаење, тогаш велíme дека тоа е сфаќање на овој поим само во потесна смисла.

1.2. УМЕЕЊА И ВЕШТИНИ

Во претходната точка се осврнавме на процедуралното знаење. Повеќето автори при рагледување на процедуралното знаење истото хиерархиски го подредуваат, на притоа погрешно во основата на ова подредување, наместо техничките процедури, ги ставаат алгоритмите, кои обично ги поистоветуваат со вештините. Понатаму, во литературата за највисоко ниво во хиерархиското подредување се сметаат стратегиите, како што е, на пример, избраната стратегија за решавање на даден проблем. Сепак, поимот вештини е палку построг од поимот умеења. Имено, *умеење* е компонента на знаењето која подразбира дека субјектот е во состојба доследно да примени некоја постапка (техничка процедура или даден алгоритам). На пример, ученикот умее да ја применува формулата за решавање на квадратни равенки; умее да користи калкулатор за пресметување на вредност

на тригонометриска функција од агол зададен во степени, минути и секунди; умее да конструира триаголник зададен со три основни елементи од кои барем еден е страна, ползувајќи само линијар и шестар. Сето ова подразбира умешност, односно умеење да се примени некоја постапка, односно алгоритам.

Практиката покажува дека, за одредени умеења, многу е важна прецизноста и брзината на изведување. Затоа во наставата се практикува подолготрајно увежбување на определени активности кои што ќе овозможат совладување на некои постапки до ниво на автоматизам. Притоа, за таквите умеења кои се увежбани до ниво на автоматизам ќе велíme дека се *вештини*. Според тоа, алгоритмите не можат да се постоветат со вештините. Имено, вештините се умеења, кои подразбираат примена на алгоритми. На пример, велíme дека ученикот е вешт во користење на линијар и шестар. Тоа подразбира дека тој до автоматизам ги извежбал основните елементарни конструкции со лењир и шестар, но тоа сеуште не значи дека, на пример, тој умее да конструира триаголник зададен со своите висини.

Во нашата методска литература, поимите умеења и вештини често се заменуваат со поимот способности. Иако навидум способностите се исто што и умеењата, сепак од психолошки аспект мора да се направи дистинкција помеѓу овие два поими. Под способности се подразбира потенцијалот на една личност во одредена област. Имено, *способностите* се психички својства, кои обезбедуваат успешно извршување на дадена дејност. Тие имаат решавачка улога во индивидуалниот развој на личноста и се подобруваат при усвојување нови знаења и умеења. Јасно, од своја страна способностите повратно дејствуваат на усвојувањето на новите знаења и умеења. Сепак, способностите, не може да се доведуваат во контекст со резултатите од проверувањето во наставата, затоа што ученикот ги поседува (во одреден степен) независно од процесот на наставата, како особина на неговата личност. Сепак, способностите треба да подлежат на проверување во функција на *дијагностичкото проверување*, за кое понатаму ќе говориме.

Интересот е таков квалитет на личноста кој се карактеризира со упорна сознајна насоченост кон предметот или појавата која се создава. *Наклоноста*, пак, се изразува во насоченоста на личноста кон извршување на некоја дејност. Интересите и наклоностите се важни квалитети на човековата личност и тие се во тесна и нераскинлива заемна врска. За интересите е карактеристично создавањето на детерминирачките елементи на работата, така што тие имаат важна улога во творечката дејност на човекот. Наклоностите се, исто така, поврзани со творечката дејност на човекот. Но, додека интересите ја одразуваат желбата на личноста за здобивање но-

ви знаења, во наклоностите се пројавува стремежот на човекот за работа и за творештво.

1.3. ПОСТИГАЊА И УСПЕХ – ЗНАЕЊЕ ВО ПОШИРОКА СМИСЛА

Во претходните разгледувања поимот знаење во потесна смисла го определивме како усвоеност на систем од факти и генерализации и стекнатост со одредени умења и вештини. Исто така видовме дека ваквото сфаќање на знаењето ги опфаќа само материјалната и до некаде функционалната задача на наставата и притоа имаме застапеност само на когнитивното подрачје од Блумовата таксономија, што значи дека ваквото сфаќање на знаењето не кореспондира во целост со современите теории во педагогијата и психологијата. Имено, ако знаењето завзема централна улога во наставниот процес, а од наставата се бара да ги исполнува трите свои задачи - материјалната, функционалната и воспитната, тогаш и знаењето не може да се ограничи само на материјалната и делумно на функционалната задача.

Согласно Блумовата таксономија, целите на наставата треба да ги опфаќаат трите подрачја – когнитивното, психомоторното и афективното. Притоа, афективните доживувања често имаат мотивациона, значи движечка улога во човековиот живот. Според тоа, знаењето не може да се ограничи само на когнитивното подрачје, бидејќи основна функција на наставата е да влијае на целокупниот развој на личноста на ученикот како единка. Тоа значи дека наставата не се сфаќа само како предавање на знаења во традиционална смисла, туку како систем од активности на учителот и учениците во кои тие како активни чинители учествуваат во процесот на учење, а учителот се јавува во својство на координатор, водич или режисер на овие активности кои треба да резултираат со позитивна развојна промена кај личноста на поучуваниот.

Од ова следува дека и при проверувањето и оценувањето мора да се води сметка дека крајната цел не е само учење (запомнување) на одредени факти и генерализации и нивна течна репродукција, но не може да застане ниту со вклучување на умењата и вештините на ученикот. Имено, во современата настава не е важно само што ученикот знае или умее, туку и процесот преку кој дошол до овие знаења и умења. Понатаму, при оценувањето обично не се земаат предвид афективните цели на наставата како што се: ставовите, вредностите, естетските расудувања, односот кон средината, умешноста за тимска работа итн., кои пак во определени дејности од животот се од исклучителна важност и без нив не е можно успешно реализирање на задачите за одредени работни места.

Имајќи го предвид претходно кажаното, се наметнува потреба од проширување на поимот знаење, при што поимот знаење во себе треба да ги вклучува и целите од психомоторното и афективното подрачје на Блумовата таксономија. За да не се продлабочи термилошкиот проблем, ваквото знаење во најширока смисла да го определеме како *постигања*. Но, во таа смисла, сега е многу потешко да се говори за проверување на постигањата на учениците. .

Наметнувањето на овој проблем нанесува значителен удар врз *објективноста* во оценувањето на знаењата. Имено, објективноста на оценките по сите наставни предмети, освен можеби кај уметностите и физичкото воспитување, воглавно се должи на тоа што во практиката учителите го сфаќаат знаењето како комплекс на декларираното и процедуралното знаење, што значи дека тие ги оценуваат токму процедуралното и декларативното знаење, кои сами по себе се лесно мерливи. Последното противречи на сфаќањата за современата настава, односно на фактот дека целта на современата настава е севкупниот развој на личноста на ученикот. Меѓутоа, и покрај ваквите сфаќања, сепак сметаме дека *проверувањето во наставата треба да подразбира проверување на знаењата сфатени како комплекс на декларативно и процедурално знаење и ништо повеќе. Понатаму, вака сфатеното проверување треба да се надогради со квалитетно следење на постигањата на ученикот сфатени како знаење во поширока смисла, кои во себе ги содржат и целите од афективното подрачје на Блумовата таксономија*. На овој начин, учителот ќе има комплетна слика за постигањата на ученикот и ваквото множество од податоци за постигањата на ученикот тој треба да го преточи во квалитативно-квантитативни вредносни судови, преку кои ќе може да изврши објективно споредување на постигањата на учениците меѓусебно и со поставените норми и стандарди. Само на тој начин може да стане збор за квалитетно вреднување на постигањата на учениците. Потребата ваквото вреднување да се преточи во објективна бројчана оценка ја наметнува потребата да се определи соодност на делот од оценката кој се однесува на знаењето во потесна смисла и делот од оценката кој се однесува на останатите компоненти кои ги чинат постигањата во поширока смисла. Определувањето на споменатиот сооднос не е едноствна задача, но сознанијата од практиката укажуваат дека најдобро е истиот да е 9:1 во корист на знаењето сфатено во потесна смисла.

На барањето наставата да се фокусира на развојот на личноста на ученикот може да се одговори само ако постигањата во поширока смисла се сфатат како *успех* на ученикот, кој никако не може само квантитативно (нумерички) да се изрази, а најмалку како *опит успех* изразен како аритметичка средина на оценките по сите предмети. Овој проблем може да се реши, ако судовите што ги изведува учителот, а се однесуваат на развојна-

та компонента на наставата ги преточи во описни искази, најдобро како надополнување на бројчаната оценка која во тој случај би се концентрирала 100% на знаењето сфатено во потесна смисла на зборот. Последното може да биде ефикасно ако постигањата на учениците во наставата воопшто, се сфатат како *опит успех* кој треба да се вреднува со компилација од вредносните судови на учители по сите предмети кои ученикот ги изучува. Оваа идеја ќе продонесе за приближување на системот на проверување на знаењата и вреднување на постигањата на учениците во наставата по математика и природната група предмети од една страна и наставата од општествената група предмети од друга страна. Притоа, на повисоко научно ниво, треба да се изградат методи со кои наставата кај втората група наставни предмети ќе ја ориентираат кон повисоките нивоа од когнитивното подрачје, по што би следело сеопфатна обука на постојниот наставен кадар за примена на таквите методи. Како резултат на ваквиот, изменет пристап кон методиката на наставата, самото сфаќање кај овие учители за знаењата би се промениле, што ќе резултира со поинаков пристап и во системот на следење, проверување и вреднувања на постигањата на учениците.

1.4. КАРАКТЕРИСТИКИ НА ЗНАЕЊАТА

Во претходните разгледувања рековме дека декларативното и процедуралното знаење заедно го сочинуваат знаењето во потесна смисла на зборот, а додека знаењето во најширока смисла го определивме како постигања. На крајот од овој параграф ќе се осврнеме на карактеристиките на знаењата, т.е. ќе ги наведеме карактеристики на знаењата според И. Ј. Лернер, а тоа се:

- *фреквентност на знаењата*, што претставува број на факти од дадената содржина што ученикот ја усвоил;
- *длабочина* или воочување на причинско-последичните врски што постојат меѓу одделните елементи (поими, факти) во содржината што се усвојува;
- *воопштеност* – воочување на заедничките суштински карактеристики на елементите од содржината;
- *конкретност* – воочување на суштинското што конкретното го поврзува со општото, односно поимот од понизок со поимот од повисок ред;
- *систематичност* – наоѓање на некој ред, некоја реалција меѓу фактите во содржината;

- *системност* – воочување на оние моменти во наставната содржина што се однесуваат на дадена компонента од концептуалниот апарат на некоја теорија;
- *развиеност* и *стегнатост* на знаењата – колку ученикот е во состојба дадената содржина да ја изнесе со богати описи и повеќе факти или тоа да го направи со помалку, но добро избрани, логички и содржински поврзани термини;
- *флексибилност* – колку ученикот може да дојде до одговор на некое прашање на различни начини;
- *сигурност* – колку ученикот може различните факти што ги усвоил, лесно и едноставно да ги репродуцира во различни ситуации, во различни прилики и со различна намена;
- *оперативност* – колку ученикот може вербално усвоените знаења да ги користи во практиката;
- *осознаеност* – колку ученикот е свесен за тоа која од овие карактеристики ги имаат неговите знаења и на кој начин, со кои постапки ги усвоил знаењата токму со таа карактеристика.

2. ПРОВЕРУВАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА И СЛЕДЕЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Образовните системи на скоро сите држави се наоѓаат во постојано движење, кое се одликува со континуирани промени мотивирани од потребата за поквалитетно образование на идните генерации. Меѓутоа, паралелно со реформите расте незадоволството од квалитетот на образованието со кое се здобиваат учениците. Притоа, најчесто причината за опаѓањето на квалитетот на образовните системи се бараат во:

- преоптовареност на учениците, која во прв ред се илустрира со преголемиот фонд на часови во училиштата,
- несоодветни учебниците и сиромашност со други дидактички средства,
- преголем број на ученици во паралелките, итн.

Понатаму, следна забелешка, која во континуитет се упатува на образовниот систем се однесува на оценувањето. Во врска со проблемот на оценувањето, скоро без исклучок се забележува постојан пад на критериумите за оценување. Притоа, може да се каже дека причина за ваквата појава е таканаречената “трка по високи оценки”, која се должи на тоа што оценките најчесто се главен инструмент за мотивирање на учениците.

Имено, оценките се значаен инструмент за постигнување на други цели, како што се запишувањето на повисоките образовни степени, добивање на стипендија итн., што само по себе доведува до трка по високи оценки, која пак придонесува проверувањето и оценувањето да се доживуваат како посебни испитни ситуации обременети со непријатности и негативни последици за сите, за што најчесто се обвинуваат учителите. Така, може да се слушне мислењето дека главно учителите се виновни за лошото оценување, но притоа како да се заборава дека вреднувањето е само компонента од наставата, на која огромно влијание имаат:

- наставните програми,
- дидактичките средства,
- вредносните критериуми за премин во повисок степен на образование итн.

Во врска со проблемот на оценување и неговото решавање, најпрво е потребно да се откријат причините за нереалните оценки. Според проф. Смиљаниќ нереалното оценување најчесто се правда со хуманоста. Образложенијата се различни

- што те чини да му дадеш на детето добра оценка, а на детето и на родителот да му направиш добро;
- пушти го детето нека оди понатаму, секогаш може да се запре;
- интелегентен е тој, кога ќе му затреба ќе научи;
- треба да му се даде добра оценка од педагошки причини, ќе ја заслужи тој;
- па сепак знаел нешто колку за преодна оценка;
- само што идел на часови научил колку за двојка.

Понатаму, оценката се зголемува, на пример, поради тоа што

- детето живее во тешки материјални услови;
- тешки му се стамбените услови;
- дете е на разведени родители;
- има маштеа;
- се заљубило;
- во тие години е ...

Меѓутоа, оценките се зголемуваат и поради критика на праксата на оценување на одреден учител, при што најчесто може да се слушне:

- кога не знам, учителот ми пишува, а кога знам не ми пишува оценка;

- многу бара;
- само еднаш не знаев;
- се извинив, и пак ми пиша единица.

Бројни автори предлагаат различни начини за надминување на проблемот на нереално оценување. Но, се чини дека единствен начин за надминување на слабостите е решавање на проблемот на градење објективни образовни стандарди, но не само тоа, туку градење на објективен систем за обезбедување и контрола на квалитетот на образованието. Притоа, неопходно е системот да функционира така што влезните елементи ќе ги трансформира во излезни, односно да ги постигнува своите цели со процесите на регулирање на активностите, врз основа на повратните информации меѓу влезните и излезните елементи. Целта на овој систем треба да биде постојаното подобрување на квалитетот на предучилишното, основното и средното образование. Последното може да се постигне преку дефинирање стандарди за оценување на учениците, кои неминовно мора да се интегрален дел на наставните и предметните програми, што е основен предуслов тие да се вградат и во оценувањето на постигањата на учениците. Во спротивно, секој учител самостојно ќе гради критериуми и ќе биде единствениот фактор кој ги вреднува постигањата на учениците, што придонесува оценувањето да е премногу субјективно. Неминовна последица на ова е една иста оценка по различни предмети, или по ист предмет во различни училишта или во исто училиште од различни учители од ист учител во различни периоди да покажува различно количество и квалитет на знаење. Уште повеќе, воведувањето парцијални решенија од типот на меѓународна и државна матура, екстерно оценување и слично, доведува до неминовен конфликт со спомнатата субјективност на училишните оценки, а недограденоста на системот за обезбедување и контрола на квалитетот на образованието само ќе го направи тој конфликтот практично нерешлив.

2.1. ПОТРЕБА ДО ПРОВЕРУВАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА И СЛЕДЕЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Наставниот процес, кој како и секој друг процес се одликува со:

- влезни параметри (инпут),
- самиот процес и
- излезни параметри (аутпут),

и тој има и цикличен карактер.

Пред почетокот на реализација на наставата, учителот треба добро да се подготви проучувајќи ги наставната програма, дидактичките и тех-

ничките средства и да пристапи кон изготвување на годишниот глобален план и тематските планирања, за што покасно ќе говориме. Сепак, за успешно реализирање на воспитно-образовниот процес постои уште еден исклучително важен влезен параметар, а тоа се *предзнаењата на учениците*. Имено, не е сеедно дали учителот ќе реализира настава со ученици кои комплетно ги исполнуваат претпоставките за неопходните предзнаења и со група во која постои значителен број ученици кои би имале потешкотии активно да учествуваат во реализацијата на наставата заради недоволни знаења, умеења и вештини за кои постои претпоставка дека учениците веќе ги стекнале. Според тоа, првата потреба од проверување на знаењата на учениците се појавува на самиот почеток на реализација на наставата или во секоја нејзина етапа (целина), кога е потребно е да се проверат предзнаењата на учениците со цел да се постави *дијагноза* на почетната состојба. Во оваа етапа, потребна е проценка и на *способностите* на учениците (нивото на интелигенција, психомоторните способности, зрелоста и слично), затоа што способноста на ученикот може да ги лимитира можностите на ученикот за развој на неговата личност до одредено ниво во одреден временски период. Исто така, *мотивацијата* на учениците на самиот почеток на еден наставен циклус е значаен предуслов од кој зависи кои и какви мерки треба да преземе учителот за да обезбеди успешно совладување на наставната програма или нејзин дел од секој ученик.

При одвивањето на кој било процес, што значи и на воспитно-образовниот процес, неопходни се перманентно следење и контрола на процесот, со цел да се добие *повратна информација* која ќе се употреби за да се обезбеди минималното ниво на квалитет на процесот определен со стандардите и за да може да се преземат *корективни мерки* доколку при одвивањето на процесот нешто тргне во погрешна насока. Според тоа, при реализирањето на воспитно-образовниот процес, учителот мора постојано да го проверува ефектот од спроведените активности. Тоа значи дека буквално на секој наставен час, учителот треба да презема мерки со кои ќе утврди дали настанале посакуваните промени кај личноста на секој од учениците поединечно, односно да се здобива со валидна повратна информација. Конкретно, учителот постојано проверува дали ученикот ги усвоил поимите што се обработуваат, дали ученикот умее да ги примени стекнатите знаења и дали и колку е во состојба новите знаења да ги поврзе, систематизира и синхронизира со претходно усвоените знаења. Од резултатите на ваквото проверување зависи дали учителот ќе ја насочи наставата кон наредните поставени цели или дел од расположивото наставно време ќе го посвети за корегирање на пропустите во постигањата на учениците, се со цел да се постигне добро управуван процес.

Конечно, по завршувањето на одреден циклус, неопходно е да се измерат ефектите од завршениот процес – квалитетот на готовиот произ-

вод. Во таа смисла учителот треба да ги провери севкупните постигања што секој ученик го стекнал во текот на обработката на одредена наставна тема, во текот на едно полугодие, или пак глобално во текот на целата учебна година. Резултатите од оваа проверка ќе му послужат за вреднување на ефектот од наставата во целина, но и за вреднување на постигањата на секој од учениците поединечно. Исто така, овие резултати треба да послужат за ориентација на учениците при изборот на нивното понатамошно образование или можеби професионалната ориентација. Резултатите од наставата, преку квалитетна анализа ќе му послужат на учителот за подобро планирање на нов наставен циклус – со истите ученици на повисоко, или со други ученици на истото образовно ниво. Доколку резултатите од ваквото проверување се квалитетно обработени, може да им послужат и на релевантните образовни институции при донесување валидни одлуки за учениците, наставните планови и програми и за образовните политики.

2.2. ПРИНЦИПИ, ФУНКЦИИ И ЦЕЛИ НА ПРОВЕРУВАЊЕТО

Во претходната точка видовме зошто е потребно да се проверуваат постигањата на учениците. Но, иако зборувавме за потребата од проверување, ние всушност не се осврнавме на тоа што се подразбира под проверување на знаењата, умењата, навиките и способностите на учениците. Во литературата постои своевидна шареноликост при дефинирањето на овој поим, но ние ќе прифатиме дека *проверувањето* се состои од низа активности или постапки во наставниот процес при кои учителот им поставува на учениците прашања, им задава проблеми или други обврски со кои од нив бара да одговорат на прашањата, да ги решат проблемите, да направат нешто или на некој друг начин да покажат што знаат или умеат или како треба да се однесуваат во одредени ситуации. Притоа, прашањата, проблемите и другите видови барања најчесто им се поставуваат во говорна форма – усно или писмено, а понекогаш во слики или графички. Ученикот, во зависност од видот на задачата што му е дадена, подготвува одговор (решение) кој може да биде искажан усно или писмено, преку изведување на одредени практични активности (операции) или преку изработка на некој предмет, при што учителот набљудува, го анализира и вреднува дадениот одговор. Понатаму, самото проверување треба да:

- е составен дел на наставниот процес,
- е планирано, систематско и континуирано,
- се остварува со заедничка соработка со сите учесници во воспитно-образовниот процес,
- обезбедува јавност - дава квалитетна повратна информација на ученикот,

- е во функција на оспособување на учениците за самопроверување;
- го следи целокупниот развој на личноста на ученикот, и
- го остварува барањето за индивидуализација и диференцијација на наставата,

при што е неопходно да ги следи следниве принципи:

- практична изводливост,
- корисност,
- партиципативност,
- транспарентност, и
- етичност,

кои непосредно произлегуваат од самата дефиниција на проверувањето.

Непосредно од дефиницијата на проверувањето произлегуваат и неговите основни функции, а тоа се:

1. *Контролна функција.* Оценувањето овозможува контрола и самоконтрола на ученикот и на учителот, што се постигнува со квалитетни информации и повратни информации во текот на работата, преку евидентирање на резултатите и заклучоците од проверувањето и со споредба на постигнатите резултати со поставените цели и стандарди.
2. *Информативна функција.* Оваа функција е во врска со резултатите од оценувањето и презентирањето на опсегот, точноста, интензитетот, трајноста и применливоста на усвоените знаења и стекнатите умења и вештини.
3. *Превентивна функција.* Оваа функција подразбира откривање на пропустите во знаењата, умењата и вештините на учениците, сè со цел нивно корегирање, како и стеснување на можноста од појава на пропусти како кај учениците кои учителот во моментот ги подучува, така и кај идните генерации ученици.
4. *Оперативна функција.* Оваа функција подразбира превземање мерки и активности за унапредување на воспитно-образовниот процес, се со цел истиот да стане добро управуван процес.
5. *Воспитно-мотивациона функција.* Оваа функција се однесува на развојот на способностите и потенцијалите на личноста на ученикот, унапредување на работната дисциплина, самоконтролата, самовербата и мотивацијата за работа.

Што се однесува до функциите на оценувањето овде уште ќе забележиме дека во наставната практика, најмногу внимание се посветува на првите две функции, а останатите се запоставени. Постојат повеќе причини за ваквата состојба, од кои најјазирати се:

- недостатокот од наставно време,
- големиот број на ученици во паралелките и
- недоволното внимание кон соодветната проблематика во базичното образование и обука на учителите.

Сега може да ги формулираме најважните цели на оценувањето, а тоа се:

- проверувањето на знаењата треба да обезбеди релевантни и објективни информации за знаењата (декларативни и процедурални) на учениците, за квалитетот на таквите знаења, за квантитативните карактеристики на знаењата на ученикот, како и информации за ефект од образовниот процес врз развојот на личноста на ученикот,
- оценувањето треба интегративно да делува на процесот на наставата, т.е. како негова компонента да ја гради, односно да ја комплетира целината на овој процес, делувајќи во интеракција со останатите компоненти на образовниот процес,
- оценувањето треба ја зголемува мотивацијата на учениците, без притоа истото да се доведува директно во контекст со оценката како средство за мотивација од типот награда-казна, што значи дека оценувањето треба позитивно да делува на општиот развој на ученикот (да поттикнува на работа, уредност, истрајност во усвојувањето на знаењата и постигнувањето на подобри резултати - му помага на ученикот да учи и да се развива);
- оценувањето треба да поттикнува здрава критика и самокритика во паралелката и да влијае врз (само)довербата на учениците, нивните способности за критичко мислење и способностите за (само) проверување и (само)вреднување.

2.3. ВИДОВИ ПРОВЕРУВАЊЕ СПОРЕД ВРЕМЕТО КОГА СЕ РЕАЛИЗИРА И ПОТРЕБАТА ОД ПРОВЕРУВАЊЕ

Во претходните разгледувања се осврнавме на принципите, функциите и целите на проверувањето. Меѓутоа, самото проверување се разликува и според времето и потребата за кое се реализира. Така, според времето кога се изведува, проверувањето може да биде:

- *дијагностичко (иницијално)* – се изведува пред почетокот на наставата или пред почетокот на обработка на некоја нова, содржински специфична наставна целина,
- *формативно (тековно, процесно)* – се изведува буквално на секој час, во текот на самиот наставен процес,
- *сумативно (завршно)* – се изведува на крајот на наставниот процес, или по завршувањето на некоја содржинска или временска наставна целина (наставна тема или класификационен период - тримесечје, полугодие), и
- *ипсативно* – оценување кое е насочено кон себе.

Во натамошните разгледувања подетално ќе се осврнеме на споменатите видови проверувања.

2.3.1. ДИЈАГНОСТИЧКО ПРОВЕРУВАЊЕ

Дијагностичкото проверување се карактеризира со тоа што повратната информација која од него се добива е исклучиво наменета за учителот или за образовната институција. Ако оваа повратна информација е потребна за да може да се планира изведувањето на наставата, тогаш таа му служи на непосредно учителот, односно на самиот тој што го изведува ова проверување. Но, под дијагностичко проверување го подразбираме и проверувањето кое го правата институциите во вид на приемен, квалификационен или диференцијален испит. Во тој случај, информацијата за знаењата и умењата на испитаниците и служат на институцијата за да направи селекција (кај приемните испити) или да утврди дали кандидатите можат да ја следат наставата и да го продолжат образованието во соодветната образовна институција.

Дијагностичкото проверување што го изведува самиот учител, за свои потреби, се карактеризира со прибирање податоци и информации за иницијалната состојба на учениците пред почнувањето на учебната година или пак пред реализација на одредена наставна целина. Ова е особено важно кога учителот за првпат изведува настава во некоја образовна група (паралелка). Во овој случај проверувањето не треба да се сведе само на еднократно проверување, на пример со примена на некој тест, писмена или усна вежба и слично, туку треба да потрае извесно време (околу 2-3 седмици) и да опфаќа квалитетно набљудување на учениците во овој период. На овој начин, учителот треба добро да ги запознае своите нови ученици, да изгради почетна слика за (пред)знаењата, но и за способностите и мотивацијата, па и за образовните потреби на секој ученик поединечно. За сето тоа, учителот треба да води евиденција во која педантно ќе ги бележи своите запазувања од целата етапа на дијагностичко проверување, со што

по завршувањето на оваа етапа, учителот ќе поседува множество податоци кои ќе ја формираат првичната претстава за личноста на секој ученик одделно. Информациите што ќе се соберат во оваа етапа, сигурно ќе послужат за поуспешно планирање на самата настава, но може да послужат и за споредување на завршните судови што ќе се добијат со сумативното проверување. Ова нуди можност, за секој ученик поединечно да се направи сериозна споредба на влезните и излезните параметри, по што може да се суди за *промените* кои настанале кај него во текот на еден образовен циклус, односно дури тогаш може да се зборува за ефектот што воспитно-образовниот процес го има вра развојот на личноста на ученикот во набљудуваниот циклус.

Дијагностичко проверување се спроведува и пред секоја наставна тема. На микроплан, дијагностичко проверување се спроведува на секој наставен час во фазата на евокација. Притоа, користејќи бура на идеи, насочен дијалог или некоја друга техника, учителот ја проверува моментната мотивираност на учениците, со соодветни активности ја зголемува мотивацијата за усвојување нови знаења и умеења, но и добива информација за дополнителните активности кои треба да се реализираат за да се остварат микроцелите поставени за актуелниот наставен час.

На крајот од овој дел да забележиме дека во случај кога учителот отпочнува со реализирање настава во нова наставна група, тогаш тој со помош на податоците за ученикот од документите од претходниот период, кои треба да се достапни на учителот, ја комплетира сликата за знаењата, умеењата и способностите на секој ученик одделно.

2.3.2. ФОРМАТИВНО ПРОВЕРУВАЊЕ

Современите теории за образованието во фокусот на наставата е развојот на личноста, а не само знаењата и умеењата кои ученикот ги стекнува. Токму затоа, *формативното проверување* кое се однесува на проверувањата што обезбедуваат информации за учениците и за учителите што се користат за подобрување на наставата и учењето е најважното проверување. Имено, како што во традиционалната настава воглавно се проверува што ученикот знае, во современата настава е важно и како ученикот ги стекнал знаењата.

Важно е да се нагласи улогата на формативното проверување во функција на обезбедување на интегралност на наставниот процес, но и во функција на мотивирање на учениците за редовна работа. Тековното проверување особено е важно за остварување на наставната цел за постојан

развој – *формирање* на личноста на ученикот. Оттаму е и името формативно оценување.

Но, што се случува во практиката. Најчесто со изговорот “недостаток на наставно време”, учителите го запоставуваат формативното проверување. Во наставната практика, дури и она што се нарекува тековно проверување, најчесто не е интегрирано со останатите наставни компоненти. За учениците, но и за учителите проверување има само тогаш кога учителот во посебен дел од часот или на час специјално одвоен за таа намена го прозива ученик и му поставува прашање или задача. Ваквото проверување по правило резултира со оценка. Учителот го оценува одговорот на ученикот и оценката ја забележува во училишниот дневник или пак прави своја интерна белешка. Природно е да се запрашаме што се случува во останатите делови од часот, или на часовите на кои нема ваква активност. Јасно, во ваквите случаи учителот најчесто на учениците им пренесува нови знаења, реализира определен експеримент и слично, со што всушност имаме ситуации во кои наставата не може да ги премине нивоата на разбирање и примена. Затоа и проверувањето кај вака организираната настава го има предвид само декларативното знаење, што значи дека немаме знаење ниту во потесна смисла и никако не може да стане збор за знаење во поширока смисла на зборот, т.е. за постигањата на учениците во целина. Понатаму, ваквото проверување не може да се однесува на мал квантум на наставни содржини, па тоа најчесто се однесува најмалку на цела наставна тема, што значи дека започнува најрано еден месец по почетокот на наставата. Се разбира, ова е крајно негативно бидејќи по правило учениците или се малку или воопшто не се активни сè до времето кога се очекува да има поинтензивна *кампања* на проверување и оценување. Исто така, ваквиот начин ангажира повеќе наставно време, па затоа откако еден ученик ќе биде испрашан, до следното проверување на неговото знаење обично поминува многу време. Според тоа, најголемиот недостаток на вака сфатеното тековно проверување е тоа што истото резултира со кампањско учење, па затоа наместо тековно или етапно проверување слободно можеме да го наречеме кампањско проверување. Јасно, ваквиот начин на проверување има ефект на “испитна треска” која учениците ги зафаќа четири пати годишно и тоа: за време на тримесечните кампањи, пред крајот на првото полугодие и пред крајот на учебната година. Ваквото тековно проверување и оценување е всушност сумативно проверување и оценување или како што некои автори го нарекуваат микросумативно проверување. Значи, тоа не се изведува континуирано, туку по завршувањето на некој наставен потциклус, или микроциклус.

Формативното проверување се карактеризира со својата континуираност. Тоа во современата настава е многу различно од кампањското про-

верување, бидејќи знаењата на учениците се проверуваат буквално речено на секој час.

Наставата по секој наставен предмет може да се организира така што да бидат задоволени сите барања на современите образовни теории. Имено, при обработката на нови наставни содржини со користење на погодни наставни методи, може континуирано да се следат постигањата на учениците. Во етапата евокација на знаењата, преку проверката на домашната работа успешно може да се проверува степенот на усвоеност на знаењата и умењата на учениците. Имено, со погоден избор на домашните задачи и со добро осмислена и организирана евокација, учителот може ефикасно да ги провери знаењата на повеќе ученици од претходните часови, истовремено насочувајќи го интересот и мотивацијата на најголемиот број ученици кој реализирање на целите поставени за актуелниот час.

За време на етапата сознавање на значењето, при артикулацијата на часот, повторно преку вешто осмислени прашања или проблемски ситуации учителот ги води учениците кон усвојување на нови знаења (на пример на евристичен начин), при што постојано е во интеракција со активностите на учениците. Тоа на учителот му овозможува двонасочна комуникација со учениците, при што им помага во процесот на учење (ги поучува) и истовремено добива информација за нивните актуелни знаења, проблемите со кои се соочуваат во процесот на учење, причините за овие потешкотии, за нивната мотивација, активност, како и за други компоненти на личноста на ученикот - ставовите, навиките итн.

Во етапата рефлексивност, учителот ги проверува знаењата на учениците, при што ова проверување е насочено кон контрола дали се постигнати микро-целите поставени за тој наставен час. Тоа е повторно проверување.

После неколку часа од типот обработка на нови наставни содржини, најчесто се организира час за повторување, експериментирање или увежбување. За разлика од наставата по општествената група предмети, која најчесто се сведува на часови за обработка на нови содржини, дебатни часови и часови за повторување, на кои по правило се спроведува проверување, повторувањето во наставата по природната група предмети најчесто се спроведува преку часови за експериментирање и увежбување. Се разбира, повторувањето треба да се реализира преку реализирање на одбрани експерименти, разрешување на практични проблемски ситуации или решавање на внимателно одбрани задачи за вежбање, но притоа и проверувањето на постигањата на учениците не смее да е заборавено. Имено, ако часовите за повторување се организираат преку самостојна работа или работа во мали групи, тогаш учителот на овие часови има можност да биде

во улога на сервер-постојано да им е на располагање на учениците и да им дава помош на учениците за разрешување на одредени прашања. Притоа, помагајќи им тој стапува во интеракција со нив, што значи дека набљудува како се справуваат со проблемите и со какви потешкотии се среќаваат. На тој начин, помагајќи им, учителот го проверува нивното знаење, па затоа на само еден наставен час, учителот има увид во постигањата на секој од учениците што се однесуваат на наставните содржини од тој период - претходните неколку часа.

Не е тешко да се забележи дека вака организираната настава во себе успешно го вградува формативното проверување. Меѓутоа, дури и при најдобро организираната настава присутни се потешкотии при реализирањето на формативното проверување. Имено, основна потешкотија со која учителите се среќаваат при формативното проверување се јавува кога треба да се вреднуваат постигањата на учениците. Притоа се поставува прашањето - што со податоците од проверувањето? Дали од секое проверување треба да произлезе некој вредносен суд или уште повеќе, бројчана оценка.

Ќе разгледаме две ситуации во врска со овој проблем. Во традиционалната настава, како што веќе нагласивме, проверувањето по правило резултира со оценка. Некои учители оценката ја забележуваат во својата интерна евиденција, а некои директно во дневникот. Тоа е едната крајност. Но, таа е толку честа, што станува традиција, а со тоа и потреба на образовните авторитети. Ако не е така, ќе следува ситуацијата - никогаш не ме испраша, како тогаш ми стави оценка? Другата крајност се јавува во ситуацијата кога учителот го изведува формативното проверување, но не ги евидентира своите заклучоци, туку ги помни. Тоа значи дека врз основа на информациите што ги добил од формативното проверување, тој гради слика за постигањата на ученикот, а потоа врз основа на оваа слика ја изведува и оценката. Главниот недостаток во оваа ситуација е огромната субјективност. Имено, учителот нема релевантни показатели со кои може да ја поткрепи дадената оценка, туку се базира само на своите впечатоци. Ваквата практика е можна и поради тоа што и формално-правно учителот е неприкосновен фактор што ја формира оценката за ученикот. Последното оди во прилог на барањето учителот континуирано да ги евидентира информациите што ги добива од формативното проверување. Како инструменти за оваа намена може да се користат чек-листи, инвентари на личност и секако нешто како досие за секој ученик - простор во кој учителот редовно ќе ги забележува резултатите од формативното проверување на секој ученик поединечно. Ваквите податоци може квантитативно (колку домашни работи изработил, колку наставни ливчиња решавал и сл.), но и квалитативно (како ученикот добил некоја идеја, како решил некој нестандартен проблем, како дискутирал по некое прашање и сл.) меѓусебно да се

споредуваат, што е неопходно за да се дојде до правилно вреднувањето на постигањата на секој од ученик.

Но, дали е тоа доволно? Дури и после сеопфатна анализа на собраниите податоци и нивно квалитетно меѓусебно споредување, како и после споредувањето на ваквите постигања со образовните стандарди, прашање е дали може објективно да се вреднуваат постигањата на учениците. Секако, за комплетирање на сликата за постигањата на учениците, неопходно е завршно (сумативно) проверување по завршувањето на секоја наставна целина.

Пред да преминеме на разгледување на сумативното оценување ќе се навратиме на основните принципи на кои треба да се темели формативното оценување и кои ги одразуваат основните карактеристики на концептот. Тие се:

1. *Проверувањето за учење треба да биде дел од ефективното планирање на наставата и учењето.* Планирањето на учителот треба да обезбеди можности како за ученикот така и за учителот да стекнуваат и користат информации за напредувањето во остварувањето на образовните цели. Тоа, исто така, треба да биде флексибилно за да соодветствува на почетните и тековните идеи и способности. Планирањето треба да вклучува стратегии за да обезбедува учениците да ги разбираат целите што ги постигнуваат и критериумите што ќе бидат применувани во оценувањето на нивната работа. Треба, исто така, да се планира како учениците ќе добиваат повратни информации, како тие ќе учествуваат во оценувањето на сопственото учење и како ќе им се дава помош за да напредуваат.
2. *Проверувањето на учење треба да се фокусира на тоа како учениците учат.* Процесот на учењето треба да биде во фокусот на размислувањата како на ученикот така и на учителот, кога се планира проверувањето и кога се интерпретираат показателите. Учениците треба да станата свесни за тоа “како” се учи, како што се свесни за тоа “што” се учи.
3. *Треба да се прифати дека проверувањето за учење има централна улога во практиката на часовите.* Голем дел од она што учителите и учениците го работат на час може да се опише како проверување, за што веќе говоревме. Имено, задачите и прашањата ги поттикнуваат учениците да ги покажат своите знаења, умеења и способности. Тогаш, тоа што учениците го кажуваат и го прават се набљудува, се бележи, се интерпретира и се донесуваат судови за тоа како може да се подобрува учењето. Овие процеси на проверување претставуваат основен дел

од секојдневната практика на часовите и ги вклучуваат како учителие, така и учениците во размислувањето, комуницирањето и донесувањето одлуки.

4. *Проверувањето за учење треба да се смета како клучна професионална способност на учителите.* На учителите им се потребни професионални знаења и умења за да:

- го планираат проверувањето,
- го набљудуваат учењето,
- ги анализираат и интерпретираат податоците од набљудувањето,
- им даваат повратни информации на учениците и
- им даваат поддршка во самооценувањето.

На учителите треба да им се дава поддршка во развивањето на овие способности преку базичен и континуиран професионален развој.

5. *Проверувањето на учење треба да биде одмерено и конструктивно бидејќи секое проверување има емотивно влијание.* Учителите треба да бидат свесни за влијанието кое коментарите, белешките и оценките можат да го имаат врз самодовербата и ентузијазмот на учениците и тие треба да бидат колку е можно поконструктивни при давањето на повратните информации. Коментарите насочени повеќе кон работата отколку кон личноста се поконструктивни, како за учењето така и за мотивирањето на учениците.

6. *Проверувањето за учење треба да ја земе предвид и важноста на мотивацијата на ученикот.* Проверувањето што го поттикнува учењето повеќе ја негува мотивацијата преку нагласување на напредокот и постигањата, отколку преку укажување на неуспехот. Споредувањето со други ученици кои што биле поуспешни веројатно нема да ги мотивира учениците. Тоа може, исто така, да доведе до нивно повлекување од процесот на учење во области во кои што биле доведени во ситуација да се чувствуваат дека тие “не се добри”. Мотивацијата може да биде одржувана и поттикнувана преку методи на проверување кои ја штитат автономијата на ученикот, даваат конструктивни повратни информации и можност за самонасочување.

7. *Проверувањето на учење треба да промовира ангажираност во постигнувањето на образовните цели и споделено разбирање за критериумите според кои учениците се проверуваат и оценуваат.* За да биде учењето ефективно, учениците треба да разбираат што е тоа што тие се обидуваат да го постигнат – и што е тоа што сакаат да го постигнат. Разбирањето и ангажирањето се јавуваат кога учениците учествуваат во одлучувањето

за целите и во идентификувањето на критериумите за напредувањето. Информирањето за критериумите за оценувањето вклучува дискусии за нив со учениците, при што треба да се користат термини кои тие ги разбираат и како истите се применуваат.

8. *Учениците треба да добиваат конструктивни упатства како да ја подобруваат својата работа.* На учениците им се потребни информации и упатства за да го планираат своето учење. Учителите треба да:
 - ги потенцираат добрите страни на ученикот и да даваат насоки како истите да ги подобруваат,
 - бидат јасни и конструктивни во отстранувањето на пропустите кои ги прават учениците,
 - се грижат учениците постојано да ја подобруваат својата работа.
9. *Проверувањето на учење ја развива способноста на учениците за самооценувањето за тие да можат да размислуваат за своето учење и да го насочуваат.* Самостојните ученици имаат способност да бараат и стекнуваат нови способности, нови знаења и нови умеења. Тие се способни да размислуваат за тоа како учат и да ги идентификуваат наредните чекори во своето учење. Учителите треба да ја поттикнуваат кај учениците желбата и способноста да ја превземаат грижата за своето учење преку развивање на способностите за самооценување.
10. *Проверувањето за учење треба да го опфаќа целиот опус на постигањата на сите ученици.* Проверувањето за учење треба да се користи за да се зголемуваат можностите на учениците да стекнуваат знаења во сите подрачја од образовната активност. Тоа треба да им овозможува на сите ученици да го постигнуваат она што најдобро можат да го прават и нивните напори да бидат признаени.

На крајот од овој дел накратко ќе се осврнеме на реализирањето на формативното оценување. Формативното оценување вклучува користење на оценувањето на часовите со цел да се унапредат постигањата на учениците. Тоа е засновано на идејата дека учениците најдобро ќе работат до колку ја разберат целта на нивното учење, до каде се наоѓаат во однос на таа цел и на кој начин можат да ја постигнат (или да ги поправат пропустите во нивното знаење). Ефективното оценување за учење се одвива постојано на часовите. Тоа вклучува:

- споделување на целите на учењето со учениците,

- помагање на учениците да ги дознаат и препознаат стандардите кон кои треба да се стремат,
- давање на повратна информација која ќе им даде насока на учениците како да се подобрат,
- верување дека секој ученик може да се подобри во однос на претходните постигања,
- заемно разгледување и анализирање на постигањата и напредокот на ученикот од страна на наставникот и на ученикот,
- обучување на учениците да користат техники и самооценување за да ги откријат аспектите во кои треба да се подобрат,
- верување дека мотивацијата и самовербата, кои се клучни за ефективното учење и напредок, можат да се подобрат преку користење на ефективни техники за оценување.

Истражувањата покажале дека кога учениците учествуваат во процесот на оценување, стандардите се подигнуваат, а учениците се охрабрени да преземат акција за подобрување на нивното учење.

Главни карактеристики на формативното оценување се:

1. *Споделување на целите на учењето.* Поголем број на планови за работа ја нагласуваат потребата од јасно идентификување на целите на часот. Наставниците треба да бидат сигурни дека учениците можат да ја препознаат разликата меѓу работата на задачата и целта на учењето (да го одделат она што треба да го направат од она што ќе го научат). Критериумите за оценување на резултатите од учењето често се изразени на формален јазик кој учениците често не можат да го разберат. Со цел учениците целосно да се вклучат во процесот на учење, учителот треба:
 - јасно да објасни зошто некоја лекција се предава или некоја активност се изведува, користејќи сè со терминологија на целите на учењето,
 - да им ги објасни на учениците конкретните критериуми за оценување,
 - да им помогне на учениците да разберат што направиле добро, а кои аспекти на учењето треба да ги подобрат.
2. Користење на ефективни техники на поставување прашања.
3. Користење на стратегии на вреднување и давање повратни информации.
4. Заемно оценување и самооценување.

Овде уште да забележиме дека доколку на учениците им се даде можност да погледнат примероци на задачи од други ученици, тоа може да им помогне подобро да разберат како да ги користат критериумите за оценување за да го оценуваат сопственото учење. Останатите три карактеристики на формативното оценување дополнително ќе бидат разгледани.

2.3.3. СУМАТИВНО ПРОВЕРУВАЊЕ

Според некои автори, сумативно е само проверувањето кое се изведува на крајот од еден наставен циклус – на крајот на учебната година, на крајот од одделенската настава во основното училиште, на крајот од задолжителното образование или на крајот на средното образование – матура (испит на зрелост). Но во согласност со важечките прописи и акти кај нас, најмалку четири пати годишно, учителите се доведени во ситуација да напишат оценка која треба да се однесува на постигањата на учениците во еден подолг претходен период. Таа оценка може да се изведе врз основа на судовите изведени од формативното, тековно проверување, но веќе видовме дека тоа произведува извесни проблеми, особено поради барањето за објективност. Значи, проверувањето што се изведува во текот на наставната година, повремено има сумативен карактер. Ако ова се оддели во посебен вид на проверување, тоа би било микро-сумативно проверување. Сепак, бидејќи овој вид оценување произлегува од потребата да се провери ефектот од еден наставен (под) циклус спаѓа во категоријата завршно (сумативно) проверување.

Сумативното проверување обезбедува информации за постигањата на учениците кои се однесуваат на подолг временски период. Од овие информации најмногу зависи вреднувањето на постигањата на ученикот и изведувањето на завршната оценка. Во случајот кога таа завршна оценка се однесува на целата учебна година, тоа се прилагодува на административната функција на оценката – оценка која ќе послужи како мерка која влијае на одлуките од видот:

- дали ученикот ќе напредува во следното образовно ниво,
- дали ќе може да продолжи во одредена образовна установа,
- дали ќе добие стипендија и слично.

Останува прашањето, дали ваквата завршна оценка треба исклучиво да се темели на информациите од сумативното проверување? Што е со целата енергија потрошена при формативното проверување? Сметаме дека во одреден сооднос, врз завршната (сумативна) оценка, освен информациите од сумативното проверување, во помал дел треба да влијаат и информациите од формативното проверување. За да не се наруши високиот степен

на објективност, доволно е да се прифати моделот во кој оценката ќе биде објективна мерка на знаењата покажани при сумативно проверување, а на учителот да му се дозволи степен на слобода со описни искази да ги вреднува постигањата на учениците преку судови изведени врз основа на квалитетно и континуирано нормативно проверување и следење на постигањата на учениците.

На крајот од овој дел да споменеме дека основните цели кои треба да се постигнат со сумативното оценување се:

- да се идентификуваат учениците за дополнителна и додатна настава, при што учителот на извесен начин врши индивидуализација на наставата,
- учителот ги бележи вреднувањата на напредокот на учениците, при што дава оценки за истите сè со цел учениците, нивните родители и надлежните органи во образованието да бидат информирани за постигањата на учениците, и
- за да ја вреднува својата работа учителот прави осврт на знаењата кои учениците ги покажале по завршувањето на определен час, што значи дека учителот може да констатира кои часови биле успешни, а со тоа има можност да оцени кои наставни стратегии биле успешни и да ги идентификува евентуалните промени кои треба да ги направи сè со цел да ја подобри сопствената работа.

2.3.4. ИПСАТИВНО ПРОВЕРУВАЊЕ

Оценувањето кое е насочено кон себе го нарекуваме *ипсативно* оценување. Основна карактеристика на ова оценување е тоа што учениците ги споредуваат своите постигања со сопствените поранешни постигања. Ваквата поставеност на ипсативното оценување ученикот го поттикнува да се натпреварува самиот со себе си, па затоа ипсативното оценување го форсира самоподобрувањето, без оглед на напредокот на другите и слободно може да се каже дека ова оценување всушност е еден вид индивидуализирање на оценувањето. Ипсативното оценување може да се смета како еден приод кон оценувањето кој вклучува:

- критериумските оценувања во кои изведбените стандарди се јасно прецизни (наспроти оценувањето базирано на норми),
- целно-насочените повратни информации, кои што обезбедуваат јасни насоки за тоа како да се подобруваме (наспроти повратните информации кои што се базирани на постигањата, кои

обично вклучуваат споредување со успехот на другите ученици),

- активно вклучување на учениците во самооценувањето (наспроти пасивните вежби на самододелување оценки),
- давањето на извесен избор на учениците на начинот по кој што одат во постигнувањата на образовните задачи.

На крајот од овој дел, без подетално да разгледуваме ќе забележиме дека ипсативното оценување е тешко применливо во ситуации во кои се практикува оценување базирано на норми. Меѓутоа, тоа е особено погодно за оние со ниски постигнувања на кои оценувањето базирано на норми им дава мал мотив да покажуваат добри резултати.

2.4. ПОВРАТНА ИНФОРМАЦИЈА

Во претходните разгледувања ја споменавме повратната информација и се осврнавме на нејзиното значење за севкупниот воспитно-образовен процес. Во овој дел подетално ќе се осврнеме на истата. Основни цели:кои сакаме да ги постигнеме со повратната информација се:

- да се согледа како ефикасната повратна информација придонесува за напредување на учениците,
- да се запознаат стратегиите за давање ефикасна повратна информација,
- да се помогне во планирањето на ефикасна усна повратна информација.

Проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците можат да опфатат како еден вид на педагошки дијалог меѓу наставникот и ученикот за квалитетот на учењето, поучувањето и знаењето (постигањата). Таквата двонасочна комуникација обезбедува повратни информации кои овозможуваат поквалитетно дијагностицирање на тешкотиите на кои наидуваат учениците во процесот на учење, како и причините за тоа, создава услови за заедничко усогласено насочување и подобрување на натамошното учење, помага за поуспешно динамично приспособување на поучувањето, согласно со потребите на ученикот, како и послободно, творечко презентирање на наученото.

Својата формативна улога проверувањето и оценувањето ја остваруваат дури тогаш кога на ученикот му нуди квалитетна повратна информација.

Ефектите на повратната информација кај ученикот зависат од времето кога таа се дава, од начинот на кој се дава, од нејзината содржина и од тоа како е таа структурирана и интерпретирана. Но дали и колку повратната информација ќе биде ефективна ќе зависи и од тоа како неа ја интерпретира, односно доживува ученикот. Во зависност од сето тоа, повратната информација ученикот може да ја доживее како информативна, мотивирачка или контролна, што не е сеедно.

Повратните информации што учителот му ги упатува на ученикот во текот на формативното следење и проверување на неговите постигања може да бидат искажани усно или дадени во пишана форма. Природно е да се запрашаме:

Кога и за што се дава повратната информација?

За да одговориме на ова прашање, прв ќе забележиме дека повратна информација е тековна. По својата природа и функција таа е еден вид помош за ученикот во процесот на учење, која е ефективна ако се дава во вистинско време, т.е. кога таа е најнеопходна. Затоа повратната информација мора да се даде во текот на самиот процес на учење, бидејќи:

- Додека трае процесот на учење, учителот може и треба да целосно да го следи овој процес и за своите сознанија да го информира ученикот. Според тоа, ученикот треба да добие сознанија за процесот на формирањето на знаењето, за усвојувањето на вештините, односно за целиот процес на учење. Овие информации треба да му овозможат на ученикот подобро да го осознае процесот на сопственото учење и истиот да го менува, се со цел да го направи поефикасен.
- Во исто време, пожелно е учителот да го анализира процесот на подучување, што значи учителот треба да вреднува колку било успешно поучувањето и, по потреба, тоа да се коригира и подобрува. На тој начин добиваме ефективна повратна информација која овозможува целно-процесно планирање на наставата и постојано следење на постигањата, кое во крајна линија треба да резултира успешно самостојно регулирање на учењето.

Понатаму, повратната информација треба да се дава и при презентација на наученото, бидејќи:

- Во процесот на проверување се прибираат и проценуваат податоци за постигањата на ученикот, т.е. за обемот и квалитетот на усвоените знаења, стекнатите вештини, способности и ставови на ученикот, како тие знаења се презентираат, искажуваат, односно како нив ученикот ги сваќа, објаснува, толкува аргументира, применува итн. Јасно, ова е погоден момент на уче-

никот да му се даде подетална повратна информација за неговите постигнувања.

Што се однесува до самата повратна информација, природно е учителот да тежнее истата да има позитивно влијание на ученикот. Оттука се наметнува прашањето:

Како ученикот ја прими и доживува повратната информација?

Одговорот на ова прашање не е едноставен, но ќе забележиме дека приемот и успешноста на повратната информација зависни од начинот и контекстот во кој таа се дава. Во натамошните разгледувања ќе укажеме на неколку моменти кои можат да придонесат за поголема ефективност на повратната информација. Имено:

- Говорната (усната) информација дозволува користење и на невербални средства како што се: изразот на лицето, тонот на гласот, “говорот” на телото (движење на рацете, и слично), па затоа од непосредната усна информација ученикот може да добие повеќе информации одколку од пишаната. Покрај тоа, при усна повратна информација имаме непосредна комуникација на учителот и ученикот, што на ученикот му овозможува да побара и да добие дообјаснување, со што подобро ќе ја разбере повратната информација.
- При непосредно информирање учителот веднаш може да ги забележи реакциите на ученикот. Ова е особено важно, бидејќи ако учителот забележи дека пораката не е добро разбрана, тогаш тој има можност истата да ја пренесе со други зборови, на друг начин.
- При непосредна повратна информација учителот има можност да ги набљудува и невербалните реагирања на ученикот (изразот на лицето, движењето на телото и слично), што на учителот му овозможува своите забелешки да ги соопшти на најпогоден начин, при што ќе искаже целосен респект кон личноста на ученикот.
- При давањето на повратната информација учителот треба да добие сознанија како ученикот гледан на своето напредување, на својата успешност во училишната работа. Последното може да се постигне само ако при давањето на повратната информација постои дијалог меѓу ученикот и учителот, при што реакциите на ученикот на добиената повратна информација покажуваат дали целта што ја имал учителот при давањето на повратната информација е постигната.

Како што рековме, повратната информација треба да биде ефективна. Природно е да се запрашаме:

Какви карактеристики треба да има ефективната повратна информација?

Одговорот на ова прашање ќе го сублимираме во неколку точки. Имено:

- Пред се повратната информација мора да е корисна, што значи дека таа мора да ги има предвид потребите на ученикот и да биде формулирана и дадена така што позитивно ќе влијае врз работата на ученикот. Учителот може да смета дека повратната информација позитивно влијаела врз работата на ученикот, ако ученикот одговори со повратна информација која ја надополнува пораката од учителот, што пак значи дека повратната информација е јасна и прифатена.
- Ако со повратната информација се оценува, тогаш таа може негативно да влијае на комуникацијата на релација учител – ученик, па дури може да предизвика нејзино прекинување. Меѓутоа, ако учителот го одбегнува јазикот на оценување, тогаш дури и кога укажува на пропустите во постигањата на ученикот голема е веројатноста дека тоа кај ученикот нема да предизвика негативна реакција и дека повратната информација позитивно ќе влијае врз ученикот.
- Повратната информација што учителот му ја дава на ученикот мора да биде базирана на факти и истата не смее да содржи паушални оценки. Затоа, истата мора да биде поврзана со конкретна активност на ученикот, што ќе овозможи и корекциите во учењето и подучувањето да се однесуваат на конкретна содржина или вештина, а со самото тоа да се добие информација што, како и зошто треба или не треба да се менува во процесот на учењето.
- Учителот мора да даде јасна и детална повратна информација за постигањата на ученикот, која треба да биде проследена и со конкретни насоки за идното учење на ученикот. Имено, повратната информација во вид на кус коментар од типот “точно”, “не е точно”, “добро е”, “така е” и слично, нема да биде многу делотворна, а истото важи и за повратната информација која не нуди ништо конкретно, како на пример: “Вежбај повеќе”, “Кога се учи, треба да се мисли” и слично или пораки од видот: “Те мрзи да учиш”, “Не те бидува за ништо” итн.
- Пожелно е повратна информација да не содржи директиви, ниту пак да нуди директна помош од учителот во решавањето на проблемите на кои наидува ученикот. Последното е особено важно, бидејќи повратната информација не смее од ученикот да направи зависник од директна помош во надминување на

пропустите во постигањата. Имено, помошта на учителот треба да биде таква што преку повратната информација ученикот да се оспособува сам да си поставува цели и да решава проблеми. Тоа значи дека учителот треба да умее да ги поттикнува учениците сами да доаѓаат до информации за сопственото учење, да соработуваат, да си помагаат меѓу себе, да размислуваат дека “неуспехот” е значаен чекор на патот кон успехот и дека погрешните решенија во почетокот се нормален пат кон успехот.

- Причините за исти или слични пропусти во постигањата на учениците не се исти кај сите ученици, па затоа повратната информација треба да биде персонализирана и позитивно насочена кон личноста на ученикот. Всушност ваквата повратна информација треба да е интегрален дел од индивидуализацијата на наставата.
- При давањето на повратната информација потребно е активно учество на ученикот. Имено, добрата повратна информација треба да овозможи ученикот самиот да ги осознае силните и слабите страни на своето неговото учење и тој да може да изнаоѓа начини за негово подобрување. Затоа успешна комуникација со учителот е онаа после која кај ученикот ќе се појави желба за подобрување и надминување на констатираните слабости и тој ќе има план како тоа може да го постигне.

Погоре ги разгледаваме карактеристиките на ефективната повратна информација. Оттука се наметнува прашањето:

Кои се ефектите од квалитетна формативна повратна информација?

Одговорот на ова прашање може да се сублимира во фактот дека квалитетната и благовремената повратна информација го подобрува учењето на ученикот. Имено, испитувањата покажуваат дека учениците кои добивале благовремена и соодветна повратна информација во 75% случаи постигнале повисок краен резултат во споредба со претходно утврдените стандарди за оценување. Затоа, од исклучителна важност за поттикнување на учениците за учење е тие секогаш да добиваат повратна информација за своето напредување уште во текот на процесот на учење. Ваквата информација на ученикот ќе му послужи да процени дали и колку напредува во учењето и до кој степен ги постигнува поставените цели. Тоа, пак, од своја страна ученикот го стимулира, доколку е потребно, да вложува дополнителни напори. Понатаму, квалитетната повратна информација му помага на ученикот да го подобри своето учење така што таа му овозможува:

- да стане свесен за сопствените постигнувања, за добрите страни на своето учење, за тоа дали и колку напредувал – што

добро научил, во споредба со своите поранешни постигања, да ја согледа разликата меѓу очекувана и постигнатата цел,

- да ги осознае сопствените слабости, грешки и тешкотии во учењето, но и причините за тоа,
- да добие насоки за потребните активности со кои ќе успее да ги надмине констатираните пропусти во своите знаења, умеења и вештини, но и за тоа како учи.

Понатаму, квалитетната повратна информација го мотивира ученикот, бидејќи

- навремената, соодветна и релевантна повратна информација позитивно влијае врз мотивацијата за учење, бидејќи ако повратната информација од учителот кажува колку ученикот е блиску до саканата цел, тогаш тоа може да го охрабри да постигне и повеќе,
- ако повратната информација од наставникот е дека ученикот ја постигнал целта, тогаш тој се чувствува задоволен, компетентен и со верба во себе да си постави нова и повисока цел,
- повратната информација која не е дадена во вид на суд и не е насочена кон личноста на ученикот, туку се однесува на неговите постигања е мотивирачка и таквата повратна информација ученикот го поттикнува да учи, кај него развива желба да ги постигне посакуваните цели, да ги задоволи своите сознājни потреби (мотиви, интереси и слично).

На крајот од овој дел да споменеме дека ефективната и квалитетната повратна информација позитивно влијае ученикот самостојно да го планира, насочува и изведува учењето. Тоа го овозможува само онаа повратна информација која е производ на конструктивистички насоченото формативно проверување и оценување на учењето, на декларативното и процедуралното знаење. Понатаму, таа упатува на учење, бидејќи ефективната повратна информација, покрај другото, поттикнува на кооперативно учење, при што самостојно формираните и обликувани упатства постојано се усогласуваат насоките кои ги дава учителот. Овде уште ќе споменеме дека ефективната повратната информација помага за вреднување на напредокот на ученикот. Имено:

- ефективната повратна информација, во процесот на утврдување на знаењето, на ученикот треба да му овозможи што самостојно вреднување на постигањата и определување на личните цели за идното учење, а тоа е можно кога, врз основа на претходно утврденото знаење во текот на формативното проверување, на ученикот ќе му се даде соодветна информација со

насоки за наредните степени на учење и вреднување на резултатите од учењето.

- насочувањето треба да се базира на позитивно поттикнување на регулирањето на успешно решавање на проблемите, како и на развивање на способноста за развој на учењето и презентирање на наученото.

Конечно, преку постапките на следење на напредокот со цел да му се даде на ученикот повратна информација и преку дијалогот на учителот и ученикот, учителот добива сознанија за напредокот на ученикот и истите ги користи во процесот на дијагностичкото, формативното, а понекогаш и во сумативното проверување и оценување.

2.5. НАЧИНИ И ФОРМИ НА ПРОВЕРУВАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА

Во претходните разгледувања се осврнавме на видовите проверувања според времето кога проверувањето се реализира. Во овој проверувањето ќе го разгледаме од аспект на методите, постапките и техниките кои се користат при проверувањето, при што согласно овие критериуми можеме да зборуваме за три начини на проверување на знаењата и тоа за:

- усно проверување,
- писмено проверување, и
- практично проверување.

2.5.1. УСНО ПРОВЕРУВАЊЕ

Постапката при која учителот усно поставува прашање или задача, а ученикот исто така усно одговара или дава свое мислење се вика *усно проверување*. Ваквиот начин на комуникација е секојдневен, па затоа овој начин на проверување најчесто се користи во наставната практика. Притоа се користи дијалошкиот наставен метод, кој всушност се состои во планиран разговор меѓу учителот и ученикот и кој најчесто се артикулира преку формата прашање-одговор.

Според насоката на усна комуникација меѓу учителот и ученикот, може да се зборува за два вида на дијалог - *катехетички* и *евристички*. Кај катехетичкиот разговор, учителот поставува прашање на кое од ученикот бара еднозначен одговор. Најчесто одговорот се состои од репродукција на некоја информација, која учителот претходно му ја соопштил на ученикот. Затоа прашањата бараат од ученикот само да се присети на очекуваниот одговор, а вреднувањето често зависи од тоа како ја репродуцирал инфор-

маџијата, колку точно “го изрецитирал” одговорот и колку брзо се присетил на истиот. Имајќи го предвид претходно кажаното можеме да заклучиме дека оваа активност главно го активира помнењето на ученикот и неговите вербални способности. Ваквиот разговор обично ја насочува наставата на првите две нивоа од когнитивното подрачје - нивото на препознавање и нивото на разбирање.

Катехетички разговор е на пример кога учителот ќе праша: *Што е кружница?* Притоа, од ученикот се бара да ја искаже дефиницијата за кружница на ист начин како што е запишана во учебникот или како што ја презентирал учителот. Ако на следното прашање: *Кои се можните взаемни положби на две кружници?*, повторно се бара само да се набројат положбите наведени во учебникот (по тој редослед), тогаш станува збор за класичен катехетички разговор на тема кружница. Во наставата по групата природни науки, најмногу поради нивната природата на предметот, ваквите разговори се ретки. Меѓутоа, во наставата по групата општествени науки, често пати непотребно и самата настава е катехетичка, а усното проверување се сведува на поставување на прашање кое е наслов на некоја лекција, а од ученикот се очекува да ја раскаже целата лекција. Притоа, како по правило, колку оваа репродукција е поверна на текстот од учебникот и колку “потечно” е раскажувањето, толку е подобра оценката што ја добива ученикот, појава која во најмала рака е штетна за севкупниот развој на ученикот.

Евристичкиот разговор е извонредно добра техника при обработувањето на нови наставни содржини, особено ако се имаат предвид барањата за формативно проверување. При овој разговор, учителот поставува прашања за чиј одговор не е доволно да се активира само помнење на ученикот, туку се неопходни и други, посложени мисловни операции. Кај евристичкиот разговор, учителот често бара од учениците да дадат сопствено мислење, идеја за решавање на некој проблем, слободно да дискутираат, па дури и да дебатираат на одредена тема и слично. Ваквиот разговор мора да е насочен од страна на учителот и да резултира со некое “ново” откритие, односно со ефект дека самиот ученик дошол до сознание за некоја научна вистина.

На пример, учителот може да нацрта кружница и една точка во нејзината внатрешност. Прашањето дали точката лежи на кружницата остава простор за ученикот да одговори потврдно, што би водело кон разговор кој ќе резултира со формулирање на поимот круг од страна на ученикот со негови сопствени зборови и дискусија за разликата меѓу поимите кружница и круг; во случај на одречен одговор, евристичниот разговор би се насочил кон откривање на суштинското својство на точките од кружницата, т.е. сознанието дека точките на кружницата се наоѓаат на константно расто-

јание од една фиксирана точка, што повторно резултира со формулирање на нова дефиниција од страна на ученикот и повторно кон дискусија за кружницата и кругот. Разговорот за заемните положби на две кружници и тоа како може да се насочи на евристичен начин кон самооткривање од страна на учениците, едноставно со квалитетни и претходно добро осмислени задачи.

Усно проверување може да биде и барањето од ученикот да *демонстрира* свое решение на одреден проблем.

Слободниот разговор или *дискусија* е форма на усно проверување кое може да биде многу полезно во одредени ситуации. При дискусијата, ученикот најчесто искажува некое сопствено гледиште на некој проблем. Тоа често може да отстапува од стандардните мислења на мнозинството, па затоа и се вика слободен разговор. Меѓутоа, најчесто дискусијата сепак се води во некои одредени рамки. Така, на пример, во наставата по математика барањето од учителот, да се дискутира за природата на решенијата не некоја равенка во зависност од некои параметри не е слободен, туку претставува *рамковен разговор*. Имено, иако во овој случај ученикот различните случаи може да ги разгледува по различен редослед, сепак тој мора да ги разгледа сите случаи, што значи дека неговиот одговор сепак е еднозначен. Слична е состојбата и во наставата по останатите предмети, но сепак во наставата по математика можна е појава и на шаблони при ваквите дискусии. На пример, ако се разгледуваат решенијата на линеарна равенка која содржи определен параметар, тогаш дискусијата се сведува на тоа дали и кога коефициентот пред непознатата е еднаков на нула, постапка која без поголеми потешкотии може да ја усвои секој ученик.

Дебатата е исто така форма на усно проверување. Таа се состои во поставување на теза за која може дихотомно да се заземат два спротивставени става - за и против. Од двајца ученици или од два тима од ученици се поставува барање да дебатираат – едните афирмативно (за), а другите негативно (против) поставената теза. При тоа освен слободните размислувања, од учениците се очекува како аргументи да ги понудат и знаењата кои ги усвоиле за време на наставниот процес, што значи дека и самата теза се поставува така што да е во тесна врска со наставните содржини. На прв поглед се чини дека дебатата како форма на усно проверување е погодна во наставата по јазичната и општествената група предмети, но не и за наставата по природните науки. Меѓутоа, тоа е само на прв поглед што може да се види од следниов пример.

Примерот на Игор Димовски. “На часот посветен на заемната положба на права и хипербола со своите ученици од трета година гимназиско образование ја поставив тезата: “Права и хипербола може да имаат (нај-

многу) четири заеднички точки.” Оваа теза ја поткрепив со “соодветен цртеж” - се разбира како наставен софизам, вешто искривено нацртан со слободна рака на видно место на таблата. Отворив дискусија, во која побарав учениците да се искажат за поставената теза, при што се разви вистинска дебата по ова прашање. Настана поларизација на учениците на два табори – за и против. Интересно е што многу голем дел од учениците (повеќе од половина) ја сметаа тезата за прифатлива, најмногу поради визуелизацијата со која тезата беше поткрепена. После ова, низ евристична дискусија за природата на решенијата на еден систем од една линеарна и една квадратна равенка беше дојдено до единствените можни случаи: права и хипербола немаат заеднички точки, имаат единствена заедничка точка и имаат две заеднички точки. Се разбира овие заклучоци беа поткрепени со строг математички доказ и изведени формули – критериуми за секој од можните случаи. Како резиме, се наметна заклучокот:

Права и хипербола може да имаат најмногу две заеднички точки.

Во услови кога на таблата стојат запишани и двете тези, првата поткрепена со лажен цртеж и втората поткрепена со строг математички доказ, повторно отворив дискусија. Запрепаствувачки, но сеуште постоеше не баш мал дел од учениците (секако помалку од половината, но повеќе од 3 ученици) кои сè уште беа во состојба да дебатираат во афирмативна смисла за првопоставената теза.”

Квизовите се исклучително интересна форма на усно проверување. Со нив на економичен начин, може да се изврши повторување и проверување на усвоените знаења кај учениците и на само дел од еден час. Прашањата може да се подготвени на хартија – плакати, хамер – постери и слично, или пак со помош на графофолии и графоскоп или компјутер и проектор. Ваквите ситуации влијаат на натпреварувачкиот дух на учениците и воопшто како нестандартен начин на проверување може позитивно да делуваат на мотивацијата на учениците.

Разговорот од типот *кратки прашања – краток одговор* се дел од дијалошкиот метод и може да бидат во функција на евокацијата, како вовед во обработката на нови наставни содржини, но и при сфаќањето на значењето, во главниот дел од часот за нови содржини, како начин преку активности на учениците да се дојде до целнопоставените заклучоци. На овој начин паралелно со усвојувањето на новите знаења континуирано се врши проверување на претходно усвоените знаења, што е и основа на формативното проверување. При усното проверување доаѓа до израз непосредниот контакт помеѓу учителот и ученикот. Често, училишното испрашување е на извесен “вештачки” начин поинакво од секојдневните, вонучилишни разговори меѓу луѓето, кои исто така се карактеризираат со прашања и одговори. За да се избегне ваквата клима во училницата, учителот

треба да ги води дијалозите на што е можно поприроден начин, близок до секојдневната комуникација, по потреба користејќи и изрази од младешкиот жаргон. Практиката ученикот да стане кога зборува исто така негативно влијае на училишната клима. Пожелно е ваквите формални барања да се пренебрегнат и да им се дозволува на учениците слободно да се однесуваат во комуникацијата со учителот, кој треба да е нивни партнер во наставата, личност која ги поучува – им помага во нивното учење, а не личност која со својата позиција наметнува формален авторитет.

Прашањата што ги поставува учителот треба да се од различни когнитивни нивоа, односно да не се само од најниското ниво, или пак сосема да се избегнуваат прашањата од најниското ниво. Усното проверување овозможува имплементирање на принципот на индивидуализација на наставата, бидејќи учителот е во состојба да го адаптира нивото и тежината на прашањето на можностите на ученикот. Имено, апсурдно е да се бара некоја посеопфатна анализа на некоја проблемска задача од ученик кој има проблеми и со своето декларативно знаење. Исто така, не е добро да се поставуваат само прашања од најниско когнитивно ниво и да се бара само декларативно знаење од креативните и надарените ученици.

Текот на усното проверување треба да се одвива по следниот шаблон: *поставување на прашањето – пауза – повикување да се даде одговор – добивање одговор од страна на ученикот*. Притоа, со право се наметнува дилемата: дали прво да се постави прашањето, а потоа да се одреди кој ученик истото ќе го одгово или пак прво да се “прозива” ученикот, а потоа да му се постави прашањето. Одговорот на претходните прашања не е и не може да биде еднозначен, бидејќи кој пат учителот ќе се избере веројатно најмногу зависи од видот на прашањето кое го поставува. Имено, доколку учителот постави прашање чиј договор бара декларативно или пак елементарно процедурално знаење, тогаш тој со право очекува истото да биде одговорено од поголем број ученици, па затоа не е пожелно тој да формулира отворено прашање, бидејќи постои можност учениците да не можат да се воздржат и да го дадат одговорот неповикани. Во овој случај е пожелно прво да се повика ученикот, а потоа да се постави прашањето. Кај посложените прашања, т.е. кај прашањата чиј одговор бара повисоко ниво на процедурално знаење или дури и знаења од повисок степен, може да се постави отворено прашање, да се остави пауза за размислување за време на која учителот внимателно ги набљудува реакциите на учениците (вербални и невербални), а потоа го повикува ученикот што ќе го одговори прашањето. Нагласувањето на паузата меѓу прозивањето на ученикот и повикувањето да го даде одговорот е важно бидејќи некои учители, во недостаток на наставно време, брзаат и штедат токму на времето кое на ученикот му е неопходно да размисли пред да одговори на прашањето. Имено, при усното испрашување треба да се има предвид дека не треба да

се инсистира ученикот брзо да одговори на прашањето, бидејќи побрзувањето од страна на учителот негативно влијае на неговата концентрација и самодоверба, што може да резултира и со неточен одговор дури и на елементарно прашање. За време на паузата од поставувањето на прашањето до добивањето одговор на истото, учителот може да го поттикне ученикот со мотивирачки коментар, на пример дека ученикот може да го одговори прашањето, а по потреба и да постави потпрашање со кое ќе го насочи размислувањето на ученикот во вистинска насока. Јасно, без разлика на квалитетот на добиениот одговор, учителот истиот мора да го проследи со повратна информација за која претходно говоревме.

На крајот од овој дел ќе се осврнеме на предностите и недостатоците со кои е пропратено усното проверување. Така, *предности на усното проверување се:*

- непосреден контакт помеѓу учителот и ученикот,
- нуди можност за индивидуален пристап и поголема диференцијација при проверувањето на знаењата,
- учителот е во состојба да дојде до информација не само за тоа што ученикот знае, туку и како размислува, како доаѓа до тие знаења, како изведува заклучоци и слично,
- учителот има можност да интервенира за време на давањето на одговорот или решавањето на проблемска задача, поставувајќи дополнителни прашања да го насочи ученикот, да го поттикне и на различни начини позитивно да влијае на неговата мотивираност и самодоверба за време на одговарањето,
- учителот има нуди можност повеќе да дознае за личноста на ученикот,
- влијае при развојот на говорните вештини на ученикот,
- тоа е економично во поглед на трошење на материјални средства и бара релативно малку време за подготовка на учителот пред спроведувањето на усното проверување,

а додека *недостатоци на усното проверување се:*

- не е доволно објективно - различни ученици одговараат на различни прашања, во различно време, па нивните одговори не може објективно да се споредуваат меѓу себе,
- учениците со помали говорни способности, како и срамежливите интровертни ученици имаат потешкотии при усното проверување, што резултира со фактот дека најчесто нивното вистинско знаење не може да дојде со израз,

- не остава трага – нема материјален доказ за тоа како одговорил ученикот, како кај писмените работи или кај тестовите,
- создава притисок и “испитна трема” кај учениците, особено кога усното проверување резултира со вреднување и евидентирање на оценка,
- не е економично во поглед на наставното време, особено ако претставува изолиран дел од наставниот процес, како испитување кое се реализира за да се добијат оценките што од административни причини се бараат од учителот,
- најчесто изолираното усно испрашување резултира со ситуација додека еден ученик “одговара за оценка”, другите да се досадуваат или пак да се плашат да не бидат прашани и тие.

2.5.2. ПИСМЕНО ПРОВЕРУВАЊЕ

Постапката при која учителот писмено или усно поставува прашање или задача, а ученикот одговара, решава или дава свое мислење во писмена форма се вика писмено проверување. Изминативе години сведоци сме на доминација на писменото проверување, па затоа за него е и најмногу пишувано во литературата по методика. Тестовите на знаење, исто така претставуваат вид на писмено проверување, но за нив посебно ќе говориме.

Во текот на наставата, учителот често запишува дел од своето излагање на табла, се служи со слики, цртежи, графикони, табели и други средства кои се во печатена форма, па значи остварува комуникација со учениците во писмена форма. Учебниците, прирачни и други дидактички средства, исто така се пишувани медиум, што значи дека учениците повторно користат писмена форма на комуникација. За време на наставата, учениците често запишуваат белешки од предавањата или излагањата на учителот, забележуваат некои свои идеи или одговори на некои прашања и конечно, решаваат задачи кои и не би можеле да се решаваат поинаку освен во писмена форма. Токму затоа, се наметнува и потребата од проверување кое користи инструменти кои бараат од ученикот да ги изрази своите мисли во писмена форма. Таквото проверување е бездруго писменото проверување.

Формативното проверување исто така може да е писмено, ако учителот наместо преку поставување на прашања, проверува како учениците работат на решавањето на некој проблем. Овој пристап може да се применува во секоја етапа од наставниот час. Во етапата евокација, учителот може да побара од учениците да ги забележат своите идеи во врска со поставена тема или проблем. Во оваа етапа, учителот може умешно да из-

гради проблемска ситуација, поставувајќи проблем со кој ќе ги мотивира учениците и ќе бара учениците да се обидат да го решат проблемот, при што учителот знае дека учениците само делумно ќе го решат зададениот проблем, при што ќе им недостасува алка која всушност е поставената микроцел за дадениот час. Ваквиот пристап ќе овозможи учениците активно да учествуваат евристична расправа која ќе резултира со решавање на главниот проблем, при што новото знаење кое што ќе го усвојат решавајќи го почетниот проблем, ќе ги инспирира учениците да решаваат бројни слични проблеми. Во етапите сфаќање на значењето, учителот може да ги расчлени активностите, при што во секоја подетапа ќе поставува барања кои учениците ќе ги исполнуваат во писмена форма. Тоа значи дека писменото проверување исто така може да даде информации за тоа на кој начин ученикот доаѓа до знаењето, односно да ја следи развојната компонента. Во етапата рефлексивна, најчесто применуван начин на проверување дали обработуваните содржини се усвоени од страна на учениците е задавањето на една или повеќе проблемски ситуации кои ученикот ги резрешува во писмена форма.

Некои видови писмено проверување се специфични само за одредени наставни дисциплини и не се применливи во други наставни дисциплини. На пример *диктатот* е вид на писмено проверување кое се користи во наставата по јазици. Сепак диктатот може да се примени и во наставата по другите наставни дисциплини. Така, диктатот може да се примени и во математиката, особено со ученици на помала возраст, кога е важно усвојување на математичката симболика. На пример, учителот ја изговара (диктира) реченицата: “Елементот x не припаѓа на множеството A ”, а од ученикот се очекува да запише: “ $x \notin A$ ”.

Пред да преминеме на натамошното разгледување на писменото проверување ќе споменеме дека за наставата по секој наставен предмет од особена важност е задавањето на *домашни писмени работи*, при што е пожелно после секој час да се зададе добро осмислена домашна работа. Потребата од ваквата домашна работа може да се согледа во фактот дека проверката на домашната работа всушност претставува вид на писмено проверување. Притоа треба да се има предвид дека редовната и квалитетна проверка на домашните работи може да влијае на мотивираноста на учениците истите да ги изработуваат. Оваа проверка може да биде и индиректна. Имено, на почетокот од часот се задава карактеристична проблемска ситуација која била зададена во претходната домашна работа и како таа им е позната на учениците од нив се бара истата да ја разрешат во краток временски период. Јасно, за учениците кои не се во состојба да одговорат на барањата може да се заклучи дека не ја изработиле домашната работа, или тие едноставно ја препишале.

Наставните ливчиња се одличен инструмент на писмено проверување. Тие може да бидат изработени во различна форма и да послужат за различна намена во повеќе ситуации. За писменото проверување се смета дека објективноста му е најсилната страна бидејќи сите ученици во исто време решаваат исти проблеми и резултатите од работата на учениците се вреднуваат од еден ист учител, според однапред пропишани критериуми и скали на проценка, при што ако податоците за учениците се анонимни се исклучува секоја можност за субјективен пристап при вреднувањето на нивната работа. Но, токму заради тоа што сите ученици решаваат исти задачи, на писменото проверување му се припишува недостатокот дека недоволно го почитува принципот на индивидуализација и диференцијација во наставата. Проверувањето со наставни ливчиња може да придонесе за ублажување на овој проблем. Имено, и на часовите за обработка на нови содржини, а особено на часовите за повторување, може да се изработат наставни ливчиња на различни тежински нивоа. Притоа, најчесто се тргнува фронтално со прашања кои се однесуваат на сите ученици, а потоа на учениците кои не успеваат да се справат со овие прашања им се дава наставно ливче од пониско тежинско ниво или се упатуваат да прочитаат некоја конкретна содржина чие непознавање им создава тешкотии при одговарањето на поставените прашања. Понатаму, на учениците кои побрзо од “просечните” ќе одговорат на поставените прашања треба да им се дадат наставни ливчиња од повисокото (трето) тежинско ниво, што значи дека нема да останат пасивни по завршувањето на вежбата, а и ќе им се овозможи побрзо да напредуваат од останатите ученици. На овој начин се прави диференцијација на учениците, респектирајќи ги индивидуалните разлики меѓу нив, а истовремено се добива доста реална слика за тоа кој ученик со кое темпо напредува.

Во нашата наставна практика, често се користат таканаречените “контролни работи” како сурогат за усното проверување. Најчесто во недостаток на време усно да ги провери сите ученици, учителот поставува неколку (1-5) прашања од отворен тип, многучесто наслови на лекции или делови од лекции, при што од ученикот се бара во писмена форма да ги прераскаже лекциите, односно да го репродуцира она што го раскажал учителот или е напишано во учебникот. Ваквото писмено проверување не може да ги надмине првите две нивоа од когнитивното подрачје, односно од ученикот бара да го активира само своето помнење. Притоа, колку е одговорот поверодостоен на она што е запишано во учебникот, толку е подобра оценката што ученикот ја добива. Ваквите контролни работи се негативно вреднувани од дидактичарите, независно са кој наставен предмет се работи. За среќа, во наставата по математика, скоро никогаш во основното и средното образование не се бара од ученик да раскаже лекција. Затоа и ваквите контролни работи не се застапени. Аналогно на овие контролни работи се јавуваат *контролните вежби* по математика кои содржат

неколку задачи (најчесто 5) од отворен тип. Неретко ваквите контролни вежби се насловуваат како тестови, иако се многу далеку од тоа.

Контролните вежби се често застапени како последица на традиционалните *писмени работи*, кои до неодамна беа задолжително барање на наставните програми по математика. Писмените работи се облик на писмено проверување при кое учениците решаваат одреден број на репрезентативни математички проблеми кои покриваат извесен поголем дел од наставните содржини. Писмени работи беа (се) предвидени и во наставата по мајчин јазик како и по странските јазици. Јазичните писмени работи најчесто се состојат во пишување на состав на претходно зададена тема, која може да е во врска со обработувани наставни содржини или пак е слободна тема. Во последно време сè почесто се зборува за изработка на *есеј* или одговори на прашања од *есејски тип*. Овие облици на писмено проверување се неприменливи или многу малку применливи во наставата по природната група предмети.

Писмената работа по математика во традиционална смисла во суштина претставува решавање на низа од задачи од отворен тип. Поради малиот број на задачи што ги опфаќа, таа најчесто се состои од репрезентативни задачи кои се прилагодени на просечен ученик. Често се практикува да има една полесна задача која можат да ја решат сите ученици кои се подготвувале за писмената работа, а и една тешка задача со која ќе се селектираат најдобро подготвените ученици, алутирајќи притоа на осетливоста како карактеристика на ваквите писмени работи. Сепак, задачите од отворен тип, од ученикот бараат во најмала рака когнитивно ниво на примена, што ги прави претешки, дури и за оние ученици кои воглавно се сметаат за просечни. Дobar дел од учениците би покажале многу подобри резултати при писмено проверување кое ги опфаќа истите барања, но ако задачите се расчленети на поситни делови. Исто така, голем дел ученици добро би се снашле со задачи кои бараат когнитивно ниво на познавање и разбирање, што значи подобро би поминале на еден тест на знаење кој опфаќа содржини исти како и соодветната писмена работа. Контролни вежби се исти како и традиционалните писмени работи само се однесуваат на помал обем на наставни содржини, најчесто една наставна тема.

Поради овие причини, пожелно е наместо писмени работи или пак контролни вежби да се применуваат *тематски тестови* во смисла на неформални тестови кои ги изработува самиот учител, во соработка со соодветниот актив и со помош на учител по мајчин јазик. Ваквите тематски тестови треба да содржат прашања со дополнување, прашања со двочлен и повеќечлен избор и неколку прашања од отворен тип. Скоро по сите наставни предмети новите наставни програми ги препорачуваат како облик на писмено проверување, токму ваквите тематски тестови. Во нив, исто

така, за одделни наставни предмети е поставено и барање за изработка на полугодишни и годишни писмени работи, но дури и за нив веќе се напушта традиционалниот облик на писмени работи и се препорачува структура слична како и кај тематските тестови со комбинирање на различни видови прашања. Разликата би била во тоа што полугодишните и годишните писмени работи ги покриваат содржините од цело едно полугодие или целата учебна година, соодветно. Уште повеќе, и за стандардизираниите тестови кои се најавуваат при екстерното тестирање во рамките на државната матура, може да се заклучи дека се структурирани како што беше образложено за тематските тестови. Проблемот со објективноста при вреднувањето на одговорите на прашањата од отворен тип се решава на тој начин што нивните одговори се детално расчленети, а секој дел од одговорот соодветно е споредбено вреднуван како и едно цело прашање од типот на дополнување или на избор.

Писмените работи може да бидат кратки (10 - 15 минути) и да се изработуваат на дел од наставен час. Нивната намена е да остварат функција на тековно, формативно проверување, со тоа што даваат брза повратна информација за некој мал дел од наставниот процес. Долгата варијанта на писмената работа може да преставува писмена работа што се изведува еден или пак два наставни часа. Писмената работа бара од учителот да потроши многу време за нејзино подготвување. Учителот треба многу внимателно да ги избере прашањата, при што треба да внимава на валидноста на писмената работа, што значи дека треба да направи репрезентативен избор на прашања со кои ќе ги покрие сите најважни образовни цели и стандарди кои се поставени за наставните содржини од областа што се проверува. Прашањата од отворен тип може да бидат понудени во неколку (2 или 3) варијанти на различно тежинско ниво. На овој начин се вградува принципот на индивидуализација и диференцијација во наставата. Ваквиот избор на прашања го зголемува времето потребно да се подготви писмената работа, но се добро прифатени од страна на учениците бидејќи на учениците им даваат поголем избор и различни патишта за да дојдат до посакуваната оценка.

Прашањето како ќе бидат формулирани барањата на писмената работа исто така е важно прашање на кое треба внимателно да му се пристапи. Многу е важна и проценката на времето што им е потребно на учениците за да одговорат на поставените барања и тоа време да е прилагодено со времето што им се остава на учениците за изработка на писмената работа. Иако се чини дека при писменото проверување нема непосредна комуникација меѓу ученикот и учителот, сепак овој недостаток може да се надмине. Се препорачува, при прегледувањето на писмените работи, учителот задолжително да ги коментира одговорите на ученикот, особено одговорите на прашањата од отворен тип. Ваквите коментари треба да го потен-

цираат она што е добро во решавањето, особено пофално да го истакнат оригиналниот начин на размислување и приод кон проблемот, но и критички да се осврнат кон грешките и недостатоците во знаењата на ученикот. Што се однесува до начинот како треба да се дадат овие коментари, доволно е да се потсетиме на повратната информација и нејзиното значење.

На крајот од овој дел ќе се осврнеме на предностите и недостатоците со кои е пропратено писменото проверување. Така, *предности на писменото проверување се:*

- повисок степен на објективност - сите ученици во исто време одговараат на исти прашања,
- многу е економично од аспект на потрошеното наставно време - за кратко време се проверува знаењето на голем број на ученици,
- нуди можност за проверување на повисоките когнитивни нивоа, особено нивото на примена,
- на учениците им нуди можност за поголем креативност, истакнување на творечките потенцијали и оригинален, нестандартен пристап на решавање на проблемски ситуации од отворен тип,
- му нуди слобода на избор на редоследот по кој ученикот ќе одговара на прашањата, и
- остава трага - писмена документација од проверувањето.

Писменото проверување по голем број на предмети зело замав дури во втората половина на XIX век, најмногу во САД и Велика Британија. Х. Ман уште во 1845 година во Бостон, ги формулира главните предности на писменото проверување. Според него, тоа е:

- непристрасно,
- праведно кон ученикот,
- темелно,
- му помага на учителот да се дистанцира од непосредниот впечаток при одговарањето,
- го олеснува утврдувањето на квалитетот во наставата,
- го спречува фаворизирањето на поедини ученици,
- придонесува кон јавноста на проверувањето, и
- овозможува увид во испитните прашања и кон проверка на нивната адекватност.

Од друга страна, практиката бележи и низа *недостатоци на писменото проверување*, дел од кои се:

- неекономичност од аспект на времето што му е неопходно на учителот за подготвување, а особено за прегледувањето на писмените изработки на учениците - учителот троши многу време при писменото проверување,

- комуникацијата меѓу ученикот и учителот е посредна, не е директна,
- дел од учениците, особено на помала возраст потешко се изразуваат писмено,
- на помладите ученици им треба повеќе време за да го запишат решението, отколку што би го образложило усно,
- објективноста е со помал степен во споредба со тестовите кои содржат само прашања со дополнување и избор, бидејќи оценувачите на решенијата на задачите од отворен тип, а особено на писмените работи, составите и есеите при оценувањето не може сосема прецизно да ги применуваат клучовите исклучвајќи ја целосно субјективноста на самиот оценувач, и
- информацијата за резултатите од проверувањето често доцни поради времето што му е неопходно на учителот да ги прегледа писмените работи.

2.5.3. ПРАКТИЧНО ПРОВЕРУВАЊЕ

Овој вид на проверување најчесто е насочен кон психомоторното подрачје на наставните цели. Тоа најмногу се однесува на наставата по предметите кои се карактеризираат со психомоторни активности и особено со изработка на некои практични производи. Ваквите активности се карактеристични, на пример, во наставата по техничко образование, физичко образование и спорт, како и во ликовното образование. Практичното проверување во овие случаи се состои во проверување на оспособеноста на ученикот да изработи некој предмет, технички цртеж или ликовно дело. Во наставата по спорт, практично се проверуваат активностите кои ученикот ги увежбува за време на наставата – трчање, скокање, жонглирање со топка и слично.

Во наставата по природно-математичката група на предмети, практичната изведба на активности и изработка на некои продукти е релативно мала. Во наставата по биологија, хемија и физика, се изработуваат лабораториски вежби и експерименти за кои се неопходни и некои психомоторни вештини кои може да се предмет на практично проверување.

Практично проверување е на пример проверувањето како ученикот ракува со прибор за цртање. Од значење за наставата по математика може да бидат и ракувањето со прибор за мерење, при што е можно дел од наставата, па и проверувањето да се одвива и надвор од училиштето - на пример мерење на терен во наставата по математика за учениците од земјоделската или геодетската струка.

2.6. ФАКТОРИ ШТО ВЛИЈААТ ВРЗ ПОСТИГАЊАТА

Постигањата на учениците не се должат само на наставниот процес, туку тие се резултат и на многу други фактори. Овие фактори може да бидат од *субјективна* или *објективна* природа.

Субјективни фактори се способностите на ученикот, најмногу интелектуалните, но и нивните психомоторни способности. Здравствената состојба на ученикот исто така е фактор кој значително влијае на постигањата на ученикот. Одреден хендикеп, во физичка или психичка смисла може негативно да делува врз постигањата на учениците. Одредени настани поврзани со личниот живот на ученикот или животот на неговото семејство или поширокото опкружување може да влијаат врз општата психичка состојба на ученикот, а со тоа и на неговите постигања. Внатрешната мотивација на ученикот е битен фактор кој ја детерминира можноста на ученикот да учи и да се развива.

Објективни фактори кои влијаат на постигањата се објективните услови во кои се изведува наставата, стамбените услови во кои ученикот живее, оддалеченоста на училиштето од домот, материјалната положба на семејството на ученикот и слично. Ваквите фактори, но и состојбата со секој од учениците од аспект на овие фактори треба да му се познати на учителот и тој треба да ги има предвид при организирањето на наставниот процес, а и при проверувањата на постигањата на ученикот. На пример, учителот по математика кој упатува на изработка на некоја домашна работа за чија изработка е потребен компјутер, треба да води сметка дека некои ученици имаат отежнат пристап до компјутер, а некои имаат свој сопствен компјутер.

2.7. СЛЕДЕЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА

Од претходните разгледувања може да се заклучи дека проверувањето во наставата треба да подразбира *проверување на знаењата* сфатени како комплекс на декларативно и процедурално знаење. Вака сфатеното проверување треба да се надогради до квалитетно *следење на постигањата* на ученикот сфатени како знаење во поширока смисла, кои во себе ги содржат и целите од афективното подрачје. Значи, за време на наставниот процес, учителот постојано е во интеракција со своите ученици. На секој наставен час, тој има увид во она што ученикот научил од наставните содржини обработени на претходните часови и дали ја изработил домашната работа. Тоа му дава информација за *пристапот на ученикот кон работните обврски и навиките на ученикот континуирано да ја следи наставата и активно да учествува во неа.*

Учителот постојано е во комуникација со ученикот и со тоа на директен начин може да заклучува за *ставовите* што ги има ученикот, како кон прашања што се непосредно поврзани со наставниот процес, така и за многу поопшти прашања (образовни, културолошки и слично). На овој начин, учителот може да суди за *вредносниот систем* на ученикот - кои ставови на општествената заедница ученикот ги цени и колку. Преку активностите кои се применуваат со примена на групните форми на работа, учителот може да ја процени *можноста на ученикот за тимска работа*, степенот на *соработка* и *квалитетот на комуникациите* што ученикот ја остварува, како и неговите *лидерски способности*. Од дијалозите што се водат меѓу учителот и ученикот, но и меѓу самите ученици, учителот ја осознава *умешноста*, но и *волјата* на ученикот, *критички* да пристапува кон проблемите. Важно е со колкав степен на доверба ученикот пристапува кон информациите што му се пласираат, колку е *склон да размислува* за нив, да *бара неопходни аргументи* што ќе поткрепат некое тврдење, а колку е склон да *прифаќа авторитети* и безрезервно да ги *извршува авторитарните барања*. Ваквото *критичко мислење* треба да резултира, при поголема возраст на ученикот, со *навики да се бара докажување* на секое посериозно тврдење, но и *умеен да се аргументираат и докажуваат сопствените ставови*. На овој начин и поимот авторитет на позитивен начин би се вградил во вредносниот систем на самиот ученик.

При комуникациите на ученикот, учителот исто така може да ги следи и *коректноста* во односите со другите, *почитувањето на личноста на другите*, *почитувањето на различно мислење*. Воопшто, учителот може да процени во колкава мера ученикот се придржува до општоприфатливите *етички норми*.

Низ секојдневната наставна практика, учителот може да го следи нивото на *индивидуалност* на ученикот, *одлучноста*, *степенот на самостојност во работата*, неговата *креативност*, како и *умешноста за самокритичност* и *самопроценување* и *нивото на самодоверба*. Низ честите разговори, учителот може да добие претстава каква е *сликата на ученикот за себе*. Исто така, учителот може да ги следи *реакциите* на ученикот кога тој ќе се најде во некоја специфична ситуација и неговите *емоции* за време на различните видови активности. Учителот има увид и во продуктите на учениковата активност - од писмените забелешки, решенијата на задачите, изработените цртежи, модели, предмети и слично. Преку нив, освен за карактеристиките на овие продукти кои што се однесуваат на наставно-содржинските аспекти, учителот може да изведува заклучоци и за карактеристиките на ученикот како *педантност*, *уредност*, *трпеливост* и слично.

Сите истакнати својства кои би можеле, а и би требало да се следат од страна на учителот во текот на наставниот процес, го опфаќаат афек-

тивното подрачје на наставните цели. Некои од нив може да се следат и надвор од наставните часови, односно во различни ситуации кои излегуваат од рамките на училишното клише, на пример за време на одморите, за време на различни видови екскурзии и слично. Учителот има обврска да помага при градењето на позитивни развојни карактеристики на личноста на ученикот, а за да може квалитетно да го прави тоа, тој треба постојано да го следи нивниот развој. Тоа би значело дека на извесен начин го проверува знаењето во поширока смисла, но поради специфичноста на ваквата проверка, потребно е да се направи дистинкција меѓу проверувањето на знаењето по потесна смисла и ваквото следење на вкупните постигања на ученикот. Ова подразбира дека за да се следат постигањата на учениците од афективното подрачје на наставните цели, потребно е да се применуваат и поинакви форми на следење, но и специфични инструменти преку кои ќе се вреднува постигнувањето на овој вид цели. Секако, најшироко применувана форма е набљудувањето. Но, за да стане збор за квалитетно набљудување, неопходно е да се води евиденција за информациите што се собираат од набљудувањето и тоа евидентирање да биде континуирано, објективно и колку што е можно посеопфатно. Освен набљудувањето може да се користат и анкети, интервјуа, инвентари на личноста, а евидентирањето на резултатите да се прави со помош на чек листи и бездруго со педантно водење досие (портфолио) за секој од учениците. На ваков начин, *следењето* на постигањата на учениците станува комплетно и нуди можност за нивно квалитетно *вреднување*.

Во досега изнесеното ние всушност одговоривме на прашањето:

Што преставува следењето на постигањата на учениците?

Имено, ако следењето го сфатиме во најширока смисла на зборот, тогаш под *следење* го подразбираме процесот на собирање, проценување и интерпретирање на информациите за постигањата на учениците кои што се користат за:

1. информирање на учениците и нивните родители за напредокот во усвојувањето на знаењата, стекнувањето на умеењата и развојот на способностите на учениците,
2. добивање повратна информација за учителите за постигањата на нивните ученици, која е неопходна за превземање на неопходните корекции во реализирање на наставата сè со цел постигнување подобри резултати, и
3. обезбедување релевантни информации кои им се потребни на надлежните институции при донесување валидни одлуки за учениците, наставните планови и програми и за образовните политики.

Понатаму, од досегашните разгледувања можеме да заклучиме дека следењето всушност се реализира во еден *обновлив циклус* кој последователно опфаќа:

- определување на образовните цели и излезните параметри од учењето,
- определување на влезните параметри, односно предзнаењата со кои ученикот располага,
- реализирање на предвидените содржини и активности со кои ученикот треба да се стекне со нови знаења, умееша и способности,
- проверување дали се постигнати образовните цели и излезните параметри.

2.8. ПРАШАЊАТА И НИВНАТА УЛОГА ВО ПРОВЕРУВАЊЕТО НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Во претходните разгледувања видовме дека основен инструмент како при усменото, така и при писменото проверување се прашањата. Притоа, поставувањето на прашања е скоро исто толку важно за секој вид проверување: дијагностичко, формативно и сумативно. Пред да преминеме на натамошни разгледувања накратко ќе се осврнеме *отворените* и *затворените прашања*, поими кои ги споменавме во претходните разгледувања, без притоа истите да ги дефинираме. Имено, отворени и затворени се двете основни категории според кои прашањата се поделени. *Отворени* се оние прашања кои бараат проширени одговори и кои поттикнуваат посложени мисловни процеси, на пример, претпоставување, анализа, синтеза, генерализација и слично. *Затворени* се оние прашања кои бараат куси “точни” одговори и ги поттикнуваат поедноставните мисловни процеси, како што е усвојувањето на декларативното знаење.

Во врска со прашањата кои учителите треба да им ги поставуваат на своите ученици, а чија цел е сеопфатно следење и проверување на постигањата на учениците изминативе дваесетина години се реализирани бројни истражувања, при што се добиени следниве сознанија:

- учениците научуваат повеќе ако учителите почесто користат прашања во следењето на напредокот и проверувањето на разбирањето,
- поставувањето прашања претставува најзначаен поединечен фактор за учениците да постигнуваат подобри резултати во учењето, ако прашањата се користат за да се проверат знаењата на учениците и да се поттикнуваат нивните мисловни процеси,

- поставувањето прашања може да служи за повеќе цели вклучувајќи: утврдување на основните знаења, засилување на идеите, следење на напредокот, структурирање на знаењата, отстранување на пропустите во знаењата и умеењата на учениците итн.,
- одговорите на учениците на прашањата можат на учителите да им обезбедат непосредни повратни информации, овозможувајќи им да интервенираат во насока на отстранување на пропустите во знаењата на учениците,
- одговорот на ученикот треба да послужи како основа за поставување наредно прашање кои што треба да е во насока на проверување на квалитетот на знаењата на ученикот,
- потребно е учителите одмерено и целосообразно да ги користат затворените и отворените прашања.
- отворените прашања се особено важни за формативното оценување, затоа што еден од најдобрите начини на учење е детално и сеопфатно разработувањето на постапките и процесите,
- дијалогот базиран врз отворени прашања е пример за структурирано проверување бидејќи тој може да го проширува размислувањето на учениците, овозможувајќи им да го искажат стекнатото процедурално знаење за кое тие “претходно не биле свесни”,
- ако на учениците им се поставуваат само затворени прашања, тогаш тие ќе се стекнат само со декларативни знаења и ќе можат да одговараат само на она што ним им е пренесено од страна на учителот,
- “погрешните” одговори можат да бидат подеднакво корисни како и точните одговори бидејќи тие им даваат на учителите можности да ги проверуваат и повисоките степени на знаења,
- иако е значајно да се биде чувствителен кон самодовербата на учениците, не смее да се задржуваат “негативните” повратни информации или повратни информации кои се во функција на отстранување на пропустите во знаењата на учениците, што значи дека учителот треба да дава чесни повратни информации во врска со одговорот,
- треба да постои и соодветно “време на чекање” меѓу моментот кога прашањето е поставено и оној кога е даден одговорот, што значи дека разумното време на чекање може позитивно да влијае на квалитетот и должината на одговорите на учениците,
- ако темпото на поставување прашања е премногу побрзо, учителите ќе го посветат времето за задоволување на потребите на

мал број ученици (оние што постигнуваат повисоки резултати), посветувајќи релативно мало време на потребите на другите ученици, кои можат фрустрирани да “загубат надеж” и покрај тоа што и тие имаат потенцијални можности да бидат ангажирани во размислувањата и учењето, доколку се одвои повеќе наставно време за нивно ангажирање.

Како и секоја наставна активност, така и поставувањето на усните прашања има свои добри и лоши страни. Така, на пример, користењето на кратките прашања во текот на часот ги има следниве предности:

- учителот добива непосредни повратни информации за напредувањето на учениците, што овозможува управување на наставниот процес во реално време,
- учителот може да поставува прашања со кои ќе го следи развојот на квалитетите на мислењето, усвојувањето на научните методи и методите на заклучување,
- учителот има можност да го управува наставниот процес на ниво учител-ученик и на ниво ученик-ученик,
- учителот има можност да ја следи и проверува способноста на учениците усно и продлабочено да дискутираат за различни прашања.

Што се однесува до недостатоците на овој вид прашања, кои најчесто се користат при формативното проверување, ќе ги издвоиме следниве:

- некои ученици неможат пред другите ученици усно да се изразат,
- поставувањето на соодветни прашања и конкретни прашања во текот на часот бара темелно планирање, кое може да ја загуши имагинацијата во работата на учителот,
- информациите што се добиваат при поставувањето на усни прашања најчесто не ги опфаќаат сите ученици и не е можно да се однесуваат на сите очекувани резултати на учењето,
- некои образовни цели не можат да се оценат со спонтани и куси усни одговори; потребно е повеќе време во кое учениците може слободно да размислуваат, да бидат креативни и да одговараат,
- најчесто заради големиот број прашања во текот на часот не е можно да се води целосна и писмена евиденцијата за одговорите на учениците, туку таа учителот мора да ја памти и потоа истата да ја забележи, што може да биде несигурно.

Наведените недостатоци при користењето на кусите усни прашања може да се елиминираат, при што, на пример, може да се користат следниве сознанија:

- учителот треба да избегнува да се фокусира само на вербално агресивни и шармантни поединци во одделението,
- пожелно е учителот да почeka 5-10 секунди за ученикот да одговори на прашањето, пред да го постави на друг ученик,
- учителот треба да избегнува да поставува прашања со кои ќе го проверува само декларативното знаење,
- учителот не треба да ги наградува вербално агресивните ученици, за сметка на запоиставувањето или казнувањето на таканаречените неактивни ученици, и
- вербалното и невербалното однесување на учениците на часот не мора да е вистински одраз на постигањата на учениците.

Имајќи ги предвид претходните разгледувања, природно е да се запрашаме што станува со ефективноста која учителот треба да ја постигне при поставувањето на прашањата на учениците. Одговорот на ова прашање не е еднозначен, но ќе забележиме дека:

- учителот треба да ги користат прашањата за да добие сознание како за декларативното, така и за процедуралното знаење на своите ученици, но и за проверување на умењата со кои тие се стекнале,
- добиените одговори од учениците треба да се искористат за да се откријат пропустите во знаењата, умењата и способностите на учениците, како и за наоѓање ефективни постапки за отстранување на истите.

Понатаму, при формулирањето на прашањето треба да се има предвид дека тие треба да бидат јасни и недвосмислени, но и така формулирани што ќе се проверуваат реалните постигања на учениците. Така, на пример, ако учителот сака да добие повратна информација дали ученикот ги знае својствата на простите броеви, тогаш тоа не може да го постигне со прашање од видот:

Дали бројот 5 е прост број?

Меѓутоа, ако во врска со простите броеви постави прашање од видот:

Зошто бројот 5 е прост број?

тогаш со вака поставеното прашање ќе се постигнат неколку цели:

- ученикот кон кој е упатено прашањето има можност да се присети на своите знаења за простите броеви и својствата на бројот 5 да ги спореди со тоа што го знае за бројот 5,
- евентуалниот одговор на поставеното прашање од видот: Бидејќи простите броеви имаат точно два природни делители и бројот 5 го има ова својство, - на учителот му овозможува да

добие сознание за реалните знаења на ученикот за простите броеви, и

- учителот има можност да добие сознание за знаењата на ученикот за поимот прост број, без притоа да има потреба од задавање дополнителни прашања.

Прашањето од видот:

Зошто бројот 5 е на прост број?

е елементарен пример за следново прашање од поопшт карактер:

Зошто x е еден пример за y ?

Прашањата од ваков вид се ефективни при проверувањето на знаењата на учениците. На пример, други прашања од овој тип се:

- Како можеме да бидеме сидурни дека?
- Во што се разликува ... од ...?
- Дали некогаш/секогаш е точно/погрешно дека ...?
- Како ќе објасните дека ...?
- Што значи ...?
- Што не е точно ...?
- Зошто е точно дека ...?
- Кои заеднички својства ги имаат ... и ...?

Во случај кога учителот поставува усно прашање, или пак задава запишано прашање, тој го моделира испрашувањето на учениците и од нив се очекува да ги усвојат моделите на учителот. Оттука, многу е важно учителите да поставуваат куси, прецизни, разбирливи и јазично правилно формулирани прашања. Понатаму, како основа за изготвување на прашања кои ќе ги задоволуваат споменатите барања учителот може, на пример, да ја користи Блумовата таксономија. Така, на пример, за проверување на когнитивните цели согласно Блумовата таксономија може да се користат следниве типови прашања:

- *Ниво на знаење:* Како се вика тоа? Од каде доаѓа ...? Кога се случило тоа? Што значи.....?
- *Ниво на разбирање:* Од каде тој.....? Објасни што се случило во куќата. Кои се клучните карактеристики на...?
- *Ниво на примена:* Што мислиш дека ќе се случи потоа? Зошто оваа појава вака се одвива? Можеш ли да го искористиш дека ... за да го решиш овој проблем?
- *Ниво на анализа:* Зошто овие две содржини се аналогни? Што треба да претпоставиме за да ...? Која е функцијата на?
- *Ниво на синтеза:* Кое е сижето на поемата ...? До кои заклучоци можеш да дојдеш ако занеш дека ... и дека ...? На кој начин

можеш да ја провериш таа теорија? Какви заклучоци можеш ти да извлечеш?

- *Ниво наоценка:* Како треба да изгледа ранг листата на ...? Од каде ќе почнеш да ја реализираш оваа активност? Која стратегија е подобро да се примени?

При поставувањето на прашањата поголема ефективност можеме да постигнеме ако од учениците бараме да направат категоризација на прашањата според нивото на размислување кое што одговорот го бара. Оваа стратегија е позната под името *прашање-одговор-врски* и истата е корисна бидејќи од учениците бара да размислуваат за тоа каде тие можат да го најдат одговорот на прашањата. Тоа, од своја страна, треба да им помогне во наоѓањето на одговорите во нивните учебници (односно, одговорите можат да се најдат во текстот) или во нивните глави, што значи дека до одговорот треба да дојдат врз база на информациите во текстот и информациите што тие можеби веќе ги имаат. Стратегиите од типот прашање-одговор-врски им помагаат на учениците да ги развиваат метакогнитивните способности, т.е. способностите да размислуваат за сопственото мислење. Учениците со метакогнитивни знаења размислуваат за она што го виделе или слушнале и се прашуваат самите за себе дали тоа го разбираат. Притоа, стратегијата прашање-одговор-врски на учениците им помага да размислуваат за тоа каде можат да ги најдат одговорите на прашањата. Ова треба да ги охрабри во иднина да размислуваат за одговорите што тие ги даваат во поглед на нивната сложеност и за тоа како да дојдат до одговорите.

Учениците треба да бидат поттикнувани да поставуваат прашања, кои не смее да бидат процедурални, туку треба да се настојува учениците да се оспособуваат да поставуваат прашања кои се однесуваат на содржината на она што се учи или треба да се работи. Понатаму, треба да се настојува учениците да се оспособуваат да поставуваат содржински богати прашања, бидејќи истражувањата покажуваат дека притоа тие се обидуваат да одговорат на нив и затоа имаат повисоки постигнувања од своите врсници. Последното го потврдува сознанието дека кај учениците треба да се поттикнуваат љубопитноста и притоа треба да се има предвид дека самото поставување прашање од страна на учениците придонесува:

- учителот навремено да ги добие потребните повратни информации за напредувањето на своите ученици,
- да се отстранат евентуалните пропусти во постигањата на учениците, што значи да се разјаснат одделни наставни содржини со чие сознательно усвојување учениците имаат потешкотии и
- активно да се реализира повторувањето и утврдувањето на стекнатите знаења, умеања и способности.

3. ВРЕДНУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

3.1. ЗА ПОИМИТЕ ВРЕДУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ

Следењето на постигањата на учениците резултира со множество податоци и информации за секој ученик кои укажуваат на степенот и квалитетот на усвоените знаења, стекнатите умења и вештини, како и за начинот на кој ученикот ги стекнал овие знаења, вклучувајќи и информации за развојот на личноста на ученикот во тековниот период. Најкратко, собрани се информации за промените што настанале кај личноста на ученикот во еден одреден временски период.

Сите овие информации сега треба да се средат. Следува една синтетичка етапа, во која овие информации треба да се сублимираат во неколку концизни судови за постигањата на ученикот. Притоа, многу е важно ваквите сублимирани судови да се споредливи - меѓусебно и со образовните стандарди. Оваа постапка на изведување на сублимирани судови за постигањата на ученикот е *вреднување на постигањата* на ученикот во најопшта смисла.

Откако постигањата на ученикот се вреднувани, така што се изведени споредливи судови за постигањата, следува постапка на споредување, која што резултира со класифицирање на учениците во однапред определени категории. Најситно класифицирање се добива, доколку е тоа можно (ако следењето се врши со некој осетлив инструмент), ако едноставно учениците се рангираат, на пример од најуспешен до најмалку успешен. Сепак, многу почесто се применува класифицирање на учениците на одреден број категории (2, 3, 4, 5, 6, 10, 20) по што на секоја категорија и се придружува еден исклучителен краток суд (положи-не положи, или недоволен-доволен-добар-многу добар-одличен) или уште почесто суд и број (вредност) или пак само број или буква. Ваквата постапка на класифицирање на учениците по категории според вреднувањата на нивните постигања се нарекува *оценување на постигањата* на ученикот, а конечниот суд или вредност - *оценка*. Овде е вредно да цитираме и две дефиниции на оценувањето. Н. Поткоњак вели:

“Оценување е материјализирање, и тоа во облик на оценка, на оној став, оној заклучок, кој произлегува од проверувањето”.

Според Шилих:

“Оценувањето е активност која може да се изрази како своевидно мерење, со кое учителот се обидува да утврди за колку ученикот се приближил кон наставните цели на одреден предмет”.

Последниот обид да се дефинира поимот оценување отвора простор за едно суштинско прашање - колку е добро постигањата на учениците да се споредуваат само со статички, однапред утврдени цели. Ова ќе нè одведе кон дискусијата за двата вида оценување – *критериумско (априористичко)* и *нормативно (апостериористичко)*.

3.2. ВРСКА МЕЃУ СЛЕДЕЊЕ И ВРЕДНУВАЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

И следењето и вреднувањето на постигањата на учениците се интегрален дел на воспитно-образовниот процес и тие се само негови компоненти, кои се многу тесно поврзани меѓусебно. Овие компоненти не смеа да се гледаат изолирано, надвор од наставниот процес. Тие всушност се компоненти и на самата настава. Нема следење без вреднување, ниту вреднување без следење на постигањата. Иако навидум следењето мора да му претходи на вреднувањето, тие на микро-план се одвиваат и симултано. При самиот дијалог меѓу учителот и ученикот, како што учителот бара повратна информација од наставниот процес преку одговорите на ученикот, на ученикот му е нужна брза повратна информација за квалитетот на неговиот одговор, решение на некоја задача и воопшто за неговата работа. Значи и самиот поттик на ученикот во функција на негова мотивација, веќе навлегува во процесот на вреднување. Потврдата дека некој одговор на ученикот е солиден или забелешките за квалитетот на одговорот, па понекогаш и само невербална реакција во облик на климање или знаци на неодобрување покажуваат симптоми на вреднување.

Значи, во буквална смисла, следењето и вреднувањето се надополнуваат. За квалитетно вреднување, неопходно е квалитетно следење на постигањата. Не може да се добие квалитетно вреднување кое се базира само на општи впечатоци на учителот. Сликата за постигањата на ученикот мора да се гради врз педантно евидентирани забелешки и заклучоци на учителот произлезени од подолготрајно набљудување, проверување и следење на постигањата на ученикот. Таквите информации треба внимателно да се анализираат за низ процесот на вреднување да се дојде до сублимирани судови кои ќе овозможат споредување на постигањата на учениците меѓусебни и со образовните стандарди.

Дали е доволно само следењето на постигањата и дали е можно тоа да не резултира со вреднување? Ова е особено актуелно прашање по воведувањето на описното оценување по некои наставни програми и содржини. Сфаќањето дека вреднувањето е исто што и пишување на нумеричка оценка, доведува до заблуди дека кога се пишуваат описни оценки, всушност нема вреднување. Напротив, исказите со кои се искажува поопширен

став за постигањата на ученикот нудат поголема ширина при изразувањето на резултатот од вреднувањето. Вреднување се прави и во овој случај. Кога следењето би завршило без вреднување, тогаш самиот процес на образование е некомплетен и нарушена е неговата интегралност. Податоците собрани од следењето на постигањата, без нивна анализа, компарација и синтеза не може да преминат во информација, повратна информација која му е неопходна на ученикот, на родителот, на училиштето како образовна институција, но и пошироко на целиот воспитно-образовен систем.

3.3. ЦЕЛИ, ФУНКЦИИ И ПРИНЦИПИ НА ВРЕДНУВАЊЕТО НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Целите на воспитно-образовниот процес всушност ги детерминираат и целите кои треба се постигнат при вреднувањето на постигањата на учениците. Во таа насока може да се каже дека:

- вреднувањето и оценувањето на постигањата на ученикот треба да произведе квалитетни концизни судови или класификациони вредности за знаењата (декларативни и процедурални) на ученикот, за квалитетот на таквите знаења, за квантитативните карактеристики на знаењата на ученикот, како и за развојот на личноста на ученикот како ефект од воспитно – образовниот процес,
- вреднувањето и оценувањето треба интегративно да делуваат на процесот на настава, што значи дека како компонента на наставата истата треба да ја градат, т.е. да ја комплетираат целината на овој процес, делувајќи во интеракција со останатите компоненти на тој процес,
- вреднувањето треба да ја зголемува мотивацијата на учениците, без притоа да се користи како средство за мотивација од типот награда – казна, и
- вреднувањето и оценувањето треба да влијаат врз развојот на личноста, почитувајќи ја нејзината индивидуалност, а особено да ги поттикнуваат умењата за критичка и објективна (само)проценка.

Постои аналогија помеѓу функциите на проверувањето и функциите на вреднувањето на постигањата на учениците. Сепак, вреднувањето настанува после сублимирањето на податоците од следњето, па затоа и неговите функции се поконцизни. Така, може да се каже дека вреднувањето на постигањата ги има следниве функции:

- *информативна функција* – сублимираните судови, а особено изведените оценки како краен резултат од процесот на вреднување се од посебен интерес за самите ученици, нивните родители, но и пошироката јавност,
- *административна функција* – оценките се начин на комуницирање помеѓу различните институции. Документацијата што ја издава училиштето – свидетелства, сертификати, дипломи, препораки и слично ги содржи оценките како мерка на успехот на ученикот и преку нив тој остварува различни права – запишување во повисок степен, право на стипендија, вработување и слично;
- *педагошко-психолошка (мотивациона) функција* - оценките може да претставуваат силен мотив (позитивен или негативен) во развојот на ученикот;
- *ориентациона функција* – резултатите на вреднувањето се најчест критериум при избор на професионалната ориентација и понатамошен развој на ученикот.

Вреднувањето на постигањата на учениците треба да се базира на следните принципи:

- принцип на *сестраност* (холистички принцип) - вреднувањето треба ги опфаќа сите компоненти на поимот знаење во широка смисла и примена на широк спектар на инструменти (постапки, методи, форми и средства) во процесот на вреднување,
- принцип на *континуираност* - вреднувањето на постигањата на ученикот во наставниот процес треба да произлезе од еден континуиран процес на следење на постигањата на ученикот, а не само на едно или неколку проверки на знаењата,
- принцип на *објективност* – при вреднувањето треба да се користат инструменти кои се карактеризираат со висок степен на објективност,
- принцип на *транспарентност* – вклучување на учениците и родителите во процесот на вреднување, што значи дека тие не треба да бидат само информирани за оценките, туку активно да се вклучуваат во самиот процес на вреднување и оценување,
- принцип на *индивидуализација и диференцијација*, кој подразбира дека треба да се вреднува развојот на личноста на ученикот како ефект од наставниот процес, респектирајќи ги индивидуалноста и специфичните предиспозиции на секој ученик поединечно.

3.4. МЕРЕЊЕ НА ЗНАЕЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Кога некое својство на еден објект се изразува со број кој е изразен во некоја единица која служи за споредување на својството на објектот со исто својство на претходно избран еталон, обично се вели дека тоа е *мерење* на својството на таквиот објект. При секое мерење, треба да постои предмет на мерење (својството на објектот), мерен инструмент со познати мерни карактеристики и техника на мерење, односно субјект што мери (мерител) и систем од правила за користење на инструментот. Некои мерења се вршат непосредно (директно). На пример, кога ја мериме должината на дел од мебел - предмет на мерење, обично се служиме “мајсторско метро” кое е инструмент за мерење, а оној што мери треба внимателно да го спростри метрот долж предметот и да го прочита од скалата бројот од самиот инструмент. Последното е всушност *техниката на мерење*. Таа се состои од непосредно споредување на должината на предметот со еталонот “1 метар” кој е востановен во практиката како единица за мерење на должина. Броевите од скалата покажуваат колав дел од 1 метар е некоја одредена должина. За разлика од ова мерење, кога ја мериме температурата на воздухот во работната соба, ја читаме висината на живиниот столб, што во принцип е мерење на должина, но со помош на скалата која е изработена врз принципите на физичките закони, ја отчитуваме всушност температурата. Ваквото мерење, кога се мери една величина, а потоа се пресметува друга величина, која е и предмет на мерењето е посредно, односно индиректно мерење.

Оценувањето на постигањата на ученикот е постапка на мерење на постигањата, односно мерење на знаењата сфатени во поширока смисла. Предмет на мерењето се постигањата на ученикот и тие не може да се измерат директно. Инструменти на мерењето се изработките на учениците – нивните одговори на прашањата, решенија на задачите, домашните работи, изработките на цртежи, дијаграми, шеми или предмети, нивните писмени работи, тестовите и слично. Но, дали еден ученик ја решил задачата од домашната работа воопшто не е исто со прашањето дали знаел да ја реши. Во крајна линија, дури и при усното проверување, она што ученикот го одговара не мора да е исто со она што тој го знае и умее да го одговори и да го реши. Затоа, потребно е да се нагласи дека при оценувањето, всушност предмет на мерењето е манифестираното знаење на учениците. Преку ваквото манифестирање на знаењето, се изразува и вистинското знаење.

Понатаму, како што веќе рековме поимот знаење е доста комплексен, па затоа практично и не е можно да се измерат постигањата на учениците и да се изразат преку скалата од 1 до 5. Притоа, тешко е да се зборува за мерење на квалитативните карактеристики на знаењето и невозможно е тие нумерички да се изразат. Ако донекаде може да се зборува за мерење на

квантитативните карактеристики на знаењето, прашање е дали на пример ученикот што има оценка 4 е двојно подобар од тој што има оценка 2? Значи, уште кај предметот на оценувањето наидуваме на вистински проблеми кои ја доведуваат во прашање нашата желба оценувањето да го сведеме на мерење. Како и да е, оценувањето има елементи на мерење и тоа треба да се респектира. Меѓутоа, при секое оценување, треба внимателно да се определи предметот на оценување, за да може да се избере соодветен инструмент со кој ќе се изврши тоа мерење, а при тоа резултатите од мерењето да се користат во склад со мерните карактеристики на инструментот што е избран. Тоа значи дека ако оценките се изведуваат воглавно преку примена на усното проверување, тогаш како инструмент се јавува самиот учител, што секако е субјективен како таков. Ваквите оценки треба да бидат изведени врз основа на јасно изградени правила, на кои мерителот, кој во овој случај се совпаѓа со инструментот мора максимално да ги почитува. Дури и ако овие правила се релативно строги и навистина испочитувани, добиените оценки нема да можат да послужат за некоја поквалитетна анализа или пак споредба со други, така добиени оценки. Инструменти за оценување на знаењата чии мерни карактеристики се најсилни, се тестовите на знаења. Но, тие имаат други недостатоци од образовен аспект, па не може да се користат како единствени инструменти за оценување, најмногу поради современите сфаќања за нужноста од проширување на поимот знаење.

3.5. МЕРНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА ИНСТРУМЕНТИТЕ

Во претходните разгледувања веќе рековме дека оценувањето треба да го изведеме така што тоа максимално да соодветствува на процедурите на мерење. Затоа потребно е подетално да ги проучиме мерните карактеристики на инструментите со кои ќе го мериме знаењето. Четирите основни и најважни мерни карактеристики се:

- валидност;
- објективност;
- релијабилност;
- осетливост.

Меѓутоа, не треба да забораваме дека карактеристики на инструментите за мерење на знаењето се и нивната практичност и економичност.

3.5.1. ВАЛИДНОСТ

Валиден е мерниот инструментот кој обезбедува релевантни информации за предметот на мерење, а не за нешто друго.

Како што веќе беше нагласено, прецизното дефинирање на предметот на мерењето е првата етапа од секое мерење. При секое оценување, најпрво треба јасно и прецизно да се запише: *Што сакаме да оцениме?*

Навидум, валидноста е лесно остварлива и разбирлива карактеристика при секоја постапка за оценување. Секој учител, без длабоко да навлегува во анализи, ќе декларира дека тој го оценува токму она што треба да го оценува. Но еве ситуации кога валидноста не е на висок степен. Учителот сака да ја оцени особеноста на учениците за користење на символите T и \perp . За таа цел ја поставува следнава задача:

Запиши T или \perp покрај исказот, во зависност од неговата вистинитост: Стокхолм е главен град на Финска.

Проблемот е во тоа што е можно ученикот поради слабите географски знаења да не е во состојба точно да ја реши поставената задача, иако перфектно знае кога треба да стави T , а кога \perp .

За разлика од претходно поставениот предмет на оценување, кој се однесуваше на една конкретна наставна цел, на мал дел од наставните содржини, оценувањето најчесто се изведува со поопшти барања и на поголеми единици наставен материјал. Така, ако учителот сака да го оцени степенот и квалитетот на усвоените знаења и стекнатите умења и вештини од темата “*Линерана равенка*”, тогаш проблем на валидност ќе биде изборот на задачи, преку кои ќе се реализира оценувањето на вака дефинираниот предмет. Не е ретка праксата, учителот да прозива одреден ученик на табла, да му постави задача по случаен избор, на пример од збирката со задачи, па врз основа на тоа како ја решава таа единствена задача да изведе оценка за знаењата од целата наставна тема. Прашањето е колку конкретни наставни цели може да се проверат преку решавањето на таа задача, бидејќи, на пример, когнитивното ниво на знаењата исто така зависат од изборот на задачата. Учителот сигурно би ја бранел валидноста врз принцип на случајноста при изборот на задачата – ученикот морал да се подготвува за целата тема зашто може да му се падне било која задача. Случајниот избор на задачата е често користена за обезбедување на валидност на оценувањето. Неретко преку три случајни прашања се оценува знаењето на испитаникот за цел наставен предмет. Но, ова само ја дообјаснува индиректноста на оценувањето како мерење. Може да се случи, токму задачата што ја добил, ученикот да не знае да ја реши, иако има сосема солидни знаења од таа тема, и обратно, можеби токму таа задача ја решавал при подготовките, брзо ќе го интерпретира нејзиното решение, а всушност има малку квалитетни знаења од таа тема.

Ваквото разгледување на валидноста се нарекува *содржинска валидност*. Во практика, принципот на случаен избор, се надоградува преку

избор на репрезентативно множество задачи, избрани од претходно класифицирани подгрупи на прашања. Оваа постапка е аналогна на постапката на избор на стратификуван репрезентативен примерок од популација во статистиката. Притоа, откако наставните содржини се групираат во подобласти, се формулираат повеќе конкретни цели чија реализација е предмет на оценување, а потоа од секоја подобласт се избираат задачите. Овој пристап може да се збогати доколку од секоја подобласт се изберат задачи на различни конгинитвни нивоа, по што се добива множество на задачи кои на некој начин репрезентативно го отсликуваат множеството на репрезентативно избрани наставни цели кои се произлезени од општата наставна цел. Во овој случај проблематично е тоа што за решавање на повеќе задачи потребно е повеќе време, но тоа се решава преку формите на писмено проверување, а особено со тестовите на знаење.

Валидноста кај масовните оценувања, или кај инструментите за оценување кои треба да се користат на различни места од различни оценувачи, најчесто се определува со посеопфатна анализа. Доколку се врши анализа само на содржините и преку споредба со поставените наставни цели и формулацијата на предметот за оценување, тогаш станува збор за *теориска (претпоставена) валидност*. *Емпириска валидност* се утврдува преку експериментална примена на инструментот и негово споредување со некој друг, валиден инструмент, преку изразување на нивната корелација.

3.5.2. ОБЈЕКТИВНОСТ

Што се однесува до објективноста, едноставно може да се каже дека *објективно* е она мерење кое не зависи од оној што мери. Според тоа, инструментот за оценување на постигањата на ученикот е објективен кога неговата употреба и начинот на оценување на одговорите се така стандардизирани што резултатите што ги постигнува ученикот не зависат од оној што оценува, туку единствено од она што ученикот го манифестира како знаење. Објективноста на оценувањето е најчесто спомнувана карактеристика на оценувањето, од аспект на она што ја интересира пошироката јавност. Причината за толкавиот интерес за објективноста на оценувањето може да се согледа од следново истражување на Д. Старч и Е. Ц. Елиот, кои на 114 учители им дале да оценат едно исто решение на една математичка задача. Секој учител требало да ја оцени на скала од 0 до 100 бодови. Дијапазонот на добиени оценки се движел од 28 до 90, при што 14 од нив дале оценка 75, што претставува мода на добиеното множество податоци, а дисперзијата на добиените оценки била прилично голема. Имајќи го предвид претходниот пример, може да се каже дека *објективноста* е толку поголема колку што е поголем степенот на совпаѓање на оценките кои ги дале повеќе оценувачи за постигањата на еден ист испитаник.

Јасно, степенот на објективност на инструментот за оценување зависи од самата негова конструкција, повеќе отколку од неговиот вид, со исклучок на тестовите на знаење, кои во принцип се истакнуваат со можноста да достигне стопроцентна објективност.

При проверувањето на знаењата, независно од формата, најчесто на ученикот му се поставува некоја задача (прашање). Најважно е задачата да биде така поставена, што спектарот на можни одговори да е комплетно предвидлив. На тој начин може да се изготви квалитетен клуч, според кој еднозначно се утврдува кој одговор како ќе се бодува. Ако задачата (прашањето) е од отворен тип, тогаш учителот секако ќе се интересира како ученикот дошол до својот одговор. Ако притоа, проверувањето е усно, тогаш делумно точниот одговор сигурно би бил пропратен со дополнителни потпрашања, од што може да се заклучи дека усното проверување нуди значително повеќе можности за проверување на знаењата, но при тоа бројот на можни одговори рапидно се зголемува, па не може да стане збор за некој клуч кој би можел да се применува објективно. Кај задачите (прашањата) со дополнување, мора многу да се внимава за да клучот биде еднозначен, или тој да ги опфаќа сите можни точни одговори. На пример, на задачата:

График на функција е _____ .

може да следи решение “множество од точки”, што секако преставува точен одговор, иако учителот очекувал да добие сосема поинаков одговор. Затоа, прашањето треба да е попрецизно формулирано:

Запиши го описно, множеството кое е график на функцијата $f: A \rightarrow B$.

Поради поширокото сфаќање на поимот знаење, проверувањето не треба секогаш да се базира само на прашања (задачи) со избор и прашања (задачи) со дополнување. Имено, остварувањето на некои наставни цели кои се однесуваат на повисоките нивоа на когнитивност, едноставно мора да се проверува преку прашања (задачи) од отворен тип. Во ваков случај, многу е тешко да се предвиди целиот спектар на можни одговори, особено ако ученикот пристапи кон решавање на проблемот на нестандартен, оригинален начин. Во вакви случаи, често може да се слушне дека “ученикот не одговара по клуч”. Таквите одговори е тешко да се бодуваат, особено ако соодветната идеја за решавање на проблемот, ученикот не ја разработил до крај. Во ваков случај е тешко да се провери дали идејата води до целта и колку чекори недостасуваат до комплетното решение. Проблемот може да се надмине доколку се изработи квалитетен клуч за бодување кој ќе го расчлени одговорот на чекори со кои може да се направи аналогија и при нестандартно решавање на даден проблем. За секој чекор, во клучот се

предвидуваат соодветен број на бодови, па може да се очекува релативно висок степен на објективност.

Сепак, ако кога проверувањето се остварува преку задачи (прашања) од отворен тип, без разлика дали се тие на тест, писмена работа, есеј или друга форма на проверување, објективноста не може да е максимална. Имено, бидејќи во оценката треба да влезат и целите од психомоторното и афективното подрачје, станува јасно дека максималната објективност на училишните оценки е практично невозможна. Останува, учителите да бидат совесни и да вложат голем напор за ваквото оценување да има што е можно поголема објективност.

3.5.3. РЕЛИЈАБИЛНОСТ

За мерењето ќе велиме дека е *релијабилно (доследно)* ако при повторно мерење на еден ист предмет, се добива истиот резултат од мерењето. Притоа треба да се има предвид дека релијабилност не е исто што и прецизност. Имено, вагата на мојот сосед постојано “краде” по 50 грама. Што и да купувам од него, вагата ќе додаде при мерењето 50 грама. Значи мерењето на неговата вага не е прецизна - не ја покажува вистинската тежина (маса на предметот), но е исклучително доследна - секогаш додава иста вредност 50 грама.

При оценувањето во наставата, учителот се јавува во двојна улога – и како инструмент (при усното проверување, или при сумативното вреднување) и како мерител. Затоа оценувањето зависи од самиот оценувач, што значи е субјективно, но тоа зависи и од времето кога тој оценувач го изведува оценувањето. Така, може да се случи еден ист учител, на два различни часови, за ист одговор може да стави различни оценки. Тоа би значело дека тој учител како мерен инструмент не е доволно доследен, односно не е релијабилен.

Проверката на релијабилноста на еден мерен инструмент зависи и од променливоста на предметот на мерење. Ако повторно се проверуваат истите знаења кај истиот ученик со истите задачи, голема е веројатноста дека тој нема да ги направи истите грешки како првиот пат. Затоа, својството на релијабилност се проверува претежно кај инструментите за масовно оценување, како што се стандардизираните тестови. Во ваквите случаи, може да се применуваат различни статистички методи, со кои преку пресметување на коефициенти на корелација помеѓу резултатите на поголем број испитаници, може да се суди за релијабилноста на ваквите инструменти.

Во наставната практика, релијабилноста би се подигнала на повиок степен, ако учителите применуваат исти постапки на оценување континуирано и се професионално насочени во работата, така што нивната тековна психо-физичка состојба не треба да влијае на постапката за оценување.

3.5.4. ОСЕТЛИВОСТ

За еден мерен инструмент ќе велиме дека е *осетлив (дискриминативен)*, ако со него може да се мерат и регистрираат и мали разлики. На пример, кантарот мери маса со чекори од половина килограм, а дигиталната вага мери и десетти дел од грамот, што значи дека дигиталната вага е поосетлива од кантарот.

Инструментот за оценување на знаењата е осетлив доколку може да детектира и помали нијанси во постигањата на учениците. Најмалку осетлив е оној инструмент кој нуди дихотомна можност. Такви се испитувањата од типот положи - не положи. Во нашата наставна практика, се бара осетливост на најмалку 5 нивоа (оценки од 1 до 5). Тоа значи дека инструментите со кои се врши оценувањето треба да се доволно осетливи за да можат според нивните постигања учениците да се поделат во 5 категории. Последното не значи дека учителот мора да се ограничи само на ова ниво на осетливост. Така, на пример, писмените работи и наставните тестови нудат можност да се спроведе оценување со многу поголем осетливост (0 - 100). Ако се тие квалитетно изработени, може прилично прецизно да ги прикажуваат разликите меѓу постигањата на учениците. За инструментот за оценување да биде поосетлив, тој треба да опфаќа поголем број прашања (задачи). На тој начин, само врз комбинациите од прашања со можни одговори ДА-НЕ тестот може да ги групира учениците во категории колку што има прашања и плус едно. Ако притоа се изработи клуч, според кој објективно може да се бодува и квалитетот на одговорот на прашањето, тогаш бројот на комбинации се зголемува. Притоа задачите (прашањата) треба да се на различни тежински нивоа, бидејќи ако има голем број на лесни прашања (задачи) кои што сите ученици ќе ги одговората (решат) и голем број тешки прашања (задачи) што никој нема да ги одговори (решат), иако вкупниот број на прашања (задачи) е голем, може да се добијат малку категории на ученици, со што оценувањето е недоволно осетливо.

3.6. ПРЕДМЕТ НА ОЦЕНУВАЊЕТО

При разгледувањето на валидноста како мерна карактеристика на инструментите за оценување, стана збор за определувањето на предметот на оценување. За да може оценките да се споредуваат, тие треба да бидат

мерка на една иста карактеристика. Ова е еден од најтешките проблеми во оваа област. Најкратко, може да се каже дека предмет на вреднување и оценувањето се постигањата на ученикот сфатени како знаење во поширока смисла. Сепак, поради важноста на проблемот, уште еднаш ќе се осврнеме на поимот постигања, ставајќи ги неговите компоненти, како компоненти на самиот предмет на оценувањето.

Значи, предмет на вреднување и оценување се постигнатите резултати во усвојувањето на знаењата и стекнувањето на умеења и вештини, работните навики, степенот на заинтересираност и ангажираноста за време на наставниот процес, степенот на надареноста на ученикот за определена област, односот кон воспитно-образовните активности, практичната оспособеност, начините преку кои ученикот ги постигнал своите знаења и умеења, неговите ставови во поширока смисла на зборот, респектирајќи ги и условите во кои ученикот ги постигнал сите овие резултати. Притоа треба да се вреднува како обемот (квантитетот), така и квалитетот на новите знаења. Притоа треба да се има предвид дека воспитно-образовните институции го следат и вреднуваат и целокупниот развој на личноста на ученикот, при што посебно, се вреднува и оценува и поведението на ученикот.

3.7. ФАКТОРИ ШТО ВЛИЈААТ ВРЗ ВРЕДНУВАЊЕТО НА ЗНАЕЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Во претходните разгледувања веќе зборувавме за комплексноста на процесот на вреднување на знаењата на учениците. Во овој дел ќе се осврнеме на факторите што влијаат врз вреднувањето на знаењата на учениците и истите ќе ги поделиме на две групи, и тоа на:

- Фактори што влијаат врз манифестирањето на знаењата
- Фактори што влијаат врз учителот при оценувањето на постигањата

3.7.1. ФАКТОРИ ШТО ВЛИЈААТ ВРЗ МАНИФЕСТИРАЊЕТО НА ЗНАЕЊАТА

Како што веќе рековме основната цел проверувањето на знаењата е да обезбеди релевантни и објективни информации за знаењата на ученикот, за квалитетот на таквите знаења, за квантитативните карактеристики на знаења на ученикот, како и информации за развојот на личноста на ученикот како ефект од образовниот процес. Притоа, овие информации се собираат воглавно преку различните форми на проверување кои се базираат на одговорите што ги даваат учениците, решенијата на задачите, нивното однесување, реакции, активности, изработки и слично. Меѓутоа, дали мо-

же да се претпостави дека она што ученикот го одговорил е *еднакво* на тоа што ученикот го знае? Дали може да се претпостави дека ако еден ученик не решил одредена задача, тој не знае да ја реши? Јасно е дека е можно поради различни причини, знаењето што го усвоил ученикот да не може сосема добро да го манифестира, но поради бројни причини можно е ученикот да остава впечаток дека знае повеќе отколку што навистина знае.

Јасно, основна причина за споменатите појави е посредното мерење. Имено, оценувањето ги мери манифестираните знаења, а се однесува на вистинските знаења. Затоа треба да се проучи врската меѓу манифестираните знаења, кои се всушност непосредниот предмет на оценување, и самите знаења чии карактеристики оценката треба да ги изрази. Во нашати разгледувања нема детално да се задржуваме на споменатиот однос, но ќе забележиме дека според З. Стојановски најважните фактори што влијаат на зголемување на разликите меѓу вистинското, латентно знаење и манифестираното знаење се:

- *Вербалните способности на ученикот.* Имено, два ученика со исто знаење може да добијат различни оценки поради различните вербални способности, бидејќи учениците се разликуваат според своите предиспозиции. Тие може да имаат различни способности за оперирање со вербални симболи, различен фонд на зборови во својот речик, различна способност за концепирање на мислата, различна брзина на размислувањето, па и различни физички предиспозиции во говорот или ракописот (говорни маани, проблеми со психомоторната функција на екстремитетите и сл.). Значи, при еднакви познавања на одредена содржина, учениците ги манифестираат на различни начини. Прашање е на валидноста на инструментот на оценувањето колку ќе биде подложен на влијанијата на вербалните способности. Не е добро ученикот кој течно ја раскажал лекцијата да добие подобра оценка од ученикот кој го кажал истото, но притоа д'тка. Само поради тоа што задачите се педантно решени, ученикот не треба да добива повеќе бодови од ученикот кој дошол до истото решение, а притоа повеќепати пречкртал дел од одговорот и остава впечаток на непедантност и несигурност;
- *Емоционалната стабилност на ученикот.* Најголемиот дел од учениците страдаат од испитна трема, некои повеќе, некои помалку. Ако тремата, како емоционална возбуденост на ученикот е преголема, таа прави опструкции врз неговата способност да го манифестира своето вистинско знаење. Ученикот кој не чувствува пак никаква трема и е целосно рамнодушен, исто така може да има проблеми да се концентрира врз одговарањето на прашањата, зашто не е доволно мотивиран своите вистински

знаења да ги манифестира при одговарањето. Во екстремни случаи, ученикот може и да одбие да одговара на прашањето или да предаде празен лист на писмената работа, бидејќи не е мотивиран “да се бори за оценка”, иако поседува одреден степен на бараните знаења;

- *Способноста за перцепирање и прилагодување на одговорите кон реакциите на учителот.* При одговарањето на прашањето од страна на ученикот, учителот свесно или несвесно реагира, вербално или невербално. Некои ученици не им обрнуват внимание на ваквите реакции и затоа оставаат впечаток дека помалку знаат, на пример од учениците што исто толку знаат, но “мајсторски ги читаат” реакциите на учителот и својата дискусија или решенија ги насочуваат во правец прилагодувајќи се флексибилно на реакциите на учителот;
- *Демонстрирање на сигурност при давање на одговорите.* Учениците кои се посигурни во манифестирањето на своите знаења, оставаат впечаток дека повеќе знаат од оние помалку сигурните.

3.7.2. ФАКТОРИ ШТО ВЛИЈААТ ВРЗ УЧИТЕЛОТ ПРИ ОЦЕНУВАЊЕТО НА ПОСТИГАЊАТА

Во текот на наставниот процес, учителот често се јавува во двојна улога при оценувањето на учениците - и како мерител и како мерен инструмент. Бидејќи за мерните инструменти се определени квалитативни мерни карактеристики, учителот треба нив соодветно да ги поседува. Проблемите што најчесто се јавуваат со оценувањето се должат на недоволниот квалитет на мерните карактеристики на учителот како инструмент на оценувањето, врз кои негативно влијаат следните фактори:

- *неконзистентно споредување на постигањата* - оценувањето се врши од еден ист учител на различни начини во различни паралелки, при што во посилените паралелки еден ист ученик може да добие за своето знаење послаба оценка, отколку кога би бил во послаба паралелка,
- *ало-ефект* - на учителот влијае општиот впечаток за ученикот, па затоа наместо да го оцени знаењето што го манифестира ученикот, затоа што е многу педантен тој добива повисока оценка иако педантноста не е декларирана во списокот на содржини на оценката, а ученик кој “не е дисциплиниран” е оценуван со помала оценка од реалната,

- *ехо-ефект* - учителот оценува под импресија на оценките на ученикот по други наставни предмети и учителот не се осудува да го оцени со 1 ученикот кој не ги задоволува стандардите по соодветниот наставен предмет, бидејќи по сите други предмети е оценет со оценка 5, а не е ретка и појавата наставничките совети, често да се под влијание на ехо-ефектот, па токму наставничкиот совет да врши притисок на учителот “да го испегла” општиот успех на ученикот, ставајќи му нереална оценка,
- *централна тенденција* - учителот ги избегнува најниските и највисоките оценки, а ги употребува обично средните, просечни оценки,
- *тенденција на екстрими* - учителот ги избегнува просечните, средните оценки и најчесто оценува дихотомно, со единица и петка,
- *тенденција на контраст* - кога последователно се проверуваат знаењата на два ученика со различни квалитети на знаењата, учителот може да биде позитивно импресиониран од подобриот ученик, па да го оцени послабиот со послаба оецнка од реалната и обратно, по негативна импресија на слаб ученик, да стави висока оценка за палку подобар, просечен ученик,
- *тенденција на хиерархија* - учителот се раководи од принципот: “Бог знае за петка, јас за четворка, па ученикот може да знае за тројка, двојка или единица”,
- *тенденција на дарежливост* (“педагошки оценки”) - учителот става повисоки оценки од заслужените, на повеќето ученици и ваквата тенденција обично се оправдува со лажната претпоставка дека повисоката оценка ќе го мотивира ученикот, а и со уписната политика во образованието. Но, оваа тенденција е многу масовна поради големиот притисок на родителите и пошироката заедница врз учителите, како единствени одговорни за излезните резултати од образовниот процес. Не ретко некои учители, тргнувајќи од претпоставката дека оценките се мерка и на нивната работа, ставаат повисоки оценки од реалните за да ја прикажат својата работа како поуспешна. Посебно е интересна појавата да се става доволна (преодна) оценка на поголем број ученици кои не ги задоволуваат основните образовни стандарди, со оправдување дека ако поголем број ученици повторуваат, паралелката нема да биде финансирана во наредната учебна година. Оваа појава одлично ја коментира Ѓ. Смиљаниќ: “Нехумано е да се стави двојка за незнаење!”
- *тенденција на закинување* - учителот на повеќето ученици им става помали оценки од реалните - вежба строгост. Оваа тен-

денција повторно се оправдува со мотивирање на учениците, овојпат да учат повеќе за да ги поправат ниските оценки. Во обата случаи се нема во предвид дека единствено реалната, заслужена оценка има навистина мотивациона функција и постигнува ефект на мотивирање на учениците,

- *тенденција на застрашување* - во текот на учебната година, учителот става послаби оценки, а на крајот “ги наградува” со подобри оценки, и
- *емоционална наклонетост на учителот* - преголема субјективност на учителот која значително влијае во процесот на оценување, при што учителот ги дели учениците на симпатични и антипатични, при што првите ги оценува поблаго, а другите по строго.

Важен фактор кој влијае врз учителот при оценувањето е и неговото искуство и оспособеноста и обученоста да применува разновидни форми и начини на вреднување на постигањата на учениците. Врз квалитетот на оценките, секако влијаат и фактори што зависат од начинот на вреднување и оценување. Ова се всушност фактори изразени како мерни карактеристики на инструментот за оценување.

3.8. НОРМАТИВНО И КРИТЕРИУМСКО ВРЕДНУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ

Оценувањето, како и секое мерење се изведува преку споредување, при што се споредува предметот на оценување, т.е. постигањата на ученикот. Но со што тој се споредува? Постојат воглавно два глобални пристапи кон ова прашање. Кај првиот глобален пристап, карактеристично е тоа што се тргнува од претпоставката дека постигањата на учениците директно зависат од нивните способности, односно предиспозиции, а при голем број на испитаници, докажано е дека способностите се *нормално распределени*. Тоа значи дека ако се истражуваат способностите на доволно голема и репрезентативна група, тие се дистрибуирани согласно веројатносниот модел на нормална случајна променлива. Способностите на испитаниците, односно нивните мери имаат тенденција да се сконцентрирани околу еден центар - просек, мод или медијана. Кај нормалната распределба, тие се групирани околу аритметичката средина. Најголемиот дел од нив се во интервалот аритметичка средина плус – минус една стандардна девијација. Помал дел се малку под или над нормалата со отстапување помеѓу една и две стандардни девијации од аритметичката средина, а многу малку од нив се исклучително потпросечни или надпросечни со отстапувања од аритметичката средина поголеми од две стандардни девијации.

Тргувајќи од претпоставката дека образованието е масовна појава и дека постигањата на учениците исто така се покоруваат на нормалната распределба, емпириски се утврдува една мерка, која ќе биде земена како норма со која ќе се споредуваат постигањата на учениците. При тоа, однапред се моделира самиот процес на оценување со тоа што се претпоставува дека најголемиот број од учениците ќе остварат просечни постигања, па треба да добијат просечна оценка (на пример 3), помал ќе биде делот што ќе покажат малку потпросечни резултати (оценка 2) и малку надпросечни резултати (оценка 4), а многу мал дел од популацијата ќе има поголеми отстапувања од нормата - многу послаби (недоволни) и многу подобри (одлични). Бидејќи при ваквото оценување, постигањата на учениците се споредуваат со една поставена норма, ваквото оценување се нарекува *нормативно оценување*. Нормата се определува емпириски, најчесто со статистички методи, па ова оценување често се нарекува и *статистичко оценување*. Нормата произлегува *по* споредувањето на примерок, или на целата популација, но во секој случај по спроведувањето на постапка на оценување, самите ученици се доведени во ситуација да им се проверуваат знаењата, а при тоа да не знаат однапред што треба да постигнат за која оценка. Поради тоа нормативното оценување уште се нарекува *апостериористичко оценување*.

Нормативното оценување најчесто се применува при помасовните проверки на постигањата, на пример со стандардизирани тестови на знаење што ги изработува професионална институција или пак при тестирање на цела популација од еден регион или цела држава, како што се предвидува да се одвива државната матура. Во секојдневната наставна практика, поретко може да стане збор за нормативно оценување. Постојат некои обиди да се прилагоди мерката при оценувањето во една паралелка или во едно училиште преку споредување на постигањата на учениците од таа паралелка или училиште меѓусебно. Всушност, споредувањето на постигањата на еден ученик со една емпириски поставена норма и постапката на утврдување колку тие постигања отстапуваат од нормата, всушност е меѓусебно споредување на постигањата на учениците. Ваквото споредување може да резултира со рангирање на постигањата на учениците според овие отстапувања, на пример во опаѓачки редослед од максималните - позитивни отстапувања до минималните - негативни отстапувања. За овој пристап го нарекува *надворешно-споредбен пристап*. Јасно, ако овој пристап се примени на поголема популација, станува збор за нормативно оценување. Меѓутоа, обидите ваквата споредба во рамките на една паралелка или едно училиште да се прикаже како нормативно оценување, доведуваат до неспоредливост на добиените оценки меѓу две паралелки или две училишта од ист образовен подсистем. Имено, она што е норма во една паралелка не е норма и во друга паралелка. Она што е норма во едно училиште не е норма во друго училиште.

Ако споредбата наместо меѓу постигањата на учениците меѓусебно се прави меѓу постигањата на еден ист ученик во два различни временски моменти, тогаш станува збор за *внатрешно-споредбен пристап*. Ако притоа се мерат разликите помеѓу резултатите добиени при дијагностичкото проверување пред почетокот на наставниот циклус и резултатите од сумативното проверување по завршувањето на соодветниот наставен циклус, се добива *апсолутна* внатрешноспоредбена оценка. Ваквата апсолутна оценка, А. Фулгоси ја нарекува *ретроградна валоризација*. Ако пак, резултатите од сумативното проверување се споредат со максимално можните, односно потенцијалните постигања што може конкретниот ученик да ги постигне, кои се проценуваат врз дијагностичко проверување на неговите способности и предиспозиции, тогаш се добива *релативна внатрешно-споредбена оценка*. Јасно, внатрешно-споредбеното оценување не е нормативно оценување.

Позитивните страни на нормативното оценување се тоа што најголемиот дел од учениците се групирани во една просечна категорија, кои се блиску околу поставената норма. Ова влијае порелаксирано да се прифатат резултатите од ваквиот начин на оценување. При масовните оценувања, нормативното оценување е прифатливо поради тоа што е доста осетливо и ги изразува разликите меѓу постигањата на испитаниците и може да се користи за селектирање. Ваквата оценка има практична и употреблива административна функција.

Негативни страни на нормативното оценување се:

- Определувањето на “нормално” знаење води кон формирање на лик за “типичен” ученик, што води кон конформистички приод и кон тенденција за просечност на најголемиот дел од учениците;
- Избирањето на нормата не нуди развој на образовниот процес. При секое оценување, емпириски се утврдува нормата, што значи дека системот не реагира доколку нормата е ниска, туку се прилагодува кон настанатата ситуација и на ист начин ги распределува оценките, не поттикнувајќи ги институциите да преземат мерки за зголемување на квалитетот на образование;
- Употребата на поимот нормално, изведен од поимот норма, води кон третирање на оние чии резултати значително отстапуваат од просекот како ненормални. Тоа особено се однесува на учениците кои покажуваат исклучителни, натпросечни резултати. Ваквиот приод на нормални и помалку нормални не е во функција на респектирање на различноста помеѓу индивидуите;

- При недостаток од норми определени на државно ниво, се градат локални норми кои се различни меѓусебе, а се однесуваат на еден ист образовен подсистем.

Вториот глобален пристап подразбира дека постигањата на учениците се споредуваат со претходно поставените наставни цели – разработени, формулирани и детализирани како *образовни стандарди* за критериумите за оценување, врз чија основа се изработени соодветни *критериуми* за оценување, така што секој критериум е проследен со листа од соодветни *индикатори* и инструменти за вреднување на степенот на оствареност на индикаторите и критериумот во целост. Во ваквиот приод на оценување, клучни се критериумите (мерките на знаење), па затоа ваквото оценување се нарекува *критериумско оценување*. Бидејќи ваквите цели, стандарди, критериуми и индикатори се изработуваат однапред, пред почетокот на реализирањето на наставата и однапред им се познати на сите фактори во наставниот процес, ваквото оценување се нарекува *апериористичко оценување*. Суштината на критериумското оценување ќе биде објаснето преку допрецизирање на клучните поими.

3.8.1. ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ

Во најопшта смисла, *образовни стандарди* се барања на општеството во врска со оној дел од образованието или некој образовен подсистем што претставува обврска за голем дел од популацијата ученици за одреден вид или степен на образование во една држава. Овде подетално ќе се задржиме на образовните стандарди за критериумите за оценување.

Стандардите за постигања можеме да ги дефинираме како прифатени описи на нивоата на квалитетот и квантитетот на знаењата што се очекува учениците да ги достигнат на крајот на определен период на образованието. Наставните програми определуваат што учениците треба да знаат и можат, како резултат на усвојување на содржините што програмата ги предвидува, а стандардите на постигањата претставуваат конкретизирање и диференцирање на постигањата по нивоа. Токму ваквото конкретизирање и диференцирање овозможува објективно и валидно гледање на постигањата на учениците и го олеснува нивното мерење и вреднување.

Иако може да се наведат доста забелешки кон горната формулација за стандарди за постигања, сепак, воглавно таа ја опфаќа суштината на сфаќањето што се стандарди за постигањата и потребата од стандардизација на образованието. Патем, некои експерти се противат на стандардизацијата на образованието, со образложение дека “едукацијата е уметност, а

секоја наставна активност е творечка, секоја постапка - креација”, а нелиметноста не е добро да се стандардизира.

Во секој случај, поставувањето на проблемот со стандарди за критериумите за оценување води кон наставните програми, поконкретно кон формулирањето на наставните цели. Понатаму, доколку наставните цели се добро формулирани, потребно е истите да конкретизираат и операционализираат на повеќе нивоа, а во секое поконкретно ниво преку активни глаголи да се опишат барањата на програмата во врска со постигањата на учениците, што овозможува да се провери дали тие цели се остварени. Следна фаза е сето ова на соодветен начин да се преслика во наставната практика. Но, дали е тоа така? Одговорот на ова прашање лежи во фактот дека учителите воглавно се трудат да ги исполнат своите обврски, но нивните формулации на наставните цели остануваат недоволно конкретизирани, па како такви се на извесен начин изолирани од процесот на проверувањата на знаењата на учениците. Во практиката, учителите ги формулираат целите (особено функционалните и воспитните) претежно формално, поради обврската да го прават тоа. Оттука, на место е забелешката дека со дидактичкиот модел и структура на нашите досегашни наставни програми тешко може да се постигне повисок квалитет на објективноста и валидноста на оценувањето. Всушност, засновано може да се каже дека *тие се малку употребливи како дидактички параметар и критериум за оценување* на она што, како промена, треба да го постигнуваат учениците во текот на учењето. Што им недостасува на класичните наставни програми во кои се вбројуваат и програмите што се реализираат во нашата наставна практика? Нивниот основен недостаток се состои во тоа што премногу се исполнети со програмски содржини, а сосем малку или воопшто не е дефинирано што треба како резултат да се постигне преку изучувањето на одделни содржини. Од ова нужно се гледа потребата за реформирање на наставните програми, со поголема целна насоченост, но сепак тоа не е доволно самото по себе. Имено, дури и најквалитетно формулирање на образовните стандарди не значи квалитетна стандардизација на образовниот процес, ако при тоа не се преземат мерки ваквите стандарди да се имплементираат во наставната практика, особено во фазата на проверување и вреднување на постигањата на учениците.

Имајќи го предвид досега изнесеното логично е да се запрашаме дали воопшто е можно самите учители да се придржуваат до квалитетно пропишани образовни стандарди за критериумите за оценување? Практиката при реализацијата на проектот “меѓународна матура” дава позитивен одговор на ова прашање. За овој проект е изграден строго дефиниран систем на критериуми за оценување за секој предмет посебно и секој учител е задолжен да се раководи од него. Секое лето се организираат семинари за обука на учители каде посебно внимание се обрнува на стандардизација на критериумите за оценување.

Значи, квалитетен систем од наставни цели, формулирани на оперативно ниво во целно-ориентирани наставни програми е првиот чекор во изградбата на образовни стандарди за критериумите за оценување. При формулацијата на наставните цели треба да се користат активни глаголи кои овозможуваат наставните цели да се мерливи - да може да се провери дали и во кој степен некоја конкретна наставна цел е остварена. Притоа една конкретна наставна цел треба да може да се лоцира на одредено ниво на когнитивност, користејќи ја на пример Блумовата таксономија на наставните цели. Важноста на формулираноста на наставните цели се гледа во следниот став: добро формулирани наставни цели претставуваат образовни стандарди.

Стандардот за квалитет, обично претставува систем од барања што ги определува *минимумот* својства на квалитет што мора да ги поседува одреден производ или производно-технички процес што го прифатил соодветниот стандард. Според тоа, *образовен стандард за критериум за оценување* е систем од барања (добро формулирани наставни цели) што определуваат минимални постигања за задоволување на соодветниот критериум. На елементарно образовно ниво, овие минимални барања може да се постават на дихотомни критериуми: задоволува – не задоволува. Најбазичниот образовен стандард треба да ги опфаќа *основните образовни потреби*. Според турските експерти Ј. Улкер и Ј. Бајкул, “основни образовни потреби се однесуваат на знаењата, способностите, вредностите и ставовите на луѓето што им служат да живеат со дигнитет, постојано да учат, да го подобруваат квалитетот на својот живот, општествената заедница и државата. Ваквото барање е образовен стандард за критериумот “задоволува” при оценувањето на квалитетот на основното (елементарно) образование во било која земја. Се разбира ваквиот стандард треба да се расчлени на повеќе конкретизирани цели – индикатори за остварување на образовниот стандард.

Имајќи ги во предвид глобалните текови на образовните процеси, особено масовноста како својство на современите образовни текови, суштинско е прашањето за писменост – полуписменост – неписменост. Тоа доведува до формирање на образовен стандард (за трихотомен критериум) на елементарното образование. Ако се има предвид дека во енциклопедискиот речник за педагогија е определено:

- терминот “основна писменост” означува стекнатост со вештини за читање и пишување, а неписмените не ги стекнале овие вештини, а полуписмените не го совладле во потполност читањето и не научиле да пишуваат,
- тој термин означува способност на луѓето своите мисли, чувства и доживувања да ги изразат писмено, и

- писменост во поширока смисла се употребува како синоним за општо образование, општа култура,

добиваме три различни образовни стандарди за критериумот “писмен – полуписмен – неписмен”. Понатаму, по истото прашање, Комитетот на експерти на UNESCO го дава следното објаснување:

- Личноста која знае да чита, го разбира прочитаното, знае да пишува едноставен текст на тема од секојдневниот живот се смета за писмена.
- Личноста која знае да чита и го сфаќа прочитаното, но не е толку вешта за да напише краток и едноставен состав на тема од секојдневниот живот се смета за полуписмена.

Првиот став е стандард за критериумот “писмена личност”, а вториот за критериумот “полуписмена личност”. Интересно е што проблемот на писменост и полуписменост преку аналогија може да се пренесе кон проблем на конкретна, на пример математичка писменост (што во некои истражувања навистина се прави). После овие примери за воопштени, но базични образовни стандарди, може да се концентрираме на образовни стандарди за критериумите за оценување по некој конкретен наставен предмет на конкретен степен од еден образовен потсистем. На пример, ако станува збор за наставата по математика, наставните цели треба да бидат така формулирани, што лесно ќе може да се измери дали една наставна цел е или не е исполнета. Нека се формулирани следните четири цели за наставната целина “Вектори”. Ученикот треба да:

- *дефинира* вектори и да *идентификува* колинеарни и еднакви вектори;
- *извршува* операции со вектори и да *конструира* (графички да *претставува*);
- *разложува* вектори на две компоненти и да *конструира*; и
- *применува* векторите при *решавање* на практични задачи со *докажување* на геометриски тврдења.

Не може комплексот од сите наставни цели да се смета за образовен стандард. Илузорно би било да се претпостави дека е можно да се очекува сите ученици да ги исполнат сите наставни цели. А образовниот стандард е минимум барања што го имаме за постигањата на еден ученик. Затоа, наставните цели треба да се групираат во онолку категории колку што има скалила системот на оценување. Во случајот со нашата образовна практика, постојат 5 скалила на системот за оценување: недоволен, доволен, добар, многу добар и одличен. Најпрво треба да се детектира кои се најважните наставни цели, кои навистина мора да ги исполни секој ученик што ја реализира наставната програма. Таквото множество од наставни цели, кои сега стануваат образовни стандарди, го сочинуваат критериумот за “доволен”. На пример наставната цел 1 треба да се прифати како образовен

стандард за критериумот “доволен” во наставната целина “Вектори” од соодветната наставна тема. Понатаму, множеството од образовни стандарди од следното ниво (наставната цел 2 во горниот пример) го образуваат критериумот за “добар”, па понатаму за “многу добар” (наставната цел 3) и секако стандардите кои како барања се однесуваат на највисокото ниво на когнитивност би се групирале во критериумот за “одличен” (наставната цел 4 во горниот пример). Ова значи дека за секој критериум се дефинира минимум квалитет на знаењето, како комплекс од образовни стандарди што прецизно и мерливо го опишуваат соодветниот минимум квалитет.

3.8.2. КРИТЕРИУМИ

Во претходните разгледувања го опишавме начинот на создавање на критериумот како множество од наставни цели (минимални барања, стандарди). Во овој дел попрецизно ќе го определиме самиот термин критериум.

Зборот *критериум* потекнува од грчкиот збор “критерос”, што означува средство за решавање. Во нашите разгледувања под *критериумот* ќе подразбираме објективна количинска мерка (затоа се бара стандардите да се мерливи) со која се означува што се смета не само социјално и практично пожелно (квантитет, квалитет или ниво на извршување, однесување), туку дури и неопходно потребно да се постигне во определени ситуации. Според тоа, критериумот е точно избрана големина која служи како објект за споредување при оценувањето на нешто. Врз основа на критериумот се донесуваат квалитативни судови, одлуки за успешноста на испитаниците. Одлуките за еден критериум се дихотомни: го задоволува-не го задоволува соодветниот критериум.

3.8.3. ИНДИКАТОРИ

Индикатор е основен извор на информации за квантитативните и квалитативните карактеристики на критериумот. Една, или повеќе наставни цели треба да се “преведат” на степен на конкретност, да се искажат со соодвени емпириски корелативи, односно *индикатори* преку кои можат да се вреднуваат промените во знаењата, умеењата и вештините.

Образовните стандарди за еден критериум за оценување, колку и да се прецизно формулирани, треба да се расчленат на уште поконкретни наставни цели (барања) кои непосредно може да бидат вреднувани. Ваквите најконкретни барања обично се нарекуваат *наставни задачи*. Во принцип, ако се добро (мерливо) формулирани ваквите наставни задачи се индикатори за соодветниот критериум. Индикаторот треба да го допреци-

зира и когнитивното ниво на кое се однесува соодветниот критериум. По правило, на секој индикатор му се придржува и вредносна рамка (број на бодови со кои се вреднува исполнувањето на соодветниот индикатор). На секој индикатор треба да му се придружи и соодветен инструмент, преку прецизно упатство како да се измери реализираноста на индикаторот. Тоа може да се оствари преку поопшти насоки со кои инструменти може ова да се оствари, но подобро е кога инструментот е конкретно опишан и илустриран преку тип на задача со која се проценува токму тој одреден индикатор.

На пример, за критериумот “добар” од наставната целина “Вектори” од соодветната наставна тема, стандардот “извршува операции со вектори и да конструира (графички да претставува)” може да се разработи со следните индикатори:

<i>Индикатори</i>	<i>Бодови</i>	<i>Инструменти</i>
Собира два дадени вектора	1	Дава типична задача со која може да се детектира исполнетоста на барањата на индикаторот
Одзема два дадени вектора	1	
Множи даден вектор со број	2	
Го образложува комутативниот закон за собирање вектори, при што користи цртеж	3	
Собира три дадени вектори	2	
Го образложува асоцијативниот закон за собирање вектори, при што користи цртеж	4	
Изведува операции со нултиот вектор	1	
Објаснува што е производ на нулти вектор со број и произволен вектор со нула	1	
Го образложува дистрибутивниот закон, при што користи цртеж	4	

Во горниот пример критериумот се смета за остварен доколку ученикот оствари 14 бодови. Значи, критериумското (априористичко) оценување се изведува преку споредба на постигањата на ученикот со дефинираните образовни стандарди. Според измерените и утврдени разлики, повторно може да се врши споредба помеѓу постигањата на различните ученици, па дури и нивно рангирање, што значи дека и при критериумското оценување, можна е соодветна селективност. Кај критериумското оценување, не мора да се добие нормална распределба на постигањата на учениците. Тоа на некој начин дава апсолутна слика за состојбата на знаењата на ученикот. Во зависност од поставеноста на критериумите, може да се случи голем број на ученици да добијат ниски или високи оценки, што создава извесни непријатни општествени импликации за образовните авторитети. Критериумското оценување нуди можност за добивање на реална слика за состојбите во образованието, што ја овозможува развојната компонента на образовниот систем. Бидејќи критериумите се однапред познати за сите фактори во наставата, априористичкото оценување делува како

фер и транспарентно оценување, па затоа е поприфатливо за пошироката јавност. Нашата наставна практика, декларативно го предвидува само критериумското оценување во наставниот процес, а само за екстерните оценувања предвидува нормативно оценување. Проблемите настануваат со тоа што и покрај декларативноста на системот за оценување како критериумско, недостасува квалитетна стандардизација на критериумите за оценување, поради што и оценките се сосема неспоредливи, а нејасно е и што тие всушност изразуваат.

3.9. ИНТЕРНО И ЕКСТЕРНО ОЦЕНУВАЊЕ

Според тоа кој го изведува оценувањето, тоа може да биде интерно и екстерно. *Интерното оценување* го изведува самиот учител кој што ја изведува наставата или група учители од образовната институција во која се образува ученикот. Во нашите разгледувања нема детално да се задржуваме на интерното оценување, но ќе се осврнеме неговите предноси и недостатоци.

Позитивна страна на интерното оценување е што тоа ја обезбедува интегралноста на наставниот процес и го вградува следењето и вреднувањето на постигањата на учениците како компонента од самиот наставен процес. Тоа исто така го промовира формативното проверување и единствено може да одговори на барањето за вреднување на постигањата сфатени во поширока смисла, преку следењето и оценувањето на севкупниот развој на личноста на ученикот.

Негативната страна на интерното оценување е во спомнатата двојна улога на учителот, како мерител и како инструмент за мерење. Тоа во голема мера влијае на квалитетот на интерното вреднување, особено на неговата валидност и објективноста. Оценките добиени од интерното оценување скоро и да не може меѓусебно да се споредуваат, поради нивната различна содржина и различниот предмет на оценување на два различни учители или во две различни образовни институции од еден ист образовен подсистем. Поради неможноста за споредување на оценките настануваат тешкотии во следењето и вреднувањето на образовниот систем како целина, со што се попречува и неговиот развој.

Поради споменатите негативности, се наметнува потребата од *екстерно оценување* и за значењето на истото. Тоа подразбира дека оценувачите не се од истата образовна институција во која се образува ученикот, туку доаѓаат од надвор. За таа цел постојат професионални установи во кои се вклучени експерти од повеќе наставно-научни области, но и експерти од областа на оценувањето. Овие установи се задолжени за изработка

на испитни програми и стандардизирани тестови, обука на оценувачи и преку нив реализирање на тестирањето. Потоа, истата таа установа ги обработува резултатите, ги објавува и ги анализира со цел да се согледа поцелосна слика за образовниот процес. Кај нас се реализираше оценување со карактеристики на екстерност при премин од основно во средно училиште. Тестовите се изработуваа централизирано од страна на тогашниот Педагошки завод, но тестирањето го спроведуваа и оценувањето го вршеа учителите во самите училишта. По укинувањето на квалификациониот испит за упис во средното образование, првото екстерно тестирање на голема популација се реализираше со воведувањето на државната матура, која требаше да ја реализира Државниот испитен центар, кој треба комплетно да ја преземе одговорноста за подготовките, изработката на испитните програми и тестови, како и за спроведување на тестирањето и оценувањето и анализата на добиените резултати.

Како и секој вид оценување, така и екстерното оценување има свои предности и недостатоци. Предности на екстерното оценување се:

- повисок степен на објективност,
- овозможува да се води сметка за образовните стандарди и да се применат единствени критериуми на поголема популација,
- ги задоволува потребите на образовните институции и пошироката јавност за увид во степенот на реализација на образовните цели;
- придонесува за зголемена мобилност на учениците, и
- го менува односот помеѓу ученикот и учителот - тие веќе не се во спротивставени улоги, туку подеднакво се заинтересирани за резултатите од екстерното оценување.

Недостатоци на екстерното оценување се:

- гломазно е и скапо,
- предивидуваат зголемена вознемиреност кај учениците, родителите и учителите, што се манифестира како испитна треска,
- во периодот пред спроведувањето на екстерното оценување, учениците и учителите ги запоставуваат остнатите обврски и се концентрираат на подготовките за тестот,
- екстерното оценување во принцип е сумативно и може да предизвика кампањско учење, учење базирано на претпоставената испитна ситуација (се учи она што паѓа на испитот), што значи дека се запоставува формативната улога на оценувањето, и
- не е доволно фер - само врз основа на еден лош ден на ученикот, се добиваат значителни негативни последици за неговиот натамошен развој.

3.10. ОПИСНО ОЦЕНУВАЊЕ

Современите образовни теории се почесто во прв план го поставуваат следењето и вреднувањето на постигањата кои се однесува на целокупниот развој на личноста на ученикот. Од вреднувањето на постигањата на еден ученик, по завршувањето на некој наставен циклус треба да произлезе оценка која ќе ја изразува промената на личноста што настанала за време на реализирањето на тој наставен циклус. Притоа се почесто се бара да се следи целокупниот развој на ученикот, за тоа да се водат забелешки, а да се укине оценувањето по предмети.

Постигањата на ученикот имаат комплексни својства. Може да се зборува за квантитативни и за квалитативни својства. Квантитативните, некако и можат да се измерат, па и да се изразат нумерички. Но, кај квалитативните својства, таа задача е практично нерешлива. Вредносните судови за квалитетите на знаењата и постигањата на еден ученик, најдобро може да се изразат со фрази кои ги *опишуваат* овие квалитети и степенот на нивно поседување. Множеството од ваквите фрази претставува резултат од вреднувањето на постигањата на ученикот во облик на *описна оценка*.

Во нашата образовна практика, описното оценување еден извесен период се користеше во почетното образование за предметите ликовно, музичко и физичко воспитание. Тоа се изразува преку пет фрази: “покажа недоволен, покажа доволен, покажа добар, покажа многу добар и покажа особен интерес и успех”. Прво, затоа што се користеа само пет фрази, а второ затоа што се тоа точно пет фрази кои се потполно аналогни на нумеричките оценки и нивните пропратни описи, ваквото описно оценување, всушност не е описно оценување. Во практиката, оценувањето по овие предмети се одвиваше потполно идентично како и оценувањето по предметите со нумеричко оценување, само што формулациите на оценките беа поинакви, а остана впечатокот дека описното оценување не е добро за наставата. Со најновите реформи во нашето образование, повторно се вовеле описно оценување за истите предмети, но во средното образование. Фразите што се користат повторно се аналогни на описите на нумеричките оценки, па за овие промени важат истите заклучоци како и за претходното “описно оценување”. Описно оценување во вистинската смисла, со користење на изобилство од фрази со кои се вреднува квалитетот на постигањата на учениците, компонента по компонента се воведува постепено во одделенската настава од прво до трето одделение.

Главните недостатоци на описното оценување се во тоа што ја зголемуваат административната работа на учителите, што е тешко да се реализира квалитетно кога учителот има преголем број на ученици и што јавноста смета дека нема оценки, кога тие оценки не се нумерички. Вове-

дувањето на описното оценување бара обука на учителите за квалитетно вреднување на постигањата на учениците, но и подготовка на пошироката јавност за прифаќање на тезата дека овој тип на оценување има свои големи предности и е незаменливо за вреднување на постигањата, особено од афективното подрачје.

Се поставува сега прашањето, дали описното оценување може да се применува и за повозрасни ученици, на пример од четврто одделени, а особено дали може да се применува во предметната настава? Дали може да се применува описното оценување, на пример, во наставата по математика? Одговорот на поставените прашања не е едноставен, но ќе забележиме дека ако се прифати барањето, оценката да ја изразува промената на личноста во текот на еден наставен циклус, тогаш не само што може, туку и мора да се применуваат елементи на описно оценување. Притоа, опширната описна оценка би требало да заврши со глобален заклучок за постигањата на ученикот со оптимистичка, поттикнувачка мисла дека наредниот пат ученикот може да постигне уште подобри резултати. Понатаму, некои од вредносните судови, кои се однесуваат на сродни индикатори кои произлегуваат од еден поопшт стандард, може да се обопштат, со што описната оценка би била поконцизна.

При реализацијата на една наставна тема, учителот сигурно може да забележи и евидентира барем неколку вредносни судови за процесот во кој ученикот ги стекнал своите знаења, како и множество ставови за целите од афективното подрачје. Сумирањето на овие податоци ја даваат комплетната слика за развојот на личноста на ученикот во овој временски период многу, и таа е многу покомплетна од оценката што учителот ја ставил во дневникот за работа, на првото тримесечие - одличен (5). Понатаму, ако ги разгледаме одговорите на сите поставени прашања од сите писмени проверки што се реализирани со еден ученик, тогаш добиваме огромна збирка вредносни судови кои ги опишуваат постигањата на ученикот и кои се изведени на прецизно формулирани конкретни индикатори. Од нив, заедно со вредносните судови собирани преку други форми на следење на постигањата, сигурно може да се изведе квалитетна описна оценка која многу ќе зборува за постигањата на учениот, како за квантитетот, така и за квалитетот на тие постигања, то е неспоредливо повеќе од една нумеричка оценка.

Претходно изнесеното ни дава за право да заклучиме дека описното оценување може да се користи и во наставата со повозрасни ученици и за повеќе предмети. Квалитетно изградени образовни стандарди може да доведат до квалитетен систем за оценување на знаењата во потесна смисла (декларативно и процедурално знаење). Но, за вреднување на квалитетите на тие знаења, а особено за вреднување на постигањата од афективното подрачје, описното оценување е незаменливо. Најидеално би било решени-

ето паралелно да се применуваат двете форми на оценување - нумеричко и описно. Нумеричкото оценување ќе се однесува на квантитативните својства на постигањата на ученикот и на оние квалитативни карактеристики на знаењата кои може да се решат со стандардизирање на наставата. Сепак, секој учител кој изведува настава со еден ученик треба да даде вредносен суд во облик на описна оценка која би ја дообјаснила нумеричката оценка по соодветниот предмет, или пак во прилог на нумеричките оценки по сите предмети, би се формирала некаква компилација од вредносни судови за квалитативните карактеристики на знаењата на ученикот и за постигањата од афективното подрачје во облик на една заедничка описна оценка. Само така, оценките на ученикот ќе го отсликуваат неговиот развој во текот на еден наставен циклус.

3.11. СКАЛИ НА ОЦЕНУВАЊЕ

Во образовната практика во скоро сите земји, вреднувањето на постигањата на учениците се заокружува со нивно категоризирање во одреден број на класи, по што на секоја класа и се придржува одредена вредност – најчесто нумеричка или алфабетска.

Најчесто употребувани се нумеричките скали со 5 класи (од 1 до 5), каква што се користи и кај нас. Нумерички скали со 6 класи се користат во Германија и Бугарија, со тоа што во Германија 1 е најдобра оценка. Во Данска и Холандија се користи скала од 1 до 10, а во Финска од 4 до 10. Алфабетски скали се користат во Грција (со 3 класи), САД, Канада и Италија (со 5 класи). На секоја од овие категориски оценки, некаде се придружува опис (на пример одличен, многу добар и слично), а некаде одат само ознаките за оценката. Во некои земји е дозволено да се додаваат меѓустепени со додавање на знаци од типот + и – или на некој друг начин.

Како и да е организирано, ваквото категориско оценување функционира на истиот принцип. Отворено е прашањето колкав е оптималниот број класи што треба да ги има една скала за да биде доволно осетлива и практична за употреба. Ваквото оценување е добро затоа што на учителите им одзема малку време и воопшто ја олеснува административната работа на учителите. Сепак, категориското оценување не може да ги опфати барањата за изразување на вкупниот развој на личноста на ученикот. Тоа најчесто е недоволно осетливо, а оценките не е принципиелно да се споредуваат бидејќи искажуваат различни информации, а уште помалку е допуштено да се оперира со нив, зашто аритметичка средина од броеви кои изразуваат различни количества или квалитети нема никакво соодветно толкување. Токму затоа, при конкурирањето за упис на многу факултети надвор од нашата земја, а особено при уписот на последипломски и док-

торски студии од кандидатите се бара да достават препорака од најмалку двајца нивни поранешни професори. Притоа содржината на овие препораки најчесто се однесува на севкупните постигања на личноста, како и на оценката за нивниот иден развој, елементи кои задолжително треба да се дел од описното оценување.

3.12. КРИТЕРИУМИ ЗА ОЦЕНКИТЕ ОД 1 ДО 5

За жал, образовната практика кај нас во овој момент е таква што учителот треба да го заокружи вреднувањето на постигањата на ученикот изведувајќи една од следните пет нумерички оценки: недоволен (1), доволен (2), добар (3), многу добар (4) и одличен (5). За да се подобри квалитетот на ваквиот систем на оценување, треба да се доизгради започнатиот систем на образовни стандарди за критериумите за секоја од овие пет оценки. Во меѓувреме, останува на совеста на учителите и трудовите на образовните експерти да поработат на усогласување на (непишаните) критериуми за секоја од овие оценки – да одговорат на прашањата: Што е содржина на секоја од оценките од 1 до 5? Кои компоненти се опфатени со оценката и на кое ниво во секоја од оценките? Сепак, во следниот период клучни прашања на кои треба да се дадат одговори се: Како да се оддели знаењето од незнаењето? Како да се постави границата меѓу постигањата кои ќе се прогласат за недоволни и оние за кои ќе се добива преодна оценка “доволен (2)”?

Според Јосипов и Гончаров, “со оценка доволен се оценува ученик што не знае голем дел од градивото, кога одговара воглавно само на сугестивните прашања на учителот и тоа несигурно, а во писмените работи прават чести и груби грешки.” Меѓутоа, постои мислење дека за оценка доволен:

- ученикот треба да владее со помал, но важен опсег на пропишаните наставни содржини,
- опсегот на усвоено знаење мора да овозможува понатамошно следење на излагањата на учителот,
- покажаното знаење е слабо поврзано, одговорите се несамостојни, со чести корекции од страна на учителот,
- од страна на учителот се поставуваат помошни прашања на кои ученикот не одговара секогаш сигурно,
- поврзувањето на знаењето со практиката е на осредно ниво,
- ученикот при изразувањето прави формални грешки, и
- ученикот се залага во работата и се труди кај практичните вежби, редовно ги изработува училишните и домашните задачи, но квалитетот на изведбата е просечен.

Во оваа насока Ѓ. Смиљаниќ, за оценката “доволен” вели:

- оценката доволен треба да каже дека ученикот задоволувачки го усвоил наставното градиво и ги постигнал воспитнообразовните задачи изложени во наставната програма,
- оценката доволен, не значи делумно знаење на предметот, таа треба да значи дека ученикот ја усвоил целокупната наставна материја од предметот, т.е. онаа наставна материја која се смета за основна во предметот (основната материја се воочува во наставниот предмет, а тоа секој наставник, стручњак, умее или треба да умее да го одреди),
- оценката доволен го изразува најнискиот степен на задоволителна самостојност при излагањето на знаењето и примената на знаењето при решавање на практични задачи, при што во секој од овие случаи дозволена е соодветна помош од наставникот, меѓутоа, помошта на наставникот не треба да се сфати дека наставникот одговара наместо ученикот или со сугестивни прашања утврдува колку ученикот препознава или се сеќава градивото, и
- оценката доволен е позитивна - но како прва позитивна оценка по вредност го изразува најнискиот степен на изграденост на работните навики и работната култура на ученикот.

И за двата критериуми за доволен, не е тешко да се заклучи дека не е голем процентот од денешните ученици кои можат да го достигнат. Особено втората формулација многу зборува за заблудата со која многу учители во практиката пристапуваат кон проблемот за критериум за оценката доволен. Тие бараат ученикот да знае сè, за воопшто да добие преодна оценка, а градацијата од 2 до 5 ја прават според начинот на кој ученикот го репродуцира знаењето. Од една страна илузорно е барањето сите ученици да научат сè, а од друга страна и до 5 се стигнува само со првите 2 нивоа од когнитивното подрачје. Спорна е исто така способноста на секој учител да го воочи и издвои основниот дел од наставните содржини. Ова само ја поткрепува тезата дека наставните цели не треба да се даваат воопштено, затоа што така учителот е во право кога бара сите ученици да знаат сè (да ги остварат сите наставни цели). Наставните цели треба да бидат прецизно формулирани, мерливи и изградени како образовни стандарди за критериум за секоја од оценките. Тоа значи дека самата наставна програма треба да опишува стандарди за тоа што треба да постигне секој ученик како минимум постигање за оценка доволен 2.

Критериумот за оценката одличен, според Смиљаниќ е:

- оценката одличен означува дека ученикот потполно располага со знаење од наставниот предмет и тоа знаење самостојно и точно го изложува,

- ученикот знаењето го изложува логички и естетски на високо ниво и самостојно го применува при решавање на практични задачи,
- оценката одличен означува дека ученикот систематски и постојано, во текот на целата учебна година го работел наставниот предмет и дека има изградени работни навики и работна култура,
- оценката одличен значи и дека знаењето на ученикот по предметот е систематизирано и како такво силно делува на формирањето на позитивни ставови и убедувања, како и на однесувањето на ученикот врз основа на тие ставови и убедувања.

Оценките добар и многу добар според овој приод се разликуваат само во нијансите на спектарот меѓу 2 и 5. Притоа квантитетот е пресуден кај критериумот за оценката доволен, а квалитетот е пресуден при градуирањето од 2 до 5. Слични критериуми за оценките од 1 до 5, нуди и словенечкиот експерт М. Ценчич. Притоа, овој автор ги вградува елементите на релативно оценување во своите критериуми, со тоа што објективните тешкотии на учениците ги смета за доволен фактор ученикот да добие еден степен повисока оценка. Имено, “оценка многу добар заслужува и ученик кој редовно се труди, а живее во исклучително тешки услови, но кај него се забележува напредок како во репродукцијата, така и во користењето на знаењата и ги постигнал суштинските цели на предметот”. Ваквиот ученик, да не живееше во исклучително тешки услови сигурно не би имал оценка добар. Дали со ваков пристап имаме валидни и објективни оценки?

Имајќи го предвид претходно изнесеното, мојот ученик X, не може да има петка, иако неговите постигања го достигнуваат и највисокото ниво од когнитивното подрачје, решава нестандартни задачи и неговите знаења се карактеризираат со креативност и се творечки?!? Очигледно е дека обидите да се дефинираат општи критериуми за оценките од 1 до 5 кои ќе бидат применливи по сите предмети доведуваат до противречни ставови на различни автори и критериуми, воглавно неприфатливи и неприменливи во практиката. Притоа, вакви општи критериуми, применливи по сите предмети, може да се изградат само во рамките на сеопфатен процес на стандардизација на целиот образовен систем, но сепак и така изградените критериуми задолжително мораат да ги респектираат спецификите на одделните наставни предмети. Понатаму, изградбата на општи образовни стандарди за квалитетни (пред сè објективни и валидни) критериуми за оценките од 1 до 5 е можно само ако вреднувањето се ограничи само на знаењето по потесна смисла (декларативно и процедурално знаење), а критериумите се поврзат со соодветно когнитивно ниво. На пример, кри-

риумот за оценката 2 би се ограничила на стандарди кои се однесуваат на првите две когнитивни нивоа, за оценката 3 би се поставиле и барања од третото ниво (примена), за оценката многу добар би се поставиле барања од четвртото и петтото ниво (анализа и синтеза), а за оценката 5, ученикот треба да го достигнува и највисокот когнитивно ниво (нивото на оценка).

Како што веќе беше нагласено, ситуацијата во наставата по математика е релативно почиста, а истото важи и за останатите предмети од природната група. Имено, повеќето од учителите веќе имаат прифатено дека критериумите за оценките од 1 до 5 треба да опфаќаат вреднување и оценување само на декларативното и процедуралното знаење. Притоа, иако не постојат пропишани критериуми за секоја од оценките, секој учител, или група учители од едно исто училиште има изградена слика за секој од овие критериуми. Во стручната методска литература за методика на наставата по предметите од природната група се елаборирани повеќе пристапи за воедначување на критериумите за оценување. Повеќето учители, своите оценки ги базираат на тематски или наставни тестови за кои скалите за оценување се релативно воедначени. Разликите се појавуваат претежно кај сумативните оценки. Некои учители сумативната оценка ја изведуваат само врз основа на споменатите наставни тестирања, а некои кон овие параметри додаваат и некои од афективното подрачје или почесто од други форми на тековно процериување и следење на постигањата на учениците.

Имајќи го предвид претходно кажаното, ќе споменеме дека при изработката на наставните тестови, можно е да се даваат варијанти на три тежински нивоа, при што ученикот има слобода да избере на кое тежинско ниво ќе работи. Овој приод го респектира принципот на индивидуализација и диференцијација во наставата. Недостаток кај ваквите наставни тестови е тоа што ученикот доколку не е доволно сигурен во себе, ќе потроши многу време лутајќи низ нивоата, или ако е премногу самоуверен може да избере прашања (задачи) од повисокот ниво и да собере помалку бодови отколку ако решава задачи од полесните нивоа. Во случај на вакви тестови прашањата (задачите) може грубо да се поделат на две тежински нивоа, при што на ученикот му се остава да избере дали однапред ќе го определи нивото на кое ќе работи, или пак ученикот за секоја задача одделно ќе се определи која варијанта ќе ја решава - полесната или потешката.

Кога станува збор за тестовите на знаења, повеќето автори се ја стапуваат тезата дека прво треба да се разгранички колку бодови (проценти) ќе се бараат за оценка доволен, а остатокот треба рамномерно да се распределат на останатите 4 оценки. Сепак, сметаме дека ваквата рамномерна распределба не е целисходна и дека примерна за користење би била следнава скала:

Оценка	36-53	54-71	72-86	87-100
Бодови (%)	2	3	4	5

На крајот од овој дел ќе споменеме дека во случај кога декларативните и процедуралните знаења се вреднувани во текот на целата година преку наставни тестови кои користат иста скала за оценување, можно е да се рангираат сите ученици според знаењата вреднувани на скала од 0 до 100. Нивните скорови би се пресметувале како аритметичка средина на резултатите од тестовите, евентуално корегирани според некои олеснителни околности. На пример, добро е најслабиот резултат покажан во текот на годината да се отфрли, а крајниот скор да биде аритметичка средина на останатите резултати. На тој начин нивните годишни сумативни оценки може да се изведат според истата скала за оценување која се користела во текот на целата учебна година.

4. ИНСТРУМЕНТИ ЗА ОЦЕНУВАЊЕ НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

4.1. ПОИМ ЗА ТЕСТ. ВИДОВИ ТЕСТОВИ

Во психологијата и педагогијата, се изведуваат експерименти, во кои субјектот чии својства се испитуваат се става во контролирана, прецизно определена ситуација, а потоа се следат реакциите на субјектот, кои се евидентираат и анализираат. Притоа често пати се јавува потреба за квантитативно изразување на набљудуваните реакции на субјектот. Во овој случај велиме дека станува збор за мерење и ова е предмет на работа на делот од психологијата кој го нарекуваме *психометрија*. Предмет на нашите натамошни рагледувања ќе бидат тестовите, за кои се смета дека се најобјективни инструменти со кои оперира психометријата.

Објективноста на тестот како инструмент за оценување произлегува од следниве два момента:

- со тестот, поголема група испитаници може да се стави во една иста контролирана ситуација како, на пример, за одредено време да се решат дадени задачи, да се одговори на дадени прашања, да се изведат определени вежби или да се изработи определен предмет,
- постапката на тестирање е стандардизирана, со претходно детално утврдени процедури за: давање упатства на тестаторите и тестираните, решавање на тестот, неговото прегледување, бо-

дување на излезните параметри (реакции, одговори, решенија и слично), анализа и споредба на излезни параметри и презентирање на резултатите од тестирањето.

Во принцип, сите тестови имаат една заедничка цел, а тоа е испитување на својства на личноста на испитаникот. Во зависност од својствата на личноста кои се предмет на испитување, тестовите глобално може да се класификуваат на:

- *тестови на личноста* во потесна смисла, со кои се испитуваат емоционалното или социјалното поведение на личноста, нејзините интереси, желби, ставови, мотиви и други својства на цртите на личноста,
- *тестови на способности*, со кои се испитуваат латентните, потенцијални можности на единката за успех во некоја активност, без претходна обука за таа активност. Во оваа група тестови спаѓаат тестовите на интелигенција (за испитување на општите интелектуални способности), тестовите за испитување на сензорните способности и тестовите за испитување на психомоторната умешност;
- *тестови на знаење* со кои се испитување знаењето во потесна смисла, односно декларативното и процедуралното знаење (умеењата и вештините).

Во нашите разгледувања посебно ќе се задржиме на *тестовите на знаење*, кои се од посебен интерес за наставата, при што ќе забележиме дека при дијагностичното проверување во наставата може да се употребуваат и тестови на способности.

Основна намена на тестовите на знаење е оценувањето на постигнатата на учениците. Сепак, овие тестови може да се применат и за други потреби, како на пример за

- дијагностичко проверување,
- учење или
- професионална ориентација.

Тестовите на знаење може да бидат *брзински* или *тестови на моќ*. Кај брзинските тестови клучен е бројот на задачи (прашањата) што испитаникот ќе ги реши (одговори) за одреден однапред определен временски период. Притоа, прашањата сè со такво тежинско ниво, што се подразбира дека сите испитаници можат без проблем да ги решат, а се разликуваат по вештината брзо да ги изведуваат потребните заклучоци или операции. Типичен пример за брзински тест е тестот со кој се мери колку зборови во минута може да исчука курсистот по дактилографија. Тестовите на моќ,

исто така треба да се решат во одредено временско ограничување, но тука тежинското ниво на прашањата не е такво да сите испитаници можат да ги одговорат. Тоа значи дека испитаниците не се натпреваруваат кој побрзо точно ќе го реши тестот, туку се натпреваруваат во определеното време тестот да биде точно решен. Ваквите тестови се скалирани и точното решение носи одреден број на бодови. Конечниот резултат, како збир на бодови е мерка на квантитетот, но и на квалитетот на знаењата на испитаникот. Јасно, во наставата воглавно се применуваат тестовите на моќ, освен во случај кога учителот има за цел да ги провери техничките процедури во наставата по математика, физика и слично.

Друга класификација на тестовите на знаење е поделбата на *вербални* и *невербални* тестови. Вербалните тестови уште се нарекуваат и тестови од видот молив и хартија. Задачите (прашањата) во овие тестови се зададени со зборови, скици, цртежи, графикони и слично, а и одговорот обично се бара во некој од овие облици. Невербалните тестови се практични тестови кои се состојат од некоја изведба или изработка, при што не се користат зборови, туку физичка изведба, користење на некој погоден алат, машина и слично. Јасно, во најголем дел од наставните предмети во основното образование се користат воглавно вербални тестови.

Според начинот на оценување на резултатите од тестот, тестовите се делат на *нормативни* и *критериумски*. Оценувањето кај секој од нив, што ја одликува и разликата меѓу нив е аналогно со нормативното и критериумското оценување, кои ги разгледаме во точка 4.8. Воопшто во наставата, поприфатливи се критериумските тестови, со исклучок на масовните тестирања од типот на државната матура, каде поприфатливи се нормативните тестови поради избегнување на поголеми негативни влијанија врз јавноста.

Тестовите, како мерни инструменти, се карактеризираат со четири-те основни и најважни мерни карактеристики на инструментите за оценување, а тоа се: валидноста, објективноста, релијабилноста и осетливоста, кои што ги разгледаме во делот 4.5.

Тестовите на знаења треба да се карактеризираат со стопроцентна *објективност*. Тие треба да имаат висок степен на *валидност*, кој треба да е утврден врз основа на научно засновани статистички методи. Обично, степенот на *валидност* се утврдува како коефициент на корелација меѓу резултатите на самиот тест добиени од еден репрезентативен примерок на испитаници, со резултатите на истите испитаници добиени со некоја друга техника на мерење, при што предметот на мерење на двете техники е декларативно ист. Степенот на *релијабилност* исто така треба да е статистички утврден. Најчесто се користи методот *тест–ретест*, кој се состои во последователно решавање на истиот тест на исти испитаници во краток вре-

менски период. За утврдување на релијабилноста на тестот покорисен е методот на паралелни форми на тестот. *Паралелни тестови* се тестови со целосно ист концепт на задачи (прашања), при што соодветните задачи (прашања) се разликуваат само во суштински неважни детали. Истите испитаници, во краток временски интервали, решаваат два паралелни теста, по што коефициентот на корелација меѓу двата резултати претставува всушност коефициент на релијабилност на тестот. Понекогаш како мерка за релијабилноста се користи коефициентот на интерна хомогеност на тестот кој се добива со делење на тестот (на пример на парни и непарни прашања) при што се пресметува коефициент на корелација меѓу резултатите на деловите (интерна хомогеност на тестот). *Осетливоста* на тестовите се одредува така што се проверува тестот на репрезентативен примерок од испитаници, по што за добиените резултати се проверува дали и припаѓаат на очекуваната веројатностна распределба. Ова особено се однесува на нормативните тестови, кај кои многу е важно да се добијат резултати чија распределба се е од типот на нормалната веројатностна распределба.

За тестовите на знаење важно е да се *практични* и *економични*. И за овие параметри постојат востановени начини за проценка. Особено важно е тестот да е баждарен, односно внимателно и повторно со научни, статистички истражувања да е добиена квалитетна скала за проценување на резултатите. Баждарењето на нормативните тестови се врши со пробување на тестот на репрезентативен примерок на испитаници. Аритметичката средина на резултатите од примерокот се определува како норма на тестот. Според стандардната девијација, под и над нормата се одредува бројот на бодови кој води кон потпросечните и надпросечните оценки. Баждарењето на критериумските тестови, обично се прави во согласност со образовните стандарди кои се мерката за споредување кај критериумските тестови. За еден тест на знаење да биде изработен така што ќе ги има обезбедено сите наведени мерни карактеристики, со стопроцентна објективност и стандардно висок степен на останатите карактеристики, тој мора да е изработен од тим од професионалци, експерти токму од оваа област. Притоа, во тимот треба да се вклучени експерти од областа што е предмет на испитување на тестот (наставен предмет или група предмети), но добро е во тимот да се вклучени психолог, педагог, статистичар и јазичар-лектор, кои без исклучок треба да имаат соодветни познавања од областа што е предмет на тестирање. Јасно е дека ваков експертски тим може да поседува само специјализирана институција за ваква намена – приватна или јавна институција. Тестовите на знаење кои ги задоволуваат наведените својства обично се нарекуваат *формални тестови* и може да се каже дека само ваквите тестови се вистински тестови на знаење.

Тестовите на знаење што се користат при масовни тестирања, како државната матура, мора да бидат формални тестови. Во наставната прак-

тика, учителите повеќе или помалку, користат тестови на знаење кои ги изработуваат сами или во соработка со стручните служби во училиштето и колеги од самото училиште. Ваквите тестови се наменети за тестирање на помал број испитаници и за нив не може да се очекува да имаат статистички испитани мерни карактеристики. Сепак, низ сопствената практика, учителите стекнуваат искуство како да изработат тестови со задоволителен степен на објективност, валидност, релијабилност и осетливост. Ваквите тестови обично се критериумски и бидејќи не ги задоволуваат квалитетите на формалните стандардизирани тестови, се нарекуваат *неформални* или *наставни тестови на знаење*.

4.2. НАСТАВЕН ТЕСТ НА ЗНАЕЊЕ

Како што рековме, тестовите на знаење кои се изработуваат во самите училишта, за потребите на наставата, не се карактеризираат со статистички проценки на мерните карактеристики и се нарекуваат наставни тестови на знаење. Понекогаш, како тестови се именуваат и контролните вежби кои учителите ги користат за сумативно проверување и кои се состојат од неколку (3-5), а понекогаш и од само 1 прашање или задача. Најчесто, учителите по предметите од општествената група на предмети, но и учителите по биологија, физика или хемија, практикуваат да постават едно или повеќе прашања, како наслов на некоја лекција и бараат од учениците овие лекции да ги репродуцираат, колку што е можно поверно на содржините кои се дадени во соодветниот учебник. Се разбира, ваквите контролни вежби не треба да се именуваат како наставни тестови на знаење.

Во наставата по математика, мајчин и странски јазик како последица на задолжителните писмени работи, често се изведуваат писмени контролни вежби, или едноставно писмени работи кои се именуваат како наставни тестови. Овие контролни вежби најчесто содржат неколку задачи (прашања) од отворен тип, кои може да носат по исто број бодови (сите по 20) независно од нивното тежинско ниво или да се вреднувани со различен број бодови, во зависност од тежинското ниво. Ваквите писмени работи, односно контролни вежби може да се именуваат како наставни тестови, само ако се изработени врз прецизно формулирани цели и индикатори, што значи ако и само ако е прецизно изработен клуч за бодување, во кој секој конкретен чекор носи точно одреден број бодови.

Една варијанта на ваквите тестови на знаење се тестовите кои содржат само задачи (прашања) од отворен тип, но се дадени задачи (прашања) од повеќе различни тежински нивоа. Притоа, условно класификуваните полесни задачи (прашања) треба да се вреднуваат со помалку, а условно потешките со повеќе бодови. Понатаму, тестот мора задолжително да биде

снабден со упатство во кое треба да биде објаснето дека ученикот однапред треба да се определи на кое ниво ќе работи, заокружувајќи една од буквите А или Б. Откако ќе го направи изборот на нивото, ученикот ги решава само задачите (прашањата) од тоа ниво. Притоа, решавањето на задачите од полесното ниво А, на ученикот му овозможува да се стекне со бодови кои се доволни за добивање оценка добар (3). Се разбира, ваков тест може да се организира и со задачи на три тежински нивоа. Пожелно е најлесното ниво да го отсликува минималното знаење што ученикот треба да го поседува за да продолжи да го следи наставниот процес – еден вид на образовен стандард за критериумот “доволен”, задачите (прашањата) од средното ниво би ги опфатиле наставните цели кои се очекува да ги реализираат најголемиот дел од учениците – просечните ученици, при што нивното целосно решавање е доволно за оценка многу добар (4), додека највисокот ниво задачи (прашања) треба да вклучува компоненти од највисокот когнитивно ниво и да ги селектира учениците што се најуспешни. Добрата страна на ваквите тестови е:

- ги поддржуваат принципите на индивидуализација и диференцијација на наставата, почитувајќи ги различностите меѓу учениците,
- подемократски се – им даваат на учениците право на избор и придонесуваат за поголем степен на самопроценка и оптимално ниво на самоверба на учениците.

Негативност на овие тестови е:

- под притисок за што подобар успех, ученикот може да избере повисоко ниво од она што навистина му одговара, што резултира со полоши резултати не само од очекуваните, туку и од реалните можности и знаења на ученикот,
- не се препорачуваат за ученици на помала возраст, од кои не може да се очекува поголема способност за самопроценка.
- под влијание на изместениот вредносен систем во општеството, учениците често реагираат дека со ваквите тестови им е нарушена правото на рамноправност, супституирајќи ја притоа еднаквоста како негативна (конформистичка) општествена вредност со рамноправност.

“Играњето” со задачи (прашања) од различни тежински нивоа, дава можност да се креираат наставни тестови кои содржат задачи од отворен тип од две (или три) тежински нивоа, при што наместо однапред да мора да го избира нивото на кое ќе работи, ученикот може за секоја задача да си избере соодветна варијанта. На тој начин, секој ученик, на различен начин може да дојде до посакуваната оценка, за што е неопходно тестот да биде снабден со јасно и прецизно упатство за работа.

Сепак, најдобри се наставните тестови кај кои се застапени повеќе задачи (прашања) од различен вид: задачи со повеќечлен избор, задачи со дополнување и задачи од отворен тип. Притоа, пожелно е кас прашањата (задачите) од отворен тип нуди и можност за избор од две понудени варијанти, на различни тежински нивоа, што тестот го прави прилично динамичен. Ваквите тестови нудат можност да се понудат прашања (задачи) кои се однесуваат на различни когнитивни нивоа. На овој начин тестот станува поосетлив, бидејќи на послабите ученици им нуди можност, преку задачите (прашањата) кои се однесуваат на првите две когнитивни нивоа, полесно да го достигнат стандардот за преодна оценка, додека преку задачите (прашањата) од отворен тип може да се направи добра селекција на најуспешните ученици. Поголемиот број на различни задачи (прашања) со дополнување или отворени задачи ја зголемува и осетливоста внатре во групата на условно просечните ученици. За учителите е проблематично тоа што за вака изработен тест, за кој уште се исполнети и барањата да е изработен квалитетен прецизен клуч за бодување и проценка на останатите мерни карактеристики – потребно е навистина многу време. Хендикеп кај наставните тестови е тоа што поради густоот распоред на часови на учениците, нивното решавање мора да се ограничи на 40-45 минути. Затоа и не може да се стават поголем број на задачи, со што би се подобрила валидноста и осетливоста на тестот. Само за споредба, стандардните тестови што се работат за државната матура, ќе содржат значително поширок спектар на задачи (прашања), но затоа учениците може да ги решаваат три саати (два дела од по 90 минути).

4.3. ВИДОВИ ЗАДАЧИ (ПРАШАЊА) ЗА НАСТАВЕН ТЕСТ

Во литературата моѓе да се сретнат најразлични класификации на прашањата (задачите) кои се задаваат на наставните тестови. Во точка 2.8 ги разгледаваме прашањата и нивната улога во проверувањето на постигањата на учениците. Во овој дел подетално ќе се задржиме на прашањата (задачите) за кои сметаме дека треба да се користат при составување на наставните тестови. Како што веќе рековме, прашањата (задачите) можат да бидат од отворен и затворен тип. Притоа, во задачите од отворен тип се вклучени и задачите (прашањата) со поврзување, идентификација и задачите (прашањата) кај кои решението (одговорот) е покомплексно и се состои од повеќе чекори. Затоа, сметаме дека најсоодветна класификација на прашањата (задачите) кои треба да се користат при изработка на наставните тестови е поделбата на:

- задачи со избор;
- задачи со дополнување;
- задачи од отворен тип.

4.3.1. ЗАДАЧИ (ПРАШАЊА) СО ИЗБОР

Прашање (задача) со избор е прашање или недовршена реченица чиј одговор односно завршеток е даден во неколку (најмалку две) варијанти од кои барем еден е точен. Според бројот на понудени одговори, овие задачи може да бидат задачи со *двочлен* или *задачи со повеќечлен* избор. Задачите со двочлен избор, уште се нарекуваат задачи со *прост алтернативен избор*.

При користењето на задачите (прашањата) со избор треба да се има предвид дека задачите во форма на недовршено тврдење се просторно по-економични и поконцизни, меѓутоа задачите во форма на прашање се поразбирливи за учениците, особено на помала возраст.

Задачите (прашањата) со двочлен избор ги имаат следниве предности:

- тие се просторно и временски најекономични и за кратко време може да се состават голем број на квалитетни задачи со двочлен избор и сите тие да се организираат на еден лист,
- доколку задачите се недвосмислено и јасно поставени, прегледувањето и бодувањето на одговорите е целосно објективно, при што може да ги прегледува и лице кое нема никакви знаења за содржините што тестот ги испитува, и
- испитаникот може да реши голем број задачи, за релативно кратко време, при што има впечаток дека има лесна задача, иако квалитетно составените задачи со двочлен избор може прилично да го протресат логичкото расудување на испитаникот.

Задачите (прашањата) со двочлен избор ги имаат следниве недостатоци:

- голема веројатност за случајно погодување на одговорот - една половина и овој недостаток може да се компензира со голем број на задачи и со корегирање на скорот, и
- постои и можност за препишување меѓу испитаниците.

Недостатокот на задачите (прашањата) со двочлен избор е надминат кај задачите (прашањата) со повеќечлен избор, затоа што со зголемување на бројот на понудени одговори, се намалува веројатноста за случајно погодување на одговорот. Оваа веројатност особено се намалува ако од понудените одговори, повеќе може да се точни, при што не е нагласено колкав е бројот на понудените точни одговори на дадено прашање. Бројот на комбинации овде значително се зголемува, со што веројатноста за случајно погодување на одговорот се намалува.

Обично, на задачите (прашањата) со избор им се припишува ниско когнитивно ниво – најчесто ниво на препознавање, бидејќи од ученикот

фактички се бара да го препознае точниот одговор. Сепак, кај некои задачи (прашања) со избор потребно е значително високо ниво на психичка активност за да се дојде до точниот одговор. Оттука, дали споменатиот недостаток ќе биде актуелен или не сепак зависи од ангажираноста и посветеноста на учителот при составување на тестот.

Задачите (прашањата) со повеќечлен избор ги имаат следниве предности:

- тие се пообјективни во споредба со задачите со двочлен избор, бидејќи значително ја намалуваат можноста за случајно погодување на точниот одговор, но сепак таква можност постои,
- прегледувањето на тестовите е брзо и истото може да го реализира едноставно и може да го реализира и лице кое нема никакви знаења за содржините што тестот ги испитува,
- доколку погрешните одговори (дистракторите) се вешто избрани, задачите со повеќечлен избор може да бараат различни нивоа на психичка активност.

Задачите (прашањата) со повеќечлен избор ги имаат следниве недостатоци:

- постои определена веројатност за случајно погодување на точниот одговор,
- постои можност за препишување меѓу испитаниците,
- овој вид задачи се помалку економични во споредба со задачите со двочлен избор, при што за нив е потребно повеќе простор, и
- самиот текст на задачите е подолг, па е потребно повеќе време за да бидат прочитани и разбрани, што значи дека тестот треба да содржи помал број на задачи.

4.3.2. ЗАДАЧИ (ПРАШАЊА) СО ДОПОЛНУВАЊЕ

Задачите (прашањата) со дополнување спаѓаат во групата прашања со кратки одговори. Најчесто користени се прашањата во вид на реченица од која недостасува некој дел, а одговорот (решението) на прашањето се состои во комплетирање на самата реченица или довршување на реченицата доколку делот што недостасува е на крајот.

Вака составените задачи со дополнување, обично се однесуваат на пониските когнитивни нивоа и најчесто бараат од ученикот да се потсети на некоја дефиниција или својство кое е изучено во наставта и треба на соодветен начин да го репродуцира ова свое знаење. Ваквите прашања имаат и одлики на отворени прашања, зашто ученикот може на повеќе начини да ја пополни празнината во речениците. Затоа, треба многу да се внимава на формулирањето на прашањето, при што е неопходно сите мож-

ни точни одговори да се предвидат и опишат во клучот за проверување и бодување на одговорите. Притоа, важно е да се внимава да се избегне секва двосмисленост и нејасност во барањето на задачата. На овој начин се подобрува и валидноста и објективноста на тестот. За да не се случи ученикот да може да даде точен одговор, кој се однесува на нешто друго, различно од она што тестот декларативно го проверува како знаење, треба формулацијата да е што попрецизно насочена кон очекуваниот одговор.

Како задачи (прашања) со дополнување, може да се состават и задачи (прашања) кај кои треба да се стави одреден симбол на определено место, поврзување со стрелки или соодветни броеви или букви на соодветни поими или фигури, дополнување на некој цртеж и слично. И во овој случај, обично се тоа задачи од нивото на препознавање, идентификување или поврзување. Но, може да се состават и задачи чие решение е исклучително кратко, навидум многу лесно, но бара од ученикот исклучителен психички напор.

Задачите (прашањата) со дополнување ги имаат следниве предности:

- се намалува можноста за случајно погодување на одговорот, освен кај сугестивните прашања кои треба да се одбегнуваат,
- испитаникот мора самостојно да дојде до точниот одговор после релативно мал број на кратки чекори, а најчесто само со еден чекор,
- не зафаќаат многу простор, по што произлегува дека се економични и може да се состават повеќе вакви задачи за еден тест, и
- доколку задачата (прашањето) е вешто составена така што сите (повеќето) можни одговори се предвидливи, тогаш овие прашања (задачи) се карактеризираат со висок степен на објективност.

Задачите (прашањата) со дополнување ги имаат следниве недостатоци:

- објективноста кај овие задачи не може да биде целосна, бидејќи сепак со определена веројатност е можно случајното погодување на одговорот,
- отвореноста на овие прашања, може да доведе до некој непредвидлив одговор, кој не е опфатен со клучот за бодување, па различни оценувачи за таков (точен или делумно точен) одговор би дале различен број на бодови,
- валидноста лесно може да биде доведена во прашање, доколку задачата (прашањето) не е прецизно формулирано,
- прегледувањето на одговорите не може да го изведува машина или некој што не ја познава содржината што е предмет на проверување на тестот.

4.3.3. ЗАДАЧИ (ПРАШАЊА) ОД ОТВОРЕН ТИП

Современата настава по сите наставни дисциплини тежнее кон подобрување на квалитетите на мислењето и усвојување на методите на заклучување, што само по себе значи кон повисоките когнитивни нивоа. Затоа и самото проверување мора да ги опфаќа наставните цели и од повисоките когнитивни нивоа, што значи дека во наставните тестови задачите (прашањата) од отворен тип се незаменливи. Прашањата од отворен тип се задачи со проширени барања. Тие од ученикот бараат да прикаже знаења и умеење како што се: изведување заклучоци, демонстрирање или објаснување на методи и опишување на постапки, организирање и презентирање на податоци и слично. Според тоа, кај задачите (прашањата) од отворен тип не е важно само конечното решение (одговор), туку и постапката, чекорите со кои се стигнало до одговорот на прашањето.

Во овој вид прашања спаѓаат и нестандартните проблеми за чие решавање се бара и одредено ниво на креативност и творечка работа. Задачите (прашањата) од отворен вид се решаваат (одговараат) во неколку чекори, па затоа и се сметаат за потешки од останатите видови задачи (прашања). При нивното бодување, најголем проблем е објективноста. Некои учители и кај ваквите задачи (прашања) го бараат само конечниот одговор и оценуваат по принципот сè или ништо. Се разбира овој пристап не е добар. Суштината кај овие задачи (прашања) не е конечниот одговор, туку постапката преку која се доаѓа до одговорот. Притоа, може да се изработи прилично прецизен клуч за бодување, ако постапката со која се доаѓа до одговорот се подели на логички целини – чекори, за секој од чекорите се направи проценка на когнитивното ниво, споредба со едничната мерка на “тежина” на задачите (на пример бројот на бодови на задача со двочлен избор) и за секој чекор се доделат соодветен број на бодови. На тој начин, одговорот на прашањето (задачата) може да го донесе максималниот број на бодови што ги носи прашањето (задачата), одреден број на бодови според чекорите што се изведени или 0 бодови ако не е целосно изведен ниту еден чекор. Во клучот би требало да се предвиди и проценка за бодување на делумно точни одговори, во кои поради некоја техничка или процедурална грешка е добиен погрешен конечен одговор. Иако се смета дека задачите од отворен тип те многу потешки од останатите видови задачи, сепак умешен учител може да состави квалитетни задачи од отворен тип на повеќе тежински нивоа. Особено успешно се покажува составувањето на повеќе варијанти од една иста задача (прашање), на различни тежински нивоа. Притоа, на ученикот му се дава можност да избира која варијанта ќе ја решава. На тој начин, ученикот индивидуално го приспособува нивото на задачите (прашањата) со своите можности и актуелни постигања, што ја зголемува умешноста за самопроценка и позитивно влијае на неговата самодоверба.

Во стручната литература најчесто се споменуваат три тежински нивоа на прашањата од отворен тип, што имплицира дека задачите од отворен тип треба да се изработуваат во три варијанти: наједноставна, средна и најтешка варијанта. Во практиката, многу производливо е составување на две варијанти - полесна и потешка. Во некои тестови може да се побара ученикот однапред да го избере нивото за сите задачи (прашања), а кај некои тестови на ученикот му се допушта за секоја задача да избере соодветно ниво, со што секој ученик на различен начин може да дојде до посакуваната оценка.

Задачите (прашањата) од отворен тип ги имаат следниве предности:

- овие задачи мерат знаења од највисоките когнитивни нивоа, кои останатите видови задачи не можат, или многу потешко можат да ги измерат,
- кај овие задачи до израз доаѓаат умеењата на ученикот за креативно и критичко мислење, творчката работа и способностите за решавање на проблеми и справување со проблемски ситуации, што од аспект на современите пристапи кон професионалната ориентација е исклучително важно, и
- овие задачи може да се изготвуваат и прилагодуваат на различни тежински нивоа.

Задачите (прашањата) од отворен тип ги имаат следниве недостатоци:

- намалената објективност, што се должи на фактот дека за некои задачи (прашања), постојат повеќе начини да се дојде до решение (одговор), кои некогаш е тешко целосно да се предвидат,
- врз текот на решавањето (одговарањето), може да се појават некои ситни технички и грешки кои доведуваат до погрешен резултат (одговор) и покрај доследната примена на процедурите, што е тешко објективно да се бодува, но тоа може донекаде да се надмине со изготвување на квалитетен клуч за бодување.

4.4. ЕТАПИ ВО ИЗРАБОТКАТА НА НАСТАВЕН ТЕСТ НА ЗНАЕЊЕ

Изработувањето на квалитетен наставен тест е еден проект, во висинска смисла. Тоа значи дека кон изработката на наставниот тест треба да се пријде на тој начин, што сериозно ќе се обрне внимание кон изготвување на детален план во кој внимателно ќе бидат сите потребни етапи и кон тој план треба максимално да се придржува. Проектниот план треба да ги опфаќа следните етапи:

а) *Определување на целите на тестот.* Оваа е прва, основна и најважна ориентациона етапа при изработувањето на наставниот тест. Целите треба да бидат прецизно формулирани. Изработувачот на (или тимот што го изработува) тестот, треба да ги запише прецизно формулираните цели, затоа што во сите наредни етапи треба да се води од поставените цели. Целите треба да претставуваат рамка на тестот - ориентир, визија како тестот треба да изгледа и што со него треба да се постигне.

Глобално, целите треба да одговорат на следниве три прашања:

- Што ќе се проверува со тестот?
- За која популација е наменет (кој ќе биде тестиран)?
- За која намена ќе бидат користени резултатите од тестот?

Првото прашање се однесува на селектирање на поглобални наставни цели чие реализирање треба да се провери со тестот. Овие наставни цели ја одредуваат и рамката на наставните содржини што ќе бидат опфатени со задачите (прашањата) во тестот. Пожелно е да се определи и максималното квалитативно ниво до кое ќе се движат барањата во задачите (прашањата) со кои ќе се проверува реализацијата на овие наставни цели. *Второто прашање* на некој начин ги поставува рамките во кои ќе биде допуштено да се движат мерните карактеристики на тестот, како и потребата за изработка на соодветен број на паралелни тестови. Кај наставните тестови, најчесто популацијата се движи од една паралелка до сите паралелки од една генерација, со која може да работат и повеќе учители кои тимски составуваат заеднички наставен тест. Кај стандардизирани тестови, оваа популација може да ги опфаќа и сите ученици од еден регион или цела држава. Наставните тестови најчесто се користат за оценување на постигањата на учениците. Сепак, со *третото прашање* треба попрецизно да се определи намената на резултатите од тестот. Наставниот тест може да се употреби и за дијагностичко проверување, па резултатите би се намениле за планирање на наставата во следниот наставен циклус. Тестот може да се употреби за увежбување, како подготовка за некоја посериозна испитна ситуација и слично.

б) *Опишување на индикаторите преку кои ќе бидат остварени целите на тестот.* Дел од дефинираните цели на тестот се однесуваат на глобалната наставна цел чија реализација треба да се провери со тестот. Меѓутоа, оваа глобална цел најчесто е воопштено формулирана и како таква не е соодветно мерлива. Таа треба да се расчлени на поконкретни наставни цели кои ќе бидат многу поконкретни и прецизно формулирани користејќи активни глаголи (на пример од списокот на Блумовата таксономија). Доколку за предметот постои современа, целно ориентирана и стандардизирана наставна програма, вака формулираните конкретни наставни цели, всушност се индикаторите за критериумите за секоја од оценките.

Притоа треба да се води сметка дека подоцна, во етапата на скалирањето и бодувањето на одговорите секој од овие индикатори треба да биде соодветно застапен, така што најоптимално да се дојде до претходно поставената критериумска определеност. Како и да е, во оваа етапа, неопходна е анализа на наставната програма, учебниците во кои се разработени соодветните наставни содржини, збирките задачи, задачите од домашните работи што им биле задавани на учениците, како и забелешките на учителот од реализацијата на наставата во соодветниот временски циклус.

Бидејќи во оваа фаза се врши избор на содржините кои ќе бидат опфатени со тестот, многу е важно да се внимава на *валидноста* на тестот. Ако претпоставиме дека индикаторите бездруго нема да излезат од рамките на конкретната содржинска рамка, останува многу внимателно да се процени репрезентативноста на избраните индикатори. Тоа значи дека соодветниот список на индикатори треба по склопувањето да ја даде глобалната наставна цел определена при формулирањето на целите на тестот.

в) *Планирање на бројот и на видовите задачи во тестот.* Секој од поставените индикатори е дел од некој критериум за оценување, што значи дека индикаторите се однесуваат на различни когнитивни нивоа, или пак може да се разработат на повеќе когнитивни нивоа. Во оваа етапа, важно е да се има предвид намената на тестот и временското ограничување за решавање на тестот. Тестовите што треба да опфатат поголема популација и чии резултати се планира да бидат искористени во истражувачки цели, би требало да содржат поголем број на задачи. Во овој случај, околу видот на задачите постојат различни гледишта. Некои автори сметаат дека е подобро сите задачи, по можност, да се од ист вид. Според некои тенденции, поради различните когнитивни нивоа што треба да се проверат, пожелно е да се користат задачи од сите видови. Кај наставните тестови чија намена е оценување на постигањата на учениците, видот на задачите зависи од когнитивните нивоа на кои се однесуваат дефинираните индикатори, а бројот на задачите (прашањата) генерално е ограничен поради временското ограничување кое најчесто се движи од 40 до 45 минути. Во оваа етапа, пожелно е да се изработи нацрт-шема во која за секој од индикаторите избрани во претходната етапа ќе се испланира по колку задачи ќе се изработат и од кој вид би биле тие.

Бројот на задачите (прашањата) од еден ист вид кои се однесуваат на еден ист индикатор зависи од воопштеноста на тој индикатор, како и од важноста на индикаторот и можностите за комбинирање. Конечно, колкав број на задачи (прашања) ќе бидат составени зависи од проценката на тимот што го составува тестот, но тој број на задачи треба да биде оптимален - да не се случи две задачи да бидат паралелни, да не се разликуваат суштински.

г) *Составување на задачите (прашањата)*. После квалитетно изработена нацрт-шема, треба да се формулираат конкретни задачи (прашања) за тестот. Во оваа етапа, важно е да се внимава на валидноста на секоја задача (прашање) - нејзиното решавање/нерешавање треба да покажува оствареност/неоствареност точно на наставната цел опишана со соодветниот индикатор. Поради тоа, треба прво да се забележат идеите за задачи (прашањата), а потоа за секоја задача (прашање) внимателно да се формулира барањето, така што недвосмислено да може да се предвидат можните одговори. Уште во оваа етапа е добро да се запишуваат можните одговори што може да ги даде ученикот. Ваквиот список на можни одговори ќе даде одговор на прашањето дали формулацијата на задачата (прашањето) е добра или таа треба да се преформулира. Исто така, ова ќе помогне при изработувањето на клучот за бодување, особено за задачите (прашањата) од отворен тип, каде е пожелно за делумно точните одговори да се предвиди колку бода ќе добие ученик кој направил одредена (предвидлива грешка). Ваквиот пристап ќе ја подобро објективноста на тестот. Важно е да се внимава на јазичната конструкција на текстот на задачата (прашањето), при што треба да се избере таква формулација која е прецизна, недвосмислена и јасна за ученик од соодветната возраст, без непотребни сложени или странски зборови кои не се важни за самата задача (прашање), а кои може да го збунат ученикот. Кога се составуваат задачите (прашањата) со повеќечлен избор, треба умешно да се предвидат сите можни насоки во кои може да тргне размислувањето на ученикот. Така ќе се добијат убаво множество од повеќе дистрактори, од кои треба да се направи оптимален избор. Искуството и умешноста на учителот да ги забележува грешките што учениците често ги прават и прашањата што тие ги поставуваат придонесуваат учителот да е поумешен при составувањето на ваквите задачи (прашања). Во оваа етапа треба да се преиспита одлуката за некој конкретен индикатор да се состави одреден вид на задача (прашање). Составувајќи ги задачите (прашањата), учителот може да заклучи дека подобро ќе ја провери оствареноста на пропишаната наставна цел доколку избере задача (прашање) од друг вид.

При составувањето на задачите (прашањата) се троши многу време, особено ако треба да се изготват неколку паралелни тестови. Кога се работи со голем број на ученици, на пример се тестираат 6 паралелки во еден ден со еден ист тест, прво треба да се преземат мерки за спречување на појавата на препишување, а второ, паралелките што се тестираат првиот и шестиот час не е добро да бидат тестирани со истиот тест. За таа цел, потребно е да се подготват неколку, што е можно поголем број на паралелни тестови. За да се заштеди на време при составување на задачите, пожелно е учителот уште за време на изведувањето на наставата да маркира и развива некои идеи за задачи (прашања) од учебникот, збирките задачи, од

задачите за домашна работа, од прашањата на учениците, од нивните грешки и слично.

д) *Редослед на задачите и упатства за употреба на тестот.* Задачите (прашањата) прво треба да се групираат по видови. Најдобро е прво да се дадат задачите (прашањата) со повеќечлен избор, потоа тие со дополнување и кратки одговори, а последна да се остави групата на задачи (прашања) од отворен тип. Во рамките на секоја група (вид) на задачи (прашања), пожелно е задачите (прашањата) да се распоредат од полесна кон потешка.

Бидејќи тестот создава чувство на нервоза, трема и слични емоционални реакции кај испитаниците, треба да се планираат мерки за намалување на ваквата емоционална возбуденост. Првиот добар чекор во оваа насока е за секоја група задачи да се состават кратки, но прецизни и мотивирачки упатства за употреба. Упатството треба недвосмислено да објаснува што е тоа што треба ученикот да го направи во соодветната задача (прашање). На пример, кај задачите со повеќечлен избор, дали треба да ја заокружи буквата пред одговорот, да го подвлече одговорот или да го заокружи самиот одговор. Во рамките на овие упатства треба да бидат додадени и бројот на бодови што го носи точно решената задача (прашање). Освен овие упатства, кои ќе бидат напишани на самиот тест, авторот на тестот треба да подготви и упатство за тестаторот - тој што ќе го спроведува тестирањето. Дури и самиот автор да е тестатор, што во практиката најчесто се случува, пожелно е да се подготви упатство во кое јасно ќе биде наведена целта на тестирањето, содржините што се опфатени со тестот, како и концепт за усни упатства што треба да им се дадат на испитаниците.

Усните упатства што тестаторот треба да им ги даде на испитаниците пред почетокот на тестирањето се многу важни и често пати истите се занемаруваат. Голем број на ученици, поради преголемата желба да постигнат што подобри резултати на тестот, воопшто не ги читаат упатствата за решавање на задачите, ниту пак ги слушаат усните упатства, туку директно преминуваат кон решавање на задачите, сметајќи дека така ќе добијат повеќе време за решавање. Поради ова, тестаторот треба да биде одличен организатор и така да го организира делењето на тестовите и да спречи учениците да почнат со решавање пред да ги чујат усните упатства за работа. Самото упатство треба да биде концизно, јасно и мотивирачко. На учениците треба да им се обрне внимание на начинот на кој треба да пристапат кон решавање и начинот на кој треба да го дадат одговорот. Треба да им се објасни начинот на бодување на решенијата, дали може да ги корегираат одговорите, кои средства смеат да ги користат, а кои не смеат, колку време имаат на располагање и како да го користат и слично. Усното упатство треба да биде завршено со поттикнувачки реченици, од

типот дека учителот верува дека учениците може успешно да одговорат на задачите (прашањата) и дека ако се концентрирани и ги почитуваат упатствата, ќе го добијат посакуваниот резултат. Доколку тестатор е лице кое не е автор на тестот, упатството за него треба да содржи пошироки образложенија за содржините што ги покрива тестот, популацијата која може да биде тестирана, детален клуч за прегледување и бодување на одговорите, како и можната употреба на постигнатите резултати.

ѓ) *Техничко обликување на тестот.* Тестот треба да биде соодветно обликуван. Освен формулацијата на речениците, јасноста на барањата и прегледноста на сликите, графиконите и другите елементи што ги содржат прашањата (задачите) и упатствата, многу важно е како овие елементи ќе бидат организирани на хартија.

Во денешни услови, не треба да е проблем за било кој учител да исползува компјутер и соодветен текст-процесор или софтвер за уредување на публикации со кои на едноставен начин ќе го обликува тестот така да биде прегледен и естетски дотеран. Притоа треба да се има предвид дали тестот може да биде даден како еден лист или ќе има форма на минитетратка. Од тоа зависи како ќе биде организирано давањето на упатствата, економичноста при искористувањето на просторот, организацијата на просторот за давање на одговорите (на посебен лист или на самиот тест), просторот за решенијата изведени во повеќе чекори и слично. Резултатот од оваа етапа е економично обликување на тестот кое ќе овозможи печатење на што поквалитетен тест со што помала цена на чинење.

е) *Решавање на тестот од самиот автор.* По изработувањето на тестот, пожелно е самиот автор да се стави во испитна ситуација и самиот да го испише сето она што се бара од испитаникот. На тој начин, уште еднаш ќе ја проконтролира формулацијата на задачите (прашањата) и упатствата, ќе ги открие евентуалните печатни грешки и ќе има можност да измери колку време му е потребно за да реши тестот, како и да ги оддели чекорите при одговарањето на секое одделно прашање од отворен тип. Како резултат од оваа етапа произлегува прочистен текст на задачите (прашањата) и упатствата. Времето што авторот го потрошил за испишување на одговорите (решенијата) на сите прашања (задачи) треба да се употреби за проценка дали испитаниците ќе имаат доволно време да го решат тестот. Како мерка, обично се зема трикратно поголемо време што на ученикот му треба да дојде до решенијата и да ги испише, во споредба со времето што авторот на тестот го троши за испишување на решенијата. Бидејќи испитаниците се пред нова ситуација (на авторот му се познати задачите што тој ги составил), му треба време да го прочита текстот, да размислува, да решава па да дојде до решение (заклучок). Притоа, голема е веројатноста дека на некоја задача (прашање) ќе потроши повеќе време, а неко-

ја задача (прашање) ќе ја реши погрешно, па ќе мора да ја решава уште еднаш. Од овие причини се предвидува најмалку трипати поголемо време за ученикот.

На пример, ако тестот треба да се реши за 45 минути, авторот на тестот не треба да троши повеќе од 15 минути за испишување на решенијата (одговорите) на задачите (прашањата). Времето што авторот на тестот го потрошил за испишување на решението (одговорот) на некоја задача (прашање), заедно со бројот на чекори кои треба да се поминат при решавање (одговарањето) на задачата (прашањето), како и теоретската (априористичка) проценка на когнитивното ниво кое како барање го содржи задачата (прашањето) се параметрите од кои зависи проценката на тежината на задачата (прашањето). Од оваа проценка ќе зависи и бодувањето на решенијата на задачите.

По завршувањето на тестирањето, пожелно е еден примерок од решените (одговорените) задачи (прашања) да им се даде на располагање на учениците. Непосредно по завршувањето на тестирањето, учениците се обично силно “загреани” за задачите и нивните решенија, па давањето на точните одговори на увид на учениците може да има силно мотивирачко дејство. Учителот треба да направи проценка дали заедно со решенијата на задачите, на учениците ќе им го достави и прецизниот клуч за бодување на решенијата. Доколку тестот има навистина објективен клуч, нема причина ваквиот клуч да не е достапен за учениците уште веднаш по завршувањето на тестирањето. На тој начин тие веднаш имаат прилика да се самооценат, што ја развива нивната умешност за самопроценување и позитивно делува на нивната самодоверба.

ж) *Клуч за бодување на решенијата на задачите (прашањата).* За максимална објективност на тестот, неопходно е да се изработи детален клуч за бодување на точните, делумно точните и неточните решенија (одговори). Централно прашање во оваа етапа е како да се вреднува точниот одговор на секоја од задачите (прашањата), колкав ќе биде максималниот вкупен број поени што ќе ги носат сите задачи (прашања) и како (со која скала) ќе бидат оценувани решенијата во зависност од бројот на освоени поени. Најдобро е прво да се проектира максималниот број на бодови што може да се освои со тестот. За полесно скалирање и анализирање на резултатите, пожелно е вкупниот максимален број на поени да се наштелува на 100. На тој начин, бројот на освоени бодови се совпаѓа со процентот на освоени бодови. Сега, во зависност од бројот на задачите (прашањата), може да се одреди единична мерка за наједноставните задачи, обично задачите со двочлен избор. Обично се препорачува овие задачи да носат по 1 бод, но ако вкупниот број задачи не е голем, може оваа единична мерка да е и поголема.

Кај задачите со избор од понудени одговори, важен момент е веројатноста за случајно погодување на одговорот. Еден начин на решавање на овој проблем, е фондот од бодови за една таква задача да се подели на три дела. Ако испитаникот не избере ниеден одговор добива половина од бодовите (знае што не знае), доколку даде точен одговор ги добива сите бодови, а ако одговори погрешно, не добива бодови. Потоа, се врши проценка на задачите со повеќечлен избор. Овде веројатноста за случајно погодување на одговорот се намалува со зголемувањето на бројот на понудени одговори. Затоа, овие задачи се вреднуваат со повеќе бодови отколку задачите со двочлен избор.

За задачите со дополнување треба повнимателно да се вреднува когнитивното ниво на кое конкретната задача се однесува. Иако одговорите кај овој вид задача се обично кратки, тие знаат од ученикот да побараат повисоко когнитивно ниво. Вешто составените задачи од овој вид, може да побараат од ученикот многу подлабоки мисловни операции од помнењето и репродуцирањето на одговорот. Поради тоа, бодувањето на овој вид задачи, најмногу ќе зависи од бројот на чекори што треба да ги направи ученикот за да дојде до точниот одговор.

Најтешко е да се изработи квалитетен клуч кај задачите од отворен тип, кои се однесуваат на повисоките когнитивни нивоа. Овие задачи се незаменливи и без вакви задачи не може да помине ниту еден посериозен тест по математика. Но, токму ваквите задачи најмногу ја загрозуваат објективноста на тестот. Неретко за ваквите задачи (прашања) постојат по повеќе начини да се дојде до точно решение (одговор), а некои ученици знаат вистински да изненадат нудејќи сосема оригинална и нестандартна идеја за решавање на проблемот. Ова е прилично тешко да се вреднува, особено ако ваквата оригинална идеја е проследена со некоја техничка грешка која довела до погрешен резултат, или ако идејата не е разработена до крај. Во секој случај, авторот на тестот треба да понуди начин на решавање за кој се претпоставува дека ќе го изберат најголемиот дел од учениците. Ваквото решение треба да се раздели на чекори, при што за секој чекор обично се зема единична “тежина” - колку една задача со повеќечлен избор. Сепак, некои чекори се однесуваат на повисоко когнитивно ниво, па не може да се вреднуваат како еден чекор, на пример од нивото на препознавање. Се разбира, бројот на бодови за ваквиот чекор треба да биде поголем за извесен процент. Сумата на бодови предвидени за секој чекор ќе го даде максималниот број на бодови што треба да го носи една комплетно точно решена задача. Авторот треба да понуди и неколку начини на решавање, ако се смета дека е извесно дека некои ученици може да го изберат тој начин на решавање. За секој од начините на решавање треба да се процени аналогија на чекорите кои доведуваат до одреден чекор, со што бројот на бодови да биде воедначен и кај два ученици што стигнале до

иста длабочина на решавање, иако на два различни начини. За нестандартните решенија, останува на умешноста на прегледувачот сам да направи соодветна аналогична и да го вреднува таквото решение. Токму оваа ситуација ја намалува објективноста на тестовите, зашто во ситуациите кога ученикот не решавал “по клучот”, некои учители немаат трпение да ја прочуваат оригиналната идеја на ученикот и едноставно ја оценуваат со 0 бодови. Други учители пак, исклучително ја ценат оригиналноста, па иако идејата не е до крај разработена, поради оригиналноста на идејата се склони да го доделат максималниот број на бодови. Имајќи предвид дека бројот на бодови предвидени со клучот за овие задачи може да е релативно голем, објективноста на тестот поради ваквите ситуации може значително да биде нарушена. Ваквата ситуација, особено доаѓа до израз на натпреварите по математика, каде и самите задачи се нестандартни и голема е веројатноста дека некој ученик ќе избере начин на решавање целосно различен од оној во клучот.

Во рамките на оваа етапа, по одредувањето на бројот на бодови за секоја задача, може да заврши и техничкото обликување на тестот, по што тестовите може да се печатат. Корисно е да се предвиди дали е подобро да се подготви и посебен лист за запишување на одговорите, или тоа да го прават учениците на посебен табак или пак некаде на самиот тест. Ако целиот тест се состои само од задачи (прашања) со повеќечлен избор, многу е практично одговорите како букви да се внесуваат на посебен лист (како кај тестот на меѓународниот натпревар по математика - Кенгур). Ваквиот начин максимално ја олеснува постапката на прегледување на решенијата, при што одговорите може да ги проверува и човек што не ја познава материјата што е предмет на испитување, па дури и компјутер, преку оптички читач.

После сите овие етапи, наставниот тест е подготвен и може да се употреби. За стандардизирните тестови пред употребата е неопходна уште една етапа - статистичка проверка на тестот. Се избира репрезентативен примерок кој го решава тестот, по што се врши анализа на мерните карактеристики на тестот, како и распределбата на добиените скорови. Доколку тестот ги задоволува поставените барања, се пушта во употреба. Доколку некоја карактеристика не задоволува, тестот се враќа на преработка, по што треба повторно да биде експериментално проверен. При изработката на наставните тестови, обично се задоволуваме со проценка на квалитетот на мерните карактеристики. Ако проценката е задоволувачка, тестот се пушта во употреба.

Употребата на тестот ги опфаќа етапите - тестирање на испитаниците и прегледување и бодување на решенијата. Во овие етапи, тестаторот треба да внимава на некои техничко-организаторски детали, како обезбеду-

вање на соодветна просторија за тестирање, услови за работа на учениците и временска координација на активностите. Во оваа етапа, особено е важно тестаторот да се придржува до упастствата на авторот на тестот, а особено да им ги даде соодветните упатства на испитаниците.

При прегледувањето на решенијата, обично се троши многу време, затоа што секое решение на ученикот мора внимателно да прочита, анализира и по можност да се коментира. Пред почетокот на прегледувањето, оценувачот треба внимателно да го проучи клучот, а при бодувањето на решенијата апсолутно да го почитува. При секое впишување на бодовите, треба да биде апсолутно сигурен дека било кој друг оценувач би го бодувал тоа решение со истиот број на бодови. Тоа обезбедува максимална објективност на тестот.

Добиените скорови треба да според скалата за оценување да се претворат во оценки и што е можно побрзо, оценетите тестови да им се вратат на учениците. За секој испитаник треба да се сочува документиран материјал за неговите решенија и бодови по оценки, како и некои карактеристични коментари. Ваквите резултати може и треба да подлежат на посеопфатна *анализа*, која може многу да каже за постигањата на учениците, но и за квалитетот на наставниот процес и образовниот систем во целина.

4.5. ПРИМЕРИ НА НАСТАВНИ ТЕСТОВИ

Во претходните разгледувања детално се осврнавме на наставните тестови. Во оваа точка прво ќе дадеме пример на тест, за кој сметаме дека е погоден за завршна проверка во наставата во VIII одделение. Тестот е составен според наставна програма која опфаќа:

- линеарни равенки и неравенки со една непозната,
- линеарна функција,
- систем од две линеарни равенки со две непознати,
- пропорционални отсечки,
- сличност и Питагорова теорема,
- точки, прави и рамнина во простор, и
- призма и пирамида, цилиндар, конус и топка.

Пример 1. Тест за завршна проверка во наставата во VIII одделение во основното образование, кој содржи 24 прашања со избор и дополнување и 8 прашања од отворен тип.

Прашања

1. Еквивалентна равенка со равенката $2x - 3 = x + 5$ е равенката:
- а) $2x + x = 5 - 3$, б) $2x + 5 = x - 3$,

в) $2x - x = 5 + 3$, г) $2x - x = 5 - 3$.

2. Со која од наведените равенки е запишана реченицата: “Ако бројот 21 се намали за некој број, а добиената разлика се намали 6 пати, тогаш се добива бројот 3”.

а) $21 - x : 6 = 3$ б) $(21 - x) : 6 = 3$
 в) $21 : x - 6 = 3$ г) $21 : (x - 6) = 3$

3. Која од равенките: $x + 2 = 5$; $x - 3 = x + 1$; $2x - 2 = 2(x - 1)$ или $x + 3 = 0$ е идентитет?

Идентитет е _____.

4. За која вредност на параметарот p , равенката $(p + 1)x = 5$ нема решение?

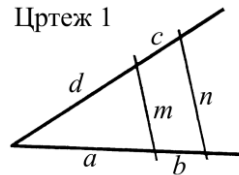
$p =$ _____.

5. Вредноста на размерот меѓу периметарот на еден квадрат и неговата страна е бројот _____.

6. Аголот на цртеж 1 е пресечен со две паралелни прави. Кој од размерите

а) $c : d$ б) $m : n$
 в) $d : c$ г) $b : a$

е еднаков со размерот $a : b$?



7. Во пропорцијата $a : b = c : x$, изрази го x со помош на a, b и c .

$x =$ _____.

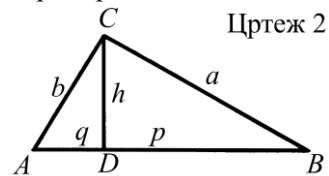
8. Кои од следниве три отсечки можат да бидат страни на правоаголен триаголник?

а) $3\text{cm}, 3\text{cm}, 5\text{cm}$ б) $3\text{cm}, 4\text{cm}, 6\text{cm}$
 в) $5\text{cm}, 12\text{cm}, 13\text{cm}$ г) ниту еден случај од наведените.

9. Ако односот на плоштините на два слични триаголника е $25 : 4$, тогаш односот на нивните страни е _____.

10. Во правоаголниот триаголник ABC (цртеж 2), е повлечена висината CD . При наведените ознаки, која од следниве пропорции е точна

а) $g : h = h : p$ б) $b : a = h : b$
 в) $g : h = a : p$ г) $h : g = b : h$

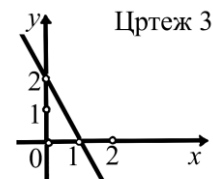


11. Формулата за пресметување на дијагонала d на квадрат со страна x е _____.

12. Графикот на функцијата

$$y = (m + \frac{1}{2})x + 7$$

е паралелен со правата $y = 2x$ за $m =$ _____.



13. На цртеж 3 е претставен графикот на функцијата:

- а) $y = -x + 1$ б) $y = 2x + 2$
 в) $y = x + 2$ г) $y = -2x + 2$

14. Функцијата $y = (k - 2)x + 4k + 1$, k е параметар е растечка за

- а) $k = -3$ б) $k = 2$
 в) $k > 2$ г) $k < 2$

15. Множеството решенија на неравенката $-3x < 9$ е интервалот

- а) $(-3, +\infty)$ б) $(-\infty, 12)$ в) $(-\infty, 3)$ г) $[-3, +\infty)$

16. Множеството решенија на системот неравенки

$$\begin{cases} x < 3 \\ 2x + 6 \leq 0 \end{cases}$$

е:

- а) $(-\infty, -3)$ б) $(-\infty, 3)$ в) $(-\infty, -3]$ г) $[-3, +\infty)$

17. Темињата на една четириаголна пирамида определуваат _____ рамнини.

18. Во множеството на реалните броеви равенката $4x + 3y = 12$ има:

- а) едно решение б) две решенија
 в) нема решенија г) бесконечно многу решенија

19. Која од релациите

- а) $3x > y$ б) $x > 3y$ в) $x + y = 3$ г) $x - y = 3$

покажува дека бројот x е за 3 поголем од бројот y ?

20. Кој од следниве броеви

- а) 8 б) 10 в) 21 г) 22

може да го означува вкупниот број рабови на една призма?

21. Ако работ на една коцка се намали 4 пати, тогаш нејзината плоштина ќе се намали _____ пати.

22. Призма и пирамида имаат заедничка основа и еднакви висини. Ако волуменот на призмата е $12m^3$, тогаш волуменот на пирамидата е _____ m^3 .

23. Формулата за пресметување на волумен на топка со радиус R е $V =$ _____.

24. Плоштината на осниот пресек на рамностран цилиндар со висина $H = 13cm$ е _____ cm^2 .

Задачи

1. Реши ја неравенката $(x - 1)^2 \leq 3 - x(1 - x)$.

2. Од местото A тргнал пешак и се движел со брзина од $4km$ на час. Од истото место, три часа подоцна, по него тргнал велосипедист и се движел со брзина од $10km$ на час. За колку часа велосипедистот го стигнал пешакот.
3. Пресметај ја должината на оградата на една нива во форма на ромб со дијагонали $d_1 = 240m$ и $d_2 = 0,12km$.
4. Во функцијата $y = kx + n$ одреди ги k и n за нулата на функцијата да е бројот 2 и функцијата ја сече y -оската во точката $A(0,6)$.
5. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 5x + y = 11 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$
6. Пресметај ја плоштината на правилна шестаголна пирамида, со основен раб $a = 6cm$ и бочен раб $s = 10cm$.
7. Колку лим е потребно за да се направи затворена кутија во форма на цилиндар, со радиус на основата $r = 4cm$ и висина $H = 25cm$?
8. Пресметај ги волуменот и вкупната плоштина на конус со плоштина на основата $B = 25\pi cm^2$ и генератриса $s = 13cm$.

Како што веќе кажавме причината за се поголемата примена на тестовите во проверувањето се низата предности, од кои ќе ги споменеме:

- проверувањето со помош на тестови е максимално објективно и доследно, т.е. успехот на секој ученик зависи од него самиот и ако повеќе пати се врши проверка на истата наставна материја се добиваат исти или слични резултати,
- учениците го прифаќаат тестот како праведен инструмент, бидејќи сите одговараат на исти прашања и во исто време,
- од тестирањето останува комплетна документација, која може да се користи за унапредување на наставниот процес,
- со тестовите може да се оствари поцелосен увид во знаењата на учениците, а исто така, при проверувањето со тестови може поцелосно да се согледаат разликите во знаењата на учениците, и
- проверувањето со помош на тестови не одзема многу од ефективното наставно време, а затоа е можно тоа повеќекратно да се спроведе, што придонесува учениците континуирано да учат.

Секако, на првите три става за предностите при проверувањето со помош на тестови не може да им се најде никаква забелешка, но тоа не е

така кај последните два, што може да се види од следниве недостатоци кои ги има проверувањето со помош на тестови:

- со тестовите на знаења успешно може да се проверува само квантитетот на знаењата, а не и нивниот квалитет, т.е. дури и со најдобро составениот тест многу е тешко или речиси е невозможно да се добие претстава за длабочината, сознательноста и применливоста на усвоените знаења, што значи дека тестот како мерен инструмент е непогоден за мерење на сложените (вишите) ментални процеси,
- ако во подолг временски период преовладува проверувањето само со тестови, учениците своето учење го приспособуваат на овој начин на проверување, така што ваквиот начин на проверување не само што не придонесува да се спречи кампањскиот начин на учење (ученикот има тест), туку учениците се специјализираат за одговори на тестови,
- на прашањата со понудени одговори постои можност од случајно погодување на точниот одговор, што значи дека при проверувањето со тестови може со сигурност да се согледа што не знае ученикот, што противречи на принципот за афирмативно оценување,
- при изработувањето на тестот се поаѓа од категоријата “просечен” ученик, а таа не само што не е дефинирана, туку е и крајно опасна бидејќи со тоа му се дава предност на егалитаризмот, наспроти потребата за индивидуализација на наставата,
- проверувањето само со помош на тестови ја сведува на минимум вистинската комуникација меѓу ученикот и учителот, со што значително се запоставува или во најмала рака се намалува воспитната компонента во овој сегмент на наставата, и
- сознанието дека проверувањето само со тестови ја исклучува можноста за корекција на евентуалниот неуспех, кај ученикот предизвикува страв од неуспех, напнатост и слично, а затоа, пак, кај учениците кои се проверуваат само со тестови се создава чувство дека се на некој натпревар кој има елиминационен карактер.

Изнесените предности и недостатоци на проверувањето со помош на тестови се една од причините за изработка на стандарди за тестирање во средините каде што тестот е доминантен инструмент при реализацијата на овој важен сегмент од наставата. Меѓутоа, од претходно изнесеното е јасно дека дури и да се изработат најдобри стандарди, сепак проверувањето со помош на тестови претставува беганье од проблемот на следењето, проверувањето и оценувањето на постигнувањата на учениците. Да разгледаме уште еден пример.

Пример 2. *Согласно програмата за реализирање на темата Теорија на броеви се предвидени 24 наставни часа, на кои ученикот треба да се здобие со следните знаења и умења: да ги утврди поимите делив, делител и содржател; да одредува делители и содржатели на даден број; да ги усвои општите признаци за деливост; да ги усвои посебните признаци за деливост; да ја усвои теоремата за делење со остаток и таа да се применува при решавањето задачи; да одредува НЗД и НЗС и да ја користи врската меѓу нив при решавањето задачи; да го усвои поимот за заемно прости броеви и да го користи при решавањето задачи; да го усвои Евклидовиот алгоритам и да го користи при наоѓање на НЗД; да може да дефинира прост и сложен број и да одредува дали еден број е прост или е сложен; да ги наоѓа простите броеви помали од даден природен број; да може да докаже дека има бесконечно многу прости броеви; да ја усвои основната теорема на аритметиката и да ја користи при разложувањето на сложените броеви на прости множители, наоѓање на НЗД и НЗС; да може да го пресметува бројот на делители на даден природен број; да ги усвои поимот за линеарна Диофантова равенка со две непознати и алгоритамот за нејзино решавање; да решава линеарна Диофантова равенка со две непознати со методот на Ојлер; да решава некои едноставни нелинеарни Диофантови равенки; да ги усвои поимот за конгруенција и нејзините својства; да ги користи конгруенциите при изведувањето на посебни признаци за деливост; да ги усвои поимите класа конгруенции по даден модул, потполн систем на остатоци и да ги користи при решавањето задачи; да го усвои поимот за линеарна конгруентна равенка со една непозната; да ја согледа врската меѓу линеарната конгруентна равенка со една непозната и линеарната Диофантова равенка со две непознати; да може да решава линеарни конгруентни равенки со една непозната; и интуитивно да ги развива своите способности за правилно дефинирање на поими и докажување на тврдења.*

Поставените програмски барања од оваа тема можат да се реализираат, на пример, ако содржините се разработат во следниве 14 методски единици:

1. Поим за деливост,
2. Општи признаци за деливост,
3. Делење со остаток,
4. Посебни признаци за деливост,
5. Најголем заеднички делител,
6. Евклидов алгоритам,
7. Најмал заеднички содржател,
8. Прости и сложени броеви,
9. Основна теорема на аритметиката,
10. Линеарна Диофантова равенка,
11. Методи за решавање на нелинеарни Диофантови равенки,
12. Поим за конгруенција. Основни својства,

13. Примена на конгруенциите,
14. Линеарна конгруентна равенка.

Понатаму, проверување и оценување на знаењата и умењата на учениците може да се реализира со следниот тест, кој содржи само прашања (задачи) од отворен тип, во која секоја задача содржи по две подзадачи со различно тежинско ниво:

1. а) Докажи дека $48 \mid (n^3 + 3n^2 - n - 3)$ за секој непарен број n . (8 б)
 б) Докажи дека $17 \mid (6^{2n} + 19^n - 2^{n+1})$ за секој природен број n . (15 б)
2. а) Докажи дека за два природни броја a и b барем еден од броевите: $a, b, a+b$ или $a-b$ се дели со бројот 3. (5 б)
 б) При делење на некој број со бројот 72 се добива количник n и остаток 68. Колкави ќе бидат количникот и остатокот ако истиот број се подели со 24? (10 б)
3. а) Ако n е природен број поголем од 1, докажи дека $\frac{10^n+35}{45}$ е природен број. (8 б)
 б) Најди го најмалиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2. (15 б)
4. а) Докажи дека при делење на произволен прост број p со бројот 30, остатокот е или прост број или 1. (15 б)
 б) Докажи дека за секој прост број поголем од 3, производот на соседни неговите броеви е делив со 24. (20 б)
5. а) Арсо имал 99 килограми сирење во пакувања од 2, 3 и 5 кг. Колку сирење имал Арсо, ако бројот на пакувањата е 22? (15 б)
 б) Во множеството на целите броеви решете ја равенката $x^2 + y^4 = 2x - 1$. (20 б)
6. а) Провери дали бројот $3^{103} + 5^{105}$ е делив со 7. (15 б)
 б) Реши ја линеарната конгруентна равенка $14x \equiv 15 \pmod{45}$. (20 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Оценувањето е според следниот критериум:

Бодови: 41-55	56-70	71-85	86-100
Оценка: 2	3	4	5. ♦

Меѓутоа, дури и ваквиот пристап кон проблемот на оценување не значи дека него сме го решиле. Имено, и при оценувањето кое е покажано во претходниот пример можни се бројни проблеми, од кои е доволно да ја спомнеме можноста учениците да ги преценат или потценат своите способности. На пример, ученик чии знаења и умења се доволни само за ре-

шавање на задачите од прва категорија, на писмена работа се обидува, преценувајќи ги своите способности, да ги решава задачите од втора или од трета категорија само затоа што смета дека тие му се познати или во желба да постигне што е можно повисока оценка.

4.6. ЕСЕЈСКИ ПРАШАЊА

Во претходните разгледувања се осврнавме на прашањата и нивната улога во проверувањето на постигањата на учениците. Во овој дел дополнително ќе ги разгледаме таканаречените *прашања од есејски тип*, кои се широко распространети во проверувањето и оценувањето на образовните резултати. Ќе наведеме некои карактеристики на прашањата од есејски тип. Имено:

- прашањата од есејски тип се користат, пред сè, за да се мерат оние образовни резултати кои што не се мерат лесно преку други видови прашања,
- есеите се помалку ефикасни отколку другите видови прашања (задачи), потешко се оценуваат и бараат повеќе време за оценување,
- есеите се корисни за оценување на резултатите за повисоките нивоа на способности (на пример: критичка анализа, апстрахирање, евалвација, резимирање итн.),
- во наставата по јазиците, тежиштето се става на формата на есејот/писмениот состав (на пример: наративна, изложувачка, убедувачка итн.),
- оценувањето на есеите може да се користи за да се добие увид во процесот на пишувањето преку користење на подготвителни активности пред изготвувањето на писмениот состав (на пример: дискусија, набележување и организирање на идеите, изготвувањето скица на составот итн.).

Постојат два вида есеи и тоа: есеи со *ограничен* обем и есеи со *проширен* обем. Разликата меѓу овие два типа есеи е во тоа што:

- есејските прашања со ограничен обем ја ограничуваат суштинската содржина на писмениот одговор, и
- есеите со проширен обем претставуваат вид на есејско прашање кое што бара од учениците да напишат есеи во кои што тие слободно ќе ги изразат своите сопствени идеи, ќе ги покажат меѓусебните врски на идеите и ќе ги организираат своите одговори.

Според Лин и Милер со есејските прашања со ограничен обем можат да се мерат следниве видови образовни резултати :

- објаснување на врските меѓу причината и последицата,
- опишување на примената на принципите,
- презентирањето на релевантните аргументи,
- формулирањето на експерименталните хипотези,
- формулирање на потребните претпоставки,
- опишувањето на ограничувањата на претпоставките, и
- објаснувањето на методите и постапките,

а кај есејските прашања со проширен обем можат да се мерат следниве видови на образовни резултати :

- продуцирање, организирање и изразување идеи,
- поврзувањето на учењето во различните наставни подрачја,
- креирањето на оригинални ставови, форми и идеи,
- способноста за критичка анализа, резимирање и слично,
- способноста за креативност,
- способноста за објаснување на принципите,
- способноста за влијание преку пишаниот збор.

Слично како и останатите видови прашања и прашањата од есејски тип имаат свои предности и недостатоци. Предности на есејските прашања со проширен обем се:

- ги мерат комплексните образовни резултати кои што не можат да се мерат со други средства, за што е потребно есејските прашања да бидат внимателно изготвени,
- ја нагласуваат интеграцијата и примената на квалитетите на мислењето и способностите за разрешување проблеми,
- овозможуваат директно оценување на способностите за пишување,
- се изготвуваат релативно лесно, иако при изготвувањето на овие прашања треба да се биде особено внимателен, и
- придонесуваат за учењето на ученикот, а процесот на пишување есеи може да придонесува за развој на квалитетите на мислењето и видовите на заклучување,

а недостатоци на овие прашања се:

- недоследноста при бодирањето – може да ја присутна слаба релативна меѓу оценувачите, а особено ако се посветува мало внимание на образовните резултати што се оценуваат и ако не се користат добро изготвени листи за аналитичко бодирање,
- можно е да биде потребно многу време за бодирањето,
- есеите покриваат мал обем на содржини.

4.6.1. ФОРМУЛИРАЊЕ НА ПРАШАЊАТА КАЈ ПРОШИРЕНИТЕ ЕСЕИ

При формулирањето на прашањата кај проширените есеи треба да се биде особено внимателен. Имено, ако целта на есејот е да се оцени способноста за пишување на учениците, треба да се даде мотивирачко упатство кое се однесува на конкретната тема што ќе биде разработувана во самиот есеј. Така, на пример, ако од учениците се бара да напишат есеј во кој критички ќе се осврнат на ставовите на лицата А и Б по одредено прашање, а потоа по истото прашање и самите ќе се произнесат, добро е заедно со насловот на есејот на учениците да им се презентира и кратко упатство од видот:

*Прочитај ги искажувањата на лицата А и Б дадени подолу.
Колку нивните мислење се слични, а во што тие се разликуваат?
Какви се твоите ставови во однос на разгледуваниот проблем?
Објасни ги причините за твоите заклучоци.*

За оценување на знаењата на учениците, разбирањето и расудувањето по одредено прашање, потребно е соодветно упатство и пристап за работа. Лин и Милер ги нудат следниве совети за изготвување на есејски прашања со кои што ќе се оценуваат знаењата и процесите по одреден предмет:

- користете ги есејските прашања за образовните резултати кои што не можат да се мерат на задоволителен начин преку прашања од објективен тип,
- изготвувајте прашања кои што ќе бараат способности специфични за образовните стандарди (образовните резултати)
- формулирајте го прашањето така што задачата на ученикот да биде јасно искажана,
- наведете го приближното временско ограничување на секое есејско прашање (доколку има повеќе од едно),
- одбегнувајте користење на прашања по избор (тоа ја намалува доследноста меѓу оценувачите)

Имајќи го предвид претходно кажаното, треба да се пристапи кон формулирање на есејското прашање. На ова посебно нема да се задржуваме, но ќе наведеме два примера на есејски прашања со проширен одговор:

- Напиши состав на две страни бранејќи го нашето користење на природните ресурси. Твојот есеј ќе биде вреднуван во поглед на неговата организација, неговата разбирливост и релевантноста на презентираниите аргументи.

- Наведи три хипотези кои што објаснуваат зошто птиците на есен летаат кон југ. Укажи на најверојатната хипотеза и напиши ги причините за твојот одговор.

Есејските прашања во процесот на проверување на постигањата на учениците подлежат на вреднување и оценување. Што се однесува до вреднувањето на одговорите на есејските прашања Лин и Милер наведуваат листа на прашања која што може да се примени за да се вреднуваат есејските прашања кои што сме ги поставиле. Притоа, самата листа на прашања има за цел да обезбеди бодирањето на есејските прашања да биде колку што е можно порелијабилно. Тие прашања се:

1. Дали ова е најсоодветен тип на задача да се користи?
2. Дали прашањата се наменети да се мерат образовните резултати што сакаме да ги мерите?
3. Дали прашањата се релевантни за мерење на образовните резултати што сакаме да ги мериме?
4. Дали секое прашање покажува јасно каков одговор се очекува?
5. Дали учениците се известени врз која основа одговорите ќе им бидат вреднувани?
6. Дали дадените временски ограничувања обезбедуваат можност за давање одговори на прашањата?
7. Дали на учениците им е соопштено временското ограничување за решавање и бројот на бодовите за секое прашање?
8. Дали од сите ученици се бара да дадат одговори на истото прашање?
9. Доколку се ревидираат, дали прашањата сè уште релевантни за мерење на образовните резултати што сакаме да ги мериме?
10. Дали прашањата, извесно време, сте ги тргнале настрана пред тите да бидат повторно разгледани?

4.6.2. ОЦЕНУВАЊЕ НА ЕСЕЈСКО ПРАШАЊЕ ПО ОПРЕДЕЛЕН НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

При оценувањето на есејските прашања од определен наставен предмет тежиштето треба да се насочи кон оценувањето на содржинските знаења. Притоа е присутен помал интерес за презентацијата или за техничките аспекти отколку што тоа би било случај при оценувањето на квалитетот на пишувањето. Исто така, треба да се изготви листа за аналитичко бодирање за секој проширен одговор на есејското прашање што е предмет на оценувањето што се спроведува. Самото оценување може да се реализира според следниов алгоритам:

1. Подгответе некој вид на водич за бодирање – на пример: преглед, аналитичка листа, некој “идеален одговор”, или “примерок” на одговор од некое порано спроведено оценување.
2. Оценете ги сите одговори на едно есејско прашање пред да преминете на оценување на одговорите на следното прашање.
3. Повремено пребодирајте ги претходно бодираниите одговори.
4. Бодирајте го ракописот, општата педантност, правописот, користењето на пропишаната форма и техниките, а посебно бодирајте ја содржината во предметното подрачје.
5. Бодирајте ги одговорите без да го знаете името на ученикот кој што го пишува одговорот.
6. Дајте им на учениците повратни информации за добрите и за слабите страни во нивните одговори.
7. Ако донесувањето одлука за оценка е многу важно, во бодирањето нека бидат вклучени двајца или повеќе оценувачи.

На крајот од овој дел да забележиме дека постојат и други приоди за оценување на работата на учениците кои што се поврзани со листите за аналитичко бодирање. Тие вклучуваат листи за проверка, скала за оценување и самооценување. Во натамошните разгледувања за секоја од нив даден е кус опис:

- *Листите за проверка на способностите за пишување* – листата за аналитичко оценување на пишувањето може лесно да се трансформира во листа за проверка. Листата за проверка може да се користи од учениците за да проверат дали ги вклучиле сите значајни компоненти во нивниот есеј. Така таа може да придонесе за самооценувањето. Листите за проверка можат да се изготвуваат за сите аспекти на процесот на пишување и истите најчесто се користат за формативно отколку за сумативното оценување. Изготвувањето на ваквите листи бара посебен напор од страна на учителот, при што треба да се има предвид дека содржината на листата пред се е определан од содржината и намената на есејот.
- *Скалите за оценување на способноста за пишување* – скалата за оценување е слична на листата за аналитичко бодирање. Учителите можат да ја оценуваат изработката на ученикот (на пример: организација на пишувањето) на скала слична на следнава: 5 = одличен, 4 = натпросечен, 3 = добар, 2 = просечен, 1 = слаб.
- *Самооценувањето на пишувањето на ученикот* – кога учениците го оценуваат своето пишување, тие учествуваат во самооценувањето. Тие можат да го оценуваат своето пишување користејќи едноставни листи за проверка или скали за оценување.

4.7. ПРОЕКТИ

Проектите претставуваат долгорочни активности кои што им овозможуваат на учениците да работат интерактивно, но истите можат добро да послужат за воведување на учениците во истражувачка работа. Понатаму, преку определени видови проекти може да се оценуваат умеењата на учениците. Во овој случај проектите даваат продукти како резултат на извесна практична изведба или активност, на пример:

- изработка на модел (макета) на традиционална куќа, верски објект или слично,
- изработка на определено дидактичко средство итн.

Учениците од основното образование можат да работат на најразновидни проекти, индивидуални или групни. Примери на такви проекти се:

- биографско проучување на животот на некој познат научник,
- истражување на влијанието на средината врз развојот на растенијата, ,
- истражување на историјата на местото на живеење на ученикот итн.

Подготвувањето на проектните задачи и нивното успешно реализирање бара посебен напор од страна на учителот. Во нашите разгледувања подоцна ќе се навратиме на методологијата на подготовка и изработка на проект, а овде само ќе забележиме дека во пример 2 од точка XI 1.4 е презентирани пример кој може да послужи како патоказ за изготвување на ученички проекти.

Во случај кога определен проект се користи за оценување на учениците, тогаш треба да внимаваме на следниве моменти:

- на учителот и на учениците треба да им биде јасно дека проектот е насочен кон една или кон повеќе значајни обврски,
- во групните проекти секој ученик треба да ја извршува својата сопствена задача,
- секој ученик треба да има еднаков пристап до ресурсите што се потребни за да се заврши проектот,
- учителите не смеат да покажуваат пристрасност кон определени резултати и изведби и треба праведно да ги вреднува сите презентирани изработки.

Понатаму, при оценувањето на проектите добро е да се почитуваат следниве насоки:

- на учениците треба да им се дадат соодветни насоки за критериумите кои што ќе бидат користени при вреднувањето на нивната работа, за стандардите што ќе бидат применувани и за тоа

како учениците ќе можат да ги користат тие критериуми и стандарди за да го следат сопствениот напредок во завршувањето на работата,

- да не се дава предност на естетскиот изглед на производот наместо на содржината или на идејата,
- доколку ученикот задоцни во завршувањето на проектот не треба да се намалува оценката,
- за да се зголеми валидноста и релијабилноста на резултатите треба да се користи листа за аналитичко бодирање,
- вреднувањата на залагањето на ученикот не смее да се поистоветуваат со вреднувањето на финалниот производ.

Секој проект треба да биде поддржан со план кој што го изготвуваат заедно учителот и учениците на почетокот на проектот. Особено е важно онаму каде што проектот се користи за оценувачки цели тој да биде изготвен на почетокот и во него да се одредат клучните образовни цели и важните оценувачки активности. Во таков случај најчесто се важни четирите фази на проектот:

- планирање и организирање,
- спроведување на истражувањето,
- изготвување на финален извештај,
- презентирање на финален извештај,

и бодови се даваат на секоја фаза одделно. При оценувањето на проектот дел од прашањата поврзани со раководењето на проектот можат да се искористат за потребите на оценувањето. Во оваа насока Нитко и Брукхарт потенцират дека при оценувањето на проектот посебно внимание треба да се посвети на следниве моменти:

- *Разјаснување на очекуваните резултати.* Имено, секој учесник во проектот треба целосно да ги разбира компонентите на проектот и структурата на проектот.
- *Разјаснување на стандардите што ќе се користат во оценувањето на проектот.* За оценување на проектот неопходно е да се подготват листи за бодирање. Понатаму, секој ученик мора да има увид во вака подготвените листи. На пример, ако има листа за бодирање на извештајот од проектот и листа за бодирање на презентацијата, учениците треба да можат нив да ги погледнат на почетокот на проектот.
- *Вклучување на учениците во воспоставување на стандардите.* За оваа цел можат да се користат поранешни проекти, се со цел на учениците да им се помогне да ги разберат стандардите што се воспоставени. Во оваа насока е пожелно учениците да деба-

тираат за добрите и за слабите страни на проектите, што ќе им помогне подобро да ги усвојат стандардите.

- *Пристап во користењето на ресурсите.* Пожелно е да се ограничи пристапот до ресурсите кои што учениците можат да ги користат за реализација на некој проект, при што ограничувањето треба да биде само на оние ресурси кои што се широко достапни. Последното ќе придонесе учениците да стартуваат со исти шанси за успешно реализирање на проектот.
- *Плагијаторство (препишување).* На учениците треба да им се објасни што е тоа плагијаторство и зошто е важно да се почитува работата на другите луѓе. Треба да се обесхрабрува препишувањето на делови од енциклопедии или материјали добиени преку интернет. Понатаму, пожелно е кај учениците да се негува навиката да ги цитираат туѓите резултати кои неопходно мора да ги користат при реализацијата на проектот.

Што се однесува до самата постапка на оценување на проектите, генерално може да се каже дека при оценувањето на проектите пожелно е да се користат следниве инструменти:

- *Оценување на портфолиото.* Учениците да презентираат портфолио како дел од проектот и истото треба да се вреднува.
- *Листа за бодирање на усната презентација.* Учениците на крајот од проектот да направат усна презентација, која ќе се вреднува со помош на соодветна листа. Листата која ќе се користи за вреднување треба да биде конципирана така да ги вклучува посебните образовни цели на проектот.
- *Листа за бодирање на извештајот или производот.* Учениците можат да напишат завршен извештај како дел од проектот. Тој може да се вреднува користејќи соодветна листа за бодирање, која треба да биде посебно изготвена за дадениот проект. На сличен начин, ако се изготвува извесен производ треба да се изготви листа за бодирање за да се вреднува производот.
- *Дневник за работа.* На учениците може да им се дадат насоки да водат дневник за работа во текот на проектот. На крајот на проектот може да се изготви и листа за бодирање која што ќе го одразува квалитетот на содржината на дневникот на работа.
- *Интервју.* Учителот може да има средба (интервју) со поединци или со цела група ученици во текот на извесна фаза од проектот за да се дадат повратни информации за напредокот на проектот и да се сугерираат насоките што треба да бидат преземени од него.

4.8. ПОРТФОЛИО

Портфолио претставува ограничена збирка трудови на ученикот која што се користи: да се покажат најдобрите трудови на ученикот или да се покаже образовниот развој на ученикот во одреден временски период. Тие помагаат да се создава кумулативна евиденција за работата на ученикот преку собирање на примероци од неговата работа. Трудовите можат да ги вклучуваат вреднувањата на учителот и размислувањата на ученикот. Примерите на портфолијата вклучуваат: примероци од писмени задачи, уметнички дела, математички листови, извештаи од научни експерименти итн.

Портфолијата имаат врска со:

- неформалното оценување, со оние инструменти и постапки во оценувањето што можат да се користат за собирање информации за учењето на детето, а се различни од публикуваните инструменти со пропишани постапки,
- формалното оценување, како што е сумативното оценување, поврзано со давањето оценки и свидетелства, таканаречените дипломи-саплемент,
- “автентичните оценувања” кои што ги содржат истите предизвици и стандарди за практичната оспособеност со кои што во реалноста се соочуваат професионалците од најразличен вид.

Портфолијата грубо можеме да ги поделиме на: портфолио на постигнувањата и развојно портфолио. При формирањето на портфолиото на постигнувањата потребно е:

- да се изберат најдобрите трудови на ученикот обезбедувајќи уверливи податоци дека ученикот ги постигнал посебните образовни цели и
- успешно да се пренесат потребните информации,

а додека при формирањето на развојното портфолио потребно е:

- тоа да му помогне на учителите и на ученикот систематски да го следат и разгледуваат напредокот на ученикот, при што е неопходно да се поттикнува развојот во учењето и
- на ученикот да му овозможи да ја разгледува својата работа и да го согледа напредокот што го постигнал во текот на учењето.

За да бидат ефективни, развојните портфолија треба систематски да се планираат и применуваат. На пример, содржини на едно развојно портфолио по математика, кои неопходно се поврзани со целите на учењето е дадена во следнава табела:

Цели на учењето	Што влегува во портфолиото
Ученикот покажува разбирање за математичките концепти	Опис од страна на наставникот за активноста на ученикот кој покажал разбирање за некој математички концепт
Ученикот решава сложени проблеми од областа на профит и загуби	Нацрт, преработена и конечна верзија на задачата на ученикот за сложени проблеми од областа на профитот и загубите
Ученикот си задава и решава задачи по алгебра	Задачи по алгебра што ги креирал ученикот
Ученикот ги анализира стратегиите за решавање проблемни и ги утврдува позитивните страни и слабости	Писмено образложение за содржината на портфолиото

Според Лин и Милер портфолијата ги имаат следниве предности и недостатоци:

Предности	Недостатоци
Можат да бидат прилагодени на индивидуалните потребни, интереси и способности на учениците.	Се посветува многу време од страна на наставникот и ученикот во изготвувањето и одржувањето на портфолиото.
Можат да го документираат како развојот така и постигањата на учениците.	Севкупно нивно водење и чување.
Можат да го поттикнуваат самовреднувањето на наставникот, со позитивно влијание врз учењето во одредени временски периоди.	Ограничувања на користење во сумативни оценувања со одлушувачко влијание. Тешко се воспоставуваат јасни критериуми за бодирање како резултат на вклучениот обем и разновиден материјал. Ова ја намалува релијабилноста.
Учениците нив ги чувствуваат како лична сопственост која што им помага да преземат одговорност за поставување цели и вреднувањето на нивниот сопствен напредок	Неадекватна спецификација на целите, упатствата за изготвување или критериумите за оценување од страна на наставниците. Води кон тоа портфолијата да бидат само папки кои што содржат неорганизирана збирка на трудови.
Помагаат во известувањето на родителите за развојот, учењето и постигањето на ученикот на еден конкретен начин.	

Основна задача при изготвувањето на портфолиото е тоа да ги поседува следниве карактеристики (МекМилан 1997):

- јасно дефинирана цел и крајни цели на учењето,
- систематска и организирана збирка од продукти на ученикот;
- претходно дефинирани насоки за тоа што ќе опфаќа,
- некои елементи што ќе бидат опфатени да се по избор на самиот ученик,
- самоанализа и самовреднување од страна на ученикот,
- напредокот да се документира со конкретни продукти и/или вреднувања,

- јасни и соодветни критериуми за вреднување на продуктите на учениците,
- дискусии за портфолијата меѓу учениците и учителите, и
- родителите да бидат активно вклучени во процесот на изработка на портфолиото.

Што се однесува до оценувањето на портфолијата, според Нитко потребно е:

- да бидат вклучени автентични дела – на пример, во портфолиото по природни науки, ученикот треба да работи на вреднување на доказите, да користи научно објаснување во поткрепа на податоците или да прибира податоци за да ги потврди или да ги побие објаснувањата – онака како што прават вистинските научници.
- да се води евиденција за концептуалниот развој – портфолијата треба да опфаќаат објаснување на учениците, белешки за тоа што го разбрале, како и концептуални рамки. Портфолиото треба често да се ажурира како што ученикот напредува во проектот или во решавањето на проблемот, за да се видат промените во концептуалната рамка и во размислувањата на ученикот со развојот на проектот.
- да се размислува заедно со ученикот – ученикот го користи портфолиото како основа за дискусија со учителот во однос на своето разбирање на основните концепти, принципи и теории за тоа што го работи. Притоа учителот задолжително треба да ја поттикнува и да ја насочува дискусијата, со што непосредно го помага развојот на ученикот.

5. АНАЛИЗА НА РЕЗУЛТАТИТЕ ДОБИЕНИ ОД СЛЕДЕЊЕТО И ВРЕДНУВАЊЕТО НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Следењето и вреднувањето на постигањата на учениците претставува низа од мерења кои даваат сурови резултати - податоци и информации за постигањата на ученикот. Овие податоци треба да се обработат, по што се добива можност за нивно практично ползување.

Користењето на овие резултати зависи од намената за која е изведено проверувањето и вреднувањето. На пример, кај дијагностичкото проверување, податоците треба брзо да се обработат и резултатите од нивната анализа веднаш да се применат при изведувањето на наставниот процес. Кај формативното проверување, учителот постојано има можност

да ја корегира својата тековна работа и да ја прилагоди на можностите и потребите на своите ученици. Кога се работи за поголемо множество податоци добиено од подолгорочно следење и вреднување на постигањата на учениците, анализата на ваквите резултати, глобално може да се користи за следните две намени:

- анализа на индивидуалните резултати на еден ученик - со намена за изведување на синтетички суд во облик на сумативна оценка за постигањата на тој ученик, негово информирање за сопствените постигања, мотивација за понатамошна работа и професионална ориентација;
- анализа на резултите на образовна група од ученици - со намена за добивање на информации за квалитетот на образовниот процес и презмање корективни мерки за развој на тој процес.

5.1. АНАЛИЗА НА ИНДИВИДУАЛНИТЕ РЕЗУЛТАТИ НА ЕДЕН УЧЕНИК

Суровите податоци, како резултати од сите постапки на следење и вреднување на постигањата на еден ученик треба да се зачувани во досието на тој ученик. На тој начин, се добива множество од изработки, резултати, скорови и забелешки кои се однесуваат на работата на тој ученик. Врз основа на податоците од ова досие, може да се обопштат извесни заклучоци кои концизно ќе ги опишуваат постигањата на ученикот во даден временски период. Од овие податоци може да се изведе квалитетна описна оценка, но и квалитетна нумеричка оценка поткрепена со многу аргументи кои како повратна информација треба да му се достават на ученикот и родителот.

Ваквата анализа треба да придонесе кон максимална објективност на оценката на ученикот. Повратната информација која е квалитетна и внимателно соопштена на ученикот и родителот овозможува мотивирачко дејство на самата оценка. Имено, на овој начин ученикот ќе почувствува дека е најважниот фактор во наставата и дека оценувањето не се прави првенствено заради административни потреби и не е наменето “за негово тормозење”. Напротив, ваквото оценување ученикот го доживува како постапка во функција на неговиот развој. Информациите што ги добива би го мотивирале за подобрување на овие постигања и може квалитетно да ги исползува за професионалната ориентација.

Ваквото досие не мора да биде комплицирано и оптоварено со значителна административна работа. Во наставата се позначајни се проверувањата кои се изведуваат преку наставните тестови. Ако овие тестови се базираат на квалитетно разработени индикатори, тогаш и самата низа од

податоци за постигањата на ученикот за секоја задача од тестот доволно говори за квалитетот и квантитетот на неговите постигања. Ваквите скорови, освен што можат да се претворат во нумеричка оценка, пред сè поради административната функција на оценката, со помош на индикаторите лесно може да се претворат во описни вредносни судови.

5.2. АНАЛИЗА НА РЕЗУЛТАТИТЕ НА ОБРАЗОВНА ГРУПА ОД УЧЕНИЦИ

Образовниот систем е гломазен, комплексен и инертен. За да се проектира неговиот развој, неопходно е квалитетно да се истражуваат многу негокви параметри. Бидејќи, основната цел на образовниот систем е развој на личноста на ученикот, еден од најважните параметри што треба да се истражува, секако се постигањата на учениците. Тие се главниот индикатор за контрола на квалитетот на целиот образовен систем.

Во нашата практика, учителите се единствениот фактор кој е задолжен за следење и вреднување на постигањата на учениците. Поради тоа, истражувањата што се однесуваат на постигањата на учениците мора да се базираат на оценките што ги евидентираат самите учители. Но и само бегло да се споредат два податоци, на пример просечниот успех на учениците од осмо одделение во 1995 и 2005 година, веднаш ќе се воочи недоследност и противречност. Општиот успех на учениците постојано расте, а перцепцијата за образовниот процес на многу фактори укажува на намален квалитет на самиот процес. Тоа е така, бидејќи секој обид да се споредуваат било кои две оценки е обид за собирање на баби со жаби. При недостаток на целосно изграден систем од образовни стандарди, секои две оценки имаат различни содржини, па според тоа не можат да се споредуваат како величини, а уште помалку е допуштено со нив да се изведуваат аритметички операции.

Овој проблем, може да се надмине со екстерно оценување. Во повеќе земји, се организираат масовни екстерни проверување при секој премин од еден во друг образовен подсистем - при премин од одделенска кон предметна настава, од основно во средно образование и најчесто по завршувањето на средното образование. Државната матура треба да е сеопфатно екстерно проверување на постигањата на учениците по завршувањето на средното образование кое се реализира преку стандардизирани тестови. Резултатите од овие тестови треба да дадат солидна база која може да подлежи на длабоки анализи кои ќе ги детектираат најголемиот дел од проблемите во образованието.

Наставните тестови, иако не се стандардизирани, нудат можност за квалитетна анализа која може да придонесе кон подобрување на квалитетот на наставниот процес што го изведува еден учител, група учители или цело училиште. Обработката на овие податоци, во овој случај не е насочена кон вреднување на постигањата на индивидата, туку на една образовна група - паралелка, неколку паралелки, сите ученици од една генерација што учат во едно училиште или општина. Бидејќи за наставните тестови априори не се прават статистички анализи за проценување на мерните карактеристики, овие информации може да се добијат со анализирање на добиените резултати по спроведување на тестот и да се искористат при идно составување на таков или сличен тест.

За овие цели, пожелно е податоците од тестирањата детално да се евидентираат и чуваат. Овие податоци може прегледно да се организираат во таканаречени аналитички листови. Еден аналитички лист треба да содржи податоци за учениците што го решавале тестот и информација за бројот на бодовите на секоја од задачите во тестот. За задачите на избор, пожелно е освен бројот на бодови, да се нотира и одговорот што го избрал ученикот. Сите овие податоци, доколку се средени со некоја компјутерска програма за табеларни пресметки (на пример Microsoft Excel), лесно може дополнително да се обработат и да се пресметаат основните статистики - аритметичка средина на скоровите по задачи и на вкупните скорови, просек на добиените оценки, модот, медијаната, дисперзијата и стандардната девијација на соодветните множества податоци. Дури и обичен Excel-графикон на распределба на оценките веќе ја навестува распределбата на добиените резултати од тестот.

Ваквиот аналитички лист, зборува многу и за квалитетите на тестот, но и за постигањата на образовната група од ученици како ефект од процесот на настава што тие го поминале. Ова пак, индиректно говори и за квалитетот на самиот наставен процес, за работата на учителот и за некои карактеристики на содржините.

Кога аналитичкиот лист би содржел и податоци за избраниот одговор кај задачите со избор, може да се направи подлабока анализа за привлечноста на дистракторите. Имено, ако во некоја задача, најголемиот број грешни одговори се должат на привлечноста на еден дистрактор, тоа укажува дека постои некој недостаток во знаењата на учениците кои ги наведуваат на погрешен заклучок во одредена ситуација. И ова е сигнал за учителот да преземе мерки за надминување на ваквите недостатоци.

За индикаторите кои произлегуваат од иста или слична наставна цел, но се однесуваат на различни когнитивни нивоа, преку вкрстена анализа на постигнатите резултати може да се извлече заклучок за нивото

кое образовната група го досгнува при реализацијата на соодветниот наставен циклус.

Освен заклучоците кои се однесуваат на тоа кој дел од содржините со кој квантитет и со кој квалитет е реализиран, важна е и статистичката распределба на добиените резултати. Бидејќи наставните тестови се критериумски, а не нормативни, не е голем проблем што распределбата отстапува од нормалната распределба. Сепак, распределбата на податоците укажува и на некои законитости во наставата, па таа е пожелно да се испитува како и да се споредуваат распределбите на два или повеќе теста.

Во наставната практика, често се јавува потреба од составување на повеќе паралелни тестови за еден ист концепт за наставен тест. Најчесто тие се означуваат како групи (група задачи или група ученици што решаваат ист тест). Притоа се наметнуваат две важни прашања: дали сите варијанти на паралелни тестови се еднакво валидни и со еднаква тежина и дали може паралелните тестови да се искористат за провеување на доследноста на тестот.

Паралелните тестови може да се искористат и за пофина анализа на некои индикатори. На пример, ако една задача се состои во искажување на една дефиниција за операција со две множества, може да се очекува различен резултат ако се состават две конкретизации - за пресек и за Декартов производ. Од ова може да се извлече заклучок, која операција за учениците е полесна, а која потешка.

Во работата на училиштата, подлабоки анализи најчесто не се неопходни. Сепак, во функција на развој на образовниот процес на ниво на училиште, пожелно е повремено да се пристапи и кон посериозни истражувања на резултатите од оценувањето. Притоа, не мора да се анализираат само податоците добиени преку наставни тестови, туку може да се анализираат и другите податоци добиени преку различни форми на следење на постигањата на учениците.

Училиште се вика затоа што во него се учи.
Ако испитувањето беше најважно во училиштето,
тогаш тоа ќе се викаше испитувалиште.

И. Ганчев

При едно истражување за објективноста на оценувачите, првиот оценувач си ги решил задачите за полесно да ги прегледува решенијата на учениците, но го заборавил листот со своите решенија меѓу листовите со решенија на учениците.

Така, листот со решенијата на првиот оценувач бил оценет од сите други оценувачи. Бил запрепастен кога неговите резултати на тестот добиле оценки во дијапазонот од 30 до 100 бодови.

Анегдота

ХШ ГЛАВА

ПЛАНИРАЊЕ НА НАСТАВАТА

1. НАСТАВЕН ПЛАН И НАСТАВНА ПРОГРАМА

При реализацијата на наставата важен момент е *подготовката* на учителот за настава. Подготовката подразбира реализирање на систем постапки и активности кои ќе овозможат да се создадат услови за квалитетен и рационален воспитно-образовен процес во наставата. Една од основните постапки за успешна подготовка на наставата е нејзиното планирање. Пред да преминеме на детално разгледување на планирањето на наставата накратко ќе се осврнеме на поимите *наставен план*, *наставна програма* и *курикулум*, со кои ќе се среќаваме во натамошните разгледувања.

Наставниот план е основен училишен документ со кој се определуваат предметите кои се изучуваат во одреден вид училиште или воспитно-образовен подсистем во целина, нивниот редослед, струкура и неделниот фонд на наставни часови по години и предмети. По правило, наставниот план содржи воведен дел во кој се определува општиот концепт на планирање на наставата во подсистемот на кој планот се однесува и тој ги содржи општите цели на потсистемот, како и основни насоки за концепцијата на наставните програми. Централно место во наставниот план зазема прегледот на наставните подрачја, наставни предмети и другите видови активности кои што треба да се реализираат во соодветниот образовен подсистем. Според тоа, со наставниот план е неопходно да се определат:

- општите воспитно-образовни цели на соодветниот потсистем,
- структурата на воспитно-образовни активности,
- статусот на секој вид воспитно-образовна работа,
- обемот на секој застапен вид воспитно-образовна работа,
- редоследот на изведување на секој вид воспитно-образовна работа и
- бројот на наставни часови по години и предмети.

Основни критериуми при изработката на наставниот план и изборот на предметите кои ќе се изучуваат во одреден потсистем или вид на училиште се:

- потребите на општествена заедница,

- индивидуалните потреби на учениците;
- степенот на научниот и технички-технолошкиот потреби;
- културно-уметнички потреби и традиција.

Неделниот (годишниот) фонд на часови за реализација на определен наставен предмет зависи од општите и специфичните цели кои треба да се постигнат со изучувањето на предметот, длабочината на содржините кои се предвидени за усвојување, психофичките способности на учениците кои треба да ги усвојуваат наставните содржини и кои пред сè се детерминирани од новната возраст.

Наставните предмети и другите активности предвидени со наставниот план може да имаат:

- линеарен распоред,
- концентричен распоред и
- комбиниран распоред.

Наставниот план во кој наставните предмети се *линеарно распоредени* предвидува изучување на еден предмет во даден временски период, па по завршувањето на овој предмет, sukcesиво се предвидува изучување на следен предмет чие усвојување е обусловено од првиот предмет итн. Наставниот план во кој наставните предмети се *концентрично распоредени* предвидува изучување на повеќе предмет истовремено во еден временски период. Притоа, во секоја следна учебна година се изучуваат истите наставни предмети со проширен обем и со планирано продлабочување на претходно обработени содржини. Наставниот план во кој наставните предмети се со *комбиниран распоред* предвидува изучување на помал број интердисциплинарно поврзани наставни предмети во почетните години од образованието, за да во следните учебни години се пристапи кон проширување и продлабочување на наставните содржини од претходно изучуваните предмети, но и кон воведување нови предмети (преку диференцијација), што пак е карактеристика на линеарниот распоред на наставни предмети.

Наставна програма (програма за воспитно-образовната работа) е документ со кој се утврдуваат *целите, содржините, образовната технологија и вреднување на севкупните* постигања на учениците по одреден наставен предмет на одредено образовно ниво. Според тоа, наставните програми всушност се конкретизација на наставниот план и истите се наменети за:

- училиштата и учителите кои непосредно ја реализираат воспитно-образовната работа,
- учениците, родителите и другите корисници на образовните услуги,
- надзорните органи и инспекциско-советодавните служби,

- планерите и финансиерите на образованието,
- административните органи за верификација, и
- авторите на дидактичките и техничките средства.

Со наставната програма се одредува *обемот* и *длабочината* на содржини што треба да се обработат во даден наставен предмет на одредено образовно ниво. Наставните содржини во наставната програма најчесто имаат:

- линиски,
- концентричен, и
- комбиниран распоред,

и истите се групирани во:

- наставни целини;
- наставни теми;
- наставни единици (лекции).

Од досега изнесеното можеме да заклучиме дека наставната програма треба да се сфати како документ кој определува што се учи: подрачје, целини, теми и единици на содржината, но кој никако не смееме да го разбереме само како „гола“ содржина. Имено, на ниво на реализација на наставата програмата значи многу повеќе и таа опфаќа, на пример, социјални интеракции, форми на работа, стратегија, постапки, извори на знаење, организација, дидактички и технички средства, односно таа ја подразбира *свкупноста на сите случувања* насочени кон постигнување на општите и посебните цели за даден наставен предмет и воспитно-образовниот процес во целина.

Што се однесува до поимот *курикулум*, може да се каже дека не постои еднозначен одговор на прашањето што е тоа курикулум. Спектарот на толкување на овој поим е доста широк. Имено, според некои автори *курикулум* претставуваат само општите цели на наставата, но има и автори кои под курикулум ги подразбираат наставниот план, наставните програми и нивната реализација. Така, може да се каже дека во потесна смисла на зборот, курикулум е наставна програма во која се определени само целите, а во поширока смисла на зборот, под курикулум подразбираме:

- општите и специфичните цели на наставата,
- наставните содржини,
- образовната технологија и
- следењето, проверувањето и вреднувањето на постигањата на учениците.

Кога станува збор за курикулумом во литературата може да се сретнат и обиди за негова класификација. Па така имаме: отворен, затворен, официјален реален, скриен, формален и неформален курикулум.

Отворен курикулум е план или програма во која се дадени само општите цели и евентуално глобални содржини и во овој случај учителот има висок степен на автономност во изборот на тоа што и како ќе се изучува. *Затворениот курикулум* строго ги пропишува сите елементи: целите, содржините, времето на обработка, дидактичките и техничките средства, образовната технологија и следењето, проверувањето и вреднувањето на постигањата на учениците.

Самиот документ пропишан од надлежните органи со кој се определени целите, наставните содржини, образовната технологија и следењето, проверувањето и вреднувањето на постигањата на учениците го нарекуваме *официјален курикулум*. Понатаму, како што е познато најчесто во училиштето при реализацијата на наставата имаме отстапување од официјалниот курикулум и она што практично се реализира во училиштето го нарекуваме *реален курикулум*. Разликата меѓу официјалниот и реалниот курикулум ја нарекуваме *скриен курикулум*. Јасно, скриениот курикулум е реалност и основна причина за негово појавување се објективно различните услови во кои се реализира официјалниот курикулум, но често пати причина за појавување на скриениот курикулум е и субјективното влијание на личноста што практично подучува, т.е. на учителот.

Формалниот курикулум го чинат знаењата, умеењата и способностите со кои учениците се стекнуваат за време на редовната настава, односно формално организираната воспитно-образовна работа. Знаењата, умеењата и способностите со кои учениците се стекнуваат после редовната настава, за време на одморите, во слободното време, односно на воннаставните активности го сочинуваат *неформалниот курикулум*.

2. ПРОГРАМИРАЊЕ НА НАСТАВАТА

Во дидактиката поимот *програмирање* има потесно и пошироко значење. Во потесна смисла на зборот, терминот програмирање се употребува како:

- синоним за наставен план и наставна програма,
- синоним за планирање на развојот на образованието, и
- синоним за утврдување на воспитно-образовните содржини.

Ваквото толкување на поимот програмирање на наставата е сосема коректно, но проблемот се јавува во образовната практика. Имено, токму практиката наставните планови и наставните програми ги доживува како документи кои се наметнати од некои повисоки органи. Токму затоа, учителите наставните планови и наставните програми ги доживуваат како документи

кои не се транспарентно изработени, а често пати ваквото мислење може да се слушне и од дел од научните работници. Притоа може да се слушне и мислење дека промените на наставните планови и програми се извршени набрзина, без соодветна анализа и набрзина, па затоа реформите водат кон осиромашување на воспитно-образовната дејност. Последното нема да го коментираме, но ќе забележиме дека ваквото мислење придонесува промените наставни планови и програмите да претставуваат мртви документи, кои не можат позитивно да влијаат на воспитно-образовниот процес во целина.

Постојат повеќе причини за ваквото мислење и отпорот кој се јавува кон вистинското имплементирање на иновираниите наставни програми, но се чини дека во основа проблемот може да се лоцира во следниве две причини:

- учителите не се доволно консултирани за концептот и содржината на иновираниите наставни планови и програми и
- учителите не се посериозно обучувани да ги “читаат” наставните програми.

Непосредна последица од ваквата состојба е фактот дека и покрај сè се уште немаме позитивна општествена клима во која планирањето и програмирањето на наставата ќе има третман на континуиран процес, од кој непосредно зависи развојот на воспитно-образовниот систем.

Во поширока смисла на зборот, програмирањето опфаќа методологија на испитување на образовните потреби, изработка на наставни планови и програми, следење на реализацијата на истите и вреднување на добиените резултати. Според тоа, планирањето и програмирањето на наставата подразбира дефинирање систем на пожелни цели, определување на наставни содржини и пропишување на активности за имплементирање на промените и следење на резултатите, па затоа во случајов може да се зборува за четири етапи во планирањето и програмирањето на наставата и тоа:

- изработка на концепција за планирање и програмирање на наставата,
- изработка на стратешки документи (иновирани наставни планови и програми итн.),
- реализација на иновираниите наставни планови и програми и
- евалуација на иновираниите наставни планови и програми.

Според тоа, програмирањето на наставата не е само умствена активност за изработување на програмата како документ, туку и процес на практично проверување во училиштата на целите, содржините, средствата и начините на нејзино реализирање и вреднување на ефектите од реализацијата. Тоа е процес кој се одвива во повеќе етапи. Оттука, планирањето и програмирањето на наставата не може да се сфати само како изработка на наставни

планови и програми, а особено не како изработка на некакви документи. Притоа треба да се има предвид дека планирањето и програмирањето на наставата треба да биде иницирано и поддржано со реална анализа на постојната состојба, која пред сè ќе укаже на недостатоците на образовниот систем, можностите за нивно надминување и насоките за натамошен развој на образовниот систем во целина и на неговите подсистеми. Јасно, ваквиот пристап подразбира стратешко планирање и програмирање на образовниот систем, што пак не е можно без избор на адекватна стратегија и нејзина доследна примена.

2.1 СТРАТЕГИИ ЗА ПРОГРАМИРАЊЕ НА НАСТАВАТА

Стратегија на програмирање на наставниот процес е систем од правила и принципи кои се однесуваат на постапките, активностите и начините за нивно извршување и кои што се применуваат при изработувањето на наставните програми, сè со цел да се подготват програми со чија реализација ќе се постигнат поставените цели на воспитно-образовниот процес.

Природно е да се запрашаме дали е потребно стратегија на програмирање на наставниот процес? Јасно, ако ги земеме предвид местото и улогата на образовниот систем во севкупниот општествен систем, постоењето на стратегија на програмирање на наставата е неопходно. Притоа, изборот на стратегијата хронолошки треба да се совпаѓа и да се надолнува со формулирањето на општата цел на образовниот процес, односно одма по анализата и дијагностиката на постојните состојби во образовниот систем.

Како што веќе рековме, компонентите кои што треба да ги содржи наставната програма се:

- општите и специфичните цели на наставата,
- наставните содржини,
- образовната технологија и
- следењето, проверувањето и вреднувањето на постигањата на учениците.

Овие компоненти не смеат да бидат независни една од друга. Напротив, тие треба во взаемна интеракција при што секоја од компонентите активно влијае на останатите, што значи дека наставната програма е сложен комплекс од четири основни елементи кои се во заемно дејство. Последното значи дека може да се случи некоја од компонентите да се стави во наредена положба над другите, што е познато во образовната практика. Токму затоа во историскиот развој на наставните програми може да се препозна-

ат три основни типа наставни програми кои се развивани според стратегијата кој форсира некоја од компонентите на програмата. Така, кај нас, но и во многу други земји, пред сè во Европа, до неодамна најприсутни беа наставните програми во кои компонентата наставни содржини доминираше во однос на другите компоненти. Тоа е и главната причина што на пример кај нас најголемиот дел од наставниците кога ќе стане збор за промени на наставните програми во главно се интересираат кои содржини ќе бидат додадени, дали некои содржини ќе бидат отфрлени и како тие се структурирани по теми и временски димензионирани. За разлика од тоа, со развојот на бихејвиористичкиот правец во психологијата, во најголема мера во САД во првата половина од двестетиот век, развивањето на наставните програми ги става целите во преден план.

Имајќи го предвид претходно изнесеното, може да се каже дека во досегашната практика главно се диференцирале три стратегии за програмирање на воспитно-образовната работа, и тоа:

- наставно-содржинска,
- наставно-целна, и
- процесно-развојна стратегија.

Наставно-содржинската стратегија на програмирање на наставата за појдовна основа ја има концепцијата за човекот како пасивно суштество, чија единствена задача е да ја прифати постојната научно културна традиција. Основите на оваа стратегија со во *асоцијационизмот* како психолошко-филозофска теорија за учењето и спознанието. Оваа теорија долго време доминираше кај нас, но и во повеќето земји во Европа. Според неа учењето е процес на зајакнување и задржување во помнењето на перцепции и факти, со што тоа се сведува на меморирање на готови факти, елементарно генерализирање на истите и нивна репродукција. Ваквото сфаќање за учењето, во значителна мера, сè уште доминира во нашиот образовен систем, особено во делот на наставата од општествените и хуманистичките науки. Ова сфаќање за учењето има два важни недостатоци и тоа:

- Ученикот како субјект во учењето е во пасивна положба и тој треба безпоговорно и некритички да ги апсорбира готовите знаења што му ги пренесува учителот. Притоа неговата работа е вреднувана само според квантитетот на фактите кои што ќе успее да ги меморира и да ги репродуцира. Последното негативно влијае на мотивацијата за учење кај учениците, за што главна причина е постојаното меморирање на готови факти и нивното бескрајно репродуцирање, што негативно влијае на развојот на креативноста на учениците.

- Наставата сфатена на овој начин ученикот го става под своевидно стаклено своно со кое тој е одвоен од реалноста. Имено, поради содржинската насоченост на наставата, се настојува да се обезбеди методска поддршка која ќе обезбеди како полесно да се запомнат што е можно повеќе факти. Последица на ова е развивањето на методи и наставни средства кои значително ги упростуваат реалните објекти, кои отфрлаат или занемаруваат некои нивни својства за сметка на својствата кои поради така избраните содржини се битни во дадениот момент. Еден ваков пример е составувањето текстуални задачи по математика кај кои резултатите по правило се наместени како цели броеви, па затоа не треба да не изненадува збунетоста и несигурноста на некои ученици кога за првпат ќе се соочат со реален проблем при чие решавање добиваат “чудни” резултати.

Претходно изнесените недостатоци на наставата која се програмира и реализира согласно асоцијационизмот како психолошко-филозофска теорија за учењето и спознанието укажува на причините зошто кај учениците, но и кај пошироката јавност, доминира мислењето дека едно се учи во училиште, а животот е сосема нешто друго.

Може да се каже дека централно место во наставата програмирана според наставно содржинската стратегија завзема прашањето “*Што се учи?*”, што значи дека наставните содржини претставуваат сами за себе цел. Непосредна последица на ваквата поставеност е дефинирањето на општите, посебните и специфичните цели на наставата по даден предмет или образовно подрачје, кое се прави откако ќе се определат и ќе се структурираат наставните содржини. Затоа, ваквото определување на целите на наставата истите ги подредува на наставните содржините, со што целите само го алиментираат прашањето кои содржини и со која ширина и длабочина треба да се усвојат. Притоа, ако се има предвид дека наставните стратегии и наставните методи непосредно се поврзани со содржините кои што треба да се разработуваат, јасно е зошто прашањето “*Како да се учи?*”, т.е. “*Како да се организира наставниот процес?*” е второстепено. Јасно, непосредна последица на ваквата поставеност на наставата е следењето, проверувањето и вреднувањето на постигањата на учениците исклучиво да се гледа низ призмата на наставните содржините. Имено, ако содржините се најважниот дел од програмата, логично е вреднувањето на постигањата на учениците е да биде според тоа колку од тие содржини ученикот успеал да меморира и како истите ги репродуцира.

Како што веќе рековме, во овој случај станува збор за стратегија на развивање на програмите во која доминантна улога во програмирањето, како и во реализирањето на наставната програма има изборот на наставни-

те содржини, па затоа оваа стратегија ја нарекуваме *наставно-содржинска стратегија* на програмирање на воспитно-образовниот процес.

Наставно-целната стратегија на програмирање на наставата за појдовна основа го има сфаќањето дека програмирањето на образовниот процес мора да се стреми кон прецизност и технолошка ефикасност, како и сфаќањето дека оние кои го финансираат образованието имаат право на увид во неговата ефикасност, што пак е можно само со јасно и прецизно утврдени цели кои ќе бидат проверливи, што значи дека за да може да се обезбеди квалитетно образование, мора да се врши негова евалуација што е можно само со претходно јасно формулирани цели. Основите на оваа стратегија на програмирање на наставата со во *бихејвиоризмот* како психолошко-филозофска теорија на личноста во чиј фокус е поведението (однесувањето) на личноста. Оваа теорија се развивала во САД паралелно со развојот на класичната *психолошка теорија за тестирањето*. По појавата на таксономијата на наставните цели на Блум, овие сфаќања за значењето на целите во програмирањето на наставата се пробиле и во Европа и како последица на ваквите сфаќања се појавува концепт на развивање на наставните програми во кои доминантна улога имаат целите на наставата. Притоа самото формулирање на целите станува цел за себе и доведува и до претерано операционализирање на наставните цели. Сето тоа се поткрепува со потребата од објективно вреднување на постигањата на учениците, од што произлегува и нагласената употреба на таканаречените објективни тестови на знаење. Масовната примена на овие тестови се оправдува со тврдењето дека прецизно формулираните цели, особено расчленети оперативни цели, го прават целиот процес на настава објективно проверлив, а самите цели мерливи. Меѓутоа, ова доведува до друга крајност. Имено, својството на мерливост на целите станува опсесија на методичарите кои го поддржуваат овој концепт на сфаќање на наставата. Тоа доведува и до прилично голем развој за теориите за изработување на тестови на знаења кои пак стануваат цел самите за себе. Сепак, ваквото поимање на наставта има свои предности и тоа:

- транспарентност – на учесниците во воспитно-образовниот процес однапред им се познати и јасни целите на процесот во кој активно учествуваат, што истиот станува,
- мерливост – на учителот му е релативно лесно да провери дали и во која мера се постигнати пропишаните цели,
- можноста за активна вклученост на учесниците во воспитно-образовниот процес во договарањето и одлучувањето на целите на наставата и нејзината организација што произлегува од формулирањето на целите, и
- делотворност – барем навидум прецизно формулираните цели посигурно водат кон успех во реализирањето на програмите.

Меѓутоа, ставањето на целите на наставата во фокусот на воспитно-образовниот процес и крутоста во вреднувањето на постигањата на учениците кои се мерат низ призмата на остварувањето на детално операционализирани цели има и свои недостатоци и тоа:

- премногу прецизно формулираните и до детали операционализирани цели на наставата ја ограничуваат слободата и ја намалуваат креативноста на учителот,
- во одделни случаи нема можност да се уважуват објективните услови во кои се реализира програмата со априори определени цели, како и да се почитуваат индивидуалните интереси и можности на учениците со кои се реализира програмата,
- главниот акцент се става на резултатите од наставата кои се изразуваат преку “претерана” мерливост на знаењата,
- се преферираат тестови на знаења што може да доведе до шаблонизирано и површно учење без суштинско поврзување и применливост на знаењата и без развој на повисоките интелектуални способности на ученикот, а како последица на претераното користење на тестовите на знаења имаме појава на кампањско учење за тест, кое во најмала рака не е пожелно како такво, и
- оперативните цели се воглавно насочени кон когнитивното подрачје и ја запоставуваат воспитната компонента на наставата.

На крајот ќе споменеме дека централно место во вака поставената настава е прашањето “*Зошто се учи?*”. Тоа значи дека во овој случај станува збор за стратегија на развивање на програмите во која доминантна улога како во програмирањето, така и во реализирањето на наставната програма има формулирањето на целите на наставата. Токму затоа оваа стратегија се нарекува *наставно-целна стратегија* на програмирање на воспитно-образовниот процес.

Во шестсеттите години на двесттиот век се менуваат за суштината на воспитанието и образованието, како и сфаќањата за личноста – кон когнитивните и хуманистичките теории за личноста. Овие промени одат во насока да ја фокусираат мотивацијата во учењето како исклучително важен фактор на самото учење и поучување. Тоа значи дека стратегиите на програмирање, но и пристапите во реализирање на програмите ќе мора да го корегираат својот однос кон ученикот и нема да го смеаат за пасивен субјект во процесот на учење кој треба да усвои некој квантум на содржини или пак да постигне резултати во остварувањето на на какви цели. Воочена е потребата наставата да се организира како настава насочена кон ученикот. Имајќи ги во предвид овие тенденции, најсовремената стратегија на програмирање на наставата ја става во преден план наставната

технологија. Тоа значи дека наставните програми треба да стават акцент на процесот на учење што води кон развој на личноста на ученикот. Поради тоа оваа стратегија се нарекува *процесно-развојна стратегија* на програмирање. Централно место во вака поставената настава е прашањето “*Како се учи?*” Основна цел на овој модел е развојот на растечката способност на детето за автономно однесување. Ученикот треба да стане активен чинител во наставата и да има влијание на изборот на целите во наставата, како и на содржините што ќе ги изучува. Ако сето ова се поткрепи со пофлексибилен однос кон изборот на техники и методи на вреднување на постигањата на ученикот, може сериозно да се придвижи процесот на учење до моментот кога ученикот нема цело време да се досадува или да го сфаќа учењето како од надвор наметната обврска. Сето тоа има влијание на подигање на интересот на ученикот и зголемување на мотивацијата, што неминовно ќе води кон подобри резултати во наставата сфатена како развоен процес.

Имајќи го предвид претходно кажаното, може да се заклучи дека процесно-развојната стратегија ги респектира индивидуалните разлики меѓу учениците. Токму затоа се очекува до израз да дојде дидактичкиот принцип на индивидуален принцип и диференцијација во наставата, со што ќе се зголеми мотивацијата за учење кај учениците. Ваквите очекувања не се претерани, особено ако се земе предвид дека ученикот од пасивен станува активен субјект во наставата, субјект кон кој е насочен целиот воспитно-образовен процес. Недостатоците на оваа стратегија се во практичната тешкотија да се одреди кој е вистинскиот интерес на ученикот, односно да се дефинираат неговите развојни потреби, прашање кое добива на тежина особено кај помладите ученици. Оваа стратегија има уште еден важен недостаток. Имено, при формулирањето на целите, колку и да се стремиме тие да бидат развојно ориентирани и насочени кон вистинските интереси на ученикот, можни се бројни потешкотии кои може да резултираат со ситуација во која ученикот на кој му се декларира настава насочена кон поединецот да се почувствува изманипулиран.

Како што видовме, секоја од трите наведени стратегии за програмирање на наставата има свои добри страни, но и недостатоци. Затоа не може еднозначно да се каже која стратегија треба да се избере. Изборот на стратегијата зависи од повеќе фактори. Притоа, за некои образовни подрачја е поадекватно да се програмираат според една, а други образовни подрачја или предмети со друга стратегија или пак со комбинирање на стратегиите. Сепак, може да се каже дека за наставни предмети кај кои доаѓа до израз алгоритамскиот приод, при нивното програмирање погодно е да се користи наставно-целната стратегија, а што се однесува до процесно-развојната стратегија истата е најдобро да се користи при изработка на наставен план за одделните образовни подсистеми.

3. ПЛАНИРАЊЕ НА НАСТАВАТА

Планирањето на наставата опфаќа низа постапки, мерки и активности за навремено и сеопфатно извршување на целите и задачите на наставата. Затоа имајќи ги предвид претходните разгледувања, може да се каже дека успешното планирање на наставата од стана на учителот е можно само ако тој има целосна информација за стратегијата која е користена при проектирањето на наставата од соодветната наставна дисциплина. Имено, за да не дојде до расчекор меѓу проектираното и реализираното потребно е учителот при планирањето на наставата да се придржува кон истите принципи на кои се темели проектирањето на наставата. Меѓутоа, најчесто потребните информации не се содржани во предметните програми, па затоа пред да пристапи кон планирањето на наставата неопходно е учителот темелно да ја проучи наставната програма и да согледа според која стратегија истата е проектирана.

Меѓу подготовката и планирањето на наставата постои тесна заемна врска, па затоа може да се каже дека овие две активности мораат да се реализираат паралелно, бидејќи планирањето на воспитно-образовната дејност истовремено е и подготовка за нејзина реализација, а подготовката за наставата има карактер и на нејзино планирање.

Планирањето на воспитно-образовната работа е процес во кој учителите треба да ги операционализираат елементите за реализација на воспитно-образовната работа за конкретен наставен предмет, а пред се:

- општите, посебните и специфичните цели кои треба да се постигнат со реализацијата на програмата од соодветниот наставен предмет,
- да ги реализираат наставните содржини со кои треба да се постигнат поставените цели,
- да применат адекватна образовна технологија, односно да ги изберат стратегиите, методите и формите на работа кои ќе ги користат при реализација на наставните содржини,
- да ги изберат методите за евалуација со кои ќе ги следат и вреднуваат резултатите од севкупниот воспитно-образовен процес.

Наведените елементи се од исклучителна важност за планирањето на наставата. Но, иако истите најчесто се анализираат издвоено и релативно автономно, треба да имаме предвид дека во практиката тие се меѓусебно зависни и заемно условени. Имено, секој од овие елементи, во зависност од местото и значењето што му се дава во процесот на планирањето, ги менува другите и самиот се менува. Така на пример, од поставените цели зависи не само кои и какви содржини ќе се изучуваат, каква образовна

технолозија ќе се користи, но и кои методи и постапки ќе се користат за следење и вреднување на резултатите од севкупниот воспитно-образовен процес.

Планирањето и подготвувањето на наставата:

- помага појасно да се согледаат нејзините цели,
- овозможува поголема прегледност на општите, посебните и специфичните цели на наставата и врз основа на тоа да се определат приоритетите за остварување на истите,
- овозможува да се управува наставниот процес на ниво учител-ученик,
- придонесува за подобрување на внатрепредметната и меѓупредметната корелација на наставата, и
- помага за обезбедување на неопходните предуслови за успешна проверка на знаењата, умеењата и способностите на учениците, што значи да обезбеди проверката да е: планска и навремена, внимателна и психолошки издржана и објективна.

При планирањето и подготвувањето на наставата:

- се утврдуваат и се конкретизираат наставните содржини, со цел да се овозможи целосно, систематски и рамномерно реализирање на наставната програма во текот на целата учебна година,
- наставниот материјал се распоредува во логички след, сè со цел учениците полесно да го совладаат,
- се анализираат расположливите дидактички и технички средства и се планира нивното користење во наставата, и
- се усогласуваат активностите поврзани со воспитно-образовниот процес, со што ќе се обезбеди успешно реализирање на целите и на задачите на наставата.

3.1 ВИДОВИ ПЛАНИРАЊЕ НА НАСТАВАТА

Планирањето на наставата, во зависност од целта која сакаме да ја постигнеме, задачите кои сакаме да ги реализираме и времето кога планирањето се реализира, може да биде:

- годишно глобално планирање,
- тематско планирање и
- планирање на наставниот час (оперативно планирање).

3.1.1 ГОДИШЕН (ГЛОБАЛЕН) ПЛАН

Годишното (глобалното) планирање има општ карактер и тоа се реализира пред почетокот на учебната година. При ова планирање учителот ги реализира следниве активности:

- се здобива со сознанија за нивото на знаењата и умењата на учениците со кои ќе ја реализира наставната програма, за што доколку за прв пат учителот реализира настава со некои ученици е неопходно да ја проучи педагошката евиденција и документација на секој ученик одделно,
- ја проучува наставната програма на предметот кој ќе го предава и ја детерминира стратегијата која е користена при проектирањето на наставната програма, што е особено важно ако тој предмет го предава за прв пат или се работи за нова наставна програма, при што посебно внимание треба да посвети на излезните компетенции со кои треба да се стекнат учениците, како и на внатрешнопредметната и меѓупредметната корелација на наставата,
- ги проучува расположливите демонстрациони дидактички средства и можноста за нивна примена при реализирањето на наставната програма,
- ги проучува расположливите технички средства (графоскоп, епископ, дијапроектор, компјутер, LCD-проектор, интерактивна табла и слично) и можноста за нивна примена при реализирањето на наставната програма,
- ги анализира учебниците и збирките со задачи кои се одобрени за употреба од страна на надлежните институции, и согласно стандардите врши избор на учебник и збирка според кои ќе ја реализира наставната програма,
- ги анализира периодичните списанија и другата литература и избира литература која ќе ја користи во работата со надарените ученици,
- ја утврдува соработката со колегите кои со исти ученици реализираат настава по други предмети или области, како и со колегите кои го предаваат истиот наставен предмет, но со други ученици,
- прави глобална обработка на програмските содржини, при што го утврдува фондот на часови за секоја наставна тема кој го распоредува според типовите часови (за нови наставни содржини, повторување и систематизирање на знаењата и слично).

Врз основа на кажаното, учителот подготвува годишен (глобален) план и еден примерок од него му го предава на директорот на училиштето, сè со цел директорот како раководен орган на училиштето да ги обезбеди неопходните предуслови за реализирање на општите и специфични цели на наставата по дадени предмет, т.е. да обезбеди услови за непречено реализирање на воспитно-образовната дејност. Во практиката не постои стандарден терк за подготвување на годишниот глобален план, меѓутоа, на пример, истиот може да биде изработен според следниов терк:

ГОДИШЕН (ГЛОБАЛЕН) ПЛАН

Дата на подготвување на планот: _____

Училиште: _____ Општина: _____

Наставен предмет: _____ Одделение (клас): _____

	Наставна тема	Број на часови			Вк.	Време на реализација	Корелација со тема/пред.
		Нова наст. содржина	Повтору. и системати.	Друг вид часови			
1							
2							
3							
...							

Учебник и збирка според кои ќе се реализира програмата:

1. _____,
2. _____.

Демонстрациони дидактички средства:

1. _____,
2. _____,
3.

Периодична и друга литература:

1. _____,
2. _____,
3.

Технички средства:

1. _____,
2. _____,
3.

Учител:

Директор:

3.1.2 ТЕМАТСКО ПЛАНИРАЊЕ

Како што кажавме, годишниот глобален план ги содржи наставните теми на кои е поделена наставната програма. Покрај списокот на наставните теми, во годишниот глобален план се планира и фондот на часови потребен за реализирање на секоја тема одделно, како и потребните дидактички средства за реализирање на наставната програма.

Следната етапа во планирањето на наставата е *тематското планирање* кое, по правило, треба да се реализира најдоцна 10-15 дена пред почнувањето на реализирањето на предвидената тема и кое претставува врска меѓу годишното (глобалното) планирање и планирањето на наставниот час (оперативното планирање). Всушност, тематското планирање е прва конкретизација на годишниот глобален план, при што се опфаќа поширока заокружена целина од програмата, чие реализирање води кон постигнување на некоја етапна цел. Планирањето на наставната тема и подготвувањето за нејзина реализација, всушност е натамошно операционализирање на целите и задачите на програмата и претставува осмислено структурирање на содржините на темата. При тематското планирање учителот најчесто ги реализира следниве активности:

- ја проучува наставната тема и притоа конкретизира:
 - a) содржината на темата и нивото на нејзина обработка, во широчина и длабочина,
 - b) оперативните цели и задачи на темата и
 - c) корелацијата на темата со другите наставни содржини во наставниот предмет и со другите наставни предмети,
- конкретизира и обезбедува демонстрациони дидактички средства, кои ќе ги користи при реализацијата на наставната тема, соодветни технички средства (графоскоп, дијапроектор, компјутер LCD-проектор, интерактивна табла и слично), прибор за работа и потрошен материјал,
- го распоредува наставниот материјал од темата по наставни часови, при што во согласност со глобалниот план планира:
 - a) часови за обработка на нови наставни содржини,
 - b) часови за утврдување и систематизирање,
 - c) часови за писмени и усни проверки, и
 - d) часови за други активности,
- ги утврдува предзнаењата кои им се неопходни на учениците за усвојување на новата наставна тема и начинот на нивната проверка, при што е неопходно да ги согледа пропустите во знаењата и умењата на учениците, како и да изнајде начин за нивно отстранување,

- во согласност со содржината на темата ги определува инструментите за следење, проверување и оценување на сев купните постигнувања на учениците.

Врз основа на кажаното, учителот подготвува тематски план и еден примерок од него му го предава на директорот на училиштето. Тематскиот план, на пример, може да биде изработен според следниов терк:

ТЕМАТСКИ ПЛАН

Дата на подготвување
на планот: _____

Училиште: _____ Општина _____

Наставен предмет: _____ Одделение (клас): _____

Тема: _____

Ред. бр. на часот	Наставна единица	Време на реализација
1		
2		
3		
...		
...		

Оперативни цели и задачи на темата: _____

Потребни предзнаења на учениците: _____

Корелација:

Демонстрациони дидактички средства:

1. _____,
2. _____,
3. _____.

Технички средства и прибори:

1. _____,
2. _____,
3. _____.

Инструменти за следење, проверување и оценување на постигнувањата на учениците:

1. _____,
2. _____,
3.

Периодична и друга литература:

1. _____,
2. _____,
3.

Учител:

На крајот од овој дел да забележиме дека составен дел на секоја тематска подготовка се согледувањата за реализацијата на темата. Имено, во текот на обработката на темата или по нејзината реализација, пожелно е учителот да направи анализа за реализирањето на темата, од која ќе произлезат заклучоци и оценка за успешноста на реализацијата на темата. Се покажува дека анализата е пожелна од повеќе причини како, на пример:

- при повторно реализирање на истата тема, во некоја од следните учебни години, направените согледувања овозможуваат да се отстранат пројавените недостатоци, и
- критичкиот однос кон сопствената работа и најдобриот пат за подобрување на наставата веќе во следната тема која е предвидена со наставната програма.

3.1.3 ПЛАНИРАЊЕ НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Основна временска единица во наставниот процес е наставниот час. Наставниот час може да се смета како најкраток процес на учење, при што, учениците стекнуваат знаења, умеења, навики, го развиваат мислењето, ги усвојуваат научните методи и методите на заклучување, формираат ставови итн. Во таа временска единица на наставниот процес, наставникот треба:

- да ги сонхринизира општите и специфичните цели и да обезбеди нивно постигнување со расположливите дидактички и технички средства,
- да обезбеди максимална усогласеност на целите и задачите на наставата, наставните содржини, дидактичките средства, наставните стратегии и методи, постапките за проверување на постигнувањата на учениците,

- да обезбеди управување на наставниот процес на ниво учител-ученик и ученик-ученик,
- да обезбеди развивање на квалитетите на мислењето, усвојување на научните методи и методите на заклучување, развивање на вештините за размислување итн.
- да обезбеди учениците да стекнуваат со трајни применливи знаења и умеења, учениците да ги развиваат своите способности, да научат како да учат итн.

Во практиката е распространето мислењето дека на искусен учител не му е потребна подготовка на наставниот час, за тој да може успешно да го реализира. Секако, тоа е сосема погрешно, а може да се каже дека искусниот учител само подобро ја разбира потребата од внимателно подготвување на секој наставен час.

Следејќи го претходно изработениот тематски план, учителот треба внимателно да се подготвува за секој наставен час. Притоа, во зависност од видот час пред учителот се поставуваат низа прашања на кои треба да се даде соодветен одговор. Решавањето на овие прашања не е ни малку едноставна задача, па затоа учителот треба да изработи *оперативен план* за секој час, при што најчесто ги реализира следниве активности:

- за соодветната наставна единица го определува типот час, при што ги конкретизира:
 - a) оперативните цели и задачи на часот,
 - b) потребните предзнаења на учениците за успешна реализација на часот и излезните компетенции,
 - c) наставните методи и форми кои ќе бидат користени на часот,
 - d) корелацијата на содржините кои се обработуваат на часот со другите наставни содржини во наставниот предмет и другите наставни предмети, и
 - e) демонстрационите дидактички и техничките средства кои му се потребни за реализација на часот,
- го планира текот на часот, т.е. дидактичката артикулација на часот, а при ова планирање мора да си одговори на низа методски прашања, меѓу кои ако се работи за час за усвојување на нови знаења и умеења најважно е да се одговори на следниве прашања:
 - a) Како пред учениците да се постави одреден проблем или задача, кои ќе овозможат нивно најдобро воведување во наставниот час?

- b) Како да се воведи нов поим и кои се патиштата за негово најдобро усвојување?
- c) Како да се открие некое својство на воведениот поим, објект или релација и тоа да се докаже?
- d) Каква треба да биде домашната задача, за таа да ги оствари своите функции?

Во однос на наведените прашања, иако не постои единствен одговор ниту на едно од нив, сепак може да се каже дека:

- a) Најдобро е воведувањето на учениците на часовите за усвојување на нови знаења и умења да се направи со создавање на проблемска ситуација, која ќе ги мотивира да го изучуваат предвидениот материјал. Веќе во следниот чекор, на учениците треба да им се соопшти основната цел на часот и да се пристапи кон нејзиното реализирање.
- b) Воведувањето нови поими треба да се прави секогаш кога тоа е можно, со конкретно индуктивниот метод. Притоа, најдобро е усвојувањето на поимите да се остварува како со повторување на дефиницијата од страна на учениците, така и со решавање на одреден број елементарни проблеми кои се во тесна врска со воведениот поим и кога тоа е можно.
- c) Како што знаеме, откривањето на ново својство на некој поим, објект или релација може да се врши, главно, на два начина: конкретно-индуктивен или апстрактно-дедуктивен. За учениците од основното и средното образование пожелно е откривањето на својствата да се врши со конкретно-индуктивниот начин, но во средното образование, паралелно со развивањето на психофизичките способности на учениците, се зголемува улогата и на апстрактно-дедуктивниот начин. Што се однесува до докажувањето на својствата, практиката покажува дека учениците тешко се справуваат со индиректните докази, па затоа во основното и првите години од средното образование тие треба максимално можно да се избегнуваат.
- d) За домашната работа само ќе спомнеме дека на часот за усвојување нови знаења и умења пожелно е домашната работа да содржи повеќе проблеми за чие решавање веќе имаме усвоени алгоритми, кои служат за обучување, осознавање и увежбување, а творечките проблеми да се задаваат како незадолжителни.

Овде е важно да напоменеме дека основна цел на секој наставник треба да е да го подготви и реализира наставниот час во предвиденото време, да ги оствари целите и задачите, при што користењето на дидактичките и техничките средства треба да се оптимализира. Врз основа на претходно наве-

деното, учителот подготвува оперативен план за секој час, кој може да биде изработен според следниов терк:

ОПЕРАТИВЕН ПЛАН ЗА ЧАС

Дата на подготвување
на планот: _____

Училиште: _____ Општина _____

Наставен предмет: _____ Одделение (клас): _____

Тема:

Наставна единица: _____

Тип час: _____

Оперативни цели и задачи на часот: _____

_____ .

Потребни предзнаења на учениците: _____

_____ .

Излезни компетенции на учениците: _____

_____ .

Наставни методи и форми: _____

_____ .

Корелација: _____

_____ .

Текстуални дидактички средства:

1. _____,

2. _____

Демонстрациони дидактички и технички средства:

1. _____,

2. _____

Тек на часот (дидактичка артикулација на часот): _____

Методи за проверувања на посригањата на учениците: _____

Учител:

Како што кажавме, пожелно е учителот да има сопствени согледувања за реализацијата на секоја тема. Нема да навлегуваме во детали, но само ќе спомнеме дека од исти причини и за реализацијата на секој час учителот треба да има сопствени согледувања, кои ќе произлезат од вреднувањето на работата на часот, според однапред утврдени средства и постапки.

XIV ГЛАВА

РАБОТА СО НАДАРЕНИ УЧЕНИЦИ

1. НАДАРЕНОСТ, КРЕАТИВНОСТ, ТАЛЕНТ

Во современата литература е се поприсутна тенденцијата за прецизно и еднозначно определување на надареноста, креативноста и талентот. Меѓутоа, имајќи предвид дека споменатите поими се однесуваат како на општите интелектуални способности, така и на специфичните способности поврзани со дадена област, во современата литература имаме своевидна “конфузија” при дефинирањето на поимите надареност, креативност и талент, како и при детектирањето на поврзаноста меѓу овие поими.

1.1. ПОИМ ЗА КРЕАТИВНОСТ, НАДАРЕНОСТ И ТАЛЕНТ

Што се однесува до поимите надареност и креативност, може да се каже дека современите автори сметаат дека надареноста и поопшт поим, кој во себе ја вклучува и креативноста, односно дека креативноста е само компонента на надареноста. Во оваа насока одат и следниве дефиниции на надареноста и креативноста.

Креативноста е способност за дивергентно мислење, која овозможува да се најде ново решение на некој проблем и да се создаваат оригинални продукти.

Надареноста претставува склоп особини, врз основа на кои поединецот е способен трајно да постигнува исклучително високи резултати во едно или во повеќе подрачја на човековата дејност. Тој склоп особини го чинат: општи и специфични способности, креативност и сплет на бројни карактеристики на личноста и мотивацијата.

Имајќи ги предвид претходните дефиниции, може да се каже дека поимот надарено дете најчесто се употребува за оние деца кои на продуктивен или репродуктивен начин постигнуваат натпросечни резултати во една или повеќе области од човековата дејност, што можат, на пример, да

се идентификуваат и како креативен придонес во една или повеќе области. Тие поседуваат таков склоп на особини или таква комбинација на способности за определен вид на дејност, што им овозможува во континуитет да постигнуваат супериорни резултати во однос на другите деца, па затоа надарените се одликуваат со висок степен на творештво. Понатаму, креативноста е составен дел од надареноста, што значи дека надарените поединци се помалку или повеќе креативни. Притоа, поединецот може да биде надарен, но не и високо креативен, односно да постигнува високи резултати на репродуктивно ниво (на пример, репродуктивен сликар, музичар и слично).

Повеќето автори прават дистингција на поимите надареност и талент, па така за поимот талент може да се сретне следнава дефиниција.

Талентот е врзан за способности во една потесна област (математика, физика, танц, музика) и всушност е диспозиција, која треба да се развива со упорна работа (Озимец).

Со други зборови, талентот не е само “дар од боговите”, т.е. не е само резултат на наследната еволуција на човекот, туку е и многу работа и постојан развој на личноста. Во оваа насока е и дистингцијата која Озимец ја прави меѓу надареноста и талентот. Имено, надареноста се должи на високи општи интелектуални способности, а талентот е врзан за специфични способности во една потесна област, при што надареноста се идентификува врз основа на веќе постигнатите натпросечни резултати, а талентот се сфаќа како диспозиција која допрва треба да се развива. Наспроти ова, бројни автори талентот го сметаат како *надареност во специфична област*, при што ја користат следнава дефиниција дадена од група американски специјалисти кои работеле на Morland Report, 1988.

Надарени и талентирани деца се тие кои покажуваат високи постигнувања благодарение на своите вонредни способности во една или повеќе од следниве области: општа интелектуална способност, специфична академска способност, креативно или продуктивно мислење, способност за водство, визуелна или друга уметност.

Како што можеме да видиме, во последната дефиниција станува збор за надарени и талентирани деца, синтагма која често се среќава во современата литература сè со цел да се нагласи надареноста во специфичните области, односно талентираноста. Последното недвосмислено укажува дека бројните автори сепак ја разликуваат талентираноста од надареноста.

Имајќи ги предвид претходните разгледувања можеме да забележиме дека талентиран е оној поединец кој постигнува натпросечни резул-

тати во определена дејност. Понатаму, поимот надареност е поопшт поим како што видовме надарениот поединец не мора да биде талентиран, но талентираност секако дека е надарен. Конечно, како што рековме креативноста е способност за дивергентно мислење, па оттука следи дека поединецот може да биде надарен, но не мора да е и високо креативен, односно, може да се случи само да постигнува високи резултати на репродуктивно ниво. Сепак, да забележиме дека најчесто надарените лица поседуваат определена креативна способност, па затоа за креативноста сметаме дека е компонента на надареноста.

1.2. ВИДОВИ НАДАРЕНОСТ

Претходно наведените дефиниции за надареност и талентираност недвосмислено укажуваат дека надареноста и талентираноста се појавуваат во сите сфери на човековото живеење. Имајќи го ова предвид, може да се каже дека практично е невозможно да се изврши целосна систематизација и класификација на видовите надареност, како и нивно целосно заемно разграничување. Токму затоа, обидите да се класифицираат видовите надареност и талентираност доведуваат до нивно преклопување. Последното се должи и на фактот дека детерминирањето на различните видови надареност и талентираност најчесто се врши според различни концепции и критериуми. Имајќи го ова предвид, во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на некои видови надареност кои се детерминирани од поголемиот број автори.

1.2.1. ПОВЕЌЕКРАТНА НАДАРЕНОСТ

Како што рековме, надареноста претставува склоп особини, врз основа на кои поединецот е способен трајно да постигнува исклучително високи резултати во едно или во повеќе подрачја на човековата дејност. Притоа, доколку станува збор за истовремено постигнување исклучително високи резултати во повеќе подрачја од човековата дејност, тогаш велеме дека имаме *повеќекратна (мултипла) надареност*. Карактеристично за поединците со повеќекратна надареност е тоа тие истовремено постигнуваат исклучително високи резултати како во повеќе научни области, така и во литературата или уметностите. Притоа, важно е да споменеме дека иако историјата бележи постоење на вакви лица, како на пример: *Руџер Бошковиќ* - хрватски математичар, физичар, астроном, дипломат, филозоф и поет; *Рене Декарт* - француски филозоф, математичар и физичар; *Михаил Ломоносов* - руски физичар, хемичар, писател и лингвист; и *Леонардо да Винчи* - италијански сликар, вајар, архитект, пронаоѓач и научник; итн., сепак овој вид надареност ретко се јавува.

1.2.2. НАДАРЕНОСТ ЗА МАТЕМАТИКА

Бројни примери покажуваат дека способностите на кои се базира надареноста за математика учествуваат и во манифестирањето на надареноста за информатика, филозофија, физика, хемија и биологија. Затоа е прифатено мислењето овие специфични таленти се развиваат од една општа, логичко-математичка способност, која може да се изедначи со општата интелектуална способност. Притоа, диференцијацијата на логичко-математичката способност, односно насочувањето на интересите во насока кон физиката, хемијата, биологијата, филозофијата или кон математиката, придонесуваат и меѓусебните влијанија на надворешните фактори и внатрешните потреби на личноста. Овие афинитети можат да бидат последица од доминантноста на некоја од компонентите на логичко-математичката способност или на одредени комбинации на компонентите. Поради дејствувањето на споменатите фактори, во својот развој, децата почнуваат да се насочуваат кон различните предмети и појави, со што всушност настапува диференцијацијата на логичко-математичката способност.

Целосното идентификување на логичко-математичката способност не е едноставно да се направи, но сепак може да се каже дека таа е резултат на истовремено активирање на следните специјални способности:

- *нумеричка способност*, која се манифестира со разбирање на математичките симболи и операции и количествените односи;
- *алгоритамска способност*, која се манифестира при решавањето на покомлексни проблеми, усвојувањето на алгоритмите и преоѓањето на едноставните алгоритми во технички процедури;
- *способност за просторни претстави*, која се манифестира при проучувањето на геометриските тела и нивните меѓусебни односи;
- *способноста за согледување на соодносите меѓу предметите и појавите*, која се манифестира при формулирањето на теоремите и законите и при нивното докажување;
- *способноста за апстрактно мислење*, која се манифестира при воведувањето поимите и нивното дефинирање, при усвојувањето на аксиоматските системи и при формулирањето и докажувањето на теоремите и законите;
- *способноста за индуктивно, дедуктивно и заклучување по аналогија*, која се манифестира при докажувањето на теоремите и законите и разбирањето дека заклучувањето по аналогија е само веројатно точно, што значи дека заклучоците изведени по пат на аналогија треба да подлежат на строг логички доказ.

Меѓутоа, за целосно разбирање на надареноста во оваа област, треба да се има предвид развојот на логичко-математичките способности, кој се реализира во следниве фази:

- *сензомоторна фаза*, која се карактеризира со стекнување знаења за средината со манипулирање на предмети;
- *предоперационална фаза*, која се карактеризира со формирање на релативно постојани, нееластични ментални шеми, кои се визуелна замена за предметите и акциите во свеста;
- *фаза на конкретни операции*, која се манифестира со усвојување на менталните операции: реверзибилност, споредување, апстракција, генерализација и класификација;
- *фаза на формални операции*, која се манифестира со замена на предметите и дејствата со истите со симболи, усвојување на алгоритмите и преоѓањето на едноставните алгоритми во технички процедури;
- *фаза на согледување односи од втор ред*, која се манифестира со правилно користење на заклучувањето по аналогија и примена на разјаснетите (силни) аналогии;
- *фаза на согледување односи од трет ред*, која се манифестира со систематизирање на предметите, појавите и тврдењата, усвојување на аксиоматските системи и слично;
- *фаза на согледување односи од четврт ред*, која се манифестира во согледување на суштинските заемни врски и односи на различните системи, на пример, Евклидовата геометрија и комплексните броеви, процесите во растителен и животински организам и слично;
- *фаза на согледување проблеми, дефинирање на проблемска задача и нејзино решавање*, која се манифестира со потребата за сознавање при што имаме појава на проблемска ситуација, проблем, проблемско прашање и на крајот негово решавање.

Психометриските истражувања покажуваат дека во процесот на мислење на лицата надарени за математика доминираат последните четири од наведените осум фази во горната шема. Понатаму, истражувањата покажуваат дека кај децата *фазата на формални операции* не се реализира пред нивната единаесетта, односно дванаесетта година, и истата е постојано присутна после оваа возраст. Понатаму, последните четири фази скоро и да не настапуваат пред адолесценцијата, при што *фазата за согледување односи од четврт ред* последна се јавува во развојот на логичко-математичките способности. Сепак, кај надарените математичари, информатичари, биологи, хемичари, физичари и филозофи многу рано се забележуваат некои карактеристики, кои се специфични за последните пет фази во развојот на

логичко математичките способности. Што се однесува до надареноста за математика, значајно е да забележиме дека се евидентни разликите кои можат да се забележат кај децата до нивната осма година од животот и во адолесценцијата.

На крајот од овој дел да забележиме дека развојот на способностите кај децата надарени за математика започнува во најраното детство како развој на општите интелектуални способности, како што е способноста за логичко размислување, а продолжува со канализирање на интересите и со изразит развој на специфичните способности за математика, биологија, физика и другите природни науки. Притоа, во детството, кај потенцијално надарените деца за математика се манифестира повремена социјална изолираност и потреба за самостојни активности како што се: истражување, читање и мечтаење. Понатаму, во адолесцентниот период, овие деца претпочитаат дружење со врстници со слични интереси и способности, а особено ја ценат соработката со афирмирани стручњаци од подрачјето во кое покажуваат интерес. Последното, на извесен начин го детерминира и развојот на овие деца, како и формите и методите за работа со истите.

1.2.3. НАДАРЕНОСТ ЗА УМЕТНОСТИ

Во психологијата, како посебен вид надареност е детектирана надареноста за уметности, при што психолозите под заедничко име надареност за уметности подразбираат:

- ликовна надареност,
- музичка надареност и
- надареност за сценска уметност.

Во натамошните разгледувања накратко ќе се задржиме на секој од овие три вида надареност.

1.2.3.1. ЛИКОВНА НАДАРЕНОСТ

Истражувањата на повеќе научници покажуваат лицата кои се *ликовно надарени* имаат високи интелектуални способности и се одликуваат со изразена имагинација и добра меморија. Имено, овие лица по правило постигнуваат високи резултати на тестовите за општа интелигенција, меѓутоа високите резултати на овие тестови не се показател за ликовна надареност. Што се однесува до неконгнитивните аспекти на ликовната надареност, од особена важност се *способностите, мотивацијата и креативноста* како компоненти на ликовната надареност. Така, според Мејер, ликовните таленти се одликуваат со следниве *способности и вештини: перцептивна леснотија, визуелна меморија, мануелна вештина и естетска*

интелегенција. Покрај наведените видови способности и вештини, ликовно надарените особи се одликуваат со способност за ефикасно користење на своите перцепции при создавањето дела со естетски вредности.

За лицата со ликовна надареност се смета дека *визуелната способност* е нивна најважна особина. Оваа способност ја сочинуваат: *визуелната дискриминација, визуелната меморија и мануелната спретност*. Понатаму, визуелната дискриминација се определува како способност за забележување детали и разликување нијанси во визуелните содржини. Понатаму, под визуелна меморија се подразбира способноста да се меморираат “живи слики”, богати со детали и истите точно и јасно да се репродуцираат, а мануелната спретност подразбира префинета координација на работата на окото и раката. Покрај визуелните способности, кај лицата со ликовна надареност е изразена и леснотијата со која тие ги согледуваат односите меѓу предметите во просторот, како способноста за нивно графичко претставување и тридимензионално моделирање. Се разбира, како и сите надарени лица, ликовните таленти се одликуваат со висок степен на мотивација, самоиницијативност, истрајност и самостојност во работата.

Како што рековме, креативноста ја подразбираме како компонента од надареноста и истата има посебно место во ликовната надареност и истата е клучниот фактор кој овозможува да се продуцираат оригинални уметнички дела, кои се одлика на секој автор. *Ликовната креативност* се карактеризира со: силна индивидуалност во користењето на информациите и импресиите, комбинирање на визуелните претстави што овозможува индивидуално изразување на идеите и чувствата на уметникот.

На крајот од овој дел да забележиме дека лицата со ликовна надареност имаат способност да организираат *ликовна композиција* која има естетски вредности. Оваа способност, која се развива низ искуството, се одликува со можноста да се надмине појавната реалност и претставата за истата, при што се користи индивидуален симболички систем, кој на уметникот му овозможува да ги изрази своите чувства, мисли и идеи.

1.2.3.2. МУЗИЧКА НАДАРЕНОСТ

Сфаќањата за музичкиот талент низ историјата се менувале и денес најновите сознанија за музичкиот талент поаѓаат од општиот модел за природата на надареноста, кој во случајов ги опфаќа музичките способности, креативноста и мотивацијата.

Основата на музичките способности ја сочинуваат специфични когнитивни процеси, како што се: *музичкото перцепирање, помнењето и*

сфаќањето на мелодијата, сфаќање на тоналитетот, утврдување, ре-когниција и репродукција и естетско проценување. Притоа, развиената способност за музичко перцепирање е предуслов за создавање музички поими, кои на поединецот му овозможуваат да направи споредби, да ги организира звуците, да генерализира и стекнатото искуство да го применува при креирање на нови музички теми. Понатаму, за правилен развој на музичките способности потребна е силна *мотивација*, која треба да е континуирана при реализирање на долготрајните вежби, па затоа истата не смее да биде наметната однадвор, туку мора да произлегува од личниот интерес на поединецот. *Креативноста* кај музички надареното лице може да е развиена во различни степени, од што зависи со кој вид музичка активност ќе се занимава. Притоа, во зависност од нивото на креативност, музички надареното лице може да се формира во *репродуктивен уметник (интерпретатор)* или во *креативен уметник (композитор)*, но најчесто продуктивната активност се јавува како надградба на репродуктивната, што значи дека во суштина скоро и да не станува збор за два одделни типа музички уметници.

1.2.3.3. НАДАРЕНОСТ ЗА СЦЕНСКА УМЕТНОСТ

Надареноста за сценска уметност опфаќа *надареност за глума и надареност за балет*. Накратко ќе се осврнеме на овие два вида на надареност.

Надареноста за глума се забележува од најрана возраст и лицата надарени за глума можат да се препознаат според следниве способности: натпросечна интелигенција, јака меморија, силна перцептивна способност, добар слух, завидна музикалност и емоционална експресија. Овие лица поседуваат и извонредна моќ на концентрација, комуникациски вештини, способност за трансформирање од една емотивна и когнитивна состојба во друга.

Надареноста за балет се забележува од најрана возраст, веќе во третата и четвртата година од животот. Лицата надарени за балет се исклучително музикални, натпросечно интелигентни и имаат високо развиена способност за помнење на движењата и музиката. Покрај тоа, овие лица се со силна мотивација за напорно вежбање и усовршување на движењата.

1.2.4. ВЕРБАЛНА НАДАРЕНОСТ

Вербалната надареност најчесто се манифестира како *надареност за литература и надареност за јазици*.

Надареноста за литература се пројавува како надареност за различни литературни форми: поезија, драми, романи, сатири итн. Најчесто надареноста за литература за прв пат се јавува на возраст од 10 до 12 години, а во полн замав се манифестира од 16-та до 18-та година од животот. Карактеристики на овој вид надареност се: јасно изразување, интуиција, занес, исклучително добра меморија, моќ на соживување, способност не-стандардно да се перцепираат предметите и појавите и од дистанца, сензибилност кон општествените проблеми и слично.

Најчесто *надареноста за јазици* за прв пат се јавува на возраст од 5 до 8 години. Карактеристики на овој вид надареност се: исклучително добра меморија и способност за концентрација, силна интуиција, богат речник, способност за користење на аналитичко-синтетичкиот метод, концизно и јасно изразување и слично.

1.2.5. НАДАРЕНОСТ ЗА ЛИДЕРСТВО

Надареноста за лидерство ги карактеризира лицата кои ги имаат следниве особини: харизматичност, креативност, натпросечна интелигенција, самодоверба, лојалност, прилагодливост, трпеливост, толеранција, ораторски вештини, отвореност, организаторски способности и нагласена способност за апстрактно мислење и донесување одлуки.

Психолозите се согласуваат дека, иако постои генетска предиспозиција за лидерство, сепак во развојот на оваа вештина забележителна улога имаат социјалните фактори. Имајќи го ова предвид, веќе подолг временски период се настојува да се креираат едукативни програми за стимулирање на лидерството. Притоа, одделни програми даваат предност на подучување за стилите на водство, вештините на комуницирање, планирање, решавање проблеми и донесување одлуки, а додека други програми се темелат на други аспекти на лидерството, како што се харизматичноста, креативноста, аналитичноста итн. Овде ќе забележиме уште, дека во литературата не постои согласност за структурата на едукативната програма за лидерство, односно дека се уште не е даден одговор на прашањето: која програма е најефикасна?

1.3. КАРАКТЕРИСТИКИ НА НАДАРЕНИТЕ ДЕЦА

При проучувањето на надареноста, едно од основните прашања кое се поставува во врска со овој феномен е дали истиот е резултат од некои специфични процеси, кои се присутни кај надарените лица, а не се присутни кај другите луѓе. За да се одговори на ова прашање, во минатото се раз-

вивани повеќе теории, кои денеска се надминати, а е прифатена концепцијата за *квантитативна надмоќ*, според која конститутивните елементи на надареноста се присутни во целата популација, но тие кај надарените се значително поизразени. Исто така, за да се откријат карактеристиките според кои надарените лица се разликуваат од останатиот дел од хуманата популација, низ историјата истражувачите користеле поголем број различни методи.

Најстар начин на собирање податоци за надарените деца е *анегдотскиот метод*, кој вклучува регистрирање анегдоти од нивниот живот, при што за релевантни се замаат само анегдотите за нивните натпросечни постигнувања. Меѓутоа, со оглед на фактот дека анегдотите за надарените лица најчесто се бележат откако тие ќе постигнат полна афирмација, и тоа како по правило од личности кои им се подредени, не можеме за валидни да ги сметаме податоците кои се однесуваат за карактеристиките на лицето на кое анегдотата се однесува. Имено, како што знаеме, анегдотите се интересни и поучни, но заради споменатите факти податоците кои ги содржат не смеаме да ги користиме во научни истражувања. Во прилог на претходната констатација е и фактот дека најчесто не го знаеме мотивот на лицето кое ја пишува анегдотата за некоја историска личност. Имајќи го предвид претходно изнесеното, слободно можеме да кажеме дека анегдотскиот метод не смее да се користи за проучување на феноменот надареност.

Надминувањето на недостатоците на анегдотскиот метод донекаде може да се постигне, ако за надарените поединци организирано и систематски се соберат што е можно повеќе податоци. Ова се постигнува ако кај веќе идентификуваните надарени поединци се бележат релевантните карактеристики, постапка која во литературата е позната како *историја на случај*. Притоа, како критериум дали еден поединец е или не е надарен се зема постигнатиот висок резултат во некоја област (наука, уметност, литература, спорт и слично), што значи дека со овој метод може да бидат опфатени само пројавени надарени возрасни поединци. Понатаму, за секој поединец се бележат “релевантни” податоци: *социјалното потекло, развојот во детство, културните влијанија, односи со врсниците и возрасните, интереси и мотивација, телесен развој, здравствена состојба* итн. Овие податоци се собираат со различни техники: *прашалници, тестови, интервјуа* и други инструменти. Конечно, собраните податоци се анализираат и се констатира кои од развојните фактори се заеднички за сите испитаници, или барем за повеќето од нив, па овие фактори се сметаат за значајни за развојот на надареноста. Се чини дека методот историја на случај е научно коректен, но не е така. Имено, при користењето на овој метод не може да се искористи субјективноста на испитаниците, како и фактот дека на

определени прашања одговорите ги даваат од забележителна временска дистанца, па затоа истите не секогаш се најпрецизни.

Создавањето на првите теориски концепции со кои надареноста се подразбира како високата интелектуална способност, во истражувањата на надареноста доминантно место зазема *психометрискиот метод*, и за идентификацијата на надарените се користи однапред дефиниран статистички критериум. Така, откако е констатирано дека математичкото очекување (средната вредност) на IQ е $m_{IQ}=100$ и дека стандардната девијација е $\sigma_{IQ}=15$ е извршена класификација на децата според IQ скорот. Притоа, за надарени се сметаат лицата, чиј IQ скор е најмалку 130, односно тие чии IQ скорови во распределбата на резултатите се наоѓаат над $m_{IQ}+2\sigma_{IQ}=130$.

IQ	Категорија за интелектуална развиеност	% од популацијата
146 →	Надарени деца	1
130-145	Таленти	2
115-129	Надпросечни деца	13
85-114	Просечни	66
70-84	Потпросечни	13
55-69	Дебили	2,7
40-55	Имбецили	2,27
← 39	идиоти	0,03

Табела 1. *Распределба на интелектуалната развиеност кај децата, според I. Furlan*

Како што веќе рековме, надареноста ја подразбираме како склоп особини, врз основа на кои поединецот е способен трајно да постигнува исклучително високи резултати во едно или во повеќе подрачја на човековата дејност. Ваквото сфаќање на надареноста овозможува изработка и усовршување на соодветни инструменти потребни да се идентификуваат карактеристиките на надарените поединци, како и нивното значење за одделните видови надареност.

Во литературата се среќаваат повеќе обиди за идентификување на карактеристиките на надарените ученици. Притоа, главно поради нецелосно спроведените истражувања, авторите се разликуваат и во однос на бројот и во однос на описот што го даваат за нив. Меѓутоа, и покрај разликите кои се јавуваат кај одделните автори, сепак генерално сите се согласуваат дека надарените и талентираниите ученици ги имаат следниве заеднички карактеристики:

- натпросечна општа интелигенција,,
- интелектуална љубопитност,
- критичко согледување,
- логичко асоцирање,

- способност за генерализација,
- оригиналност,
- иницијативност,
- широки интереси, и
- одделни специфични способности.

Во литературата може да се сретнат многу листи во кои се наведени карактеристиките на надарените ученици, но за нас од посебен интерес се листите во кои овие карактеристики се систематизирани според одделни критериуми. Еден од поуспешните обиди за систематизирање на карактеристиките на надарените ученици е направен во 1984 година од страна Ренцули, а подоцна оваа систематизација е прифатена од бројни истражувачи. Во систематизацијата на Ренцули карактеризацијата е направена според четири признаци и истата е прикажана (со мали модификации) во табела 2.

<p><i>Карактеристики на учењето</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - поседува многу знаења и умења од различни области, - чита книги наменети за поголема возраст, - поседува необично богат речник, - зборува течно и концизно, - има способност за одлична перцепција, - ги разбира сложените предмети и појави, - во изложувањето може да го одделни битното од небитното, - брзо ги согледува фактите и лесно ги сфаќа основните принципи, - не избегнува тешки и компликувани задачи, и - поседува вештини за критичко мислење и самокритичност,
<p><i>Карактеристики на творештво</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - постојано поставува многу прашања за различни нешта, - не ги прифаќа изјавите на авторите без критичка проверка, - создава голем број идеи и решенија за поставениот проблем, - прифаќа ризици и опасни потфати при решавање на проблемот, - често нуди необични, оригинални решенија на стандардни проблеми, - се занимава со прилагодување, подобрување и модификување на начело, предмет или систем, - не е конформист и не се плаши да биде различен од другите, и - покажува смисла за хумор и сатира,
<p><i>Мотивациони карактеристики</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - нема потреба од надворешна мотивација, - се интересира за прашања за кои се интересираат возрасните, - си поставува себе си високи развојни цели и се

	<p>стреми кон совршенство,</p> <ul style="list-style-type: none"> - потполно се посветува на преферираните задачи, - не е задоволен со рутински, неинвентивни работи, - сака да работи независно, без помош од возрасните, и - во своите изјави е непопустлив, одлучен и истраен,
<i>Социјални карактеристики</i>	<ul style="list-style-type: none"> - добро соработува со околината, - презема должности и одговорности, - се прилагодува на нови услови и социјални ситуации, - поборник е за демократски и рамноправни општествени односи, - е самосвесен, има доверба во себе и тоа јавно го искажува, - може да се соживее со проблемите на другите и затоа е отворен за решавање на политички и социјални прашања, и - сигурен е во работи кои бараат планирање и организирање.

Табела 2. Систематизација на карактеристиките на надарените ученици, според Ренцули

Уште покомплексен и поорганизиран приказ на карактеристиките на надарените, во 1983 година, даваат Хаген и Кларк, според кои карактеристиките на надарените се организирани во пет подрачја, и тоа:

- мисловни (когнитивни) карактеристики на надарените,
- емотивни (афективни) карактеристики на надарените,
- физички сензорни карактеристики на надарените,
- интуитивни карактеристики на надарените и
- социјални карактеристики на надарените.

Притоа, Хаген и Кларк, покрај секоја од наведените карактеристика даваат и примери на потреби на надарените ученици поврзани со таа карактеристика, како и можни проблеми кои ги имаат надарените ученици во врска со наведената карактеристика. Во нашите разгледувања нема да ја презентираме поделбата на карактеристиките на надарените според Хаген и Кларк, но ќе наведеме некои од можните проблеми, според Хаген и Кларк, со кои се среќаваат надарените ученици, а кои се тесно поврзани со нивните карактеристики. Така, во врска со мисловните карактеристики на надарените може да ги имаат следниве проблеми:

- здодевност за време на редовната настава, нетрпеливост кон соучениците да ги извршат задачите и нетолерантност за спо-

собностите на другите, што може да доведе до лоши заемни односи со помалку способните врсници,

- слаба соработка со групата, соучениците го доживуваат како “да се прави важен”, го сметаат за тврдоглаво и упорно лице, кое не соработува, па затоа наставниците и соучениците често пати негативно ја оценуваат неговата супериорност во дискусиите,
- опкружувањето го доживува како премногу сериозен и како лице што не почитува авторитети и традиција,
- неговата способност за анализа и синтеза средината ја доживува како елитен, супериорен и надмен критизер,
- се навредува ако го прекинат во работата и се фрустрира заради поставените рокови и потребата потполно да ја заврши работата според дадени барања и стандарди,
- ако континуирано се бараат резултати како докази за наученото, може, и покрај примарниот интерес, да одбие да се ангажира,
- се фрустрира кога ќе осознае дека другите сметаат дека се “оддалечува од темата” или дека го сметаат за “чудак”,
- може да биде казнет ако не ги следи упатствата и да биде отфрлен заради опортунизам,
- отфрлањето или испуштањето несуществени поединости, кои другите ги сметаат за важни, и генерализирање на прашањата што ги поставуваат другите, најчесто се сфаќа како непочитување,
- се фрустрира кога другите не ги разбираат неговите идеи и концепти, кои најчесто се разликуваат со конвенционалните, и
- самокритиката и ставот од неуспех можат да го обесхрабрат.

Понатаму, во врска со емотивните карактеристики надарените може да ги имаат следниве проблеми:

- големата акумулираност на информации за емоциите може да доведе до погрешно интерпретирање на овие информациите, што негативно влијаат на индивидуата,
- пречувствителност на критицизмот од страна на околината, што резултира со високо ниво на потреба за успех и признание,
- користењето на смислата за хумор, во насока определено лице да се критикува може да резултира со влошување на заемните односи со соучениците,

- високата самосвест придружена од чувството да се биде поинаков може да придонесе да се чувствува отфрлен и изолиран, и можност надарениот да ја перцепира различноста како негативен атрибут,
- раното јавување на идеализам и чувствата за моралност праведност може да доведат до поставување на нереални цели, а не постигнувањето на истите да резултира со интелектуална фрустрација, како и до нетолеранција и недоволно разбирање од врсниците, кое најчесто доведува до отфрлање и изолација,
- отфрлањето на оценките од другите и избор да се живее според личните вредности, што најчесто доведува до конфликт со опкружувањето,
- високи очекувања од себе и од другите може да премине во перфекционизам и да резултира со обесхрабрување и фрустрации како последици од голема самокритичност, и
- силната потреба за доследност може да доведе до фрустрација која води кон инхибирање на самоактуелизација и нарушување на односите со средината.

Од друга страна, во врска со физичките и сензорните карактеристики надарените може да ги имаат следниве проблеми:

- необичната способност за сензорско регистрирање на информации од околината може да резултира со дифузно движење на вниманието кон повеќе области на интерес поради што се троши многу енергија, но и да создаде впечаток за незаинтересираност
- диспропорцијата меѓу физичкиот и интелектуалниот развој, која предизвикува надарени деца кои се чувствуваат удобно единствено кога себе си се изразуваат преку ментални активности што води до ограничен и физички и ментален развој, и
- ниската толеранција за неусогласеноста на нивните стандарди и нивните атлетски вештини доведува до тоа надарените деца да одбиваат да учествуваат во активности каде што не се истакнуваат и до оневозможување на пријатните искуства што произлегуваат од физичките активности, а во крајна линија доведува и до штетност на физичкото и менталното здравје.

Во врска со интуитивните карактеристики надарените може да ги имаат следниве проблеми:

- раниот интерес за интуитивно знаење и метафизички феномени може да доведе до тоа да е исмеван од врсниците, а возрасните да не го сфаќаат сериозно,

- отвореноста за искуства во врска со метафизичките феномени и експериментирањето со физички и метафизички феномени, може да доведе надареното дете тесно да се фокусира на систем на верувања кој е неоснован,
- креативноста во сите области на дејствување, може да придонесе да биде оценет како девијантен и како креатор на проблеми, но и да се досадува при работењето на вообичаени задачи.

Конечно, во врска со социјалните карактеристики надарените може да ги имаат следниве проблеми:

- силната мотивација од потребата за самоактуелизација може да доведе до фрустрација доколку не се чувствува предизвик и до губење на нереализираниот талент,
- зголемен когнитивен и афективен капацитет за сфаќање и решавање социјални проблеми може да доведе до тенденција да се дојде до брзи решенија без оглед на комплексноста на проблемот, и
- способностите за водство и недостигот на можности конструктивно да се користи оваа способност може да придонесе таа да исчезне во детството или да се трансформира во негативна карактеристика, т.е. до девијантно однесување.

Наброените карактеристики укажуваат на едно огромно богатство на манифестации на надареноста, кои бараат организиран приод во нивното препознавање, но и спречување на пропратните проблеми во развојот на надарените. Притоа, со оглед на возраста на надарените ученици, пожелно е нивните карактеристики да бидат набележени во различните развојни периоди. Еден ваков преглед, кој се однесува на општата интелектуална надареност, во 1985 година даваат Јанос и Робинсон и истиот содржи опис на:

- надворешното однесување на надарените,
- интелектуалното функционирање,
- квалитативните разлики во функционирањето,
- специфичните карактеристики на надарените и
- негативните манифестации на надареноста.

До крајот на овој дел истите ќе ги презентираме, без притоа детално да ги разработуваме или коментираме.

1. Предучилишна и почетна училишна возраст

1.1. Надворешно однесување:

- покажува љубопитност,
- исклучително добро помни,
- ги разбира броевите и лесно манипулира со нив,

- рано почнува да чита, и
- поседува богат речник и лесно вербално се изразува.

1.2. Квалитативни разлики во функционирањето:

- брзо усвојува нови и необични поими,
- самостојно се стекнува со нови знаења и способности,
- поставува прашања кои имаат смисла и кои честопати се неочекувани од опкружувањето,
- дава образложени одговори на прашањата кои му се поставуваат,
- успешно решава елементарни загатки, како што се гатанки, логички шеми и слично,
- го менува планот на работата според потребите,
- ги организира информациите.

1.3. Специфични карактеристики:

- покажува креативност,
- манифестира смисла за хумор,
- има голема концентрација и упорност во работењето.

1.4. Негативни манифестации на надареноста:

- можна е значајна разлика меѓу моторната и интелектуалната развиеност, која може да го фрустрира детето;
- можна е здодевност, која произлегува од едноставноста на активноста во градинката и почетното образование,
- можни се различни форми на недисциплина, кои претставуваат реакција за здодевноста и немањето можност да се задоволи сопствената љубопитност.

2. Училишна возраст - основно образование

2.1. Надворешно однесување:

- со леснотија усвојува нови знаења и умеења и се стекнува со нови способности учи,
- поседува богат и сложен речник и лесно вербално се изразува,
- има големо знаење од различни области, и
- самостојно учи од различни извори, при што интензивно чита сериозни текстови.

2.2. Интелектуално функционирање:

- брзо согледува факти и лесно ги разбира основните принципи,
- добро ги согледува и разбира сложените предмети и појави, и
- критичко размислува и е склон на позитивна самокритика.

2.3. Квалитативни разлики во функционирањето:

- покажува спонтана, спретна, брза и коректна употреба на метаконгнитивни компоненти,
- применува се сложени стратегии во решавањето на проблеми, и
- поседува способност да го согледа битното и новото во односите меѓу предметите и појавите, да формира точна и јасна слика за материјата која е предмет на разработка.

2.4. Специфични интереси:

- покажува посебен интерес за одредено подрачје, и
- посебно се интересира и за сродните подрачја на подрачјето кое е предмет на негов приоритетен интерес.

2.5. Карактеристики на мотивација:

- поседува силна мотивација за постигнување успех во подрачјето за кое покажува посебен интерес,
- покажува одлучност за постигнување успех, и
- има висок критериум за успешност.

2.6. Негативни манифестации на надареноста:

- постои можност за нерамнотежана знаењата и дефицит во знаења заради специфичните интереси,
- појава на перфекционизам како последица на високите мерила на успешност,
- можна е социјална изолираност која произлегува од: нетолеранцијата на пониските облици на интелектуално функционирање, специфичноста на интересите кои не може да ги сподели со другите, потребата за самостојната активност и размислување и многу голема самокритичност и критичност кон другите,
- можни се манифестации на мрзливост кои произлегуваат од отпорот спрема рутинското работење, повторувањето, вежбањето, механичките и едноставните работи,
- големата методичност и систематичност, која од опкружувањето често се перцепира како бавно напредување во материјалот за кој се заинтересирани, а не како негово темелно и детално усвојување,
- можни се манифестации на неефикасност кои произлегуваат од тенденцијата да “komplikuvaat”, бидејќи не се задоволни од едноставните и очигледни решенија,
- често пати има појава на несупешност при решавањето на едноставни проблемски ситуации, бидејќи надареното лице не може да верува дека решението на проблемот е така очигледно.

3. Адолесценција

3.1. Надворешно однесување:

- поседува големо општо знаење,
- за својата возраст има несразмерно големи знаења во специфичните области на интереси,
- самостојно учи од книги и други извори на знаење,
- покажува одбивност да биде директно подучуван, но има потреба од ментор.

3.2. Интелектуално функционирање:

- поседува способност да согледува односи од трет, а во некои случаи и од четврт ред,
- лесно ја открива суштината на предметите и појавите,
- поседува способност да формулира важни и реални проблеми и дел од нив самостојно да ги решава,
- поседува способност да ја менува и да ја прилагодува средината на своите потреби.

3.3. Квалитативни разлики во функционирањето:

- покажува квалитетни метакогнитивни процеси како последица од поседувањето на голема, активна и еластична база на знаења,
- манифестира креативност, која произлегува од активната употреба на увидувањето, на метафизичкото согледување на односите и од проширувањето од границите на специфичната база на знаења.

3.4. Карактеристики на мотивацијата:

- покажува одлучност за постигнување успех,
- има висок критериум за успешност, и
- мотивација ја насочува кон постепено постигнување на организиран и планиран систем на цели.

3.5. Негативни манифестации на надареноста:

- може да внатрешен конфликт, како резултат од посакуваните животните цели,
- компромис меѓу целите на штета на квалитетот на резултатите од трудот и менталното здравје,
- конфликт со средината заради тенденцијата средината да ја подредува и моделира во функција на постигнување на личните цели,
- кај лицата со особено високи способности може да се случи конфликт и неусогласеност со училиштето како институција, со пријателите и со семејството.

Согледаните разлики во манифестирањето на надареноста во различни фази од развојот на личноста, упатува не само на потребата за согледување на причините кои доведуваат до нив, туку и на обмислување на развојот на надарените ученици и наоѓање на најсоодветни методи и форми за работа со овие деца.

2. ПРЕПОЗНАВАЊЕ И ИДЕНТИФИКУВАЊЕ НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Во претходните разгледувања се осврнавме на поимите надареност и талент, ги разгледавме видовите надареност и карактеристиките на надарените деца. Во овој дел имајќи ги предвид карактеристиките на надарените деца ќе ги разгледаме методите за препознавање и идентификување на надарените ученици.

2.1. ПРЕПОЗНАВАЊЕ НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Препознавање на надарените ученици во училиштето е од посебен интерес и истото е важно следниве причини:

- прво, препознавањето на надарените ученици е иницијална состојба од која зависи дали надарените ученици ќе бидат правилно третирали во училишната средина, што е особено важно за нивниот иден севкупен развој,
- второ, оваа фаза покажува каква е сензорната способност и подготвеност на училишната средина да ги забележи знаците кои се индикатори на надареноста, да ги почитува вистинските потреби на надарените ученици, и уште повеќе адекватно на нив да одговори.

Точноста на претходно кажаното произлегува од сознанијата за развојот на надарените ученици, според кои без организирана, мотивирана и интензивна грижа на средината нема успешен развој на надарените ученици.

Препознавањето на “необичното” позитивно однесување на некој ученик во училиштето треба да претставува сигнал за акција на учителот, која ќе биде насочена кон задоволување на потребите на овој ученик. Притоа, неопходно е вклучување на родителите во системот на развивање и следење на развојот на надарениот ученик. Наставникот во училиштето, а родителот во семејството, се двата најзначајни чинители во развојот и социјализацијата на надарениот ученик. Тие треба да го следат неговиот раз-

вој и да стимулираат ситуации од кои ќе “профитира” надарениот ученик, што треба да претставува нивна крајна заедничка цел.

Имајќи го предвид претходно кажаното, логички се наметнува прашањето:

Кога треба да започнат активностите кои се насочени кон препознавање на надарените ученици, кој е вистинскиот момент?

Одговорот на ова прашање не е едноставен, но ако се има предвид значењето на првите три години од животот, за севкупниот развој на детето, може да се каже дека препознавањето и стимулирањето на специфичните потреби на надареното дете треба да започне што е можно порано. Причината за ваквиот став се следните ефекти кои се постигнуваат со раното препознавање и стимулирање на надареното дете: негување на сигурноста, самодовербата, иницијативноста, мотивираноста, интересот, подготвеноста за ризик, отвореноста за критика итн., што е доволно нашето внимание да го насочиме кон раното препознавање на надареното дете и неговото вклучување во соодветна развојна програма, со која ќе го развива својот потенцијал.

Често пати во воспитно-образовната практика се поставува прашањето:

Зошто и кога треба да го препознаеме надареното дете?

Сметаме дека одговорот на првиот дел од ова прашање е содржан во фактот дека препознавањето на надареното дете овозможува:

- откривање и создавање услови за развој на неговите способности кои се или можат да бидат од интерес на пошироката општествена заедница,
- зголемување на самодовербата на надареното дете,
- негувањето на способностите на надареното дете и неговите постигања, е добар позитивен пример кој е важен за развојот и на останатите ученици,
- работата со надарените ученици бара поголемо ангажирање на учителите, што во крајна линија придонесува за нивен постојан развој.

Што се однесува до вториот дел од прашањето, на мислење сме дека препознавањето на надареното дете треба да се реализира уште во градинката, а ако детето не посетувало градинка тоа треба да се случи со поаѓањето во училиштето, каде од стручни и компетентни лица треба да се организира развојот на овие деца. Во оваа насока, имајќи ги предвид карактеристиките на надарените деца во предучилишна и почетна училишна возраст, за нивно препознавање пожелно е учителите да имаат предвид дека надарените деца на оваа возраст:

- брзо усвојуваат нови и необични поими, брзо и лесно учат, што резултира со поголеми знаења од нивните врстници
- самостојно се стекнува со нови знаења и способности, при што размислуваат логички и се во можност да го идентификуваат односите меѓу предметите и појавите,
- исклучително добро помнат и брзо се присетуваат на претходно наученото,
- покажуваат љубопитност, одлично ја опсервираат средината и се вклучуваат во решавање на најразлични практични проблеми,
- ги разбираат броевите и лесно манипулираат со нив,
- рано почнуваат да читаат, а оние кои веќе знаат да читаат најчесто читаат книги кои се наменети за деца постари една до две години,
- поседуваат богат речник и лесно вербално се изразуваат,
- поставува прашања кои имаат смисла, се од различни области и кои прашања честопати се неочекувани од опкружувањето,
- даваат образложени одговори на прашањата кои им се поставуваат, при што одговорите се логички издржани,
- успешно решаваат елементарни загатки, како што се гатанки, логички шеми и слично,
- го менуваат планот на работата според потребите,
- ги организираат информациите, што придонесува многу полесно да ги надминуваат предизвиците со кои се соочуваат,
- покажуваат креативност и користат оригинални идеи за разрешување на проблемски ситуации,
- минефестираат смисла за хумор, и
- имаат голема концентрација и упорност во работењето.

Од друга страна, при препознавањето на надарените деца на оваа возраст пожелно е учителите да имаат предвид дека надарените деца може:

- да се добри во повеќе области, односно да имаат високи способности во едно или повеќе подрачја,
- да се надарени, но да не се мотивирани или да немаат самодоверба,
- да имаат способности, но истите да не се идентификувани од страна на опкружувањето (родителите, учителите и слично),
- од најразлични причини да ги прикриваат своите способности, на пример поради значителната разлика меѓу моторната и интелектуалната развиеност, која довела до своевидна фрустрација.

Претходно изнесеното, како и негативните манифестации на надареноста на оваа возраст, може да послужат како своевидна насока во препознавањето на надарените ученици, како и да се елиминираат евентуалните негативни појави во развојот на надарените ученици.

На крајот од овој дел да споменеме дека во практиката најчесто учителите при препознавањето на надарените ученици поаѓаат од општиот успех на учениците. Затоа, многу малку е забележувањето и “пријавувањето” на некаков вид на надареност кај учениците кои имаат послаб општ успех. Меѓутоа, учителите кои во својата проценка за надареноста на некој ученик поаѓаат од постигнатиот општ успех, имаат можност да згрешат ако немаат доволно согледување за тоа колку тој успех е резултат на работните навики, работна дисциплина и слично, а колку на карактеристиките на надареноста за соодветниот развоен период. Исто така, наставникот може да згреша и поради феноменот на ало-ефект, а често се случува карактерните особини на личноста да ја прикриваат нејзината надареност, па така учителите истата потешко ја препознаат. Последното добива на тежина ако се има предвид дека надарените ученици кои немаат одличен успех, најчесто како такви не се во видокругот на учителите. Последното се должи на стереотипите кои доминираат во училиштата, меѓу кои посебно е изразен “критериумот за надареност” од видот: секој надарен ученик во училиштето мора да постигнува општ одличен успех. Имајќи го предвид претходно изнесеното, важно е при препознавањето на надарените ученици да се биде особено внимателен и истите да се “бараат” и меѓу учениците со послаб училишен успех, а потоа да се изврши проверка на валидноста на препознавањето на некој ученик како надарен, за што ќе говориме во натамошните разгледувања.

2.2. ИДЕНТИФИКУВАЊЕ НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Идентификација на надарените ученици подразбира постапка во која ќе бидат вклучени низа методи и инструменти со кои се утврдува видот и степенот на надареноста. Притоа, треба да се има предвид, дека само врз основа на првата постапка на идентификација не смее да следува конечен заклучок дали еден ученик е надарен или не е надарен. Имено, добиеното сознание за надареност на еден ученик треба дополнително да се провери и да се потврди во најразлични ситуации, со што всушност се проверува првичниот заклучок. Понатаму, во случај кога е потврдено првичното сознание дека одреден ученик е надарен, треба да следува конкретно планирање на развојот на надарениот ученик. Тоа значи, треба да се одреди стручно и методски издржан план за работа, сè со цел да се стимулира развојот на ученикот во согласност со резултатите од идентификационата постапка.

Што се случува кога едно дете ќе биде препознаено и идентификувано како надарено? На ова прашање веќе дадовме одговор во претходните разгледувања, односно при наведувањето на можните проблеми, според

Хаген и Кларк, со кои се среќаваат надарените ученици, па затоа овде само ќе споменеме дека најчесто и позитивните отстапувања од средината не се прифаќаат и не се добредојдени. Притоа, треба да се има предвид дека токму неприфаќањето на надарените ученици е една од главните причини за диспропорцијата меѓу теориските и декларативните заложби на општеството и реалниот третман на овие деца.

Откако детето ќе биде препознаено и идентификувано како надарено, тоа на своевиден начин добива општествена етикета, т.е. се етикета како такво. Во врска со ваквото етикетање природно е да се обидеме одговор на некои најчесто поставувани прашања, кои ќе ги разгледаме последователно.

1. *Дали детето, откако ќе биде етикетирано како надарено, чувствува промени кај себе,?*

Одговорот на ова прашање е позитивен. Имено, често пати по добивањето на оваа етикета, се случува кај надарениот ученик да се забележат извесни промени во неговото однесување или во неговите размислувања. Овие промени се манифестираат со настојување да се потврди надареноста во различни области, сè со цел да се покаже богатството и ширината на неговите знаења, умеења и способности.

2. *Дали надарениот ученик, по добивањето на етикетата надарен, забележува изразени промени во однесувањето на учителите, соучениците или родителите кон него?*

Често пати се случува надарениот ученик многу брзо да забележи промени на околината кон него, пред сè на родителите, учителите и врсниците и тоа во негативна конотација. Тоа може да биде резултат на новите барања кои се поставуваат пред овие субјекти, а произлегуваат од неговите специфични потреби. Притоа важно е да се знае дека неможноста да се промени односот во семејството и училиштето кон надарените најчесто е резултат од слабата едукација на околината, која пред сè треба да е во насока како другите треба да се однесуваат кон надарените ученици. Затоа, не ретко се случува јавно промовираните надарени ученици да го усогласат своето однесување кон околината и тоа заради “мир” во семејството и училиштето. Имено, посебно важно за надарените ученици е каков ќе биде односот на неговите врсници во училиштето, бидејќи потребата да се биде прифатен од генерацијата најчесто е инспирација за вложување посебен напор. Затоа, плашејќи се од отфрлање од групата, често пати се случува надарено дете да манифестира облици на просечно однесување. Ваквиот начин на реагирање може да се преслика и во семејството од исти или слични причини, што значи враќање на почетната линија во развојот на надареното дете или далеку зад неа. Имено, етикетата надарен влијае врз другите деца од семејството. Кога во семејството е етикетирано едно дете како надарено, се менува положбата на другите деца, кои автоматски добиваат етикета

“ненадарени”, со што кај нив може да се предизвика чувство на неправда и инфериорност. Грижата и активноста, концентрирани околу развојот на надареното дете, предизвикува кај неговите браќа и сестри чувство на запоставеност и љубомора, што како последица може да има нарушување на односите родител-дете и дете-дете. Притоа, истражувањата покажуваат дека нарушувањето на семејните релации се најмногу изразени непосредно по етикетањето, но почетните негативни ставови по пет години се заменуваат со задоволство од присуството на надарен член во семејството. Како што браќата и сестрите ги чувствуваат негативните последици од етикетањето на надарениот, така, во помала мера, нив ги чувствуваат и врсниците во одделението или од социјалната група. Доколку во семејството веќе е идентификувано надарено дете, тоа може да влијае на семејството, особено ако разликите во способностите меѓу него и другите членови се големи. Меѓутоа, за многу семејства надареноста претставува и голема одговорност, економско и емоционално исцрпување, а понекогаш и нарушување на семејните односи во смисла на изменети улоги во семејството, изменета самоперцепција кај родителите, промена на активностите и обврска кај семејството. Имајќи го предвид претходно изнесеното, од особено значење за надарениот ученик, после неговото јавно промовирање како таков, е непосредното опкружување да не го смени односот кон него. Тоа за него ќе значи дека сепак не е нешто различен од другите и со ништо не ја загрозува или оптоварува својата средина. Сепак, најдобро би било кога семејството и училиштето би покажале: поттик, задоволство и емоционална поддршка кон надарениот ученик.

3. *Каква самоперцепција ќе се развива кај надарениот ученик по добивањето на таа етикета? Дали кај него ќе се развива позитивна или негативна слика за себе? Дали врз основа на неа, ќе се организира и ќе се прилагоди неговото однесување?*

Што се однесува до сликата која за себе ја има надарениот ученик, непосредно по добивањето на етикетата надарен, тој најчесто си ги поставува прашањата:

Дали сум различен од другите? Дали треба да го променам моето однесување? Како треба да изгледам во училиштето и надвор од него? Како ќе ме гледаат моите родители, браќа и сестри, односно како ме гледаат другите и дали истите ќе ме прифатат?

и се обидува на истите да најде одговор. Притоа, треба да се има предвид дека, како и кај секој човек, така и кај надареното дете, за успешното функционирање од особена важност е сликата кое тоа ја има за себе, односно самоперцепцијата. Притоа треба да се има предвид дека позитивната слика за себе е основа за самоверба и чувство на лична компетентност, кои се главен двигател и извор на креативниот стил. Бројните истражувања потврдуваат дека надарените имаат попозитивна слика за себе. Но, спротивно од очекувањата, етикетањето може да доведе до пад

на позитивната слика за себе, до губење на самодовербата и сигурноста. Ваквата можност постои пред сè поради зголемените очекувања од средината и од самото дете, според кои тоа во се треба да биде најдобро и непогрешливо. Јасно, ваквите очекувања се нереални и истите не можат да се остварат, што кај детето може да резултира со чувство на неуспех и губење на самодовербата.

Имајќи го предвид претходно изнесеното, природно е да се запрашаме:

Дали воопшто е неопходна постапката за идентификување на надарените ученици?

Одговорот на поставеното прашање не е едноставен, но во прилог на потребата од идентификација, пред сè, доволно е да ја споменеме можноста благовремено да се интервенира во развој на потенцијалите на надарениот ученик, при што е неопходно да се изработат специфични едукативни програми. Друг аргумент, што ја поддржува потребата од идентификација, е потребата да се сведат на минимум негативните последици во развојот на личноста на надарениот ученик. Имено, голем број истражувања покажуваат дека учениците, кои биле свесни дека се означени како надарени и кои знаат дека се вклучени во специјални програми, немаат конфликт со своите учители, со соучениците и веруваат дека нивните семејства, пријатели и учители се индиферентни во однос на нивниот социјален статус. Понатаму, истражувањата покажуваат дека родителите, чии деца се идентификувани како надарени, имаат поповолни ставови кон надарените и кон програмите за нивен развој, се гордеат со своите деца и имаат поблиски односи во споредба со родителите чии деца не се сметаат за надарени. Конечно идентификувањето е пожелно, бидејќи бројните испитувања за односот на надарените ученици кон самата појава надареност покажуваат дека нивните ставови се многу позитивни, дека надареноста може да се постигне со голема работа, дека многу не се разликуваат од другите деца и дека околината добро ги прифаќа. Од друга страна, противниците на препознавањето и идентификувањето на надарените не само што тврдат дека целата постапка не е неопходна туку одат до таму што истата ја прогласуваат за штетна за надарените ученици. Понатаму, истите ги промовираат тезите дека:

- надарените заслужуваат посебно внимание дури откако ќе бидат задоволени потребите на останатите ученици,
- непријателскиот однос кон интелектуално надарените деца е последица на фактот што нивната дарба се смета за наследна, а не дека е добиена со труд,
- надарените деца не сакаат да бидат така именувани бидејќи разот “надарен” често е дефиниран како отстапување од нор-

малното и ним им се препишуваат изолираност, здодевност, неприлагодливост, нерасположение и слични непожелни однесувања,

- идентификацијата на надарените во која се селектира елитна група придонесува за дискриминација на популацијата во однос на способностите на поединците итн.

Споменатите тези нема да ги коментираме, но само ќе споменеме дека последната теза не е ништо друго, туку само обид за афирмација на исповедната реченица на композиторот Салиери по прашање на неговиот нечовечки однос кон еден од најголемите музички таленти Моцарт, а која гласи:

*Е, мој оче! Светот им припаѓа на просечните,
а јас сум нивниот цар.*

Колку овој став е погубен за севкупниот напредок на човештвото не треба да се коментира. Меѓутоа, можеби во ваквиот став треба да се бара и причината за општата тенденција на омасовување и поопштествување на науката, појава која полека но сигурно се манифестира со огромен број “експерти” и “аналитичари”.

2.3. ПРИНЦИПИ И МЕТОДИ ЗА ПРЕПОЗНАВАЊЕ И ИДЕНТИФИКУВАЊЕ НА НАДАРЕНИТЕ

Во претходните разгледувања се осврнавме на карактеристиките на надарените деца, причините за нивно препознавање и идентификување, како и на ставовите во врска со препознавањето и идентификувањето. Како што видовме, иако во секојдневниот говор поимите препознавање и идентификување се користат како синоними, всушност идентификувањето е поширок поим, кој во себе го опфаќа и препознавањето. Имено, да се препознае надареното дете значи само детето да се именува како надарено, а да се идентификува значи да се утврди неговиот идентитет, односно да се утврди збирот на особини кои го промовираат како надарен, односно да се утврди видот и степенот на неговата надареност. Оваа разлика меѓу препознавањето и идентификувањето има методолошко значење, бидејќи со некои елементарни постапки може да се постигне само препознавање, а додека за идентификувањето се потребни покомплексни методи. Во постапката на препознавање и идентификување на надарените деца, основно прашање кое се наметнува е како истата да се објективизира, т.е. врз кои начела истата да се спроведе, сè со цел претходно споменатите негативности кои го следат откривањето и развојот на надарените деца да се сведат на минимум. За таа цел Ѓуриќ ги предлага следниве принципи врз кои треба да се темели препознавањето и идентификувањето на надарените деца:

- принцип на *демократичност*, што значи дека постапката за идентификација треба да се реализира со секој ученик кој покажува каков било знак за надареност,
- принцип на *мултидисциплинарност*, што значи дека во процесот на идентификување и работата со надарените ученици треба да бидат вклучени стручњаци од релевантни области, воспитно-образовни институции, научно-истражувачки институции итн.
- принцип на *биосоцијална оптималност*, што значи дека идентификационата постапка да се изврши на возраст кога конкретната дарба се јавува во психофизичкиот развој на детето,
- принцип на *лонгитудиналност*, што значи дека идентификуваното надарено дете треба да се следи во подолг временски период, да се повторува идентификационата постапка во различни развојни фази и да се обезбедат оптимални услови за развој на надареното дете,
- принцип на *економичност*, што значи дека процесот на идентификување и работа со надарените деца не мора да биде додатна активност, која ќе биде екстра финансирана, туку да се извршува во рамките на редовната работа со учениците.

Наведените принципи нема одделно да ги коментираме, но ќе забележиме дека принципот на економичност по правило не гарантира професионален однос во работата со надарените деца. Имено, доколку идентификувањето и работата со надарените ученици се реализира во рамките на редовната работа со учениците, тоа би значело дека секој поединец во образовниот систем би требало истата подеднакво успешно да ја извршува, бидејќи само така може да се задоволи принципот на демократичност. Колку е ова можно, сметаме не е потребен никаков коментар.

Во постапката за идентификација на надарените ученици, следното прашање на кое треба да се даде валиден одговор е:

Кога и како, врз база на наведените принципи, да се спроведе постапката за препознавање и идентификување на надарените ученици?

Одговорот на поставеното прашање не е еднозначен, па затоа природно е разногласието кое е присутно во научната јавност. Што се однесува на првиот дел од прашањето, одговорот на истото е содржан во фактот дека, препознавањето и идентификувањето на надарените ученици е основен предуслов за трасирање на нивниот севкупен развој. Затоа е неопходно да општеството да обезбеди истото да започне уште во предучилишниот период, а да продолжи за време на училишниот, бидејќи кај некои лица надареноста може да се манифестира подоцна. Освен тоа, и во училишни-

от период идентификувањето не треба да се врши еднократно, туку да се практикува истото повеќекратно да се повторува на определени временски периоди, постапка која во литературата е позната како процесна дијагностика. Одговорот на прашањето како да се спроведе постапката за препознавање и идентификување на надарените деца е уште понеизвесен. Сепак, сметаме дека насоките кои по однос на ова прашање ги дава Корен се најприфатливи. Имено, Корен методите кои треба да се користат во процесот на препознавањето и идентификувањето на надарените деца ги класифицира во три групи, и тоа:

1. Проценување на особините на личноста на поединецот од страна на родителите, наставниците, раководителите на секциите и клубовите, соучениците, како и самопроценување на потенцијално надарените деца, при што се користат различни скали на проценка и кое вклучува многубројни начини на субјективно проценување на развиеноста на одделни особини кај оценуваните лица. Тука спаѓаат: номинации од страна на наставниците, проценки од страна на родителите и соучениците, самооценувањето. Јасно, овие проценки се засноваат на субјективната перцепција на особините на личноста, дадени од проценувачот. Затоа, за да се избегнат евентуалните грешки, т.е. за да се намали субјективноста на проценувачот, потребно е да се користат стандардизирани постапки, кои се и верификувани во практиката. Во овој процес наставниците имаат клучна улога. Меѓутоа, иако дел од нив се едуцирани за давање на споменатата проценка и имаат можност да ги споредуваат особините на личноста на конкретен ученик со оние на неговите врстници, сепак поголем број на истражувања покажуваат дека тие не се доволно обучени за извршување на оваа деликатна задача, па затоа и ефикасноста од нивната работа е на незавидно ниво. Како дополнителен критериум, во рамките на проценувањето и идентификувањето на надарените ученици се користи проценката која ја даваат соучениците и самопроцената на потенцијално надарениот ученик, но за нивна дијагностичка вредност во стручната литература нема доволно податоци. Сепак, имајќи предвид дека ниту соучениците ниту потенцијално надарениот ученик се едуцирани за давање на ваков вид проценка, сметаме дека дијагностичката вредност на проценката на соучениците и самооценката е многу мала.
2. Мерење на степенот на развиеност на особините на личноста, кое опфаќа употреба на стандардизирани тестови со утврдени метриски карактеристики, како што се:
 - тестови на интелигенција,
 - тестови на посебни способности,

- тестови на креативност,
- тестови на личност,
- тестови на постигнување, итн.

Овие тестови се применуваат во различни комбинации, во зависност од тоа за каква надареност станува збор, но и од прифатената оперативна дефиниција на поимот надареност. Овде ќе споменеме дека најстари и најмногу користени се тестовите на интелигенција, со кои се дијагностицира степенот на развиеност на општите интелектуални способности, како што се, на пример, тестовите за испитување на вербалните, перцептивните, механичките, математичките и други способности. Тука спаѓаат и тестовите за утврдување на сензорните и психомоторните способности, како и тестовите за мерење на способноста во различни уметнички способности (музички, ликовни, балетски и слично). Тестовите за креативност го мерат степенот на развиеност на творечките способности. За утврдување на особините на личноста се применуваат: прашалници за цртите на карактерот, тестови за интересите и слично. На крајот, во оваа група припаѓаат и тестовите на постигнување, за кои практиката покажува дека подобро ги селектираат надарените ученици, отколку самиот училишен успех. Овде, уште ќе забележаме дека задавањето на тестовите и интерпретирањето на добиените резултати задолжително мора да го реализираат компетентни лица.

3. Проценување на духовните и материјалните производи на поединецот, кое се однесува на вреднување на јавно верификуваните творби, создадени од надарениот ученик. Тука спаѓаат:
 - публикувани стручни и научни расправи,
 - верификувани патенти,
 - награди на натпревари,
 - постигнувања во уметноста и слично.

Иако овие продукти се вистински индикатори за надареноста, сепак во постапките за идентификација во училишниот период тие малку се среќаваат. Најчесто производите на поединецот се јавуваат во подоцнежните години од животот, а постојат и големи тешкотии околу создавањето објективни критериуми за вреднување на конкретните производи, бидејќи за некои од нив е можно да се утврди вредноста дури по некоја временска дистанца. На извесен начин, тие се “пост вестум” метод на идентификација, бидејќи можат да се применат релативно подоцна во животот на поединецот, односно по создавањето на некој производ, што во многу случаи не зависи само од потенцијалните способности, туку и од други фактори (знаење, материјално-

технички услови итн.). Сепак, ако во раната младост се сретнат оригинални и неочекувани производи кај некои надарени ученици, тие можат да се користат како индикации за одредена надареност.

Од досега изнесеното можеме да заклучиме дека идентификувањето на надарените главно треба да се ориентира кон проценување и тестирање на индивидуалните карактеристики и проценување на производите или делата, кои ги создаваат или изведуваат надарените лица. И проценувањето и тестирањето имаат свои недостатоци бидејќи тешко е да се биде непристрасен и да се направи објективна проценка, како што е тешко да се имаат на располагање сопствени тестови, кога постојните доволно не ги задоволуваат барањата во поглед на валидноста. Понатаму, важно прашање при идентификувањето на надарените е определување на прагот на значајност, односно определување кое е потребното ниво што детето треба да го има од одредена карактеристика, на дадена мерна скала, за да биде идентификувано како надарено. Ова е од особена важност бидејќи во дадената ситуација треба да се оцени дали детето е надарено или не е, дали е многу или е малку надарено во областа во која се испитува неговата надареност, и таа проценка треба да ја даде испитувачот врз база на однапред определен критериум.

Од претходните разгледувања можеме да заклучиме дека условите што треба да се исполнат за да имаме оптимални резултати при идентификувањето на надарените деца се помалку или повеќе определени. Притоа, како што и претходно говоревме, идентификувањето на надарените деца главно треба да го направиме во некоја од следниве области: повеќекратна надареност, логичко-математичка надареност, надареност за уметности, вербална надареност, надареност за водство и надареност за спорт. Но, дури и во развиените земји, каде постои и соодветна регулатива за препознавање и идентификување на надарените ученици, постапката речиси исклучиво се базира на постигнатите IQ резултати. Притоа, во повеќето училишни области, за надарени се сметаат учениците кои влегуваат во горните 2%-3% од нормалната распределба, односно чии резултати изнесуваат најмалку $IQ = 130$.

2.4. ПРАШАЛНИКОТ КАКО ИНСТРУМЕНТ ЗА ПРЕПОЗНАВАЊЕ И ИДЕНТИФИКУВАЊЕ НА НАДАРЕНИТЕ ДЕЦА

Имајќи ја предвид природата на надареноста, може да се каже дека при препознавањето и идентификувањето на потенцијалната надареност треба да реализира интердисциплинарно. Ова подразбира вклучување на

лица од различни стручни профили. Меѓутоа, сметаме дека преферирањето дека постапката на препознавање и идентификување на надарените деца треба да ја води психолошко-педагошката служба на училиштето не е основано. Имено, како што видовме секој вид на надареност има свои специфики, па затоа е неоснована тенденцијата психолозите и педагозите да се прогласат се компетентни за сè и сешто. Последното добива на тежина ако се има предвид дека препознавањето и идентификувањето на одредени карактеристики на надареноста во дадена област најдобро може да го реализира лице кое е компетентно за таа област. Токму затоа, примарна улога во препознавањето на надарените ученици имаат родителите, но доминантно место во процесот на идентификација треба да имаат воспитувачите во предучилишното образование и учителите, при што е неопходно вклучување како на педагошко-психолошката служба, така и на научните работници од најразлични области. Процесот на препознавање и идентификување на надарените треба да започне да се реализира со целата популација ученици, при што се евидентираат потенцијално надарените ученици. Јасно, првата диференцијација во овој процес ја правата родителите и учителите кои врз основа на лична перцепција и проценка ги селектираат потенцијално надарените деца. Понатаму, селектираните ученици се подложуваат на сеопфатни дијагностички постапки, со што се врши натамошно диференцирање на учениците според видовите надареност. Во оваа фаза на идентификација учителите се дел од интердисциплинарни тимови, во кои задолжително треба да бидат вклучени и научни работници од соодветните области.

Како што рековме, примарна улога во препознавањето на надарените ученици имаат родителите. Последното се должи на неспорниот факт дека тие имаат можност од најрана возраст да го следат севкупниот развој на своето дете и неговите реакции во најразлични ситуации. Притоа, истражувањата покажуваат дека родителите успешно ги забележуваат општите способности или посебните дарби кај своите деца, дури и кога нивните проценки се базирани повеќе на интуиција отколку на научно верификувани критериуми. Јасно, раното препознавање на знаците на надареност кај децата од страна на нивните родители е важно бидејќи тоа придонесува да се зголеми можноста за правилен развој на согледаните потенцијали. Меѓутоа, оценката на родителите треба да се земе со извесна доза на резерва бидејќи по правило тие:

- не се стручно оспособени за успешно реализирање на оваа задача,
- не се во можност да ги споредуваат способностите на своите деца со други деца на иста возраст,
- можат да покажат тенденција да ги преценуваат постигнувањата на своите деца, па така истите да се резултат на нивниот желби, а не на реалните способности на детето.

За да се надминат моментите кои се причина за резерва кон оценката на родителите, научните работници предлагаат користење на прашалници кои треба да ги користат родителите при проценка на надареноста на своите деца. Во продолжение ќе го презентираме прашалникот за родителите предложен од Џорџ во 1992 година.

ПРАШАЛНИК ЗА РОДИТЕЛИТЕ

Име на детето _____

Карактеристика	Скала на проценка		
	0	1	2
1. Концентрација (има способност да се концентрира, не е расеано)			
2. Знаења и вештини (широко знаење за базични вештини и информации, високо ниво на разбирање)			
3. Ужива во учењето			
4. Постојаност (има способност да работи на тешки задачи, сака натпревар, не се деконцентрира лесно)			
5. Интелектуална љубопитност (се интересира пред сè да разбере и да ја задоволи љубопитноста, прашува за нешта кои се вообичаени или необични, си поставува прашања себе си).			
6. Прифаќа предизвик (ужива во предизвикот од тешки проблеми, задачи и материјали)			
7. Перцептивност (внимателен е, перцепира и опсервира повеќе во споредба со неговите врстници, свесен е за многу дразби).			
8. Вербална способност (покажува значајна способност за јазик, употребува зборови лесно и точно, има богат речник)			
9. Флуентност на идеи (создава голем број продукти и идеи, често многу брзо)			
10. Флексибилност (им пристапува на идеите и проблемите од повеќе перспективи; наоѓа алтернативни начини за решавање на проблемот).			
11. Оригиналност (често користи оригинални методи за решавање проблеми, може да комбинира идеи и материјали на различни начини).			
12. Размислување (логично е, често генерализира или го употребува тоа што го разбрал во нови ситуации, поимите ги применува пошироко)			
13. Независност во мислењето (ги следи повеќе сопствената организација и идеите, отколку структурирањето од другите)			
14. Независност и работни навики (бара минимално насочување и внимание од возрасните)			
15. Независност во дејствувањето (може да планира и да организира активности, да ја насочува активноста)			
16. Естетска вредност (ужива и реагира на убавото во уметноста и во природата)			
17. Може да наведува причини кои можат да бидат елаборации за тоа зошто не се прават нештата на вообичаен начин			

Легенда: 0 – просечно, 1- високо, 2 – исклучително.

Означете по едно поле во секој ред од табелата со знакот “+”, со што ќе покажете колку е присутна наведената карактеристика кај вашето дете.

Потполнил _____

Во литературата можат да се сретнат голем број на вакви прашалници, но овде уште ќе ја наведеме прашалникот кој во 1985 година го составил Рихерт и кој ја содржи таканаречената листа на формите на перцепирање на однесувањето на детето.

ПРАШАЛНИК ЗА РОДИТЕЛИТЕ

Име на детето _____

	Форма на однесување	Скала на проценка			
		0	1	2	3
1.	Започнува и води “паметни разговори” со постари деца и повозрасни лица				
2.	Има префинето забележување и помнење на деталите на предметите и појавите што ги набљудува				
3.	Може да прераскаже делови од приказна, песна или игра, која ја видел на ТВ или ја слушнал од воспитувачот, со точен редослед, без поттикнување.				
4.	Вербално може да состави куса приказна, песна или писмо.				
5.	На приказната или песната и додава детали кои само ги измислило.				
6.	Поставува прашања на кои е тешко да се одговори со едноставни објаснувања: за сексот, за правдата, за Бог, за вредностите, за смртта, итн.				
7.	Сака самостојно да учи (букви, читање) и за тоа му е потребна многу мала помош од возрасниот.				
8.	Ги средува играчките и другите предмети, така што во група ги става предметите кои “одат” заедно (ги класифицира според некој критериум).				
9.	Во дискутиите ја користи логиката, ги поврзува причините и поледиците, користи зборови како: затоа, бидејќи.				
10.	Може да се концентрира на задача или на активност.				
11.	Ужива да разговара за тоа како функционираат машините.				
12.	Има богат и жив речник.				
13.	Ги изразува сопствените чувства, дури и кога другите не се согласуваат.				
14.	Интензивно чувствува одделни настани.				
15.	Своглаво е, упорно во своите уверувања.				
16.	Одделни активности или проблеми толку го преокупираат, што тешко се префрлува на други активности.				
17.	Многу е љубопитно. Често прашува: Кој? Што? Кога? Каде? Зошто?				
18.	Испитува како работат апаратите, како функционираат				

	предметите.				
19.	Интензивно дискутира за тоа што е така или не е така, за доброто или злото, за вината и праведноста.				
20.	Искажува смисла за хумор. Смета дека некои работи се смешни, дури и кога на повеќето деца не им се.				
21.	Успешно, со пантомима, ги имитира луѓето и животните.				
22.	Искажува нетрпеливост во рутинските обврски и работи како што е средувањето на работите, играчките и слично.				
23.	Некои работи ги извршува поинаку од другите деца, но така				
24.	Смислува, креира сопствени игри.				
25.	Во играта замислува играчки и соиграчи.				
26.	Способно е да наведе голем број идеи или решенија за проблемот.				
27.	Покажува интелектуална резигнираност, имиграција, мисловно експериментирање во стилот “Се прашувам што би се случило кога”				

Легенда: 0 – ретко, 1-понекогаш, 2-често, 3-речиси секогаш,

Означете по едно поле во секој ред од табелата со знакот “+”, со што ќе покажете колку е присутна наведената форма на однесување кај вашето дете.

Потполнил _____

Што се однесува до улогата на родителите во препознавањето, а подоцна и во развојот на надарените деца истражувањата на Ројдел покажуваат дека во препознавањето и развојот на надареноста повеќе е значаен активниот ангажман на родителите во воспитанието и образованието на надареното дете, отколку нивниот степен на образование или економска моќ. Имено, родителите кои минуваат доста време со своите деца, олеснувајќи им го развојот на нивните интереси, одговарајќи на нивните прашања и им обезбедуваат топлина и поддршка во нивната работа, ќе го стимулираат нивниот развој, без разлика на тоа дали родителите се сиромашни или богати, уживаат или не општествен углед. Притоа, во следењето на развојот на надарените ученици, неопходно е родителите да ги следат дури и навидум нереалните цели и планови кои себе си си ги поставуваат надарените ученици. Тоа придонесува кај учениците да се поттикнува иницијативноста, самодовербата и самостојноста, кои имаат особена важност во процесот на пројавување и развивање на надареноста. Со цел да се овозможи ефикасна родителска грижа, мора да обезбеди задоволување на четири основни потреби на надарените деца и тоа:

- потребата за љубов и сигурност;
- потреба за нови искуства;
- потреба за постигнување на успех; и
- потреба за чувство на одговорност и независност.

Притоа, ако се сака да се создадат благопријатни услови за развој на надарениот ученик, родителите треба да манифестираат:

- емоционална топлина и самодоверба;
- позитивни ставови кон учењето, образованието и знаењето;
- високо очекување од себе и од своето дете;
- интерес за успехот на детето (го следат развојот и резултатите, покажуваат почитување на трудот и успехот на детето, го охрабруваат, корегираат и слично);
- примена на објаснети постапки во процесот на воспитувањето, при што барањата треба да се логички објаснети и доследни, да се инсистира на почитување на поставените норми, но тоа да се прави со дијалог и целосно почитување на личноста на детето.

Притоа, од посебна важност е родителите ги поддржуваат образовните потреби на надарените ученици, што претставува основа за продлабочено навлегување во нови и проширени образовни подрачја и области. Тоа треба да се практикува континуирано и притоа искрено да се манифестира чувство на задоволство и неоптовареност од страна на родителите. Последното е особено значајно бидејќи за надарениот ученик е важно чувството дека кај родителите е видлив интересот на неговиот развој и напредување, постојано се поддржува неговата самоиницијативност итн. Претходно изнесеното не наведува на, во практиката потврдениот, заклучок: не е најважно колку време се поминува заедно со надареното дете, количината на неговото подучување, туку многу е важно каков е “стилот на подучување”, односно кои постапки ги преземаат родителите сè со цел адекватно да одговорат на потенцијалните или пројавените потреби и барања на надарените ученици. Токму затоа е неопходна и едукација на родителите на надарените ученици, во која задолжително треба да се вклучат следниве содржини: карактеристики на надарените деца, природа на надареноста, манифестирање на надареноста, причини за неуспех на надарените ученици итн.

Како што веќе рековме, ниту соучениците ниту потенцијално надарениот ученик се едуцирани за препознавање и идентификување на надареноста и затоа сметаме дека дијагностичката вредност на проценката на соучениците и самооценката е многу мала. Понатаму, можноста за самопроценување и валидноста на оваа постапка варира во зависност од возраста на ученикот, па затоа постои компатибилност меѓу развојот на сликата за себе и објективноста на самопроценувањето. Сепак, самопроценувањето има своевидна предност бидејќи не мора да се чека манифестирањето на некој облик на надареност, па да се врши идентификување, што е случај кога препознавањето го вршат други лица. Затоа во литературата можат да се сретнат прашалници за самопроценување и најчесто резултатите добиени со помош на овие прашалници служат само како дополнителна информација. Еден ваков прашалник во 1992 година е изработен од Џорџ и истиот го презентираме во целост.

ПРАШАЛНИК ЗА УЧЕНИКОТ

УПАТСТВО. Прочитај го секое од долните тврдења. Размислувај за себе внимателно. Напиши кус коментар на започнатото тврдење, доколку тоа се однесува на тебе. Пополни го прашалникот колку е тоа можно поискрпно.

Име и презиме _____

Училиште _____

1. Најлесни предмети и вештини во учењето ми се:
2. Најтешки предмети и вештини во учењето ми се:
3. Работи во кои најмногу уживам се:
4. Работи во кои не уживам (предмети кои не ги сакам или во кои сакам промени)
5. Предмети или активности во кои покажувам најголем успех се:
6. Преферирам да работам (сам, со други, долго време, место)
7. Спортски и игри (кои активности, евалуација на успех, со кого)
 - во училиштето
 - надвор од училиштето
8. Слободното време го користам за (активности, со кого)
 - во училиште
 - дома
9. Особено уживам во следните области, кои ми овозможуваат креативност и слобода на изразување (пишување, музика, уметност, зборување, танцување, драма, конструктивно-манипулативни активности и тн.)
10. Можеш ли да ги организираш нештата на необичен начин во рамки на твоите желби?
11. Часови надвор од училиштето
12. Навика на гледање ТВ:
 - Видови на преферирани програми
 - Фреквенција на гледање
13. Навика на читање
 - Видови на преферирани материјали
 - Време поминато во читање
14. Посебни работни навики надвор од училиштето
15. Клубови и организации (посебни пријатели, улога на водач.....)
16. Активности во кои семејството учествува како група
17. Избори на можна професија
18. Планови за понатамошно образование
19. Сакам мојата работа да биде совршена, затоа што
20. Проблеми со кои се соочувам се
21. Мојам да ги објаснам нештата со користење на примери

Од друга страна, за разлика од учителите, кои во ограничен временски период имаат можност да го набљудуваат однесувањето на учениците, соучениците поминуваат подолг временски период заедно и се вклучени во разновидни активности, кои им овозможуваат да се запознаат од различни аспекти, да си ги проценат особините, потребите, интересите и можностите. Токму затоа изработени се повеќе скали наменети за проценка на надарените соученици, а една од нив изработено е Корен и истата ја презентираме во целост.

СКАЛА ЗА ПРОЦЕНКА НА НАДАРЕНИТЕ СОУЧЕНИЦИ ПРОФНАД-У

Име и презиме на ученикот: _____

Училиште: _____ клас: _____

Дата на пополнување: _____

УПАТСТВО. Вие, учениците во класот, повеќе или помалку меѓусебно се разликувате по многу особини. По одредени особини некој ученик е најдобар, најискусен, најзабележителен. Бидејќи меѓусебно се познавате, нема да ви биде тешко да ги откриете и именуваат таквите ученици. Затоа, според сопствениот суд, издвојте некои свои другари и другарки, кои се истакнуваат по одредени карактеристики.

1. Најбрзо и најлесно решава различни и тешки задачи _____
2. Најмногу нови идеи и оригинални предлози дава _____
3. Најголем интерес за стекнување училишни знаења покажува _____
4. Најдобро ги организира другите ученици _____
5. Најубави песни и литературни творби пишува _____
6. Најподвижен и најснаодлив во гимнастички вежби е _____
7. Најубаво говорно се изразува _____
8. Најмногу невообичаени прашања поставува _____
9. Најдобар математичар е _____
10. Најдобар водач, претседател на класот може да биде _____
11. Најубаво црта, слика или моделира _____
12. Најиздржлив во тешки телесни напори е _____

13. Најголема моќ на забележување на предмети и настани во својата околина има _____
14. Најголема смисла за хумор и создавање пријатна атмосфера има _____
15. Најмногу книги чита _____
16. Најодговорно ги извршува преземените обврски _____
17. Најдобар слух за музика има _____
18. Постигнува најзабележителни резултати во некој спорт _____

Како што рековме, во процесот на препознавање и идентификување на надарените ученици доминантна улога има учителот. Притоа, оправдано е да се очекува тие успешно да ги препознаваат и идентификуваат надарените деца бидејќи учителите :

- имаат можност за долготрајно, систематско набљудување на однесувањето на учениците во многу различни ситуации;
- имаат можност за споредување на децата бидејќи во воспитно-образовниот процес истовремено се присутни ученици од иста возрастна група вредност;
- сите учители имаат соодветно образование од областа на психологијата и педагогијата, преку кое се запознати со особените на личноста, законитостите во нејзиниот развој и методите и постапките за нејзино оценување;
- имаат можност редовно да контактираат со родителите на децата, од кои можат да добијат корисни информации;
- можат меѓу себе да се консултираат, со што се зголемува веројатноста за објективна проценка на карактеристиките на даден ученик.

Меѓутоа, во практиката најчесто немаме успешно препознавање и идентификување на надарените ученици од страна на учителите, за што постојат повеќе причини, од кои ќе ги издвоиме две:

- учителите најчесто препознавањето и идентификувањето го прават со корелирање на резултатите од тестовите за способности, при што испуштаат од вид дека надареноста не е производ само на способностите, туку таа е резултат и на емоционалните, карактерните и други особини на личноста;
- учителите не се доволно подготвени за препознавање на надарените ученици, факт кој е и наша реалност, па затоа од осо-

бена важност е перманентното образование на учителите на ова поле, при што е неопходно покрај за препознавање, учителите да се оспособат како за идентификување, така и за реализирање на квалитетни едукативни програми за работа со надарените ученици.

Исто така, за неуспешното препознавање и идентификување на надарените деца свој придонес имаат и грешките кои учителите ги прават. Набележувањето на сите видови грешки од овој вид практично е невозможно, па затоа во овој дел ќе наведеме неколку најкарактеристични.

- Учителите кај учениците најмногу го вреднуваат високиот училишен успех, па затоа често се случува и учениците со просечни способности карактеристични за надарените да бидат “препознаени” како надарени. Основна причина за оваа грешка е што не се зема предвид дека постигнатиот висок училишен успех може да е последица и од долготрајно учење, работна дисциплина и поволна социоекономска средина, но тука треба да имаме предвид дека надарените можат да не бидат препознаени и поради фактот што тие може да немаат висок училишен успех и заради низа објективни причини, како што се: детето има интереси кои се надвор од училишните интереси, присутна е воспитно-образовна запуштеност за која учителот нема сознание итн.
- Учителите отпорот кон рутинските и здодевни ситуации во училиштето, кој се манифестира со повлекување во себе, мечтаење, постојано поставување прашања, прекинување на искажувањата на наставникот и соучениците, го толкуваат како недисциплина, а не како манифестацијата на надареност, па затоа ваквите ученици остануваат надвор од нивниот интерес. Основна причина за оваа грешка е недоволната едуцираност на учителите за препознавање и идентификување на надарените ученици.
- Нагласената интровертност и сличните манифестации на личноста на ученикот исто така можат да бидат пречки за нивното препознавање и идентификување како надарени. Како и во претходниот случај и овде основна причина за оваа грешка е недоволната едуцираност на учителите за препознавање и идентификување на надарените ученици, но може да се случи пропустите на учителот да се последица и од неговото конформистичко однесување.

Покрај наведените грешки, во практиката е присутно и намерното омаловажување на надарените ученици од страна на учителот, на кого овие ученици му пречат, тој им завидува, па затоа нивната надареност ја игнорираат. Токму ваквите појави, кои не се чести, се причина за тенденциите

дека препознавањето, идентификувањето и развојот на надарените ученици треба да им се довери на надарени професори.

Имајќи го предвид претходно изнесеното, сметаме дека не е потребно дополнително да се објаснува зошто во сите организирани системи за работа со надарените деца се вклучени и содржини за оспособување на наставниците за нивно препознавање и идентификување. Притоа се изработуваат посебни инструменти за препознавање и идентификување на надарените деца, при што повторно доминантно место имаат прашалниците кои учителите ги користат. Еден таков прашалник, според Корен, од 1989 година е скалата ПРОНАЛ, која во натамошните разгледувања ја презентираме во целост.

СКАЛА ПРОНАЛ

Име и презиме на ученикот: _____
возраст _____
Училиште: _____
датум: _____

Упатство за наставникот

- Скалата ПРОНАЛ е составена со цел да Ви помогне во проценувањето на *интелектуалната надареност* на конкретен ученик. За таа цел се формирани индикативни особини на однесување на кандидатот, кои заедно го даваат неговиот интелектуален профил. Тоа, истовремено значи дека одделен надарен ученик не мора во сите такви особини да биде над просекот од своите врстници, па поради тоа секоја особина оценувајте ја независно од другите особини.
- Претпоставка за добра процена е добро познавање на “однесувањето” на ученикот во различни ситуации, како училишни така и вонучилишни. Затоа немојте лесно да давате која било оценка ако не сте сигурни, туку претходно соберете соодветни дополнителни информации.
- Исто така, внимавајте општиот впечаток што го имате за ученикот да не Ве заведе, па оттука и некритички да ги давате поединечните оценки. Покрај тоа, водете сметка и за општото интелектуално ниво на одделението во кое се наоѓа оценуваниот ученик бидејќи, на пример, личност и со релативно посиромашни способности може значително да се истакнува во одделение, во кое учениците се со понизок интелектуален потенцијал, како што и ученик со навистина високи способности може да остане незабележан во одделение со ученици кои во тој поглед се исклучително позитивно селектирани.
- При оценувањето добор е да се потсетите на фактот дека одделни надарени ученици, од различни причини, не мора секогаш да имаат и најдобри училишни оценки, дека понекогаш се недоволно емоционално и социјално прилагодени, понекогаш изразуваат необично однесување, можат да бидат осамени, незаинтересирани за некој училишен предмет и слично, а сето тоа може да ги прикрие нивните вистински високи интелектуални способности.

- Вашата проценка е многу важна компонента (покрај податоците кои ќе се соберат и со други постапки, особено со тестирање на способностите и некои други особини на личноста) во дијагностицирањето на потенцијалната надареност на учениците, а тоа има сериозни индивидуални и општествени последици, од што произлегува потребата кон оваа проценка да се пријде со нагласена стручна и етичка одговорност. Во таа смисла, колку што е важно учениците предложени од Вас и подоцна да се потврдат како интелектуално надарени, уште поважно е во својата проценка со грешка да не ги елиминирате од Вашите предлози реално надарените ученици, бидејќи во овој случај Вашата проценка има посебно значење на определена предселективна постапка.

Скалата ПРОНАЛ има четири степени (оцени) кои означуваат:

1. *никогаш* или занемарливо ретко (наведениот облик на однесување не е карактеристичен за определен ученик или се јавува само во некои рудиментирани рамки).
2. *повремено*, незначајно (наведениот облик на однесување се јавува кај одреден ученик, но со мал интензитет)
3. *често*, значајно (наведениот облик на однесување е чест и интензивен кај определен ученик)
4. *секогаш*, многу изразено (наведениот облик на однесување е типичен начин на однесување на определен ученик со максимален интензитет)

Во приложената скала во рубриката оцена, покрај соодветната индикативна особина на однесувањето на ученикот, ставете знак + во колоната под избраната бројна оцена!

На крајот од скалата се наоѓа простор со ознака ЗАБЕЛЕШКА, во кој можете да ги коментирате или да дадете образложение за определен број оценки, односно, евентуално да се дополнат некои карактеристики на ученикот, кои не се опфатени со оваа скала, а сметате дека се важни.

ИНДИКАТИВНИ ОСОБИНИ НА ОДНЕСУВАЊЕТО		Оценка			
		1	2	3	4
1	Ученикот покажува голема љубопитност за различни работи и појави околу себе. Секогаш поставува прашања за се и сешто, а покрај добиените одговори бара дополнителни информации. Најчест збор му е “зошто”?				
2	Ученикот има неверојатно развиен речник за својата возраст. Говорот му се карактеризира со прецизен стил, богатство на изрази, елаборација и течност.				
3	Ученикот чита многу од областите што го интересираат. Претпочита книги за возрасни. Особено го интересираат енциклопедии, лексикони, атласи, хроники, антологии, годишници, прирачници и стручна литература.				
4	Ученикот многу лесно согледува и открива проблеми и таму каде што не се лесно видливи. Секоја неурамнотешена ситуација ја набљудува повеќедимензионално и брзо ги открива причините за таа неурамнотеженост.				
5	Ученикот пронаоѓа неконвенционални решенија за проблемот. Во тие решенија видливи се неговата досетливост, оригиналност и богата фантазија.				

6	Ученикот за решавање на проблеми пронаоѓа најадекватни и најекономични постапки. При тоа покажува способност од дадени премисли да донесува строго логички заклучоци.				
7	Ученикот е остроумен и внимателен набљудувач во споредба со другите гледа и восприема повеќе од прочитаната книга, гледаниот филм, реализираната екскурзија, посетениот музеј и слично.				
8	Ученикот манифестира исклучителна способност за сфаќање на механички принципи, способности за резонирање во математичко-технички проблеми. Изработува според нацрти или според сопствени конструкции технички направи и апарати.				
9	Во работата ученикот е самостоен и самоуверен. Потполно се концентрира на избраната задача, во работата е енергичен, свеж и иницијативен. Срекен е кога се занимава со интелектуални активности.				
10	Ученикот покажува голем интерес за училиштето. Усвоил голем број на информации од општо образование и култура. Учествува на смотри и натпревари каде што постигнува водечка позиција на ранг-листата на натпреварувачи.				
11	Ученикот е насочен кон истражувачка активност. Собира документациски материјал, го систематизира, прави збирки и албуми. Експериментира. Активен е во работата на научни групи и клубови.				
12	Ученикот има изразита смисла за хумор. Духовито ги поврзува настаните чија врска не е очигледна. Со досетки и шеги предизвикува ведро расположение				
Забелешка.					

Препознавање на некои општи знаци на надареност најчесто е пратено се потребата од препознавање на знаците на посебна надареност во одделни научни области и уметнички подрачја. За таа цел, повторно како инструмент се користи прашалникот. Во натамошните разгледувања во малку видоизменета форма ќе ги презентираме прашалниците за логичко-математичка надареност на детска возраст (Карнес и Шведел, 1983), музичка (Карнес и Шведел, 1983) и ликовна надареност (Секели, 1981).

ЗНАЦИ ЗА ЛОГИЧКО-МАТЕМАТИЧКА НАДАРЕНОСТ ВО ДЕТСКА ВОЗРАСТ					
Индикативни особини на однесување		никогаш	повремено	често	секогаш
1	Детето покажува интерес за броење предмети				
2	Детето покажува интерес за мерење предмети				
3	Детето покажува интерес за групирање по големина				
4	Детето лесно манипулирање со операции				
5	Детето покажува интерес и разбирање за поими поврзани со времето (саат, календар) или пари				
6	Детето покажува разбирање и помнење				

	на математички симболи (+, -, x, :)				
7	Детето покажува интерес или особена вештина во класифицирање на предмети				
8	Детето може долготрајно да го насочи својот интерес кон природните појави и техниката				
9	Детето покажува интерес и разбирање за причините и последиците (на растенијата им треба вода, водата во зима се смрзнува)				
10	Детето внимателно ги набљудува настаните				
11	Детето со големо внимание ги истражува предметите				

За правилен развој на надарените ученици од посебно значење е учителот да има сознание за што е можно поголем број негови карактеристики, како што се: особините на учење, мотивационите особини, креативните особини и особините за водство. Имајќи го ова предвид, Ренцули и Хартман во 1980 година изработиле прашалници за секоја од наведените четири групи особини, прашалници кои се наменети за проценување на особините на супериорните ученици. Притоа ставките во овие прашалници Ренцули и Хартман ги извеле од литературата која ги презентира податоците од истражувањето на особините од надарените и креативните лица. Јасно, секоја ставка во прашалниците можете да го разгледувате одделно и истиот го рефлектира степенот до кој учителот го забележува присуството или отсуството на секоја од разгледуваните особини. Примената на овие прашалници овозможува одделно да се добијат сознанија за особините на учениците во секоја од наведените четири групи, т.е. во секој од четирите испитувани аспекти кои се составен дел на надареноста.

ПРАШАЛНИК ЗА ПРОЦЕНКА НА ОСОБИНИТЕ НА ОДНЕСУВАЊЕТО НА СУПЕРИОРНИТЕ УЧЕНИЦИ	
Име и презиме на ученикот: _____	Датум _____
Училиште: _____ Клас _____	Возраст _____
Прашалникот го пополнил _____	
Колку време го познавате ученикот? _____	
<p>Упатство. Овие прашалници се конструирани да се добие проценка од страна на учителот, која се однесува на особините од ученикот во областа на учењето, мотивацијата, креативноста и водството. Притоа, можат да се добијат големи индивидуални разлики во рамките на разгледуваната популација, па затоа добиените профили може значително да варираат. Бидејќи четирите димензии на инструментот претставуваат релативно различни облици на однесување, добиени резултати од различните прашалници не треба да се сумираат во збирен резултат. Ве молиме внимателно да ги прочитате тврдењата и за секое да дадете по една проценка, при што треба да ги користите следниве оценки:</p>	

- 1 – ако многу ретко или никогаш не сте ја забележале разгледуваната особина;
 2 – ако повремено ја забележувате разгледуваната особина;
 3 – ако често ја забележувате разгледуваната особина;
 4 – ако постојано (секогаш) ја забележувате разгледуваната особина.

Сумирајте ги дадените оценки за секоја група особини одделно и добиените резултати за прикажете ги на следниов начин:

Особини на учење _____,
 Мотивациони особини _____,
 Креативни особини _____,
 Особини на водство _____.

ПРВ ДЕЛ		никогаш	повремено	често	секогаш
Особини на учење					
1	Има необично развиен речник за својата возраст, неговото вербално однесување се одликува со богатство на изразување, елаборација и флуентност.				
2	Поседува многу информации за различни теми (значително повеќе од неговите врстници).				
3	Брзо и точно се присетува на претходно меморираните податоци и факти.				
4	Има точен и целосен преглед на причинско-последичните односи на предметите и појавите: се обидува да открие КАКО? И ЗОШТО? Поставува многу провокативни прашања.				
5	Лесно ги открива принципите и брзо прави валидни генерализации за настани, луѓе и предмети.				
6	Опсервира внимателно и остроумно: “гледа повеќе” или “добива повеќе” од другите кога чита книга, гледа театарска претстава, филм и слично.				
7	Самоиницијативно чита, обично преферира да чита книги наменети за поголема возраст; не го избегнува проучувањето на ташките содржини; чита биографии и автобиографии на значајни личности; користи енциклопедии, атласи и слично.				
8	Учењето на “komplицирани” или поголеми содржини го прави така што го дели на логички целини.				
Збир					
Вкупно					
ВТОР ДЕЛ		никогаш	повремено	често	секогаш
Мотивациони особини					
1	Вистински се внесува во одредени теми и проблеми; истраен е во барањето решение на проблемските задачи.				
2	Здодевно му е кога работи рутински задачи.				
3	Потребна му е мала или никаква надво-				

	решна мотивација за да го работи тоа што навистина го сака.				
4	Се стреми кон перфекционизам, е самокритичен, лесно не го задоволува квалитетот на неговите творби и брзината со која ги создава.				
5	Повеќе сака да работи самостојно и ретко бара помош.				
6	Значително повеќе од своите врстници се интересира за проблемите на возрасните, како што се: религија, политика, секс, расизам итн.				
7	Самосвесен е и тврдоглаво го брани она во што верува.				
8	Сака да ги организира и структурира предметите, појавите, луѓето и формите во кои истите се појавуваат.				
9	Ги вреднува и проценува настаните, луѓето и предметите, проценува што е точно-неточно, лошо-добро.				
Збир					
Вкупно					
ТРЕТ ДЕЛ					
Креативни особини		никогаш	повремено	често	секогаш
1	Покажува љубопитност за многу нешта и постојано поставува прашања за разни сфери на човековото живеење.				
2	Продуцира многу идеи или решенија на проблеми и прашања, често нуди необични, уникатни и мудри одговори.				
3	Не се двоуми да го искаже своето мислење, а кога не се согласува со нешто или некого е енергичен и може да е радикален во одбрана на своите ставови.				
4	Презема висок ризик, авантурист е и склон е кон нестандартен начин на мислење.				
5	Покажува интелектуална имагинативност, фантазирање, манипулира со идеите (ги менува и ги елаборира).				
6	Покажува чувство за хумор и многу ситуации, кои за другите не се комични, за него се.				
7	Свесен е за своите импулси и поотворен е за ирационалното во себе (кај момчињата постои послободно изразување на феминистичките интереси, а девојчината се понезависни); покажува емотивна сензитивност.				
8	Сензитивен е за убавото, за естетските карактеристики на предметите.				
9	Не е конформист: прифаќа неред, не се интересира за поединости, индивиду-				

	алист е и не се плаши да биде различен.				
10	Критикува конструктивно и не прифаќа изјави од авторитети без истите критички да ги испита.				
Збир					
Вкупно					
ЧЕТВРТ ДЕЛ					
Особини за водство		никогаш	повремено	често	секогаш
1	Одговорен е, може да се смета на него дека ќе го изврши тоа што го ветил и обично тоа и го исполнува.				
2	Покажува самодоверба како во присуство на врсниците, така и на возрасните, не му е непријатно да ги покаже своите творби пред заедницата.				
3	Омилен е меѓу соучениците.				
4	Соработува со учителот и со учениците, се обидува да избегне конфликти.				
5	Добро може да се изрази, има добри вербални способности и другите добро ги разбира.				
6	Лесно се прилагодува на нови ситуации, флексибилен е во размислувањата и активностите и не го спречува промената на вообичаената извезжаност.				
7	Ужива да е во друштво на други луѓе, социјабилен е и преферира да не биде сам.				
8	Се стреми да доминира над другите и ги насочува активностите во кои е инволвиран.				
9	Учествува во повеќето социјални активности поврзани со училиштето и на него може да се смета дека ќе присуствува на разни организирани средби.				
10	Се истакнува во атлетски активности, добро е координиран и ужива во сите видови атлетски игри.				
Збир					
Вкупно					

Постои мислење дека, откако ќе биде препознаен надарениот ученик, натамошната постапка за негова идентификација и развој треба да ја преземе таканаречената стручна служба во училиштето, која е составена од психолог, педагог, социјален работник и социолог. Меѓутоа, иако е неспорна потребата од консултирање на стручни лица од наведените области, сепак како примарната, така и секундарната грижа за надарениот ученик во училиштето треба да е перманентна преокупација на учителот кој е специјалист за областа во која ученикот е надарен. Во оваа насока само ќе споменеме дека притоа е пожелно учителот да се консултира со научен работник од соодветната област, односно со врвен уметнички творец, доколку станува збор за надареност во областа на уметностите, а по можност

терцијалната грижа за развојот на надарениот ученик целосно да се довери на елитните кадри од соодветната научна или уметничка област. Во контекст на претходно изнесеното, потребно е психолог континуирано да се консултира за толкување на добиените резултати од различните прашалници и тестови кои се спроведуваат како во постапката на идентификација, така и во севкупниот развој на надарениот ученик, но никако не смее да се дозволи ситуација во која мислењето на само една научна област, во најголем број на случаи станува збор за психологијата, ќе биде доминантна во препознавањето, идентификувањето и развојот на надарените ученици. Последното особено добива на тежина ако се има предвид фактот дека надареноста најчесто се манифестира во специфична област, а сите други карактеристики се само пропратни појави на истата.

2.5. ПРОБЛЕМИ ПОВРЗАНИ СО ПРЕПОЗНАВАЊЕ И ИДЕНТИФИКУВАЊЕ НА НАДАРЕНИТЕ

Препознавањето и идентификацијата на надарените ученици најчесто е проследено со бројни проблеми кои пред сè се резултат на

- односот на општеството кон оваа категорија деца,
- недоволната стручна оспособеност на лицата кои се ангажирани во препознавањето и идентификацијата на надарените и
- квалитетот на инструментите кои се користат при препознавањето и идентификацијата.

Што се однесува до односот на општеството кон надарените ученици, може да се забележи нееднаков став и третман кон нив од страна на различни социјални и културни групи, кој е евидентен како на макро, така и на микро план. Притоа во определени средини се забележува постојан интерес и грижа за надарените, што е резултат од позитивниот став кон феноменот на надареноста, па затоа имаме појава на изработка и спроведување на посебни образовни програми наменети за овие деца. Непосредна последица од овие активности е појавата да овие деца во ваквите средини се промовираат како одделна група, која во дадена област е забележително супериорна во однос на другите луѓе. Меѓутоа, во повеќето општествени заедници, вклучувајќи ја и нашата држава, скоро и да не постои систем за организирано препознавање, идентификување и развој на надарените ученици, од што како исклучок се јавуваат музичко-балетските и уметничките училишта.

Стручната оспособеност на лицата кои се ангажираат во препознавањето, идентификацијата и развојот на надарените деца и особено важна. Имено, доколку со овие суптилни прашања се занимаваат нестручни лица тогаш постои голема опасност за погрешна идентификација на надарените, при што како последица може голем број надарени деца да не бидат препо-

знаени и идентификувани како такви. Покрај тоа, отсуството на стручност и компетентност на лицата кои работат со надарените деца може да резултира со несоодветен развој на надарените деца, што е честа појава во нашето секојдневие.

При препознавањето и идентификацијата на надарените деца потребно е посебно внимание да обрнеме на следниве моменти:

- Децата со развоен недостаток, во кои спаѓаат оние со физички хендикеп, со специфични тешкотии во учењето, со емоционални проблеми и психомоторна неразвиеност, најчесто не се препознаваат како надарени, бидејќи примарната грижа на општеството е отстранување на недостатокот што го поседуваат. Според тоа, основен проблем во идентификацијата и третманот на надарените деца од оваа група е тоа што најчесто општеството има погрешни и многу ниски очекувања од овие деца.
- Децата одгледани во неповолни семејни услови чии материјални, социјални и емоционални потреби не се задоволени, покажуваат слаба самодоверба, што се јавува како пречка тие слободно да ги користат своите способности и потенцијали.
- Децата кои функционираат под своите можности, односно, кои не манифестираат знаци на надареност, како што се училишен успех и лесно учење, најчесто се надвор од процесот на препознавање и идентификување на надарените. Овде треба да се има предвид дека овие деца се под постојан притисок од неуспехот, што од своја страна придонесува за постојано влошување на состојбата и сликата која за нив ја има заедницата. Токму затоа, од посебна важност е лицата кои се занимаваат со препознавање и идентификување на надарените деца да се придржуваат кон принципите за препознавање, а особено кон принципот за демократичност, препорака која всушност со иста тежина се однесува и на претходните два случаи.
- Постои мислење дека надарените девојчиња потешко се препознаваат и идентификуваат како такви, бидејќи кај девојчињата поретко се сретнуваат екстремно високи способности. Притоа, се настојува да се прикаже дека девојчињата повеќе се ориентирани кон задоволување на критериумите што ги поставува училиштето, отколку кон проширување и продлабочување на сопствените интереси. Јасно, ова е уште еден стереотип, кој води до погрешни заклучоци и карактеризација од типот “остави ја, таа е бубалица”. Секако, последното води кон друга крајност, од што како резултат произлегува тенденцијата дека надареноста мора да се манифестира со нешто несекојдневно, нешто вонсериско и ако тоа не го забележуваме кај некое дете,

тогаш нема зошто тоа да не интересира. Повторно грешка, а ако не сакаме истата да не доведе до погрешни резултати, тогаш неминовно треба да се вратиме кон веќе споменатиот принцип на демократичност при препознавањето и идентификувањето на надарените деца.

Како што постои опасност од непрепознавање на надареноста, така постои опасност и од нејзино задоцнето препознавање. Идентификацијата на надарените може да се рече дека е задоцнета, кога во однесувањето на надареното дете доминираат модели кои оневозможуваат негов правилан севкупен развој

Друг проблем, поврзан со стручноста на лицата кои ја извршуваат идентификацијата, е нивното нестручно интерпретирање на резултатите, добиени од користените инструменти за идентификација, како и погрешно поставените критериуми за истата. Како последица од ова се големите разлики во декларираната процентуална застапеност на надарените во различни училишни средини. Во некои од нив често се истакнува дека повеќето ученици се надарени, додека во други нема надарени, појава која може да се окарактеризира како образовен перпетуум-мобиле. Ваквата состојба е резултат и од транзицискиот развој на нашиот образовен систем, при што на крајот од минатиот век се укинаа контролните механизми за премин од еден во друг образовен степен. Притоа, како единствен критериум за премин во повисок степен на образование се наметна успехот од претходниот образовен циклус. Последното резултираше со појава на познатиот феномен “петкоманија”, а овој полека но сигурно стана критериум за надареност, па така во моментот имаме значително зголемување на ученици кои себе си се сметаат за надарени и по таа основа бараат привилегии од општеството.

3. РАЗВОЈ НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

3.1. МОТИВАЦИЈА НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Покрај сознајното користење на мотивите кои постојат кај учениците, учителот треба да создаде услови за формирање нови мотиви, сврзани со одделните знаења, умеења и способности. Оттука, можеме да заклучиме дека мотивационите постапки за учење можат да се поделат во две категории и тоа: *надворешни* и *внатрешни*. Надворешните мотивациони средства и постапки не ја мотивираат личноста да учи во подолг временски период или за цел живот без какви било внатрешни поттикнувачи

и стимулатори. Од тие причини се настојува да се пронајде адекватна стратегија на работа и учење, која ќе овозможи и трансформација на надворешните во внатрешни мотиви на учење. Според Стојаковиќ, ваквата трансформација е можна ако се:

- овозможи ученикот да постигне успех, а со тоа и да доживее радост во учењето,
- создадат услови за самоконтрола, проценка на сопствената работа и свест за крајната цел која треба да ја постигне,
- овозможи ученикот да истражува, со што по природен пат ќе ја зголеми сопствената љубопитност,
- овозможи ученикот да избере стратегии и техники на учење кои се најсоодветни на неговата личност,
- оспособува ученикот за решавање тешки задачи, но притоа истото да не го чувствува како принуда, а успехот да е евидентен.

Природно е да се запрашаме дали и колку во училиштето се исполнуваат поставените барања. За таа цел Стојаковиќ извршил анкета поставувајќи го прашањето:

Дали надарените ученици се мотивирани во училиштето?,

и ги добил следните одговори:

Степен на мотивираност	Број	Процентуално учество
Многу се мотивирани	40	10,50
Во доволна мера	30	7,89
Недоволно	230	63,15
Воопшто не се	64	16,84
Без одговор	6	1,57
Вкупно	370	100,00

Врз основа на добиените одговори, може да се заклучи дека над 80% од надарените ученици недоволно или воопшто не се мотивирани за работа. Ваквата состојба укажува дека при воспитно-образовната работа со надарените ученици во училиштето, посебно внимание треба да се посвети на нивната надворешна мотивација, т.е. во рамките на училиштето да се изгради систем на мотивациони постапки, кои ќе бидат во функција на севкупниот развој на надарените ученици. Во нашите разгледувања нема детално да се осврнеме на изградбата на овој систем, но ќе укажеме дека успешна надворешна мотивација на надарените ученици може да се постигне ако нивната работа се стимулира со:

- обезбедување стручни и научни списанија од областа која е предмет на нивниот интерес,
- вклучување во натпревари од различен ранг,

- вклучување во истражувачки проекти, соодветни на нивната возраст,
- адекватно општествено вреднување на нивните постигања: наградување за постигнатите резултати, посети на научни институции итн.

Од друга страна, напредувањето на надарените е во тесна корелација со ангажирањето на нивните учители. Тоа значи, дека и успехот на надарените ученици посредно или непосредно зависи од митивираноста на нивните учители за работа со надарените деца. Имајќи го ова предвид, Стојаковиќ меѓу учителите направил анкета на прашањето:

Што најмногу ги мотивира учителите во работата со надарените ученици?

и ги добил следните одговори:

Причина за мотивацијата	Број	Процентуално учество
Финансиски придобивки	102	68,91
Самопотврдување	25	16,89
Промоција	21	14,20
Вкупно	148	100,00

Врз основа на добиените одговори може да се заклучи дека доминантно место кај причините за мотивација на учителите за работа со надарените ученици се финансиските придобивки. Ваквата состојба пред сè е резултат на потребата од значителен дополнителен ангажман на учителите, кој е неопходен за квалитетна работа со овие деца. Имајќи го ова предвид, потребно е да се располага со адекватен систем за вреднување на работата на учителите, при што е неопходно истиот да ги опфаќа сите аспекти од нивната работа, но и да се изгради систем на вредности кои ќе ја верификуваат и општествено ќе ја вреднуваат работа на учителите со надарените ученици.

3.2. РАЗВОЈ НА НАДАРЕНОСТА

Претходните разгледувања укажуваат дека надареноста настанува и се развива во еден долготраен процес, во кој се присутни најразлични влијанија. Понатаму, развојот на надареноста, во однос на некои карактеристики, суштински се разликува од општиот развој на човекот. Имено, ако општиот развој на човекот се дефинира како низа промени, кои кај повеќето лица се манифестираат на приближно ист начин и во приближно исто време, развојот на надареноста нема таква предвидлива низа на промени. Ова пред сè се должи на особините и способностите на надарените,

како и на однос на опкружувањето кон нив. Затоа, во секој момент од нивниот развој надарените се изложени на специфични внатрешни и надворешни влијанија, кои битно влијаат на нивниот развој.

3.2.1. ФАЗИ ВО РАЗВОЈОТ НА НАДАРЕНОСТА

Одделните истражувачи имаат свои специфични гледања за етапите од развојот на надареноста. Меѓутоа, може да се каже дека, тргнувајќи од сознанијата за развојот на способностите, мотивацијата, креативноста и знаењата, како и квалитетите на мислењето, видовите заклучувања и научните методи, Чудина-Обрадовиќ креира сопствен модел за текот на развојот на надареноста, кој во нашите разгледувања ќе го прифатиме како релевантен.

Според Чудина-Обрадовиќ развојот на надареноста се одвива во три фази.

- Во *првата фаза*, која го опфаќа раното детство, биолошките предиспозиции се развиваат во општи и специфични способности. Имено, развојот на надареноста почнува во моментот кога новороденче со нормален биолошки потенцијал влегува во поволна и стимулативна средина. Карактеристика на оваа рана фаза е брзината со која се остварува учењето, а е резултат на голема пластичност на младите нервни структури, односно нивната голема осетливост на надворешните дразби, влијанија и искуства. Притоа, заемното влијание на средината и детето, како и неговата активност, овозможува да се задржи максимален број од нервните врски (синапсите). Ова придонесува за зголемување на сензорната осетливост и еластичност на нервниот систем, што овозможува брзо и лесно учење, особено во одделни области. Според забележувањата на невролозите, раното детство е критичен период за развојот на многу способности, па доколку до неговото завршување не се постигне соодветна стимулација, нервните структури нема да се развијат, што значи дека генетски зацртаниот потенцијал нема да биде искористен. Истражувањата покажуваат дека бројот на синаптичките врски достигнува максимум меѓу првата и втората година, што значи дека во овој период нервниот систем е најотворен за учење, и истиот треба умешно да се искористи за максимално развивање на нервните структури.
- Во *втората фаза*, која го опфаќа детството, способностите се трансформираат во креативни способности. Во оваа фаза детето со изразени способности за воочување, помнење, поврзување на податоците, поттикнато од грижата на средината, разви-

ва специфична мотивација и креативен однос кон себе и кон другите. Притоа, средината најчесто ги забележува способностите на детето и започнува поинтензивно да работи со него, при што го насочува кон оние области за кои тоа покажува најголем интерес. Секако, ова на детето му овозможува лесно да постигнува резултати во таа област, го мотивира за натамошна работа, да е упорно и да посветува доволно време за стекнување нови знаења, умеења и вештини. Ова придонесува за формирање и ширење на базата на општи знаења, специфични знаења и вештини. Јасно, квалитетот на базата на знаења и вештини зависи од когнитивните процеси. Паралелно со овој процес се развиваат самодовербата, креативноста и други позитивни особини на надареното дете. Во контекст на претходно изнесеното важно е да споменеме дека првите две фази се сметаат за фази на потенцијалната надареност.

- Во *третата фаза*, која ја опфаќа адолесценцијата, се јавува манифестираната надареност, односно, развојот на творештвото. Во оваа фаза креативната способност се комбинира со системот на вредности, мотивацијата и системот на знаења, кои потпомагаат да се изгради јасно насочен и општествено одговорен личен стил на интелектуална и креативна активност. Во адолесценцијата надарениот ученик, се дистанцира од помошта која претходно ја добива од учителите и родителите, па затоа се повеќе е изложен на проблемски и конфликтни ситуации, што понекогаш може да резултира со напуштање на специфичната активност и со промена на животниот стил. Адолесцентите кои успеваат безболно да се одделат, продолжуваат со специфичните активности и покрај проблемите и конфликтите. Понатаму, совладувањето на значаен дел од база на знаења од одредена област и големата еластичност во употребата на елементите од оваа база, го водат адолесцентот до нов квалитет, а тоа е личниот креативен придонес во дадената област. Притоа, резултатите од одделни активности, претставуваат нови креативни придонеси и лични забележителни достигнувања, а поретко потполно нови, генијални форми и гледања на светот и на човекот во него.

На крајот од овој дел, да забележиме дека, ако се спореди развојот на надарената особа со развојот на просечната, може да се забележи дека скоро да нема никакво совпаѓање во развојните фази. Имено, истражувањата покажуваат дека просечните особи дури ни во период на зрелоста не ја достигнуваат третата фаза од развојот на надарената особа. Од друга страна, надарените поединци уште во периодот на раното детство пројавуваат манифестации, кои се карактеристични за периодот на детството

кај просечните. Затоа, надарените постојано се во квалитативна предност во споредба со своите просечни врсници.

3.2.2. ФАКТОРИ КОИ ШТО ВЛИЈААТ НА РАЗВОЈОТ НА НАДАРЕНОСТА

Во развојот на научната мисла се диференцирале неколку теории за концепциите на надареноста, а со самото тоа и толку гледишта за развојот на надареноста и факторите кои влијаат на развојот. Во нашите разгледувања ќе се задржиме само на современото поимање на надареноста, кое укажува на интеракција на наследните и срединските фактори во појавата и развојот на надареноста. Имено, не е спорно учеството на наследните и срединските фактори во појавата и развојот на надареноста, но што се однесува до нивниот сооднос, постојат различни ставови, кои се засновани на набљудувањето на монозиготни близнаци, кои се развивале во различни социоекономски и културни средини. Така, на пример, за интелигенцијата која претставува значајна компонента на надареноста, сите истражувачи им даваат предност на наследните фактори кои учествуваат со најмалку 75%. Сепак, најновите сознанија во врска со ова прашање упатуваат на тоа дека соодносот на учеството на наследните и срединските фактори во развојот на надареноста варира во зависност од видот на надареноста. Притоа, наследните фактори имаат поголемо учество во надареноста за музиката или логичко-математичката надареност отколку во надареноста за лидерство, бидејќи првите два вида надареност во голема мера се базираат на специфични способности, а третиот вид се базира на поголем број помалку специфични особини.

Бројните набљудувања на надарените деца потврдуваат дека покрај учеството на наследните и срединските фактори, важна улога за афирмирање на потенцијалните способности има и таканаречената самоактивност, што значи дека всушност имаме интерактивното дејство на три вида фактори. Притоа, наследните фактори ги лимитираат границите на развојот на надареноста, а додека срединските фактори и самоактивноста всушност имаат улога на модификатори на степенот и видот на пројавената надареност. Во контекст на претходно кажаното, важно е да споменеме дека самоактивноста е тесно поврзана со степенот на независност на индивидуата од средината. Имено, колку индивидуата е поотпорна на влијанијата на средината и има способност за прилагодување на истата, толку се поголеми шансите таа максимално да се развива, без оглед на неповолните услови за развој.

Што се однесува до влијанието на срединските фактори, важно е да знаеме дека тоа не е со константна големина. Имено, најчесто поволната средина за развој на надареноста во раното детство, не мора да биде

поволна и во подоцнежниот развој. Така, покровителската улога на родителите е неопходна за развој на сигурноста на детето во првата и втората година од животот, но во подоцнежниот развој средината, која премногу заштитува и толерира неповолно влијае на независноста, самодовербата и слично.

На крајот од овој дел, за односот и влијанието на наследните и срединските фактори, ќе ги презентираме заклучоците кои во 1987 година ги формулирал Хоровиц:

1. Областите на надареноста меѓусебно се разликуваат според видот и времето на систематско организирање на средината. За некои видови надареност потребна е рана систематска интервенција на средината (на пример, музичка и логичко-математичка надареност), а додека за други, систематските интервенции на средината се неспецифични и најчесто се карактеризираат со тенденцијата надареното дете да се здобие со широка база на знаења.
2. Постојат критични периоди во развојот на надареноста, во кои степенот на личното ангажирање и начинот на кој средината го стимулира поединецот се разликуваат во зависност од фазата на развојот.
3. Во која било развојна фаза можна е определена комбинација на фактори, кои поволно влијаат врз развојот на надареноста.

3.2.3. ВЛИЈАНИЕТО НА СЕМЕЈСТВОТО ВРЗ РАЗВОЈОТ НА НАДАРЕНОСТА

Семејството ги поставува основите на емоционалниот и когнитивниот развој на децата, ја детерминира ориентацијата на детето кон иднината, кон поставувањето цели, кон усвојувањето и градењето вредности и во значителна мера го определува неговиот однос кон традицијата. Токму затоа, семејството е првата и најважна средина во развојот на децата, кои како возрасни постигнале забележителни резултати. Имено, делувајќи воспитно и образовно, семејството учествува во градењето на идентитетот на детето, способноста за самопроценка и чувството за компетентност. Сепак, иако во литературата големо внимание е посветено на влијанието на семејството врз развојот на децата со високи способности, сè уште нема јасни заклучоци какво е тоа влијание по квалитет, но и по квантитет. Така, според некои автори, процесот на социјализација кој се остварува во две екстремно различни семејни средини, придонесува децата да се развијат во надарени индивидуи. Едната ја сочинуваат непотполни семејства, во кои детето рано го губи едниот родител, а другата – семејства, во кои постојат

нормални односи меѓу членовите и кои стимулативно влијаат на развојот на надареното дете.

Постојат повеќе причини зошто растење во неповолна семејна средина може да биде поттик за развој на надареноста, и тоа:

- способноста надарените деца да покажат развојна на автономија, односно да бидат независни од влијанијата на неповолната средина,
- децата кои растат во атипични и непожелни околности имаат тенденција да развијат чувство на маргиналност, кое резултира во неконвенционално, па дури и оригинално мислење; овие деца се обидуваат да избегаат од непријатната ситуација, при што најчесто се посветуваат на активности во кои потполно самостојно се ангажираат.

Во прилог на изнесените констатации е и ставот на Ригел, кој уште во далечната 1973 година забележала дека психичкиот растеж повеќе е резултат од надминување на конфликтни ситуации, отколку од отсуство на непријатни искуства

Второто мислење е дека семејства во кои постојат нормални односи меѓу членовите и кои стимулативно влијаат на развојот на надареното дете се позитивна средина за развој на надареноста. Овде, природно се поставува прашањето:

Што претставува позитивна семејна средина, која промовира и креативна мотивација и долготрајно лично исполнување?

Одговорот на поставеното прашање не е едноставен, меѓутоа истражувањата покажуваат дека главно вакво семејство е она кое го карактеризираат два, не така одделени, моменти во развојот на надарените деца, и тоа:

- стимулацијата од страна на родителите, која води кон индивидуалност, љубопитност, интерес и спремност да се одговори на предизвиците, и
- поддршка од страна на родителите, која се манифестира со топло и емотивно прифаќање, кое резултира со интеграција, самодоверба, внатрешна хармонија, истрајност и развој на посакуваните знаења, умеења, способности и вештини.

И во едниот и во другиот случај, карактеристично е тоа што семејството влијае врз развојот на исклучителните способности кај децата со тоа што од една страна им помага на децата да стекнат основни знаења, умеења, способности и вештини, а од друга страна членовите на семејството му ги пренесуваат на детето сопствените вредности и ставови кон учењето, вежбањето и кон постигнувањето успех. Ефектите од позитивното семејно

влијание во развојот на надарените деца најдобро може да се види на примерот на постигањата на децата од еврејско потекло. Без да навлегуваме во детали, доволно е да го споменеме податокот дека дури 27% од добитниците на Нобеловата награда се Евреи, иако тие во севкупната популација на планетата не учествуваат со повеќе од 3%. Притоа, важно е да споменеме дека ваквите несекојдневни резултати се темелат на повеќе фактори, од кои доминантни се традицијата и почитувањето на образованието. Имено, во споредба со тие од другите култури, еврејските семејства се мали и стабилни, со релативно малку разводи, па децата се бенефицирани во поглед на присуството од двата родители. Понатаму, еврејската традиција меѓу другото покажува дека низ вековите наназад децата се охрабруваат својата енергија да ја насочат кон активности кои водат кон успех во образованието (училиштето), при што се негува трпеливоста и се гради ставот дека успехот на другите полиња сам по себе ќе дојде во подоцнежните години. Овој, но и многу други примери покажуваат дека комбинирањето на родителските охрабрувања и очекувања, користењето на веќе докажани модели на развој, како и подготвеноста родителите да се уверат дека детето не само што има можност да учи туку тоа и посветува доволно време на учење, е доволно за да се создаде емоционална и интелектуална атмосфера, во која речиси е невозможно да не се постигне успех.

На крајот од овој дел да споменеме дека очекувањата на родителите нивните деца да постигнат успех во одредена област е основна причина тие на децата да им овозможат оптимални услови за стекнување знаења и умеења и развој на одредени способности. Меѓутоа, овде треба да се има предвид дека на детето не смее од страна на семејството да се врши притисок да успее по секоја цена бидејќи постои опасност да се постигне токму спротивниот ефект, односно “добронамерната грижа” на семејството да се јави како причина за неуспех и на веќе пројавено надарено дете.

3.2.4. ВЛИЈАНИЕТО НА УЧИТЕЛОТ ВРЗ РАЗВОЈОТ НА НАДАРЕНОСТА

Развојот на надарените ученици не може да се набљудува без притоа да се согледа улогата на учителот. Притоа, улогата на учителот во развојот на надарените ученици е обусловена од неговата позиција во образовниот процес, при што учителот се јавува во улога да:

- ја сознава и дијагностицира почетната состојба на секој ученик одделно пред отпочнувањето на подучувањето,
- ја планира и подготвува наставата, својата стручна активност и другите активности во образовниот процес,
- ја изведува и реализира наставата (подучувач),
- ги оценува севкупните постигања на учениците,

- ја креира и регулира социјалната интеракција на учениците,
- ги поттикнува интересите и мотивацијата на учениците,
- ја истражува и иновира сопствената работа и
- е модел (пример) на позитивна личност.

Ако кон ова го додадеме ангажманот на учителот како одделенски раководител, ние всушност го имаме во предвид скоро целокупниот спектар на активности и позиции на учителот. Како што веќе рековме, активностите, кои произлегуваат од овие улоги на учителот се реализираат и во секојдневната работа со надарените ученици. Притоа, учителот и ученикот имаат свои права и обврски кои се реализираат во воспитно-образовниот процес и надвор од него. Во исто време, овие два субјекти имаат различни очекувања, но сепак тие се упатени еден на друг, се во постојана комуникација и се во постојана интеракција.

Улогата на учителот е уште понагласена кога станува збор за работата со надарените ученици. Последното добива на значење ако се има предвид дека ниту најпрецизно стручно и оперативно изготвени програми за работа со надарените не може да се успешно да се реализираат без целосен ангажман на учителот. Во литературата која ја објаснува улогата на учителот како носител на работата со надарените ученици, се наведуваат неколку негови улоги кои одделно ќе ги разгледаме.

При реализацијата на наставната програма, а особено во делот на активностите кои се однесуваат на надарените ученици, учителот посредно или непосредно создава атмосфера, која поволно или неповолно може да влијае на развојот на надареноста. Имајќи го ова во предвид, учителот треба да настојува постојано да *создава атмосфера која поволно влијае на развојот на надареноста*. За таа цел, најдобро е учителот да ги избегнува постапките кои неповолно влијаат на развојот на надареноста, т.е. да избегнува:

- севкупната настава да се реализира под нивото на надарените ученици,
- да го стимулира добивањето високи оценки по секоја цена и истото да го користи како доказ за својата успешна работа,
- да го стимулира репродуктивното учење, т.е. учењето напамет, во кое имаме верно репродуцирање на материјалот, и
- да ја стимулира нетолеранцијата кон отстапувањето од општо прифатеното мислење или начин на милсење,

Притоа, учителот може да постигне квалитативно подобрување на атмосферата, ако со севкупниот свој ангажман успее учениците да се здобијат со реално чувство дека учителот е заинтересиран за нивниот развој и дека нивните постигнувања ги смета за свои.

Во своето работење учителот создава емоционални, социјални и мотивациони претпоставки кои се од особена важност за препознавање, идентификување и следење на развојот на надарените ученици. Ваквата улога, всушност учителот го става во позиција на “родител” на надарените ученици, со што всушност:

- тој ја надополнува поддршката на семејството и покажува интерес за одредени активности и подрачја кои надарениот ученик ги претпочита, со што активно го помага неговиот развој,
- на надарениот ученик му овозможува пристап кон специфичните извори на знаења, го упатува кон истите и овозможува ученикот да воспостави соработка со научни работници и установи во кои се негуваат областите кои се предмет на негов интерес, со што практично го упатува на користење на нестандартни технички средства,
- воспоставува соработка со родителите на надарениот ученик и активно ги вклучува во своите активности,
- препорачува и воспоставува контакт со научен работник – ментор, кој во определен момент и на определено ниво има активна улога во развојот на надарениот ученик.

Улогата на учителот на “родител” на надарениот ученик најчесто е пропратена со бројни проблеми, кои се од најразлична природа и кои главно може да се сублимираат во следниве три прашања:

- Дали и колку во самото училиште е присутна грижата за развој на надарените ученици?
- Дали и колку родителите се подготвени за соработка со наставникот, при што се подготвени да ги почитуваат неговите сугестии и искуства во работата со надарените ученици?
- Колку наставникот е подготвен да ја преземе таквата улога и со колкав степен на успешност неа ја извршува?

Одговорите на овие прашања не се еднозначни, но истите зависат од тоа колку родителите и учителот се оспособени да го препознаваат и идентификуваат надарениот ученик, а потоа да воспостават заемна соработка која треба да е во функција на неговиот иден развој.

По завршувањето на препознавањето и идентификувањето на надарениот ученик, учителот треба да пристапи кон изработка на програма за развој на надарениот ученик, по која работи во следниот период. Со тоа, всушност учителот се јавува како *креатор* на идниот развој на надарениот ученик. Јасно, ефикасноста на заедничката работа на учителот и ученикот е поголема ако во програмата за развој се вградени специфичните потреби на ученикот и ако истата доследно и индивидуално се реализира. Меѓутоа,

умешниот учител дел од програмата може да реализира по пат на индивидуализација на редовната настава, со што развивањето на способностите на надарените ученици делумно ќе се реализира и со нивно творечко вклучување во наставниот процес. При подготвувањето на образовните програми за талентираните важно е да се знае дека, со исклучок на специјалните училишта и програмите за уметнички надарените ученици, останатите програми најчесто се насочени кон развојот на интелектуалниот и когнитивниот сегмент на надареноста, а додека при нивната реализација пожелно е учителите да ги почитуваат следниве насоки:

- да говори гласно додека работи на проблем, со што ученикот ќе биде во можност да согледа како наставникот му приоѓа на проблемот и како истиот го решава,
- да следи колку ученикот активно учествува при решавањето на сложените проблемски задачи,
- да укажува дека при решавањето на проблемите дискусијата треба да е резултат на спротиставување на аргументи, бидејќи само во тој случај истата има содржина,
- да поттикнува поставување прашања кои ги негуваат квалитетите на мислењето, методите на заклучување и усвојувањето на научните методи, а воедно овозможуваат рационално решавање на разгледуваниот проблем.

Јасно, при изработката на програмата и нејзиното реализирање, пред се треба да дојде до израз стручноста на учителот во потесната област, па затоа тој треба постојано да ги следи достигнувањата во таа област. При изработката на програмата треба да почитуваат следниве препораки:

- да предвидува институционална обврска за нејзината реализација, програмата мора да биде стручно-методолошки издржана,
- по можност таа да има интердисциплинарен карактер, и
- да е со флексибилна содржина.

Учителот во редовната настава е потребно да ја креира и организира својата работа така што позитивно ќе влијае на развојот на сите ученици, вклучувајќи ги и надарените. Последното всушност учителот го става во улога на *едукатор* и за да успешно ја оствари оваа своја задача пожелно е да ги почитува следниве сугестии:

- на надарените ученици потребна им е секојдневна минимална поддршка во работата, која е доволна тие да постигнуваат забележителни резултати,
- неопходно е редовно да се анализира сопствениот ангажман во работата со надарените ученици и истиот по потреба да се менува,
- работа на часовите да ја организира така што непречено се реализира наставната програма задолжителна за сите ученици, но

притоа со индивидуализацијата на наставата да се обезбеди максимално можно напредување на надарените ученици.

Наведените сугестии всушност укажуваат на потребата учителот постојано да ја преиспитува својата работа на часовите, а особено својот ангажман во развојот на надарените ученици. Притоа е неопходно редовната настава да биде организирана така што таа ќе ги упатува и стимулира сите ученици, водејќи сметка за нивните способности и овојможувајќи секој поединец правилно да се движи по траекторијата на познанието и благовремено да преминува од зоната на актуелен во зоната на иден развој.

Развојот на надарените ученици не е можен без индивидуална работа со истите, што значи дека учителот во извесна смисла се јавува како *ментор* на надарениот ученик. Притоа неговата основна задача е да го трасира развојот на надарениот ученик, при што е неопходно да се усвојуваат се посложени и поапстрактни содржини и да се усвојуваат се посложени вештини. Последното неминовно води кон зголемување на чувството за успешност на надарениот ученик, а со самото тоа и до поголема мотивација за работа. Истовремено добриот ментор го обезбедува развојот на независноста на надарениот адолесцент и го подготвува за самостојна творечка работа. Менторската улога на наставникот во процесот на образованието на надарените ученици ги компензира слабостите на фронталниот пристап, кои засега доминираат во наставата. Наставникот во улога на ментор е во можност да го следи, контролира и поддржува емотивниот развој, а особено има можноста да влијае на поттикнувањето и развојот на внатрешната мотивација.

3.3. ПРИЧИНИ ЗА НЕУСПЕХ НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Во литературата која го третира проблемот на надареноста можат да се сретнат бројни примери за неуспех на надарени ученици, меѓутоа многу малку може да се дознае за причините за неуспех на овие деца. Слично, во воспитно-образовната работа, учителите често неуспех на ученик кој според одредени критериуми е препознаен и идентификуван како надарен, но, за жал, многу малку во практиката се оди кон утврдување на релевантните и основните фактори кои придонесле за неуспех на надарениот ученик.

Едно од основните прашања, кое природно се наметнува е:

Зошто надарениот ученик и покрај неговите објективни способности во една или повеќе области од неговата активност не постигнуваат адекватни резултати?

Одговорот на ова прашање не е едноставен, но ќе забележиме дека дел од причините за неуспех на надарените ученици ги препознаваат учителите, а додека дел од нив најчесто се идентификувани од родителите. Притоа, најчесто се наведува дека неуспехот на надарените ученици пред сè се должи на:

- причини поврзани со особините на личноста и
- причини поврзани со социјалниот амбиент (семејството, училиштето и пошироката општествена заедница).

Што се однесува до причините за неуспехот поврзани со особините на личноста, голем број истражувања како една од причините го посочуваат слабото саморазбирање кај надарените ученици. За што станува збор? За подобро разбирање на овој поим потребно е да разбереме низа специфични слики за себе како што се: физичката (сликата на телото), социјалната (како другите не набљудуваат и реагираат на нас), реалната (како ние се споредуваме со другите) и идеална (слика каков што сакаме да бидеме). Според тоа, под *саморазбирање* ги подразбираме: самоперцепцијата, самопроценувањето, самоприфаќањето, самовербата и самовреднувањето. Оваа комплексна структура на слики за сопствената личност во голема мера ја одредува стабилноста на нашиот идентитет и интегритет. Реалната проценка и самопроценката, односно, балансот помеѓу овие слики придонесува во средината да се забележи оној доминантен профил кој ја карактеризира надарената личност како што е интелектуалната супериорност, емоционалната стабилност и социјалната адаптивност. Отсуство, односно, подзабораване или пренагласување на некои од овие слики, е честа причина за неуспех на надарените поединци и покрај нивната изразита способност.

Меѓутоа, некои истражувања, од кои најважно е она на Стернберг во 1986 година детерминираат подруги причини се причина за неуспех на надарените. Имено, Стернберг наведува дванаесет фактори, меѓу кои се:

1. отсуство на мотивација, како услов за успех на надарените деца,
2. отсуство на постојаност и истрајност во работата,
3. отсуство на ориентација која ќе води кон постигнување на целта,
4. отсуство на иницијатива,
5. неоправдан страв од неуспех,
6. претерано нагласена зависност од семејството или учителот,
7. неспособност за претворање на намерите во дела, и
8. неприфаќање на сопствената одговорност за моменталните неуспеси.

Без да навлегуваме во натамошна анализа причините за неуспех, кои различните истражувачи ги детерминираат секој од свој аспект, ќе наведеме дека глобални причини за неуспех на надарените ученици треба да се бараат во:

- недоволната мотивација;
- социјалниот притисок и неприлагоденоста на надареното дете;
- училиштето како образовна институција;
- особините на личноста на надареното дете, и
- лошата семејната атмосфера.

Притоа, важно е да спомнеме дека: лошата семејна атмосфера, училиштето како образовна институци и особините на личноста на надареното дете непосредно ги попречуваат надарените деца да постигнуваат забележителни резултати и покрај нивните високи развиени способности. Понатаму, што се однесува до негативното влијание на училиштето како образовна институција, може да се каже дека истото се манифестира со:

- нефлексибилност и ригидност на училиштето,
- притисок на ученикот кој доаѓа од надвор,
- отсуство на почитување на детето од страна на родителите и учителите,
- напрегнатата натпреварувачка општествена клима,
- доминација на критицизам во семејството и училиштето,
- неправилна програма за работа или несоодветно реализирање на каква било програма и
- недостаток на комуникација учител-ученик во делот на напредувањето на ученикот.

Искуствата покажуваат дека претходно наведените моменти често се манифестираат во практиката и истите непотребно ги оптоваруваат работа со надарените ученици и нивниот развој. Но, некои од овие причини можат да се намалат или елиминираат со поголем и организиран напор во училишната и семејната средина. Навременото согледување и респектирање на дел од овие фактори сигурно ќе го намалат бројот на неуспешните надарените ученици. Сепак треба да се прифати дека секој посебен случај на неуспешност има своја посебна комбинација на причини и фактори или своја сопствена формула за неуспех. Од тие причини, во контактот со надарениот ученик кој постигнува неуспех, неопходно е да се согледаат и откријат вистинските причини и состојби за таквиот неуспех. При тоа, се препорачува проучувањето на “случајот” да започне од семејството, па потоа причините за неуспех да се побараат училиштето и конечно надвор од нив.

4. ЕДУКАЦИЈА НА НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Препознавањето и идентификувањето на надарените е само прв чекор во грижата на нивниот развој. Имајќи ги предвид претходните разгледувања, не треба да не чуди разногласието во теоријата и практиката околу прашањето како да се организира и реализира едукацијата на оваа категорија ученици. Ваквото разногласие непосредно се отсликува во лепезата едукативни програми и форми за работа со талентираниите ученици.

Во едукација на надарените ученици се користат повеќе модели за подучување и учење, од кои најзастапени се:

- таксономијата на едукативни цели на Блум,
- моделот на структура на интелектот на Гилфорд,
- когнитивно-афективниот модел на Вилијамс,
- тријадниот модел за збогатување на Ренцули,
- моделот на интегриран курикулум на Мејкер и
- моделот за автономен ученик на Бетс.

При составување на програма за едукација на надарените ученици може да се користи некој од наведените модели, но може да се направи комбинација на два или повеќе од нив. Во нашите разгледувања подетално ќе се задржиме на моделот на автономе ученик на Бетс, за кој сметаме дека е најкомплетен и најсоодветен за работа со надарените ученици.

4.1. МОДЕЛ НА АВТОНОМЕН УЧЕНИК

Како што рековме *моделот на автономен ученик* е изработен од Бетс во 1985 година. На почетокот овој модел бил наменет за развој на надарените ученици од средно образование, но денес тој успешно се применува во сите степени на образование. Моделот на Бетс се базира на созанијата образованието на надарените ученици треба да се стреми кон постигнување на следниве цели:

- надарените ученици да станат одговорни за сопствениот развојот,
- надарените ученици да се одговорни за имплементацијата и евалуацијата на сопствената програма за развој.

Понатаму, Бетс наведува дека постигнувањето на наведените цели е можно само со успешно реализирање на следниве пет димензии:

- ориентација,
- индивидуален развој,
- збогатени активности,
- семинари и

- продлабочено учење.

Според Бетс, *димензија ориентација*, која ги опфаќа разбирањето на надареноста, изградувањето на групна активност, реализација на програма за саморазбирање, создавање услови за развој на надарените ученици и лоцирање на одговорноста за истиот, ги подготвува учениците, учителите, стручните служби во училиштата и родителите да се запознаат со условите на програмата. Притоа, тежиштето на оваа фаза се става на разбирање на поимите: надареност, креативност и развоен потенцијал, па затоа учениците учат повеќе за нив самите, за нивните способности и тоа што го нуди програмата. Понатаму, се презентираат активности кои на учениците ќе им овозможат да работат самостојно и во група, и да научат повеќе за другите вклучени во програмата. Во оваа димензија се става акцент на создавањето поволни услови за развој на надарените ученици, на одговорноста на учениците и на другите лица вклучени во програмата, како и на информациите за целата програма.

Втората димензија на програмата автономен ученик е *индивидуалниот развој* и во неа се унапредуваат: вештини за учење, разбирање на личноста и интерперсонални вештини, кариера. Постигнувањето на поставените цели на димензијата индивидуален развој се остварува со тоа што учениците продлабочено се запознаваат со:

- развојот на когнитивните, емоционалните и социјалните вештини,
- поимите и ставовите неопходни за учење за цел живот, што значи дека учениците се подучуваат како да станат автономни во нивното учење.

Димензија збогатени активности, која по правило опфаќа истражувања, испитувања, културолошки активности, услуги и патувања, им овозможува на учениците услови да ги истражуваат содржините, кои обично не се дел на наставната програма. Наспроти повеќето содржини во училиштето, кои се пропишани без консултирање на учениците во нивната изработка, со оваа димензија надарените ученици стануваат одговорни како за селектирањето на содржината на тоа што ќе го учат така и за начинот на учењето. Учениците се оспособуваат да започнат да истражуваат во основните области, во областите за кои покажуваат интерес и за некои недоволно проучени области.

Димензија семинари, која вклучува разгледување на содржини што се посовремени, футуристички, проблемски, противречни и од општ интерес, им овозможува на учениците, кои работат во мали групи (3 до 5 ученици), услови за истражување на одредена тема, нејзино претставување пред другиот дел од групата или други заинтересирани лица. На крајот,

учениците треба да извршат оценување на презентираниот труд според критериуми што претходно самите ги изработиле.

Димензија продлабочено учење, која опфаќа изработка на индивидуални проекти, групни проекти, менторска работа, презентации и евалуација, им дозволува на учениците да продолжат да ја разгледуваат областа, за која покажуваат особен интерес. Притоа продлабоченото учење може да се реализира индивидуално или во мали групи. Успешното реализирање на оваа димензија претпочита ученикот да определи што ќе научи, како ќе го презентира наученото, каква помош му е потребна, кој ќе биде финалниот производ и како ќе се евалуира процесот на учење. Продлабоченото учење обично трае подолг временски период, а се изведува според наставни планови изработени од ученици, во соработка со наставник/поттикнувач, стручњаци за определена наставна содржина и ментори. Финалната презентација ја оценуваат сите заинтересирани за темата.

4.2. ФОРМИ ЗА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Спецификите во развојот на надарените ученици не се само причина за изработка на модели за учење и подучување на истите, туку тие придонесле и за развој на специфични форми за работа со надарените ученици. Во овој дел, без да навлегуваме во теориските разгледувања накратко ќе се задржиме на формите за работа со надарените ученици за кои сметаме дека се најсоодветни за нивниот развој.

Пред да преминеме на разгледување на конкретните форми за работа со надарените ученици, ќе забележиме дека истите најчесто се условени од почитување на однапред усвоени принципи. На пример, ако за основен принцип ја земеме потребата на учениците со висок коефициент на интелигенција, да бидат едуцирани со делумно одвојување од своите врстници, тогаш имаме *групирање според способностите на учениците*. Ваквото групирање може да се реализира на различни начини, кои накратко ќе ги разгледаме.

- a) *Групирање во редовни паралелки и редовни паралелки со подгрупи*. Редовните паралелки, во кои наставата се изведува на традиционален начин, не се погодни за едукација на надарените ученици. Имено, во овој случај фронтална форма на работа со учениците, како и нефлексибилниот наставен план и програма, придонесуваат сите ученици да имаат слични искуства, што не е во согласност со специфичните потреби на надарените ученици. Токму затоа наставата реализирана во вакви пара-

лелки го гуши развојот на надарените ученици и истата треба да се избегнува.

- b) *Групирање во редовни паралелки до додатна настава.* Надарените ученици опфатени со оваа форма на работа, покрај тоа што ја следат редовната настава, дел од времето поминуваат во продлабочување на нивните специфични интереси преку следење додатна настава. Овие специјални часови треба да ги реализираат учители со попродлабочени знаења од областа и кои се обучени за работа со надарени ученици. Успешноста на оваа форма за работа со надарените ученици пред сè зависи од карактеристиките на учителот кој ја реализира додатната настава и од неговата умешност да воспостави коректна комуникација како со учениците, така и со учителите кои ја реализираат редовната настава од соодветната област. *Предноста* на овој начин на групирање е во тоа, што надарените ученици имаат посебни услови за учење и работење, согласно со степенот на нивните способности во областите за кои покажуваат интерес. Исто така, за време на додатната настава надарените имаат можност, барем во дел од времето кое го минуваат на училиште, да контактираат со други надарени ученици. Како *недостаток*, пак, може да се наведе барањето надарените ученици, покрај обврските од посетувањето на додатната настава, да ги изработат и задачите зададени во тек на редовната настава, кои ги испуштиле додека посетувале специјални часови, па затоа додатната настава треба да се реализира во термини кои се надвор од редовната настава. Покрај овој недостаток, можат да се наведат и други, како на пример, недоволното време за да се задоволат сите потреби на овие ученици и можноста за изолираност на надарениот ученик од страна на соучениците во редовната паралелка.
- c) *Групирање во индивидуализирани паралелки.* Во овие паралелки наставата се изведува индивидуално или во мали флексибилни групи. Притоа, најнапред наставникот, самостојно или со помош, изработува наставна програма и подготвува материјали за секој ученик, во согласност со оценката за неговите способности и интереси. Според тоа, по правило, наставата во овие паралелки не е фокусирана на програма, соодветна за одредена година во школувањето, па затоа во овие паралелки се сретнуваат ученици на различни возрасти. Бројни истражувања и практиката покажуваат дека со ваквиот начин на групирање, со флексибилна организација на работата во овие паралелки и со дополнителна програма, на надарените ученици може да им се овозможи соодветен третман. Понатаму, со ваквиот начин на

работа, иако се работи во хетерогени одделенија, им се овозможува на надарените ученици подобро да се прилагодат на работата, при што истовремено тие стимулативно да влијаат на своите соученици. *Предноста* на оваа форма на работа е во тоа што на учениците им се овозможува да работат со сопствено темпо и континуирано да учат. Од друга страна, вклучувањето на многу мал број надарени ученици (два-три), води кон чувство на изолираност и немање можност за размена на идеи со средината, па затоа истото може да се јави како голем *недостаток* на оваа форма на работа со надарените ученици.

- d) *Хомогено групирање во одделенија*. Во оваа форма на работа учениците според нивото на способностите се распределуваат во одделенија и тоа најчесто се класифицираат во три групи: А (најдобри), Б (средни) и В (најслаби). Иако, во случај да е направена грешка при определувањето на тоа во која група припаѓа определен ученик, теоријата дозволува поминување на учениците од едно во друго одделение, всушност, практиката покажува дека тоа не се случува, бидејќи програмските барања во секое одделение се различни. Затоа, ученикот од Б одделението при преминот во А одделението тешко ќе се вклопи, а во уште потешка ситуација би бил ученикот од В одделението. Имено, при ваквото реализирање на настава називите на наставните дисциплини во сите три хомогенизирани одделенија се исти, меѓутоа барањата што се поставуваат пред учениците се разликуваат во однос на тежината и сложеноста.
- e) *Групирање во специјализирани паралелки*. Надарените ученици можат да следат настава во одделни, специјализирани паралелки, во кои нема или има многу малку други ученици. Оваа форма на работа е најсоодветна за високо надарените од предметна настава во основното и во средно образование. Обично, бројот на овие паралелки е ограничен на една до две во регионот за одредена област на изучување. Изборот на учениците се извршува според повеќе критериуми, како што се: специјален испит, разговор со соодветни стручни лица и претходно постигнати резултати во таа област. Наставата со овие паралелки се реализира на аналоген начин како и редовната настава, но обично најчесто за определена група предмети се ангажирани двајца или повеќе учители. *Предност* на оваа форма на работа со надарените ученици е што програмата и условите се така моделирани што соодветствуваат на нивните потреби. Меѓутоа, потребата од вклучување на специјално обучени учители, и по потребата од индивидуализација на наставата дури и во ваква,

на прв поглед хомогена група, може да претставува сериозен *недостаток* на ваквото групирање на надарените ученици.

- f) *Групирање во специјализирани училишта.* Специјализираните училишта може да се организираат големите градови каде, со оглед на бројноста на населението, постои поголема веројатност да се селектираат екстремно надарените ученици. Изборот на учениците се извршува според повеќе критериуми, како што се: високи интелектуални способности, специјален испит и претходно постигнати резултати во таа област. Наставата во овие паралелки се реализира на аналоген начин како и редовната настава, но обично најчесто за определена група предмети се ангажирани двајца или повеќе надарени учители. *Предностите* и *недостатоците* на овој вид групирање се аналогни на оние за групирањето во специјализираните паралелки, со тоа што во случајов истите се понагласени.

Исклучително заинтересираните и надарени ученици за одделни области можат да се едуцираат и во организации надвор од училиштата, како на пример во: стручните и научните здруженија, истражувачките или спортските клубови. Најчесто едукацијата на надарените ученици од наведените организации се организира преку: курсеви, семинари, трибини, летни и зимски школи, дописни школи, натпревари итн. Притоа, видот на организацијата, најчесто ги детерминира времетраењето и динамиката на работа со надарените ученици, критериумите за вклучување во нив и изборот на едукаторите.

Работата по збогатена програма претставува посебна форма за работа со надарените ученици. Истата овозможува продлабочување на знаењата умењата и способностите на надарениот ученик во една или повеќе области. Обично, оваа форма на работа се применува со напредните ученици од основното и средното образование, во рамките на традиционалната настава. За разлика од редовната, збогатената програма од учениците бара продлабочено толкување на предметите и појавите кои се проучуваат, за што се потребни соодветни услови (лаборатории, работилници, кабинети и слично), како и поседување на богата литература од соодветната област. Во средното образование, кога се развиваат поизразени интереси, овие ученици имаат можност за вклучување во факултативна настава, со избор на предмети, кои се заинтересирани да ги проучуваат поинтензивно. *Предност* на работата по збогатена програма е тоа што на учениците им овозможува да ги задоволуваат нивните потреби за продлабочени знаења, без притоа да бидат одделени од соучениците. *Недостаток* на оваа форма на работа со надарените ученици е тоа што нејзината примена не е едноставна, доколку не се задоволат условите во кои збогатените програми треба да се реализираат.

Како една од најзначајните можности за развој на надарените ученици е *акцелерацијата*, која всушност ја подразбира можноста надарените деца порано да го започнат школувањето, побрзо да напредуваат во рамките на редовната програма (да “прескокнат” одделенија) и побрзо да го завршат школувањето. Истражувањата на акцелерацијата укажуваат на позитивните ефекти што таа ги има кај надарените ученици, чија одлука е брзо напредување во учењето. Сепак, како форма на работа акцелерацијата не е целосно и адекватно институционализирана, па затоа таа најчесто и не е добро прифатена. Што се однесува до програмата за акцелерација, важно е да се знае дека таа треба да биде заснована на интересите и особините на секој поединец. Притоа треба да се има предвид дека побрзо завршување на задолжителното образование и предвременото вклучување во професионалниот живот интелектуално не ги оптоварува надарените ученици. Меѓутоа, не треба да ја исклучиме можноста да се појават проблеми на социјален и емоционален план, особено кај учениците кои се на помала возраст, а кои треба да се интегрираат со повозрасните, бидејќи постигнувањата на интелектуалната зрелост не мора да значи и социјална и емоционална зрелост.

4.3. ФОРМИ НА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ ВО ТРАДИЦИОНАЛНОТО УЧИЛИШТЕ

Во претходната точка ги разгледавме формите за работа со надарените ученици. Во следните разгледувања ќе ги разгледаме формите на работа со надарените ученици во традиционалното училиште и кои пред се произлегуваат од образовната практика и искуствата на поединци и организации кои во теот на својата професионална кариера работеле со деца кои постигнале завидни резултат. Притоа, треба да земеме предвид дека учениците со логичка-математичка надареност можеме да ги групираме во две групи, и тоа:

- Надарени ученици кои брзо усвојуваат нови знаења, а потоа лесно ги применуваат при решавањето на нови проблеми. За овие ученици е карактеристично тоа што брзо усвојуваат туѓи идеи, лесно вникнуваат во суштината на проблемите и најчесто се задржуваат на изолираните проблеми, при што постигнуваат одлични резултати.
- Надарени ученици кои имаат творечки, научни способности и кои даваат нови значајни научни резултати. За нив е карактеристично тоа што мислат оригинално, можат да опфатат огромен материјал и полека, чекор по чекор, градејќи ги своите размислувања доаѓаат до значајни теориски резултати.

Имајќи го предвид претходно кажаното се поставува прашањето како оперативно треба да се организира работата со надарените ученици. Пред да одговориме на ова прашање, да се потсетиме дека при работата со надарените ученици воглавном треба да се почитуваат следниве принципи:

- a) учеството на учениците мора да биде на доброволна основа,
- b) работата мора да се одвива во мали хомогени групи, кои овозможуваат индивидуална работа со учениците, и
- c) да се поттикнуваат сознателните интереси на учениците и желбата за работа, што ќе овозможи да се совпаднаат целите на ученикот и учителот.

Почитувајќи ги претходно наведените принципи, учителот може да ја организира работата со надарените ученици во најразлични форми. Во натамошните разгледувања подетално ќе се осврнеме на некои од нив.

4.3.1. МАТЕМАТИЧКИ КРУЖОК - ФОРМА ЗА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Натпреварите по математика се неодминлива активност во развојот на секој надарен ученик. Најчесто подготовката за учество на натпревари се одвива во периодот пред самите натпревари и истата ги опфаќа следниве активности:

- дваесет до тريسет дена пред натпреварот на идентификуваните надарени ученици им се соопштуваат терминот за одржување на натпреварот и тие се снабдуваат со расположливата литература,
- учениците главно самостојно се подготвуваат за натпреварот, при што не се исклучени неколку консултации кои се обавуваат со учителот и
- на училишен натпревар се врши избор на ученици кои ќе учествуваат во следниот степен на натпреварување и на истите им се овозможува период за подготовка, од три до пет училишни денови, период во кој се ослободени од останатите училишни обрски.

Се разбира, претходно изнесеното гарантира определени резултати, но не е престојно да се каже дека во случајот станува збор за стихијна, а не за организирана работа со надарените ученици. Имајќи предвид дека само со организирана и добро испланирана работа може да се постигнуваат врвни резултати во следните разгледувања ќе се осврнеме на начините на организација на додатната настава.

Класична организациона шема за додатна настава е *математичкиот кружок*, во кој учениците се ангажирани на доброволна основа. Најчесто под стручен кружок се подразбира секција за решавање на подготвителни задачи за натпревари или секција за изработка на поединечни и групни проекти, со што свесно или несвесно значително се намалуваат можностите за развој на надарените ученици. Меѓутоа, стручниот кружок има посложена структура на која во следните разгледувања подетално ќе се осврнеме. Пожелно е формирањето на кружокот да биде на почетокот на учебната година, со тоа што ќе се овозможи во него да членуваат поголем број ученици. На првиот состанок се соопштуваат целите и задачите на кружокот и организационата поставеност, која треба да биде во функција на реализирање на целите и задачите. Што се однесува до организационата поставеност, пожелно е во рамките на кружокот да постојат неколку секции со кои ќе се опфатат различните интереси и склоности на учениците. На пример, може да постојат следниве секции:

- i) научно-популарна секција,
- ii) секција за подготовка на нагледни средства (моделирање),
- iii) училишен весник, и
- iv) секција за решавање на проблемски задачи и подготовка за натпревари.

Понатаму, по правило, од учениците кои членуваат во одделните секции се избираат одговорните ученици на секциите, кои заедно со еден или двајца учители ја организираат работата на кружокот.

Работата на кружокот и на секоја секција одделно мора да се одвива според однапред подготвен план за целата учебна година. Притоа, плановите за работа на секциите, кои треба да бидат детално подготвени и по можност со утврдени рокови за одделните активности го детерминираат планот за работата на целиот кружок.

Во следните разгледувања ќе се осврнеме на активностите кои можат да се реализираат во рамките на претходно наведените секции.

4.3.1.1. НАУЧНО-ПОПУЛАРНА СЕКЦИЈА

Во претходните разгледувања рековме дека членувањето на учениците во кружок, а со самото тоа и во одделните секции треба да биде на доброволна основа. Меѓутоа, како и во многу други прилики и овде не смее да се занемари советодавната улога на учителот. Имено, учениците најчесто имаат различни интереси, склоности и способности и ако се има предвид дека оваа секција има научно-популарен карактер, пожелно е учителот за членување во оваа секција да ги анимира сите надарени ученици

кои се идентификувани дека се логичко – математички надарени и се разбира и учениците кои покажуваат интерес за историјата на цивилизацијата.

На пример, за потребите на математичкиот кружок, програмата за работа на оваа секција може да ги опфаќа следните содржини:

- записите на цифрите и броевите кај различните антички народи (Египќаните, Римјаните, античките балкански народи, Индијците, Асиро-вавилонците итн.),
- историјата на календарот,
- појавата и развојот на обичните и десетичните дробки,
- појавата и развојот на декадниот мерен систем,
- бројни системи, со посебен осврт на бинарниот броен систем,
- геометриските знаења во античкиот Египет,
- геометриските знаења кај античките балкански народи,
- геометриските знаења кај Асиро-вавилонците,
- историјата на развојот на знаењата за равенките,
- Питагорова теорема, Питагорови тројки и историски белешки за големата теорема на Ферма,
- разработка на одделни нестандартни задачи чие решавање довело до појава на нови правци во математиката,
- златниот пресек и Фибоначиевите броеви во природата и техниката и
- разработка на животот и делот на знаменити математичари, како што се Архимед, Гаус, Ојлер итн.

Дел од предложените содржини може да бидат реализирани како предавања подготвени од учениците, но некои од темите треба да ги разработат наставниците. Притоа, пожелно е темите кои ги разработуваат учениците да се изработат во пишана форма и истите да се чуваат во архивата на кружокот. Успешното функционирање на оваа секција е обусловено со обезбедување на соодветна литература која треба да биде составен дел на библиотеката на кружокот и можноста за користење на електронските бази на податоци, за што треба да бидат оспособени членовите на секцијата.

4.3.1.2. СЕКЦИЈА ЗА ПОДГОТОВКА НА НАГЛЕДНИ СРЕДСТВА

Кружокот може да даде значителен допринос во изработката на демонстрациони дидактички средства, на пример: цртежи, табели, модели на геометриски тела, програмирани таблици, подвижни модели, шеми и дијаграми за систематизирање на знаењата и слично. Се разбира, изработката на овие дидактички средства треба да биде предмет на интерес на соодвет-

ната секција, па затоа природно е учителот да ги анимира да членуваат во секцијата оние ученици кои покрај склоноста и интересот за продлабочени знаења од соодветната област имаат и способности за изработка на споменатите дидактички средства.

Основни претпоставки за успешно функционирање на оваа секција и изработка на квалитетни демонстрациони дидактички средства се:

- целосното и сознателно усвојување на содржините од дадена наставна тема од страна на учениците,
- обезбедување на квалитетни материјални и технички средства за работа на секцијата и
- следење, коригирање и надополнување на ученичките идеи од страна на учителот .

Вообичаено, најдобро изработените демонстрациони дидактички средства стануваат составен дел на предметниот кабинет. Меѓутоа, не треба да се заборава дека работата на секцијата треба да биде транспарентна, па затоа од особена важност е повремено ученичките творби да се изложат на видно место во самото училиште или да се прават заеднички изложби со другите кружоци (на пример, математичкиот кружок да организира заедничка изложба со географскиот, биолошкиот и другите сродни кружоци) или со секции од други училишта.

4.3.1.3. УЧИЛИШЕН МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК

Независно од тоа дали ќе постои ваква секција, кружокот треба да ги информира сите ученици за своите активности. Ако бројот на членовите на кружокот е мал, тогаш може да се формира група која ќе биде задолжена за оваа активност. Меѓутоа, ако кружокот има повеќе членови и ако меѓу нив има и такви кои имаат и талент за новинарство, тогаш пожелно е да се оформи секцијата која ќе го подготвува училишниот математички весник.

Оваа секција може да подготвува билтени за работата на кружокот, видни весници за стручните активности во училиштето и слично. На пример, во изданијата на секцијата пожелно е да се објавуваат следните содржини:

- статии за математичкиот живот во училиштето,
- најуспешните теми од работата на научно-популарната секција на кружокот,
- кратки биографии на знаменити математичари,
- извештаи за натпреварите по математика, со посебен осврт на постигнувањата на натпреварувачите од училиштето,

- белешки за потеклото и смислата на математичките термини,
- математички загатки и други занимливости од секојдневниот живот поврзани со наставата по математика итн.

4.3.1.4. СЕКЦИЈА ЗА РЕШАВАЊЕ НА ПРОБЛЕМСКИ ЗАДАЧИ И ПОДГОТОВКА ЗА НАТПРЕВАРИ

Најчесто секцијата за решавање проблемски задачи и подготовка за натпревари е доминантна во работата на математичкиот кружок, а во поголемиот број училишта таа единствено и постои. Значењето, местото и улогата на оваа секција, по правило, е определено од поставенства на општеството во целина и фактот дека резултатите кои учениците ги постигнуваат на натпреварите се општествено вреднувани, а додека на активностите кои се одвиваат во рамките на самото училиште не им се придава особено значење. Секако, за ваквата состојба значително придонесуваат и натпреварите по математика организирани од страна на стручните асоцијации и кои по правило обезбедуваат учество на меѓународните натпревари, а со самото тоа и можност за верификација на работата на учениците.

Во следните разгледувања ќе се осврнеме на функционирањето на оваа секција. Иако не е вообичаено, сепак работата на оваа секција треба да се одвива во рамките на математичкиот кружок и истата да биде координирана со дејствувањето на останатите секции. Притоа, пожелно е активностите да отпочнат веќе во првата половина на месец септември. На самиот почеток на учениците, дури и оние кои изминатите години постигнале забележителни резултати на натпреварите од повисок ранг, не треба да им се задаваат тешки задачи, туку тоа треба да се прави постепено. Пожелно е работата на оваа секција да отпочне со таканаречената *математичка викторина*, т.е. со тест кој се состои од 6-8 едноставни прашања и задачи и кој, во зависност од возраста, ученикот треба да го реши за 20-40 минути. При предавањето на тестовите се бележи и времето за кое ученикот го решил тестот, за да потоа истото, според определен критериум, учествува во вкупниот резултат. По истекот на времето учителите ги соопштуваат точните одговори и ги прегледуваат тестовите. Резултатите од натпреварот се соопштуваат веднаш и најдобрите натпреварувачи се истакнуваат, а по можност и пригодно се наградуваат. Ваквиот тип на натпревари треба да се практикува два до три пати на почетокот на учебната година. Во продолжение ќе наведеме неколку тестови кои можат да се зададат на овој тип на натпревари.

Тема 1

1. Кој математички знак треба да го ставиме меѓу броеви 6 и 7 за да добиеме број поголем од 6, а помал од 7?

2. Реши го бројниот ребус:

$$\frac{\times 0 \times \times - 3 \times 06}{\quad} = 3214$$

3. Запиши ги едноподруго броевите од 1 до 99. Колку пати ја запиша цифрата 5?
4. При множењето на броевите 678 и 273 добиен е резултат 184 094. Дали множењето е правилно?
5. Пресметај
- $$8 \cdot 9 \cdot 14 + 6 \cdot 12 \cdot 17 + 4 \cdot 18 + 19.$$
6. Напиши ги цифрите 1, 2, 3, 4 и 5. Без да го менуваш редоследот на цифрите, стави меѓу нив знаци на аритметичките операции и загради така што да добиеш 100.
7. Во една кутија има 100 топчиња: 25 црвени, 25 зелени, 25 жолти и 25 сини. Од кутијата вадиме топчиња без да гледаме. Колку најмалку топчиња треба да извадиме за да бидеме сигурни дека имаме 10 топчиња со иста боја?

Тема 2

1. Дали може збирот на три последователни природни броеви да биде прост број?
2. Докажи, дека ако дробката $\frac{a-b}{a+b}$ е нескратлива, тогаш и дробката $\frac{a}{b}$ е нескратлива.
3. Дали може четврт степен на природен број да завршува на цифрата 4?
4. Првата половина од патот моторциклистот ја поминал со брзина 30km/h , а втората со брзина 60km/h . Колку изнесува средната брзина на моторциклистот?
5. Од 8 наизглед еднакви топчиња едно е полесно од другите. Како со помош на вага без тегови, со најмалку мерења може да се најде полесното топче? Колку најмалку мерења се потребни?

Тема 3

1. Дали полиномот $a^2 - c^2 + b(2a + b)$ се дели со полиномот $a + b - c$?
2. Докажи, дека изразот $(x - 4)(x - 6) + 3$ е позитивен за секој реален број x .
3. Пресметај ги вредностите на изразот
- $$A = (1 - \sqrt{c})(1 + \sqrt{c})(1 + c)(1 + c^2)(1 + c^4) + c^8$$
- за $c = 1,2345678$ и $c = 12345,678909$.

- Докажи дека збирот на квадратите на секои два непарни природни броја не се дели со 4.
- Од 15 наизглед еднакви топчиња едно е потешко од другите. Како со помош на вага без тегови, со најмалку мерења може да се најде полесното топче? Колку најмалку мерења се потребни?

Тема 4

- Во рамнокрак триаголник должината на едната страна е 40cm , а на другата е 100cm . Која од нив е основата на триаголникот?
- Периметарот на рамнокрак триаголник е еднаков на 14cm . Една од страните е трипати подолга од другата. Најди ги должините на страните на триаголникот!
- Дали може триаголник да се расечи на два остроаголни триаголници?
- Во рамнокрак триаголник висината е еднаква на половина од основата. Најди ги аглиите на триаголникот!
- Во конвексен n -аголник сите надворешни агли се тапи. Најди го n !

Тема 5

- Дали можат сите три страни на целоброен правоаголен триаголник да се изразат со непарни природни броеви?
- Квадрат и ромб имаат еднакви периметри. Кој има поголема плоштина, квадратот или ромбот?
- Докажи дека во секој трапез триаголниците, формирани од краците и деловите од дијагоналите имаат еднакви плоштини!
- Од темето на правиот агол на правоаголен триаголник повлечена е нормала кон хипотенузата. Должината на нормала е 6cm . Еден од деловите на хипотенузата е еднаков на 9cm . Најди го дијаметарот на кругот опишан околу триаголникот!
- Даден е правоаголен триаголник со катети 6cm и 8cm . Пресметај ја должината на тежишната линија повлечена кон хипотенузата!
- Дијагоналата го дели трапезот на два триаголници, чии плоштини се однесуваат како $1:2$. Најди го односот на основите на трапезот!
- На екваторот се движи човек со висина 2m . За колку ќе се разликува патеката која ја опишува неговата глава од должината на патот што човекот го минува при обиколка на земјата?

Во следниот период работата на оваа секција треба да се реализира во групи кои се организирани по одделенија, при што подготовката за пре-

стојните натпревари мора да се надоврзува на претходно усвоените знаења. Притоа, при обработката на определена тема прво се прошируваат теориските знаења на учениците, а потоа се организира самостојна работа на учениците. Најчесто самостојната работа се сведува на решавање задачи кои се задавани на претходните натпревари и тоа е во ред. Меѓутоа, во случајот се занемарува фактот дека само систематизираното усвојување на знаења резултира со трајни знаења. Затоа е неопходно, учителот да ги систематизира задачите кои се решаваат после неопходната теориска подготовка, со што ќе се овозможи побрзо напредување на учениците, задобивање со трајни знаења и со самото тоа создавање неопходни предуслови за постигнување резултати на престојните натпревари. Во следниов пример ќе се обидеме да презентираме систем задачи кој може да се искористи за успешна подготовка на учениците од основното образование од теоријата на реални полиноми.

Во споменатата област, учениците од основното образование најчесто имаат усвоено следните знаења:

- поим за полином и операции со полиноми,
- формули за скратено множење и
- разложување на полиноми на множители.

Меѓутоа, примената на стекнатите знаења најчесто се сведува на решавање на елементарни задачи. Следниов систем задачи овозможува надградба на овие знаења и усвојување нови знаења, кои на надарените ученици ќе им овозможат не само солидна подготовка за престојните натпревари, туку и значително да напредуваат во оваа важна математичка област. Притоа задачите се поделени во три групи и од разбирливи причини е пожелно учителот секоја група задачи да ја задава одделно.

I група

1. Вредноста на полиномот $p(x) = 5x - \frac{a-6}{5}x$ во точката $x = -2$ е еднаква на 4. Пресметај $p(-5)$.
2. Полиномот $P(x) = x^3 - \frac{k+2}{3}x^2 + \frac{9-k}{4}x + 20$ прима вредност 4 за $x = -2$. Пресметај $P(2)$.
3. За кои вредности на параметрите a и b производот на полиномите $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 12$ и $q(x) = x - 2$ не ги содржи членовите од втор и трет степен?
4. Одреди ги реалните броеви a и b така што полиномот

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b$$

може да се запише како производ на два полиноми, едниот од кои е полиномот

$$Q(x) = (x-3)(x+1).$$

5. Полиномот

$$p(x) = x^2 + 3x + 2$$

подели го со полиномот $q(x) = x + 2$.

6. Полиномот $p(x) = x^4 - 1$ подели го со полиномот $q(x) = x - 1$.
7. Подели го полиномот $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$ со полиномот $q(x) = x - 2$.
8. Докажи дека полиномот $p(x) = x^4 + 3x + 2$ се дели без остаток со полиномот $q(x) = x + 1$.
9. Докажи дека полиномот $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$ се дели без остаток со полиномот $(b-c)(c-a)(a-b)$.
10. За кои вредности на параметрите a и b полиномот

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$$

се дели со полиномот $Q(x) = x^2 - 1$.

11. Докажи дека не постои полином од трет степен

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

чии коефициенти се цели броеви и $p(7) = 11$ и $p(11) = 13$.

12. Докажи дека не постои полином $P(x)$, од четврт степен со целобројни коефициенти, таков што $P(7) = 5$ и $P(15) = 9$.
13. За кои вредности на a полиномот

$$p(x) = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$$

се дели без остаток со 10.

14. Докажи дека полиномот $P(x) = x^2 + x + 1$ е делител на полиномот

$$R(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

II група

1. Даден е полиномот $P(x) = 4x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 4$.
- а) Разложи го $P(x)$ на производ од два полинома од втор степен.
- б) Докажи дека $2 \mid P(x)$, ако $x \in \mathbf{N}$.
2. Полиномот $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ разложи го на линеарни множители, а потоа пресметај ја неговата вредност за $x = 11$.

3. Даден е полиномот $P(x) = (3-x)^3 + (x^2 - 7x + 12)$.
- а) Разложи го $P(x)$ на множители и пресметајте $P(3)$ и $P(-1)$.
- б) Докажи дека $P(x)$ е делив со 2 за секој непарен цел број.
4. Полиномот $P(x) = x^4 + 4$ разложи го на производ од два полиноми од втор степен.
5. Даден е полиномот $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.
- а) Разложи го $P(x)$ на множители.
- б) Докажи дека за секој непарен цел број x , $8 \mid P(x)$.
6. Даден е полиномот

$$P(a) = a^5 - 5a^3 + 4a.$$

Докажи дека $120 \mid P(a)$, $a \in \mathbf{Z}$. Пресметај $P(-2)$ и $P(3)$.

7. Полиномот
- а) $P(x) = x^8 + x^4 + 1$;
- б) $P(x) = x^5 + x + 1$;
- в) $P(x) = x^3 - 7x + 6$;
- разложи го на множители.
8. Полиномот
- а) $P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2 - x^5$;
- б) $P(a) = a^3 + 2a^2 - 3$
- разложи го на множители.
9. Полиномот
- а) $P(a) = a^3 + a^2 + 4$;
- б) $P(a) = a^3 - 6a^2 - a + 30$;
- разложи го на множители.
10. Полиномот
- а) $P(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$;
- б) $P(x) = 2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2$;
- разложи го на множители.
11. Упрости го изразот:
- $$P(a, b) = [(4a + 5b)^2]^2 - [(4a - 5b)^2]^2 - 160ab(4a - 5b)^2.$$
12. Полиномот
- а) $P(a, b, c) = a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$;
- б) $P(a, b, c) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$;
- разложи го на множители.

13. Полиномот $P(x, y) = x^8 + 98x^4y^4 + y^8$ разложи го на множители.
14. Разложи го на множители полиномот:

$$P(x, y, z) = xy(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) + yz(y^3 - y^2z + yz^2 - z^3) + zx(z^3 - z^2x + zx^2 - x^3)$$
15. Полиномот $P(a, b, c) = bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b)$ разложи го на множители.
16. Пресметај ја бројната вредност на полиномот

$$P(a, c, x, y) = 4a^2x^2 - 4acx^2 + c^2x^2 - 16a^2xy + 16acxy - 4c^2xy + 16a^2y^2 - 16acy^2 + 4c^2y^2$$
ако $a = 3276, c = 5552, x = 9463$ и $y = 4731$.
17. Полиномот
- $P(x) = (x^2 + 4x + 8)^2 - 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;
 - $P(a, b) = 4b^2(b - 2) + 4a^2(2 - a) + a^2b^2(a - b)$;
 - $P(a, b, c) = ab(a - b) - ac(a + c) + bc(2a + c - b)$;
 - $P(a, x, y) = (a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$;
 - $P(a, b, c, d) = bc(a + d)(b - c) - ac(b + d)(a - c) + ab(c + d)(a - b)$;
 - $P(x) = x^4 + 1996x^2 + 1995x + 1996$;
- разложи го на множители.

III група

- Докажи дека полиномот

$$P(x, y) = x^5 + 3x^4y - 5y^2x^3 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$
не прима вредност 33 за произволни цели броеви x и y .
- Докажи дека полиномот

$$P(x) = (1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100})$$
не содржи членови со непарен степен показател.
- Најди го остатокот од делењето на полиномот

$$p(x) = x^{2401} + x^{343} + x^{49} + x^7 + x$$
со полиномот
 - $q(x) = x - 1$;
 - $s(x) = x^2 - 1$;
- Полиномот $p(x)$ при делење со $x - 1$ дава остаток 2, а при делење со $x + 1$ дава остаток -2 . Одреди го остатокот од делењето на $p(x)$ со $x^2 - 1$.
- Докажи дека полиномот

$$p(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$$

се дели со полиномот

$$q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

6. Одреди го збирот на коефициентите на полиномот

$$p_1(x) = (1 - 4x + 4x^2)^{1995} (1 + 4x - x^2)^{1996}.$$
7. Одреди го реалниот број a , така што полиномот

$$p(x) = (x - a)(x - 10) + 1$$
 може да се запише во облик $(x - b)(x - c)$ каде што b и c се цели броеви.
8. Докажи дека полиномот $p(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ се дели со полиномот $q(x) = (x - 1)^2$.
9. Нека е даден полиномот

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$
 и нека $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 7$, каде $a, b, c, d, a_0, a_1, \dots, a_n$ се цели броеви и a, b, c и d се различни. Докажи дека $p(x) \neq 14$, за секој цел број x .
10. Полиномот $P(a) = a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$ разложи го на множители.
11. Полиномот $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) + 12$ разложи го на множители.
12. Полиномот

$$P(x, y, z, w) = 2(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) - (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + 8xyzw$$
 разложи го на множители.
13. Дали постои полином $p(x)$ со целобројни коефициенти кој ги задоволува условите $p(2) = 4$ и $p(6) = 6$?
14. Нека $p(x)$ е полином од четврти степен со целобројни коефициенти. Познато е дека за секој цел број x , $p(x)$ се дели со 7. Докажи дека сите коефициенти на $p(x)$ се делат со 7.
15. Провери дали бројот $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ е корен на полиномот

$$P(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$
16. Ако α е корен на полиномот $p(x)$, тогаш за секој природен број m постои полином $q(x)$, таков што бројот $\sqrt[m]{\alpha}$ е корен на полиномот $q(x)$.

Како што може да се види, задавањето на првата група задачи има за цел да ги подобри операционите знаења на учениците, но истовремено и низ задачи да се усвои теорема на Безу и нејзината примена.

Решавањето на втората група задачи има за цел учениците да усвојат повеќе идеи за примена на формулите за скратено множење при разложување на полиноми, но истовремено и да ја применуваат теоремата на Безу во најразлични случаи.

Улогата на третата група задачи, кои се значително потешки, е да се утврдат стекнатите знаења и умеѐња со решавањето на претходните две групи задачи, но и да се усвојуваат нови идеи кои во натамошната работа ќе овозможат подобро изучување како на полиномите, така и на останатите елементарни функции.

При разработката на претходните задачи, пожелно е од секоја група првите неколку задачи да се решат на заеднички час, а останатите задачи да се остават за самостојна работа која по правило се реализира дома. Понатаму, секој ученик треба да ги испише решенијата на задачите и откако ќе ги предаде на учителот, после извршената проверка и корекции учителот треба да му ги даде решенијата на задачи кои ги подготвил.

Конечно, работата во дадена област треба да продолжи како самостојна работа, па затоа на крајот учителот на учениците им соопштува список на дополнителна литература која во иднина треба да ја консултираат.

Во претходните разгледувања презентиравме систем задачи од област во која учениците имаат предзнаења. Меѓутоа, често пати при работа со надарени ученици, т.е. при нивна подготовка за натпревари има потреба учениците да усвојат област за која немаат систематизирани предзнаења. Јасно, притоа учителот треба да го разработи теорискиот дел, доколку за тоа има потреба, а потоа учениците да преминат на самостојна работа. Пример за ваква тема се елементарните екстремални задачи, чие почетно усвојување може да се направи со помош на следниве задачи. Се разбира претходно треба да се формулираат и докажат тврдењата кои се користат при решавање на овој тип задачи.

1. Најди ја најмалата вредност на полиномот
 - а) $4x^2 + 4x + 1$
 - б) $x^2 - 5x + 2$
2. За која вредност на променливата x изразот $A(x) = x^4 - 6x^2 + 12$ прима најмала вредност?

3. Даден е изразот $A \equiv \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}$. Ако $x = 361979$, $z = 561980$, одреди ги сите вредности на y за кои дадениот израз има најмала вредност.

4. За кои вредности на променливите x, y, z изразот

$$A(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3$$

прима најмала вредност?

5. Одреди ги вредностите на променливите x и y така што полиномот $P(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$ прима најмала вредност.

6. За кои вредности на променливите x, y, z изразот

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 14z + 90$$

прима најмала вредност? Најди ја таа вредност.

7. За кои вредности на променливите a, b, c полиномот

$$P(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 14b + 75$$

прима најмала вредност?

8. Пресметај ја вредноста на изразот $B \equiv a^2 + 4a - b^2 + 8b - 12$, каде a е еднаков на вредноста на изразот

$$P = \frac{-(8x^{2n-1})^4 (-32x^{n+2})^2}{(-16x^{2n})^5},$$

а b е вредноста на променливата y за која изразот $\frac{y^2-1}{y^2+1}$ прима најмала вредност.

9. За кои вредности на a и b изразот

$$A(a, b) = a^2 - a\sqrt{2} + b - 2\sqrt{b} + \frac{3}{2}$$

прима најмала вредност?

10. За која вредност на променливата x изразот

$$A(x) = \frac{1}{4x^2 + 12x + 10}$$

има најголема вредност?

11. За која вредност на променливата x изразот

$$A(x) = 13 - \frac{1}{2+(x+0,3)^4}$$

има најмала вредност?

12. За кои вредности на променливите x и y изразот

$$A(x, y) = \frac{1-(2x-y)^2}{10+(1-3x+y)^2}$$

прима најголема вредност?

13. Одреди ги вредностите на променливите a и b за кои изразот

$$P(a, b) = \frac{3 - (4 - \frac{a-b}{3})^2}{5 + (\frac{b}{3} + \frac{a-b}{4} - 5)^2}$$

прима најголема вредност.

14. Најди ја најголемата вредност на изразот, како и вредноста на x за која таа се достигнува:

а) $\frac{5}{x^2 - 2x + 5}$

б) $\frac{2x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 3}$

15. Нека $a > 0$. Ако $x + y = a$, тогаш производот xy прима најголема вредност за $x = y = \frac{a}{2}$. Докажи!

16. Одреди ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, каде a и b се позитивни броеви такви што $a + b = 4$.

17. Нека $a > 0$. Ако $xy = a, x > 0, y > 0$ тогаш збирот $x + y$ прима најмала вредност за $x = y = \sqrt{a}$. Докажи!

18. Одреди ја најголемата вредност на изразот

а) $\frac{x}{9x^2 + 4}$

б) $\frac{x}{2x^2 - 3x + 8}$.

19. Најди ја најголемата вредност на изразот $(ax - by)^2 + (bx + ay)^2$ ако збирот $a^2 + b^2 + x^2 + y^2$ е константен.

20. Одреди ја најмалата вредност на изразот

$$x^2 - 8xy + 19y^2 - 6y + 3.$$

За кои вредности на x и y таа се достигнува?

21. Ако $x + y \geq 0$, одреди ја најмалата вредност на изразот

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 + x^2 + 4x + 7.$$

За кои вредности на x и y таа се достигнува?

22. Одреди ја најмалата вредност на изразот

$$P(x) = (x + a + b)(x + a - b)(x - a + b)(x - a - b).$$

За која вредност на променливата x таа се достигнува?

Забелешка 1. Претходниот систем задачи е природно продолжение на системот задачи од областа на полиномите, па затоа е пожелно овие системи задачи да се реализираат еден по друг во VII и VIII одделение од основното образование. Притоа, вториот систем задачи може, но не мора да се подели во групи и пожелно е заедно со овие системи задачи да се вклопи и систем задачи со кој на повисоко ниво ќе се обработат дробно-рационалните изрази.

Покрај здобивањето со знаења и умеења на повисоко ниво пожелно е во рамките на подготовките за натпревари повеќе пати учениците да

се ставаат во иста ситуација како да се на натпревар. Имено, учителот треба да практикува неколку тестирања кои ќе ги реализира во приближно исти услови со условите на самиот натпревар (број на задачи, тежина на задачите, времетраење на натпреварот и слично). Последното е важно заради подобрување на психолошката стабилност на учениците и нивно оспособување во подолг временски период да се концентрирани на задачите кои ги решаваат. При спроведувањата на овие тестирања основен проблем е подготовката на задачите, на што овде ќе се задржиме. При подготовката на тестовите пожелно е:

- пред да пристапи кон подготовка на тестовите учителот да консултира соодветна литература во која се публикувани тестови од различни степени на натпревари,
- учителот да изработи неколку тестови со различна тежина, т.е. да симулира различни степени на натпревари, може регионален и државен натпревар,
- задачите во тестот да бидат подредени од условно најлесната кон најтешката,
- тестот кој ќе го симулира регионалниот натпревар по можност да содржи една едноставна задача, две задачи со просечна тежина, една потешка и една селективна задача, се со цел ученикот да добие сознание за своите реални способности,
- тестот кој ќе го симулира државниот натпревар по можност да содржи една задача со просечна тежина, две потешки задачи и две селективни задачи.

Јасно, еден од најтешките проблеми при составување на тестот е карактеризацијата на задачите на едноставна, со просечна тежина, потешка и селективна. Решавањето на овој проблем мора да биде според реални параметри и објективни критериуми, на пример, ако задачата е дадена во условна форма $A \Rightarrow B$, тогаш оценката се врши во зависност од тоа дали се познати или непознати условот A , заклучокот B , базата на решението C и самото решавање R . Меѓутоа, овде не треба да го заборавиме и искуството на учителот, кое може да биде стекнато со долгогодишна пракса, но и со темелна разработка на литературата за надарени ученици. На крајот од овој дел ќе дадеме три тестови, кои се подготвени за учениците од VIII одделение и тоа првите два се симулација на регионален натпревар, а третиот за државен натпревар.

Тест бр. 1

1. На прашањето “Колку е часот?” дедото одговорил: “Четвртината од изминатото време и половината од преостанатото време од овој ден го дава точното време?”. Колку бил часот?

2. Нека $x = 444\dots44$ (11 четворки). Докажи дека бројот $x^2 - x - 2$ е делив со 270.
3. Во рамностран триаголник точката M ја дели страната a на два дела. Најди го збирот на растојанијата од точката M до другите две страни на триаголникот. Дали овој збир зависи од положбата на точката M на страната a ?
4. Во круг со радиус r впишани се два квадрати така што е добиена правилна осумкрака ѕвезда. Најди ја должината на кракот на таа ѕвезда.
5. На коцка со раб a ги продолжуваме дијагоналите на еден ѕид преку двете темиња, за половина должина. Добиените точки го поврзуваме со соодветните темиња на спротивниот ѕид. Пресметај го волуменот на добиеното тело.

Тест бр. 2

1. Дадена е коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со раб a . Ако се E, F, G, H, I, J средините на рабовите $AB, BC, CC_1, C_1 D_1, D_1 A_1, A_1 A$, пресметај ја плоштината на пирамидата со врв B_1 и основа $EFGHIJ$.
2. Коку има четирицифрени броеви чии цифри се различни, а првата и последната цифра се разликуваат за 2?
3. Правите зададени со равенката $26|x| + 154|y| = 2002$ определуваат еден паралелограм. Најди ја неговата плоштина.
4. Без да пресметуваш, докажи дека бројот $1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2005 + 36$ е полн квадрат.
5. Даден е квадрат $ABCD$. Точката E е средина на страната BC . Точката F на страната CD е таква, што отсечката EF е нормална на AE . Докажи дека $\angle EAB = \angle FAE$.

Тест бр. 3

1. Коцка со раб a е пресечена со рамнина која ја содржи дијагоналата на еден ѕид на коцката и средините на два раба на спротивната страна. Пресметај ја плоштината на пресекоот.
2. Најди ги сите трицифрени природни броеви кои го имаат следното својство: ако пред разгледуваниот број се напише цифрата на единиците на бројот, се добива четирицифрен број кој е за 246 поголем од разгледуваниот број и бројот 23.
3. Докажи дека бројот $2^{10} + 5^{12}$ е сложен.

4. Која година во претходниот век е родено лице кое во 2002 година ќе наврши онолку години колку што изнесува трикратниот збир на цифрите на годината кога го славела 30 роденден?

4.3.2. МАТЕМАТИЧКИТЕ ШКОЛИ - ФОРМА ЗА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ

Оваа форма на работа бара поголемо ангажирање, како на стручните сојузи, така и на научните институции. Постојат повеќе видови математички школи, како според формата на работа, така и според времетраењето на реализирање на школата. Во нашите разгледувања ќе се задржиме на четири типа на математички школи кои се организираат со три различни цели, и тоа:

- усвојување содржини кои не се разработуваат во редовната настава,
- проширување на стекнатите знаења во редовната настава и подготовка на учениците за учество на натпревари, и
- проширување и продлабочување на стекнатите знаења и подготовка за истражувачка работа.

а) Организирањето на *школата за усвојување содржини кои не се разработуваат во редовната настава* може да се реализира на најразлични начини. Притоа, на почетокот селекцијата на учесниците на школата не смее да биде ригорозна, бидејќи секогаш постои опасност да немаме вистинска информација за математичките способности на потенцијалните кандидати за учество на школата. По правило, ваков тип на школа претпочита поголеми предзнаења кои учесниците на школата треба да ги имаат од сродните области на темата која ќе се разработува, што само по себе значи дека најдобро е ваков тип на школа да се организира за учениците од средното образование.

Со оглед на карактерот на школата и важноста на истата, најдобро е истата да ја основаат националната асоцијација на математичари и соодветните високообразовни институции. Притоа, пожелно е со школата да раководи стручен совет формиран од основачите на школата. Една од можните шеми за организација на овиј вид школа може да биде следнава:

- во мај, стручниот совет на школата распишува конкурс за избор на тема која ќе се обработува и до средината на август ја избира темата која ќе се обработува во идната учебна година (темата може да биде утврдена и со порачка на советот),
- до средината на септември, авторите на темата до одговорните учители во училиштата ги испраќаат предавањата за првиот

степен од школата кој се реализира во текот на учебната година и кој завршува со тестирање на учениците на кое се избираат учесниците за вториот степен на школата,

- на крајот од учебната година се организира вториот степен на школата, кој треба да биде во форма на седумдневни предавања, кои го реализираат авторите на темата и на кои се проширува веќе обработената тема; семинарот завршува со ново тестирање, на кое се определуваат учесниците од третиот, завршен дел на школата, и
- третиот дел од школата, кој го раководат авторите на темата, се одржува за време на летниот распуст, со натамошна обработка на темата која се проширува со нови содржини, но завршното тестирање се врши на севкупниот материјал.

Пред да презентираме примери на теми, за кои сметаме дека може да се реализираат на ваков вид школа, да споменеме дека содржината на темата, особено нејзиниот прв дел, треба да биде осмислена така што учениците да ги усвоиле или во краток временски период да можат да ги усвојат предзнаењата, потребни за следење на предавањата. Во овој дел ќе дадеме пет примери на теми за ваков вид школа, од кои две се реализирани во нашата држава, а три не се реализирани во практиката, но сметаме дека без потешкотии може да се реализираат со учениците од втора, трета и четврта година од средното образование, а со минимална претходна подготовка и со учениците од прва година во средното образование.

Тема 1. ЕЛЕМЕНТИ ОД ТЕОРИЈАТА НА ГРАФОВИ

1. *Елементи од теоријата на множества*
2. *Неориентирани графови, основни својства* (поим за граф, степен на теме, регуларен граф, изоморфизам на графови, подграф, маршрути, сврзаност, комплемент на граф, бипартитен граф, бинарни операции над графови),
3. *Ориентирани графови,*
4. *Дрва, ациклични графови* (цикломатичен број на граф, дрва, синтеза на дрво со минимална должина, генерирање на пермутации со помош на транспозиции),
5. *Задача на најкус пат,*
6. *Ојлерови и хамилтонови вериги,*
7. *Внатрешно и надворешно стабилно множество, јадро на граф, игра на граф, преспојувач во бипартитен граф,*
8. *Планарни графови* (основни својства, теорема на Понтрјагин-Куратовски, дуален граф, елементарни алгоритми за распозна-

вање на планарен граф, сместување на граф на површини од повисок ред),

9. *Боење на граф* (хроматски број, боење на планарен граф, боење на графови на површини од повисок ред),
10. *Транспортни мрежи, алгоритам на Ford-Fulkerson*,
11. *Графови и матрици* (поим за матрица, операции со матрици, матрица на соседство на граф, матрица на инциденција на граф).

Тема 2. ГЕОМЕТРИЈА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

1. *Комплексни броеви* (Поим за група, основни својства. Поим за комплексен број. Алгебарски запис на комплексен број. Коњугиран комплексен број. Геометриска интерпретација на комплексен број. Проширена комплексна рамнина. Риманова интерпретација на комплексен број. Тригонометриски запис на комплексен број. Коренување на комплексен број. Моаврова формула. Експоненцијален запис на комплексен број. Множеството \mathbb{C}^n . Пресликувањето

$$\mathbf{Ta} = (a_2, a_3, \dots, a_n, a_1), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$$

2. *Движења и сличности во рамнина. Класификација* (Равенка на права во комплексни координати. Растојание од точка до права во комплексни координати. Равенка на кружница во комплексни координати. Директни сличности. Движења. Хомотетија. Индиректни сличности)
3. *Трансформација на Мобиус* (Инверзија. Трансформација на Мобиус. Геометриски својства на трансформацијата на Мобиус)
4. *Геометрија на кружница* (Централен и перифериски агол преку комплексни координати. Степен на точка во однос на кружница. Радикална оска и радикален центар. Прамен и сноп кружници)
5. *Геометрија на триаголник. Правилни многуаголници* (Ортоцентар и тежиште на триаголник. Правоаголен триаголник. Ојлерова права и Ојлерова кружница. Теорема на Менелаж. Теореме на Дезарг и Паскал. Теорема на Чева. Плоштина на триаголник, ориентиран триаголници. Впишана и припишани кружници на триаголник. Теорема на Стјуарт. Правилни многуаголници. Симетрии на правилни многуаголници)

Тема 3. КОБИНАТОРНИ КОНФИГУРАЦИИ

1. *Множества, релации, функции*

2. *Варијации, пермутации и комбинации* (Варијации со повторување. Варијации без повторување. Варијации од даден тип. Комбинации без повторување. Комбинации со повторување. Пермутации. Групата пермутации. Докажување на идентитети со комбинаторни методи)
3. *Биномна и полиномна формула. Својства на биномните и полиномните коефициенти*
4. *Метод на вклучување и исклучување* (Формула за вклучување и исклучување. Специјален случај на вклучување и исклучување. Обопштена формула на вклучување и исклучување)
5. *Проблеми на разбивање* (Разбивање на број. Подредено рабивање на број. Графичка интерпретација на разбивање. Разбивање на множества)
6. *Бернсајдова лема*
7. *Теореме за егзистенција на комбинаторни конфигурации* (Магични квадрати. Латински квадрати. Математички игри. Ојлерови мостови. Систем на различни претставници. Принцип на Дирихле. Теорема на Рамзеј. Разни логичко-комбинаторни проблеми)

Тема 4. ИНДУКЦИЈА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

1. *Метод на математичка индукција, поим и примена во алгебрата и теоријата на броеви*
2. *Индукција во геометријата* (Пресметувања со индукција. Докажување со индукција. Конструкции со индукција. Наоѓање на геометриски места со индукција. Дефинирање со индукција. Индукција според димензијата на просторот: пресметување со индукција по димензијата на просторот, докажување со индукција по димензијата на просторот, наоѓање геометриски места со индукција по димензијата на просторот, дефинирање со индукција по димензијата на просторот)

Тема 5. ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. *Линеарна диференцна равенка од прв ред*
2. *Ленеарна диференцна равенка од втор ред*
3. *Хомогена линеарна диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред*
4. *Систем диференцни равенки од видот*
$$\begin{cases} x_{n+1} = px_n + qy_n \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n \end{cases}$$
5. *Решавање на некои нехомогени линеарни диференцни равенки со константни коефициенти*

6. Триангулација на n – аголник и проблем на загради
7. Фибоначиеви броеви
8. Решавање на некои нелинеарни диференцијни равенки

Како што можеме да видиме, презентираниите теми за овој вид математичка школа се заокружени целини и тие практично треба да овозможат како фронтално, така и длабинско напредување на надарените ученици. Тоа значи дека самата тема мора да содржи и список на достапна дополнителна литература која учениците можат да ја користат како при реализирање на темата, така и при самостојната работа по реализирање на школата.

Пред да преминеме на разгледување на останатите типови школи, ќе споменеме дека ваквите видови школи, по истите принципи и со напозна и истоветна организациона поставеност, можат да се организираат и во областа на информатиката, како и во останатите природни науки.

б) Организирањето на школата за проширување на стекнатите знаења во редовната настава и подготовка на учениците за учество на натпревари може да се реализира на два начини, и тоа:

- од страна на националната стручна асоцијација и
- од страна на локалните друштва на математичарите, а доколку истите не постојат тоа можат да го направат и активите по математика на неколку училишта.

Иако, и во едниот и во другиот случај може да се постигнат саканите цели, сепак на мислење сме дека првиот начин е подобар. Имено, во случај кога школата е организирана на државно ниво, под патронат на националната стручна асоцијација, може да се гарантира квалитетот на школата и колку толку рамноправни услови за напредување на сите надарени ученици, што е од посебен национален интерес.

Една од можните шеми за организација на овиј вид школа може да биде следнава:

- комисијата за натпревари на националната стручна асоцијација ги проучува наставните планови и програми по одделенија и ги анализира содржините кои се застапени на националните и меѓународните натпревари по математика,
- врз база на направената анализа, за секое одделение одделно, се подготвува наставен план и програми за работа на школата, при што содржините опфатени со програмите треба да содржат минимална теориска разработка и системи задачи кои на учениците ќе им овозможат да го достигнат нивото на меѓународните натпревари,

- врз основа на прецизно утврдени критериуми, најчесто според резултатите од натпреварите во претходната учебна година, но пожелно е да се остави простор и за вклучување на други ученици чиј избор може да се направи со дополнително тестирање, се врши избор на учесниците на школата,
- се определуваат предавачи на школата, кои по правило треба да бидат веќе истакнати учители или поранешни натпреварувачи и
- со секоја реализирана тема се врши тестирање на учениците, со кое не само што ќе се добие увид за напредувањето на децата, туку и треба да се стекнат сознанија за пропустите во усвојувањето на материјалот и натамошно усовршување на актуелната програма.

Во овој дел ќе се обидеме да презентираме програми за работа на оваа школа за сите одделенија во основното образование (без почетното образование од I-V одделение).

Предлог програма на школата за VI одделение

1. Декаден броен систем. Бројни ребуси
 - 1.1. Ребуси со собирање природни броеви
 - 1.2. Ребуси со одземање природни броеви
 - 1.3. Ребуси со множење природни броеви
 - 1.4. Ребуси со делење природни броеви
 - 1.5. Запишување на природни броеви во таблици и шеми
2. Аритметичко решавање текстуални задачи во множеството природни броеви
3. Деливост во множеството природни броеви
 - 3.1. Деливост на збир и разлика
 - 3.2. Остатоци. Евклидов алгоритам
 - 3.3. Посебни признаци за деливост
 - 3.4. Прости и сложени броеви
 - 3.5. Заемно прости броеви
 - 3.6. Нескратливи дропки
4. Примена на централната и осната симетрија
5. Елементарни геометриски проблеми
 - 5.1. Квадрат и правоаголник
 - 5.2. Коцка и квадар
6. Задачи со мерење и претурање

Забелешка 2. Како што може да се види, оваа програма всушност треба да овозможи:

- проширување и продлабочување на знаењата со акцент на основните знаења и репродуктивни задачи,
- создавање услови за развој на творечките способности на учениците, за што е неопходно да се усвојуваат нови методи и
- со усвојување на одделните тематски целини учениците да се здобијат со претстава за специфичните математички методи, со што ќе се оспособуваат за самостојна работа.

Предлог програма на школата за VII одделение

1. Рационални броеви
 - 1.1. Пресметување на вредност на бројни изрази
 - 1.2. Аритметичко решавање текстуални задачи во множеството рационални броеви
 - 1.3. Аритметичко решавање текстуални задачи со проценти и размери
 - 1.4. Примена на методот на отсечки во решавање аритметички задачи
2. Елементи од комбинаторика
 - 2.1. Математика на шаховска табла. Инваријанти
 - 2.2. Задачи со пребројување
 - 2.3. Елементарни геометриски комбинаторни задачи
3. Докази во геометријата
 - 3.1. Триаголник
 - 3.2. Четириаголник
 - 3.3. Неравенство на триаголник
4. Математички игри и стратегии
5. Елементарни логички проблеми

Целите и задачите на предложената програма нема да ги разгледуваме. Обидете се самостојно да ги определите.

Предлог програма на школата за VIII одделение

1. Теорија на броеви
 - 1.1. Деливост во множеството цели броеви
 - 1.2. НЗД и НЗС
 - 1.3. Прости и сложени броеви
 - 1.4. Разложување на броевите на множители
 - 1.5. Линеарна Диофантова равенка. Метод на Ојлер

- 1.6. Методи за решавање на елементарни нелинеарни Диофантова равенка
2. Полиноми
 - 2.1. Операции со полиноми
 - 2.2. Разложување на полином на множители
 - 2.3. НЗД и НЗС на полиноми
 - 2.4. Деливост на полиноми
 - 2.5. Теорема на Безу. Примена
3. Елементи од комбинаторика
 - 3.1. Принцип на Дирихле
 - 3.2. Правило на еднаквост
 - 3.3. Правило на збир
 - 3.4. Правило на производ
4. Право пропорционални и обратно пропорционални големини
 - 4.1. Пропорција и продолжена пропорција
 - 4.2. Примена на простото тројно правило
5. Елементи од планиметрија
 - 5.1. Примена на транслацијата и ротацијата
 - 5.2. Тангентни и тетивни четириаголници
 - 5.3. Питагорова теорема и Питагорови тројки
 - 5.4. Плоштини на рамнински фигури и нивни делови
6. Логички задачи

Целите и задачите на предложената програма нема да ги разгледуваме. Обидете се самостојно да ги определите.

Предлог програма на школата за IX одделение

1. Конгруенции во множеството цели броеви
 - 1.1. Поим за конгруенција
 - 1.2. Основни својства на конгруенциите
 - 1.3. Класи конгруенции
 - 1.4. Примена на конгруенциите
2. Мултипликативни функции
 - 2.1. Поим за мултипликативна функција. Функции $d(n)$ и $\sigma(n)$
 - 2.2. Системи остатоци
 - 2.3. Ојлерова функција
 - 2.4. Теорема на Ојлер, Ферма и Вилсон
3. Решавање на текстуални задачи кои се сведуваат на линеарни равенки и нивни системи
4. Плоштина и волумен на геометриско тело

5. Дробно рационални изрази
6. Неравенства
 - 6.1. Елементарни неравенства
 - 6.2. Аритметичка, геометриска, хармониска и квадратна средина и неравенства меѓу нив
 - 6.3. Ангелски принцип на минимум
 - 6.4. Екстремални задачи со полиноми и дробно рационални изрази
7. Функции и функционални равенки
 - 7.1. Множества, операции со множества и пресликувања
 - 7.2. Поим за функционална равенка
 - 7.3. Решавање на функционални равенки во множествата природни, цели, рационални и реални броеви

Целите и задачите на предложената програма нема да ги разгледуваме. Обидете се самостојно да ги определите.

На крајот од овој дел ќе дадеме неколку важни напомени во врска со непосредното реализирање на предложените програми. Имено,

- времето за реализација на програмите треба да биде флексибилно, од 60-65 наставни часови, во зависност од напредувањето на учениците, при што последните 5-10 часови треба да се искористат за решавање на посебно подготвени тестови по урнек на тестовите задавани на претходните натпревари,
- покрај подготвениот пишан материјал, на учесниците задолжително треба да им се препорача и дополнителна литература, по можност и да се оформи библиотека на школата која ќе им биде на располагање и
- работата на школата треба да заврши непосредно пред одржувањето на првиот степен на натпревари, во нашата држава тоа се регионалните натпревари, за да меѓу секои два натпревари со сите учесници на школата се одржат по неколку дополнителни часови на кои ќе се анализираат задачите задавани на претходниот натпревар и постигнатите резултати.

в) Школата за *проширување и продлабочување на стекнатите знаења и подготовка за истражувачка работа* треба да се организира за време на зимскиот и летниот распуст. Организацијата и работата на овој вид школа се пропратени со бројни проблеми, меѓу кои доволно е да ги спомнеме:

- Во кој временски период е најдобро да се организира овој вид школа?

- Според кои критериуми да се направи изборот на учесниците на школата?
- Дали овој вид школа може да се организира и за учениците од основното образование?
- Кои содржини да бидат застапени во работата на овој вид школа?

Што се однесува до временскиот период во кој треба да се организира овој вид школа, одговорот е недвосмислен. Имено, со обзир на намената на школата и тежината на материјалот кој треба да се усвојува на овој вид школа, најдобро е таа да се организира за време на летниот распуст, одма после завршувањето на школата за усвојување содржини кои не се разработуваат во редовната настава, доколку истата се организира.

Доколку се организира школата за усвојување содржини кои не се разработуваат во редовната настава, пожелно е изборот на учениците кои треба да ја посетуваат школата да биде направен од најдобрите учесници на претходната школа. Меѓутоа, ако претходниот вид на школа не се организира, тогаш изборот на учесниците може да се направи само од најдобрите натпреварувачи кои покажуваат поголема оригиналност во решавањето на проблемите зададени на натпреварите, кои секако треба да бидат вклучени во работата на школата.

Имајќи ги предвид психофизичките способности на учениците од основното образование, но и математичките знаења кои овие ученици ги имаат, пожелно е ваквиот вид школа да не се организира за овие ученици. Меѓутоа, како и во други случаи и овде треба да допуштиме исклучок, што значи дека исклучително надарените ученици можат да бидат вклучени во работата на школата. Притоа, во рамките на самата школа или на претходно одржан минисеминар, на овие ученици треба да им се овозможи да се здобијат со потребните предзнаења за учество на школата.

Најтешко е да се даде прецизен одговор на четвртото прашање. Имено, изборот на дадена содржина е обусловен како од можноста учениците истата успешно да ја усвојуваат, така и од научната перспективност на темата. Имајќи го предвид претходно кажаното, треба да се направи напор да се избере содржина која учениците ќе можат да ја усвојат, но истовремено таа по можност да содржи и отворени проблеми кои се достапни до учениците. Се чини дека исполнувањето на поставените барања е практично невозможно, што не е точно, ако се има предвид темата *Теорема за минимум* која е реализирана во рамките на завршен семинар на меѓународниот натпревар Турнир на градовите.

4.3.3. ЗАЕДНИЧКА САМОСТОЈНА ТВОРЕЧКА РАБОТА НА УЧИТЕЛОТ-МЕНТОР И НА НАДАРЕНИОТ УЧЕНИК

Една од формите на работа со надарените ученици е таканаречената заедничка самостојна творечка работа на учителот-ментор и на надарениот ученик (ЗСТРУМНУ), при која ученикот под раководство на учителот и на научниот работник, кој најчесто се јавува како консултант, продлабочено обработува и определена научна област.

Овој вид на работа всушност е дуален процес и најчесто се одвива во три фази, и тоа:

- самостојна творечка работа на професорот,
- заедничка творечка работа на професорот и талентираниот ученик, и
- самостојна творечка работа на талентираниот ученик.

При реализирањето на ЗСТРУМНУ се среќаваме со следниве форми и методи на работа:

1. предавања кои ги реализира професорот,
2. индивидуална работа со талентираниите ученици, при што на повисоко ниво се усвојуваат и применуваат одредени методи кои се изучуваат во редовната настава и надвор од неа,
3. работа на група, по тематика, блиски прашања,
4. следење на специјализирана литература со цел продлабочено да се проучуваат одредени прашања,
5. предавања кои ги реализира талентираниот ученик, а кои ги подготвува под надзор и со активна помош на професорот: тема, план, литература и слично,
6. подготовка на реферат и заеднички труд со одредени истражувачки елементи и одредени творечки цели и
7. публикување на заедничка статија во соодветно списание, што најчесто треба да биде и крајна цел на севкупната работа.

При реализирањето на ЗСТРУМНУ, во дадена областа, треба да се имаат предвид следниве моменти:

I. Интересот на ученикот, бидејќи за формирање и развивање на какви било творечки способности потребно е да постои животна потреба кај ученикот, како и единство на способностите и интересите кои се манифестираат со:

- i)* прифаќање на позитивен однос кон областа,
- ii)* страст за творечка работа во областа или во некој нејзин дел и

- iii)* желба за здобивање на трајни знаења и умеења на повисоко научно ниво.

II. Психолошките карактеристики на ученици, т.е. неспорниот факт дека:

- i)* трајниот интерес се поттикнува со успех, па затоа успехот во самостојната творечка работа треба барем до извесен степен да е гарантиран,
- ii)* доколку работата трае подолго време потребно е да се обрне внимание на меѓурезултатите како минимален стимул за натамошна работа, и
- iii)* ученикот треба да се оспособи постојано да консултира литература за да може во случај кога ќе добие негативен одговор на некои од поставените прашања или ако добие неочекуван резултат својата работа да ја спореди со работата на другите творци од иста или сродна област.

III. Треба да се запазат и следниве барања:

- i)* да постои усогласеност меѓу интелектуалните способности на ученикот, од една страна, и напорот кој е потребен за совладување на поставените задачи, од друга страна,
- ii)* лесно да се поврзуваат теоријата и практиката,
- iii)* во текот на работењето да се остварува премин од конкретно кон апстрактно и обратно,
- iv)* да се создава благопријатна социјална атмосфера за работа со надарените ученици и
- v)* да се негува разнообразноста во организационите форми на работа.

4.3.3.1. БАРАЊА ЗА УСПЕШНА ЗСТРУМНУ

Барањата за успешна ЗСТРУМНУ можат да се систематизираат на повеќе начини, но овде ќе дадеме само една таква систематизација.

I. Барања од надарениот ученик

Ученикот треба:

- i)* да поседува завидна наобразба од областа која се изучува на соодветното ниво на образование,
- ii)* да може да размислува и анализира продлабочено и во подолг временски период во непозната област, т.е. да има способности за продолжена работа и желба за истражување,
- iii)* да има амбиции да направи нешто со свој ум и со свои раце,

- iv)* да има навики за писмено изразување кое треба да е точно, кусо и прецизно и
- v)* да ја сака областа во која се реализира ЗСТРУМНУ.

За да се стекне со овие особини надарениот ученик треба:

- i)* темелно да го изучува предвидениот наставен материјал,
- ii)* да чита дополнителна литература од областа (книги и списанија) и
- iii)* да живее во средина заинтересирана за творечка работа (семејство, клас, професори, училиште, пријатели итн.).

Активностите со кои учителот ќе го поттикне и помогне овој процес се:

- i)* проверка на постигнатите знаења после проучување на дадена тема,
- ii)* да инсистира на потенцирање на суштествените моменти од непознатата за ученикот проблематика,
- iii)* да го подготви надарениот ученик новоздобиените знаења од една тема да ги презентира пред останатите ученици и
- iv)* пред учениците да поставува проблеми во кои целите и методите за нивно решавање се јасни.

II. Барања од учителот

Учителот треба:

- i)* да има нестандартни знаења и умеења, со неспокоен дух и нестандартно мислење и со склоност кон творечка работа,
- ii)* да има интерес за можностите и тежнењата на секој ученик,
- iii)* да умее интересно и точно да ги формулира проблемите и да ги поттикне учениците на нивно решавање,
- iv)* да се сомнева во се и на своите ученици да ја пренесе оваа важна особина на секој творец, истражувач или научник,
- v)* да умее да изврши избор на методите со кои ќе го решава поставениот проблем,
- vi)* да умее да воспостави оптимален сооднос меѓу својата работа и заедничката творечка работа со учениците,
- vii)* да има научен интерес и согледување во областа која ја предлага на ученикот, по можност активно да работи во таа област и да има сопствени творечки достигнувања и
- viii)* да умее да го развива мисловниот процес на учениците, водејќи сметка за индивидуалните разлики на одделните ученици.

Се разбира дека овие особини треба да се развијат кај учителот. Постојат повеќе начини со кои тоа може да се постигне и овде ќе бидат спомнати само некои од нив:

- i)* учество на методски и научни конференции со цел здобивање со информации за интересни и работливи теми и идеи за тековната или идната творечка работа,
- ii)* интерес за подобрување на сопствената квалификација, за што треба да постои соодветна регулатива на државно ниво,
- iii)* презентирање на веќе постигнатите резултати со што ќе се зголеми авторитетот на учителот, а со самото тоа и интересот на учениците да соработуваат со него,
- iv)* обезбедување средства за реализирање на нови теми и запознавање со соодветните научни достигнувања од дадената област,
- v)* учество на конференции со реферати изработени со учениците,
- vi)* кореспонденција и размена на материјали со други учители од земјата и од странство и
- vii)* во интерес на квалитетната творечка работа следење на информации и прибирање на литература.

III. Барање кон темата која е предмет на ЗСТРУМНУ

Што се однесува до темата која се разработува при ЗСТРУМНУ, истата треба да исполнува низа барања, од кои ќе ги споменеме следниве:

- i)* да е блиска до изучуваниот материјал во редовната настава, т.е. разликата меѓу темата и изучуваниот материјал треба да е мала, за да може да се реализира природен премин кон повисоко ниво на работа,
- ii)* да е едноставно формулирана и за ученикот да содржи неочекувани интересни резултати кои кај него ќе побудуваат желба за натамошна работа,
- iii)* мотивирана и соодветна на личните можности и интереси на ученикот,
- iv)* да е поткрепена со соодветна литература,
- v)* да е актуелна и перспективна, т.е. да дава можност за добивање нови резултати кои можат да бидат споредени со веќе познат, да се прошират или обопштат,
- vi)* да е со гарантирана можност за успех кој може да е нецелосен, но ќе го стимулира ученикот на натамошна творечка работа и
- vii)* со гарантирано општествено признание за успехот.

Во врска со претходно изнесеното се поставуваат прашањата:

- a) Како учителот може да избере токму ваква тема за творечка работа на својот надарен ученик?
- b) Дали некој треба да му обрне внимание на конкретна тема или тоа треба да го направи со сопствени сили?

Се разбира, одговорот на овие прашања зависи од:

- i)* личните интереси и амбиции на учителот,
- ii)* литературата со која располага: книги, списанија, статии и можност за електронско пребарување,
- iii)* расположливата информација за веќе изработените теми со слична проблематика и
- iv)* заедничка творечка работа на учителот со научен работник од соодветната област, кој во дадениот случај може да биде и консултант.

Се чини дека најважниот момент за правилен избор на темата за творечка работа е даден во *iv)*, па затоа во следната точка ќе се задржиме на триаголникот: талентиран ученик, учителот-ментор и консултант-научен работник.

4.3.3.2. ЗАЕДНИЧКА ТВОРЕЧКА РАБОТА НА НАДАРЕНИОТ УЧЕНИК, УЧИТЕЛОТ-МЕНТОР И КОНСУЛТАНТОТ-НАУЧЕН РАБОТНИК

Прашањата за раното откривање, формирањето и практичното реализирање на творечките способности на учениците пред сè се сврзани со нивото на професионалната подготовка на нивните учители. Значи, за успешно решавање на овие прашања потребно е високо професионално ниво на образовните кадри. Нестандардниот карактер на оваа дејност и големата одговорност за иднината на општеството претпочитаат нестандартен пристап на проблемите, значителни материјално-технички средства, оригинални решенија, упорност итн. Затоа формирањето и развојот на творечките сили на учителот е предуслов за успех во работата со идните таленти, нивното рано препознавање, идентификување и негувањето на нивните творечки способности. Притоа треба да се има предвид дека творечкиот карактер на работата на учителот е можен онаму каде науката посилено навлегува во стандардното образование. Затоа во овие области можно е научните работници кои имаат значителен допринос во развојот на науката да ги поттикнуваат творечките напори на менторите. Последното може да се постигне само со заедничка работа на менторот и консултантот.

Претходно изнесеното упатува на сознанието дека за реализација на творечките можности на учителот и надарениот ученик потребно и доволно е заеднички да твори тројката: научен работник, учител-ментор и надарен ученик. Нивната заедничка работа може да подразбира: научниот работник работи на даден проблем со менторот, кој од своја страна во истиот проблем го воведува надарениот ученик (во зависност од неговите можности) или сите тројца заедно работат на разрешување на проблемот.

Изнесените начин на работа е идеален за реализирање на творечките можности на надарениот ученик, но тој е и реален иако многу ретко егзистира во нашата практика. Може да се каже дека ефективно творечко напредување на надарените ученици лежи токму во реалното постоење на споменатиот триаголник и заемнодејствието на сите учесници во истиот.

Со претходните размислувања ја проширивме дуалната творечка работа од претходната точка, на се чини идеален случај, тристран творечки процес кој се збогатува со клучниот момент за успех во работата со надарените ученици, а тоа е соработката на научниот работник и учителот-ментор. Всушност само во овој идеален случај може да се заштеди време и да се оствари забележителен ефект и притоа ефективност е поголема ако научниот работник контактира, дава идеи и напатствија, работи со еден или повеќе ментори, а тие од своја страна работат со еден или повеќе надарени ученици.

4.3.3.3. ИЗГОТВУВАЊЕ НА РЕФЕРАТ

Крајна цел ЗСТРУМНУ, најчесто се поставува подготвувањето на статија, во која свое место ќе најдат истражувањата и творечките достигнувања на надарениот ученик. Подготвувањето на статијата е особено значајно, бидејќи во овој процес учениците се оспособуваат за:

- самостојно користење, разбирање и реферирање на стручна литература,
- самостојно и продлабочено осмислување на суштината на дадениот проблем, со можност за наоѓање сопствени патишта за решавање на поставениот проблем,
- логичко размислување и одржување концентрација на еден ист проблем во подолг временски период,
- воопштување на добиените знаења и применување во аналогни ситуации и
- поставување нови проблеми, аналогни на разгледуваните и нивно самостојно или со помош решавање.

4.3.3.4. ПРИМЕРИ НА ТЕМИ ЗА ЗСТРУМНУ

Како што веќе кажавме, успешноста на ЗСТРУМНУ зависи од изборот на темата и од начинот на нејзиното задавање. На крајот од овој дел ќе презентираме неколку теми за ЗСТРУМНУ, за кои сметаме дека ги задоволуваат претходно изнесените критериуми.

ТЕМА 1. КОНФИГУРАЦИИ

Во рамнината се дадени a точки низ кои минуваат b прави, такви што низ секоја точка минуваат m прави и на секоја права лежат n од дадените точки. Оваа геометриска конструкција ја нарекуваме *конфигурација* од тип (a, m, b, n) .

Лема 1. Докажи дека за параметрите a, m, b и n на конфигурацијата од типот (a, m, b, n) важи $am = bn$.

Задача 1. Конструирај конфигурација $(6, 2, 4, 3)$.

Задача 2. Докажи дека конфигурацијата $(12, 4, 12, 4)$ не може да се конструира.

На кружницата се дадени точките A_1, A_2, \dots, A_6 . Со B_1, B_2, B_3 да ги означиме пресечните точки на трите парови прави A_1A_2 и A_4A_5 , A_2A_3 и A_5A_6 , A_3A_4 и A_6A_1 , соодветно. Познатата теорема на Паскал тврди дека точките B_1, B_2, B_3 лежат на една права (права на Паскал).

Лема 2. Да земеме шест точки кои лежат на една кружница. Да ги разгледаме сите прави на Паскал и точките B_i од теоремата на Паскал, кои можат да се добиваат при различни нумерации на почетните точки. Докажи дека добиеното множество точки и прави формираат конфигурација и најди ги нејзините параметри.

Теорема 1. Ако постои конфигурација од тип (a, m, b, n) , тогаш постои и конфигурација од тип (b, n, a, m) .

Лема 3. Ако може да се конструира конфигурација од тип (a, m, b, n) , тогаш може да се конструира и конфигурација од тип $(an, m+1, bn+a, n)$.

Последица 1. Ако може да се конструира конфигурација од тип (a, m, b, n) , тогаш може да се конструира и конфигурација од тип $(am+b, m, bm, n+1)$.

Теорема 2. За секои m и n постои конфигурација (a, m, b, n) со произволно големи a и b .

Забелешка 4. Во претходната теорема, прашањето на минималноста на a и b не е решено.

Задача 3. Нека n е даден природен број. Најди ги најмалите броеви a и b за кои постои конфигурација $(a, m, b, 2)$.

Задача 4. Докажи, дека конфигурацијата $((\binom{m+n-1}{m}), m, (\binom{m+n-1}{n}), n)$ постои.

Задача 5. Докажи, дека ако можат да се конструираат конфигурациите (a, m, b, n) и (c, k, d, n) , тогаш може да се конструира и конфигурацијата $(ac, m+k, bc+ad, n)$. ♦

ТЕМА 2. РАЗБИВАЊЕ НА ПРИЗМА

Задача 1. Дали може триаголник да се расече на паралелограми?

Задача 2. Ако секој паралелограм се смета за трапез, дали може триаголник да се расече на трапези?

Задача 3. Дали може триаголник да се расече на трапези, меѓу кои нема ниту еден паралелограм?

Задача 4. Од призми состави конвексен полиедар, кој не е призма (паралелопипедот е призма).

Задача 5. Дали може коцка да се расече на призми, така што меѓу нив да постои таква призма, кај која сите нејзини страни не се паралелни на ниедна страна на почетната коцка?

Задача 6. Дали може коцка да се расече на призми така, што ниедна основа на тие призми да не е паралелна на ниедна страна на коцката?

Задача 7. Дали може тетраедар да се расече на призми?

Задача 8. Дали може од тетраедри да се состави полиедар, кај кој страните се две по две непаралелни?

Задача 9. Дали може октаедар да се расече на призми? ♦

*

* *

Може да се каже дека ЗСТРУМНУ, во чија реализација е ангажиран научен работник како стручен консултант, е една од најдобрите форми за работа со надарените ученици. Тоа е форма која дава можност да се избегне опасноста надарениот ученик да се трансформира во решавач на задачи, кој долги години својот развој и перспектива ќе ги гледа само во освојувањето на награди на бројните натпревари од најразличен карактер.

Ова е важно, особено ако се имаат предвид придобивките од подготвувањето на статијата, што треба да биде крајна цел на секој циклус на ЗСТРУМНУ, но и можностите за воведување на надарените ученици во

научната работа уште од најрана возраст, со што се зголемуваат можностите за нивен правилен развој и успех во избраната научна област.

На крајот од овој дел да кажеме дека значително се менува улогата на учителот при работата со надарените ученици. Имено, се намалуваат информациона и контролната функција, а во значење добиваат раководната и организаторската функција. Имено, учителот не треба многу да раскажува и да докажува, туку својата енергија треба да ја насочи кон обезбедување литература, да поставува проблеми, но да се воздржува веднаш да ги сопштува нивните решенија и како прв меѓу еднаквите, доколку е потребно, на учениците да им дава упатства за нивно решавање.

4.3.3.5. УСВОЈУВАЊЕ НА НАУЧНИТЕ МЕТОДИ ПРИ ЗСТРУМНУ

Усвојувањето на научните методи во наставата по математика е една од приоритетните задачи. Притоа иако учителот треба да се стреми научните методи перманентно да се усвојуваат од сите ученици, сепак на овој дел посебно внимание треба да се обрне при работата со надарените ученици за математика. Последното е особено важно, ако се има предвид дека во главно идните научни кадри се регрутираат токму од оваа категорија ученици и тоа не само во математиката, туку и во сродните научни дисциплини.

Во историјата на науката постоеле обиди за пронаоѓање на универзален научен метод, а со самото тоа и универзална постапка за оспособување на младата популација за научно истражувачка работа. Меѓутоа, како што може да се види од самата поделба на научните методи, вакво нешто не е можно, па затоа од крајот на минатиот век во повеќето образовни системи се форсира парцијалното усвојување на научните методи. Што се однесува до наставата по математика, а со самото тоа и до работата со надарените ученици за математика, сметаме дека последното е катастрофална грешка. Имено, историјата на математиката покажува дека скоро и да не постои математичко откритие кое се должи на еден единствен научен метод. Имајќи го предвид претходно кажаното, во работата со надарените ученици за математика треба да се тежнее на обработка на проблеми при чие решавање се преплетуваат научните методи. Притоа, од суштинско значење е изборот на проблемите да биде таков да покрај тоа што учениците успешно ќе ги усвојуваат научните методи, тие да се доведат до прагот на отворените проблеми во современата наука. Во следниов пример е дадена една ваква постапка.

Пример. Предмет на разгледување во овој пример ќе бидат боењата од Ремзиев тип, при што ќе покажеме како учениците при усвојување на оваа важна гранка од современата комбинаторика ги усвојуваат и научните методи.

Чекор 1. *Учениците се воведуваат во проблематиката*

Нека е дадено множеството X . Секое пресликување $f: X \rightarrow \{1, \dots, k\}$ го нарекуваме *боење* на множеството X во k бои, а пресликувањето f го нарекуваме *функција на боењето*.

За дадена функција на боење f дефинираме релација α со iaj ако и само ако $f(i) = f(j)$. Јасно, α е релација за еквиваленција, па затоа множеството X е поделено на дисјунктни класи на еквиваленција. За множеството Y , $Y \subseteq X$ ќе велиме дека е *монохроматско*, ако Y е подмножество на една од класите на еквиваленција, т.е. ако $f|_Y$ е константна функција.

Ремзиевата теорија е важна гранка на комбинаториката, која започнала да се развива во 1930 година со работите на англискиот математичар Френк П. Ремзи. Едноставно кажано нејзината цел и основна замисла е од секое “неправилно” боење на некоја структура (точки на правата, рамнината, на произволно множество и слично) да се оддели некоја “правилна”-монохроматска структура, доколку почетната структура е доволно голема. Класичен пример на проблем од Ремзиев тип е: “*Да се докаже дека во секое боење на страните и дијагоналите на правилен шестаголник со две бои може да се најде монохроматски триаголник*”, чие решение се наоѓа со елементарна примена на принципот на Дирихле. Меѓутоа, малку посложениот проблем од истиот тип: “*Да се најде правилен n -аголник со најмал број на страни така што при секое боење на неговите страни и дијагонали во k бои постои монохроматски триаголник*”, е нерешен проблем. Имено, за $k=2$ се знае дека $n=6$, за $k=3$ се знае дека $n=17$, но веќе за $k=4$ се знае само дека $47 \leq n \leq 53$, а за поголеми вредности на k не постојат дури ни вакви оценки. Да споменеме само дека ова е прилично едноставен проблем во теоријата на Ремзи, која е доста сложена и нуди бројни нерешени комбинаторни проблеми.

Чекор 2. *Со учениците се разработуваат потребните предзнаења за усвојување на темата*

Пред да преминеме на разгледување на проблемите на боење од Ремзиев тип учениците треба да ги усвојат принципот на Дирихле и основните комбинаторни принципи кои ќе ги користат во натамошните разгледувања. Притоа е неопходно да ги усвојат следниве содржини.

Нека n е природен број и $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. За множеството A ќе велíme дека е *конечно*, ако постои биекција $f: A \rightarrow \mathbf{N}_n$ за некој природен број n . Притоа ќе велíme дека A има n елементи и ќе означуваме $|A| = n$. Во нашите натамошни разгледувања множествата ќе бидат конечни, ако тоа не е поинаку кажано.

Принцип на еднаквост. Ако постои биекција меѓу множествата A и B , тогаш $|A| = |B|$.

Принцип на збир. а) Ако $A \cap B = \emptyset$, тогаш $|A \cup B| = |A| + |B|$.

б) Ако A_1, A_2, \dots, A_k е фамилија од k , $k \geq 2$ по парови дисјунктни множества, т.е. множества за кои важи $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $i \neq j$, тогаш

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

Принцип на производ. Декартовиот производ на конечно многу конечни множества е конечно множество и неговиот број на елементи е еднаков на производот на бројот на елементите на соодветните множества, т.е.

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|, \text{ за } k \geq 2.$$

Принцип на Дирихле. Нека $kn + r$ предмети $r \geq 1$ се сместени во n кутии. Тогаш, барем во една кутија се сместени најмалку $k + 1$ предмет.

Чекор 3. Воведување во истражувањето (почетни проблеми)

Овој дел учителот треба да го концепира така, што учениците ќе ги воведат во истражувањето. Пожелно е тоа да се направи со еден до два елементарни проблеми кои во натамошниот дел ќе се воопштуваат, со што практично ќе се усвојува методот на воопштување.

Проблем 1. *Права е обоена во две бои. Дали постои отсечка чии крајни точки и нејзината средина се монохроматски.*

Природно е учениците разгледувањето на поставеното прашање да го отпочнат со бројот на можните боења на три точки во две бои. Притоа, со исцрпување на сите можни случаи тие ќе заклучат дека три точки во две бои можат да се обојат на $2^3 = 8$ различни начини и меѓу овие три точки постојат две монохроматски точки. Ова дава идеја за користење на принципот на Дирихле, при што треба да се разгледуваат девет тројки точки меѓу кои има две монохроматски.

Понатаму, учениците по пат на *експеримент* ќе ја согледаат улогата на растојанијата меѓу точките во одделните тројки, при што (може да има помош и од учителот) е неопходно да заклучат дека треба на правата да земат девет тројки на точки чии координати имаат облик $(x, x + 1, x + 2)$,

(за девет различни вредности на x), итн. после што се преминува на решавање на следниот проблем.

Проблем 2. *Рамнина е обоена во две бои. Дали постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски?*

Идејата за решавање на поставениот проблем се базира на решението на претходниот проблем, па затоа овој проблем е погоден за усвојување на *аналитичко-синтетичкиот научен метод*. Притоа, поаѓајќи од фактот дека постои отсечка чии крајни точки и средина се монохроматски логично е да се очекува учениците над трите отсечки да конструираат рамнокраки правоаголни триаголници и да го анализираат боето на темињата на овие три триаголници. Јасно, ваквите разгледувања ќе дадат потврден одговор на поставеното прашање.

Чекор 4. *Усвојување на методот на воопштување*

Проблем 3. *Рамнина е обоена во две бои. Дали постои триаголник кој е сличен на даден триаголник и чии темиња се монохроматски.*

Како проблемот, така и неговото решение е воопштување на претходниот проблем (сите рамнокраки правоаголни триаголници се слични меѓу себе).

Чекор 5. *Усвојување на методот на специјализација*

Проблем 4. *Докажи дека во секоја од задачите од 1 до 3 наместо целата рамнина може да се разгледува конечно множество точки (за секоја задача множеството е различно).*

Чекор 6. *Натамошно усвојување на методот на воопштување*

Решавањето на следниве проблеми овозможува усвојување на дел од научните методи кои се користат во математиката. Притоа, ако во претходните разгледувања на учениците им се соопштуваше кои методи ги користеа, понатака треба да се инсистира тие самостојно да ги анализираат своите постапки. Имено, самостојното осознавање дали анализираат, синтетизираат, воопштуваат, специјализираат или апстрахираат е неопходно за согледување на разликите меѓу научните методи. Се разбира, претходно треба да се воведат неопходните поими и да се дадат потребните ограничувања.

Во натамошните разгледувања ќе претпоставуваме дека е обоена само целобројната решетка во рамнината, а не целата рамнина. Под *ограничена фигура* (или *област*) ќе подразбираме конечно множество точки од целобројната решетка. На пример, под квадрат ќе го подразбираме множеството точки од решетката кои лежат во внатрешноста на некој квадрат со страни паралелни на линиите на решетката. Ако поинаку не е кажано, за множествата ќе претпоставуваме дека се конечни, а фигурите (областите)

дека се ограничени. За две фигури A и B ќе сметаме дека се *еднакво обоени* ако постои биекција $f : A \rightarrow B$ која го запазува боето, т.е. за секој $x \in A$ точките x и $f(x)$ се монохроматски.

Откако ќе ги воведеме поимите, ги задаваме следниве проблеми.

Проблем 5. *Рамнина е обоена во три бои. Докажи, дека постои рамнокрак правоаголен триаголник чии темиња се монохроматски.*

Проблем 6. *Рамнина е обоена во N бои. Докажи, дека постои правоаголник чии темиња се монохроматски.*

Проблем 7. *Рамнина е обоена во две бои. Докажи, дека постои квадрат чии темиња се монохроматски.*

Проблем 8. *Целобројната решетка во рамнината е обоена во k бои и M е произволно конечно множество точки од решетката. Докажи, дека постои монохроматско множество, слично на множеството M .*

Проблем 9. *Во темињата на целобројната решетка во рамнината распоредени се природни броеви. Докажи дека за секој n постои квадрат со страни паралелни на линиите на решетката, таков што збирот на броевите внатре во квадратот се дели со n .*

Забелешка 5. Во овој дел пожелно е да се постави прашањето, каква е врската меѓу претходниот проблем и следнава задача: “За множество составено од n природни броеви постои подмножество чиј збир на елементи се дели со n .”

Проблем 10. *Рамнината е обоена во k бои и M е произволно конечно множество точки од рамнината. Докажи, дека постои монохроматско множество, слично на множеството M . ♦*

ДОДАТОК А

КОГНИТИВНО ПОДРАЧЈЕ НА БЛУМОВАТА ТАКСОНОМИЈА

Во нашата држава начелно е прифатено наставните цели да се формулираат согласно Блумовата таксономија. Вообичаената класификација на наставните цели која тргнува од природата на промените што настануваат кај личноста во процесот на учење ги определува следните три видови на наставни цели:

- когнитивни (сознајни) цели;
- афективни (емоционални) цели;
- психомоторни цели;

Имајќи го предвид нашиот интерес, ќе ги разгледаме само когнитивните цели од Блумовата таксономија. Пред да преминеме на разгледување на истите, ќе споменеме дека зборот *когниција* значи примање, организирање и користење на информациите - знаењата, или едноставно - сознание. Шесте степени на когнитивните цели кои всушност се познати како Блумова таксономија се: знаење, разбирање, примена, анализа, вреднување и синтеза. Но степените на Блум многу не значат ако не се преведени во конкретни вештини на учење. Во следната табела се дадени шесте степени на когнитивните цели на Блумовата таксономија и за секој од нив се дадени вештини, кои се образложени така што се поврзани со карактеристичните глаголи преку кои се искажува соодветната наставна цел, и со чија помош учениците можат да покажат колку ги разбрале информациите и како со нив се користат.

1. НИВО НА ЗНАЕЊЕ – препознавање на информациите		
1. Дефинира,	2. Набројува,	3. Запомнува,
4. Именува,	5. Забележува,	6. Повторува,
7. Раскажува,	8. Се потсетува,	9. Подвлекува,
2. НИВО НА РАЗБИРАЊЕ – сфаќање на информациите		
1. Опишува,	2. Објаснува,	3. Идентификува,
4. Известува,	5. Разгледува,	6. Изразува,
7. Препознава,	8. Дискутира,	9. Поврзува, подредува,
3. НИВО НА ПРИМЕНА – примена на знаењата при решавање проблеми		
1. Изложува,	2. Решава,	3. Применува,
4. Илустрира,	5. Конструира,	6. Приспособува,
7. Толкува,	8. Интервјуира,	9. Прикажува,

4. НИВО НА АНАЛИЗА – раздвојување на информациите со цел да се прилагодат на различните ситуации		
1. Разложува,	2. Споредува,	3. Планира,
4. Решава,	5. Прашува,	6. Скицира,
7. Експериментира,	8. Дискутира,	9. Диференцира,
5. НИВО НА СИНТЕЗА – примена на информациите при решавање проблеми		
1. Предлага,	2. Подредува,	3. Организира,
4. Креира,	5. Составува,	6. Класифицира,
7. Подготвува,	8. Поврзува,	9. Формулира,
6. НИВО НА ОЦЕНКА – вреднување на полезноста		
1. Избира,	2. Просудува,	3. Предвидува,
4. Проценува,	5. Рангира,	6. Определува приоритет
7. Вреднува,	8. Одмерува,	9. Препорачува.

Како што можеме да забележиме, првото ниво во Блумовата таксономија е најелементарно и подразбира знаења стекнати на ниво на *запомнување, препознавање и репродуцирање*. Може да се каже, дека во нашата земја по повеќето предмети настава се реализира согласно првото ниво на Блумовата таксономија. Притоа, учениците примаат готови знаења кои треба да ги запомнат, а потоа проверувањето и оценувањето на нивните постигања се сведува на проверка колкав дел од содржините успеале да запомнат и да го репродуцираат. Јасно, во случајов оценките од 1 до 5 се градуирани само врз основа на критериумот – колкав дел од „материјалот” ученикот успеал да репродуцира и „колку течно ја раскажал лекцијата”.

Ситуацијата е малку поинаква кај групата предмети од природно-математичкото подрачје, а особено во наставата по математика. Имено, наставата по математика е надминато нивото на репродукција и во значителна мера се испреплетени сите нивоа на знаења и од учениците постојано бара суштински да ги разберат поимите, релациите и генерализациите, како и да ги применуваат стекнатите знаења. Понатаму, со усвојување на низа постапки и алгоритми, кои во определени случаи преминуваат во технички процедури, а особено при докажувањето на својствата, кои се формулирани во теореми и нивни последици, учениците често пати се во ситуација да ги применуваат анализата и синтезата, а во погорните години на школување од учениците се бара и самостојно да докажуваат тврдења, како и да изведува заклучоци, што го доведува ученикот и до највисокот ниво на знаење - нивото на оценка.

Имајќи предвид дека наша основна цел е оценувањето, важно е да споменеме дека нивоата од Блумовата таксономија не треба, а и не може во изворна форма да се применуваат при нивната примена во оценувањето. Впрочем, во практиката овие нивоа честопати се испреплетуваат, па така и

нивната примена во изворната форма не е можна. Притоа, треба да се има предвид дека еден ист ученик за одредени содржини може да дојде и до највисокото ниво на когниција, но може да се случи за некоја друга содржина да ги достигне првите две или три нивоа на когниција.

Како што рековме, покрај когнитивни во наставата имаме и афективни и психомоторни цели, кои ако се има предвид синтагмата дека *треба да се оценуваат севкупните постигања на детето*, треба соодветно да се вреднуваат. Последното значително го усложнува проблемот на оценувањето, но работата станува уште покомплицирана, ако се знае дека процесот на проверување и оценување на постигањата на ученикот треба да даде информација не само за стекнатото ниво на постигнување на наставните цели, туку и за квалитетот на развојот на личноста на ученикот, односно за напредокот што го постигнал ученикот во даден временски период. проблемот на следење и вреднување на постигањата на ученикот добива на тежина и со сè почестите укажувања дека во процесот на оценување треба соодветно да се респектира и социјалното опкружување на ученикот.

На крајот од овој дел само ќе споменеме дека Блумовата таксономија дава извонредна основа за изградба на стандардите за критериумите за оценување на постигањата на учениците, но дека истата треба постојано да се надоградува. Зависно од наставната тема, содржините што таа ги опфаќа, возраста на учениците, како и припадноста во одреден образовен подсистем може да се изработат релативно прецизни критериуми за оценување на постигањата на учениците во секоја наставна дисциплина. Притоа на учителите ќе им се даде реална можност да користат современите техники и инструменти за проверување на постигањата на учениците, вклучувајќи ги и неформалните, но и стандардизирани тестови на знаења. Оценките што учениците би ги добивале во услови на постоење на вакви критериуми би биле далеку пообјективни и воедначени и не би зависеле во толку голема мера од субјективната оценка, која во помала и поголема мера е присутна во работата на секој учител. Најзначајно е тоа што учениците однапред би знаеле што треба да постигнат за да ја добијат оценка со која реално ќе бидат вреднувани нивните постигања.

ИНДЕКС НА ПОИМИ

А

Административна функција, 308
Алгебарска задача, 190
Алгоритамска задача, 191
- способност, 406
Аксиоматска теорија, 159
Аксиоматски метод, 159
Аксиоми, 158
Ало-ефект, 318
Анализа, 41, 42, 209
Аналитичка задача, 191
Аналитички метод (метод со враќање), 166
Аналитичко-синтетички метод, 41
Анегдотски метод, 412
Апостериористичко (нормативно) оценување, 321
Априористичко (критериумско) оценување, 323
Апстрахирање, 45
Апстрактна карактеристика, 135
Апстрактно-дедуктивен метод, 144, 161
Апстракција, 45
-, мисловна, 45
-, сетилна, 45
Аритметичка задача, 190
Асоцијационизам, 387

Б

База на индукција, 167
База на решение на задача, 187
Барманов циклус на учење, 130
Бехејвиоризам, 389
Боење, 510

В

Валиден мерен инструмент, 310
Вербални тестови, 340

Вештини, 254
Видов поим, 136
Вкрстен (билатерален) трансфер, 126
Внатрешно-споредбен пристап, 322
Воопштеност на знаењето, 258
Воопштување, 42
Воспитна цел, 1
Воспитно-мотивациона функција, 264
Вреднување на постигањата, 305
Втор принцип на математичка индукција, 169

Г

Генетика дефиниција, 140
Генетски начин, 161
Геометриска задача, 190
Глобално учење, 109
Годишно глобално планирање, 394
Графофолиии, 73

Д

Дебата, 285
Дедукција, 57
Дејност, 16
Дејство, 16
Декларативно знаење, 251
Делови (кадри), 226
Делумно одречно тврдење, 151
Делумно потврдно тврдење, 151
Дефиниран поим, 137
Дефинирачки поим, 137
Дефиниција, 137
Дефиниција со симболичен јазик,
Дидактички принципи, 75
Дидактички средства, 69
Дијагностично (иницијално) проверување, 266
Дијалогско изложување, 231
Дијалогска образовна програма, 73, 237
Директен метод, 166, 175
Дискусија, 42, 210
Длабочина на знаењето, 258
Доволена основа (доволен услов), 156
Добро управуван процес, 18
Доказ, 42, 165, 210
Достапност на содржините, 12

Е

Евристичка задача, 191
Евристичка стратегија, 218
Евристички дијалог, 285
Егземпларна стратегија, 217
Едноставна задача, 191
Еднакво обоени фигури, 513
Експеримент, 38
Екстерно оценување, 329
Емпириска валидност, 312
Емотивна наклонетост на учителот, 320
Есејско прашање, 365
 - - со ограничен обем, 365
 - - со проширен обем, 365
Ехо-ефект, 319

З

Заборавање, 114
Задачи за осознавање, 188, 191
 - - увежбување, 191
Заклучок (извод), 53
 - точен, 53
Заклучок на задача, 187
Заклучување по аналогија, 61
Закон на мислење, 58
Затворено прашање, 299
Зборовна грешка, 54
Зона на актуелен развој, 20
 - - близок развој, 20

И

Изведени тврдења, 158
Изведени поими, 140
Индикатор, 327
Индириктен метод, 166
Индириктна дефиниција, 141
Индуктивна претпоставка, 54, 167
Индукција, 54
 - со двојна основа, 169
Индуцирана тензија, 122
Интерес, 21, 255
Интерно оценување, 329
Информативна функција, 264, 308
Ипсативно проверување, 266
Истражувачка стратегија, 219

К

Категорична форма, 153
Катехетички дијалог, 285
Квантитативна надмоќ, 412
Класификација, 44
Когниција, 514
Комбиниран распоред на предмети, 382
Конкретизација, 46
Конкретно-индуктивен метод, 144
Конкретност на знаењето, 258
Конструкција, 42, 210
Контрадикција, 58
Контролна функција, 264
Конфигурација, 507
Концентричен распоред
 на предмети, 382
Креативност, 403
Критериум, 327
Критериумски тестови, 340
Курикулум, 383
 - затворен, 383
 - неформален, 383
 - отворен, 383
 - официјален, 383
 - реален, 383
 - скриен, 383
 - формален, 383

Л

Лабораториски метод, 161
Линеарен распоред на предмети, 382
Логичка врска, 137
Логичка грешка, 54
Логички бесмислен круг, 138, 175
Логички закон, 58
Логички прирок, 149
Логички подмет, 149
Логичко следство, 155
Локален максимум, 82
Локален минимум, 82
Лошо управуван процес, 18

М

Математичка задача, 185, 186
 - викторина, 478
Математички кружок, 475

Математичко тврдење, 149
Метод на алгебарска анализа, 207
-- беседа, 222
-- проблемска настава, 228
-- програмирана настава, 226
-- -, линеарен, 226
-- -, разгранет, 226
-- технички помагала, 232
-- усно изложување, 225
Методска единица (лекција), 245
Множество решенија, 187
Модел на автономен ученик, 467
Модели, 72
- подвижни, 73
Модулни системи, 237
Модус поненс (правило
за одделување), 58
Модус толенс, 59
Монохроматско множество, 510
Мотив, 15
Мотивација, 16
Моторно дејство (вештина), 103

Н

Набљудување, 37
Надареност, 403
Надворешно-споредбен пристап, 321
Наклоност, 21, 255
Наставен метод, 222
- план, 381
- час, 245
Наставна програма, 382
Наставно-содржинска стратегија, 387
Наставно-целна стратегија, 389
Научен метод, 37
Научност на наставата, 12
Научно-популарна литература, 72
Невербални тестови, 340
Неконзистентно споредување, 318
Неопределена задача, 189
Неопходно следство (потребен
услов), 155
Непотполна индукција, 55
Неразјаснета (слаба) аналогија, 63
Несуштествена информација, 196
Нераспределено учење, 106
Неутрална исказна формула, 58
Неформални тестови (наставни

тестови на знаење), 342
Нормативни тестови, 340
Нумеричка способност, 406

О

Обем на поим, 135
Објаснување, 225
Објективно мерење, 312
Образовен стандард за критериум за
оценување, 325
Образовни стандарди, 323
Обратна теорема, 154
Обратно тврдење, 154
Ограничена област, 512
- фигура, 512
Оперативен план за час, 399
Оперативна функција, 264
Оперативност на знаењето, 259
Опис на поим, 141
Описна оценка, 331
Определена задача, 189
Оптимална тензија, 122
Општ успех, 257
Општообразовна цел, 1
Општо одречно тврдење, 151
Општо потврдно тврдење, 150
Ориентациона функција, 308
Осетлив (дискриминативен) мерен
инструмент, 315
Основна информација, 196
- писменост, 325
Основни поими, 139
Основни тврдења, 158
Отворено прашање (задача), 299
Оценка, 305
Оценување на постигањата, 305

П

Паралелни тестови, 341
Партитивно учење, 109
Педагошко-психолошка (мотивациона)
функција, 308
Периодична литература, 72
Планирање на наставата, 392
Повеќекратна надареност, 405
Поим, 45, 135
Полуалгоритамска задача, 191

Помнење, 114
 Портфолио, 373
 Постигања, 257
 Потполна индукција, 55
 Права на Паскал, 507
 Правилно расудување, 54
 Правило за контрапозиција, 60
 Практична цел, 2
 Прашање (задача) со дополнување, 346
 -- -- избор, 345
 Превентивна функција, 264
 Превојна точка, 82
 Предавање, 225
 Предоперациона фаза, 407
 Премиса (претпоставка), 53
 Преопределена задача, 189
 Преслушување, 111
 Принцип на бисоцијална
 оптималност, 430
 -- демократичност, 430
 -- Дирихле, 511
 -- диференцијација, 308
 -- еднаквост, 511
 -- економичност, 430
 -- збир, 511
 -- индивидуализација, 308
 -- континуираност, 308
 -- лонгитудиналност, 430
 -- математика индукција, 167
 -- мултидисциплинарност, 430
 -- објективност, 308
 -- производ, 511
 -- сестраност, 308
 -- транспарентност, 308
 Прирачна литература, 72
 Природна тензија, 122
 Проблем, 230
 Проблемска задача, 187, 230
 - прашање, 230
 - ситуација, 229
 Проблемско изложување, 231
 Програмирани материјали, 227
 Противречна задача, 190
 Процедурално знаење, 253
 Процесно-развојна стратегија, 391
 Психометрија, 338
 Психометриски метод, 413

Р

Развиеност на знаењето, 259
 Разјаснета (силна) аналогија, 63
 Раскажување, 225
 Распределено учење, 106
 Рекогниција (препознавање), 112
 Рекурзивна дефиниција, 140
 Рекурзија, 50
 Релативна внатрешноспоредбена
 оценка, 322
 Релијабилно (доследно) мерење, 314
 Ретроактивна инхибиција, 118
 Ретроградна валоризација, 322
 Решение на задача, 187
 Родов поим, 136

С

Сензомоторна фаза, 407
 Скала ПРОНАЛ, 443
 - ПРОФНАД, 440
 Слајдови, 73
 Сигурност на знаењето, 259
 Синтеза, 41
 Синтетички метод (метод
 со напредување), 166
 Систематизација, 44
 Систематичност на знаењето, 258
 Системност на знаењето, 259
 Следење на постигањата, 298
 Сложена задача, 191
 Современост на наставата, 12
 Содржина на поим, 135
 Содржинска валидност, 311
 Специјализирање, 44, 49
 Специфична информација, 196
 Споредување, 40
 Способност за апстрактно мислење, 406
 - дедуктивно заклучување, 406
 - индуктивно заклучување, 406
 - заклучување по аналогија, 406
 - просторни претстави, 406
 Способности, 21, 255
 Стандарди за постигања, 323
 Стегнатост на знаењето, 259
 Стратегија, 217
 - на програмирање на наставен
 процес, 386

Структура на решението на задача, 204
Структурност на содржините, 12
Сумативно (завршно) проверување, 266

Т

Талент, 404
Тафтологија, 58
Творечки задачи, 188, 191
Тврдење, 149
Текст на задачата, 187
Тематско планирање, 396
Тенденција на дарежливост, 319
-- екстреми, 319
-- закинување, 319
-- застрашување, 320
-- контрасти, 319
-- хиерархија, 319
Теорема (изведено тврдење), 152, 165
-- на Паскал, 507
Теориска валидност, 312
Термин, 135
Тестови на знаење, 339
-- личноста, 339
-- моќ, 340
-- способности, 339
Техника на мерење, 309
Техничка насоченост, 13
Траекторија на познанието, 18
Трансфер на учењето, 126
Тригонометриска задача, 191

У

Умеења, 254
Учебник по математика, 70
Учење, 102
-- со решавање проблеми, 103
Услов на задача, 187
Условна форма, 153
Условни искази, 155
Усно проверување, 283

Ф

Фаза на конкретни операции, 407
-- согледување односи од
втор ред, 407
-- -- -- -- трет ред, 407

-- -- -- -- четврт ред, 407
-- -- проблеми, 407
-- -- формални операции, 407

Флексибилност на знаењето, 259
Формални тестови, 341
Формативно (тековно, процесно)
проверување, 266
Фреквентност на знаењето, 258
Функција на боење, 510

Х

Хипотетички силогизам, 60

Ц

Целини (порции), 226
Централна тенденција, 319
Цртежи, 73

ЛИТЕРАТУРА

1. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Assessment Reform Group. Assessment for learning. 10 principles -research-based principles to guide classroom practice. Cambridge: 2002
3. Atkinson, W. J., Birch, D.: Introduction to motivation, D. Van Nostrand company, New York, 1978
4. Bakker, S. A.: The Netherlands National Assessment and Local Autonomy - Меѓународен симпозиум “Оценување на постигањата на учениците” - Зборник на трудови; МОН-БРО Одделение за оценување, Скопје, 2001
5. Bandur, V.: Učenik u nastavnom procesu, Veselin Masleša, Sarajevo, 1985
6. Barman, Ch. R.: Classroom materials for teaching and learning science, Indiana University School Education, Indianapolis, 2007
7. Betts, T. G.: Autonomous learner model for the gifted and talented, Greeley, CO: Autonomous Learning Publications and Specialists, 1985
8. Bhattacharya, D. N.: Gifted children in mathematics: Case studies. Doctoral dissertation, State University of New York at Buffalo, New York, 1982
9. Black, P. & Wiliam, D.: Assessment and classroom learning. Assessment in Education. Principles, Policy and Practice 5(1), 7-74. 1998
10. Black, P. & Wiliam, D.: Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. Phi Delta Kappan, 80(2), 139-148. 1998
11. Bloom, B. S.: The role of gifts and markers in the development of talents, Exeptional Children, Vol 48, 1982, No 1
12. Brookhart, S. M.: Developing measurement theory for classroom assessment purposes and uses. Educational Measurement Issues and Practice, 22(4), 5-12. 2003
13. Clark, B.: Growing Up Gifted, Columbus, Ohio. Charles E. Merrill Publishing Co., 1983
14. Čudina – Obradović, M.: Nadarenost, razumevanje, prepoznavanje, razvijanje, Školska knjiga, Zagreb, 1990
15. Dewey, J.: Vaspitanje i demokratija, Obod, Cetinje, 1966
16. Dolenc, F.; Pavletić, J.: Nauka o evolucija, Školska knjiga, Zagreb, 1960
17. Đorđević, B.: Individualizacija vaspitanja darovitih, Prosveta, Beograd, 1979
18. Đorđević, B.: Školski oblici podrške u razvoju nadarenih učenika, Nastava i vaspitanje, Beograd, 1990
19. Durrell, G.: Svijet prirode, Grafički zavod Hrvatske, Zagreb, 1990
20. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 1997
21. Evans, F.: Motivacija, Nolit, Beograd, 1978
22. Feldman, D.: Naturus gambit. Child progies and the development of human potential, New York, Basic Books, Inc, 1987

23. Gallagher, J. J.: Teaching the gifted children, Boston, Allyn & Bacon, 1985
24. Grdić, B.: Praktikum iz fiziologije biljaka, Školska knjiga, Zagreb, 1967
25. Heller, K. A.; Feldhusen, J. F.: Identifying and nurturing the gifted. An international perspective, Studgard, Huber, 1986
26. House, P. A.: Providing opportunities for the Mathematically Gifted, K-12. Reston. National Council of Teachers of Mathematics, 1987
27. House, P. A.: Who will Teach the Gifted? Focus on Learning Problems in Mathematics 6, Summer 1984
28. Jellen, H. G., Verdiun, J.R.: Handbook for differential education of the gifted, Carbondale, Il. Southern Illinois University Press, 1986
29. Jochana Crighton.: Assessing Quality in Learning: Issues and Trends in Central and Eastern Europe - Меѓународен симпозиум "Оценување на постигањата на учениците"- Зборник на трудови; МОН-БРО-Одделение за оценување, Скопје, 2001
30. Jordan, A.M.: Measurement in education, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1953
31. Karnes, M. B.; Shwedel, A. M.: Assesment of preschool giftedness, Gryne & Stratton, New York, 1983
32. Klark, E. M.; Klark, A. D.: Rano iskustvo, Beograd, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, 1987
33. Koen, M., Nejgel, E.: Uvod u logiku i naučni metod, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1982
34. Koren, I.: Kako prepoznati i identificirati nadarenog učenika, Školske novine, Zagreb, 1989
35. Koren, I.: Pogled na pojavu nadarenosti i ulogu nadarenih pojedinaca u suvremenom svijetu, Školska knjiga, Zagreb, 1987
36. Larsen, S.: Influence of the New Technologies on the School and on its General Education Functions, Copenhagen, The Royal Danish School of Educational Studies, 1986
37. Larsen, S.: New Technologies and Education: Social and Psychological Aspects, Computers in Education, North-Holand, IFIP, 1988
38. Mabus, R.: A New Light in Education: Misisipi 2000, The Journal, Vol. 19, No. 1, 1991
39. MacMillan, J.H.: Classroom assessment: principles and practices for effective instruction. Boston: Allyn and Bacon, 1997
40. Malčeski, R.: Middeltal og kvadratrod, Matematik magasinet, Frederiksberg, Danmark, 2004
41. Malčeski, R.; Gogovska, V.: Proff and proving in mathematical classroom, Joint Meeting of AMS, DMV and OMG, June 16-19, 2005, Mainz, Germany

42. Malčeski, R.; Gogovska, V.: The Role of Educational method in teaching of gifted and talented students, The 10th International Congress on Mathematical Education, July 4-11, 2004, Copenhagen, Denmark
43. Malčeski, R.; Gogovska, V.: Using means inequality for getting structural mathematical knowledge, Конференција за работа со надарени ученици, Русе, Бугарија, 2003
44. Malčeski, R.; Gogovska, V.: Integration of mathematics curriculum, a Challenge of the contemporary Mathematics, International Conference on Mathematics Education, 3–5 June 2005, Svishtov – Bulgaria
45. Mandić, S.: Motivacija za školski uspjeh, Školske novine, Zagreb, 1989
46. McMillan, J. H.: Fundamental assessment principles for teachers and school administrators. Practical Assessment, Research & Evaluation, 7(8). Retrieved March 26, 2007 from
47. McMillan, J.H. Understanding and improving teachers' classroom assessment decision making: Implications for theory and practice. Educational Measurement: Issues and Practices, 22(4), 34-43, 2003
48. Michael, W. B.: Cognitive and affective components of creativity in mathematics and the physical sciences, In J. C. Stanley, W. C. George & C. H. Solano, The gifted and the creative: A fifty-year perspective. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1977
49. Nitko, A.J.: Educational assessment of students (4th ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Merrill Prentice Hall, 2004
50. Paul Eggen, Don Kauchak.: Educational Psychology - classroom connections - Macmillian Publishing COMPANY, NJ 1994
51. Petzold, R.: Approaches to Standard Settings and Assesment in the USA - Меѓународен симпозиум “Оценување на постигањата на учениците” - Зборник на трудови; МОН-БРО-Одделение за оценување, Скопје, 2001
52. Pongrac, S.: Ispitivanje i ocjenjivanje u obrazovanju - Školska Knjiga, Zagreb, 1980
53. Prvanović, S.: Metodika savremenog matematičkog obrazovanja u osnovnoj školi, Zavod za izdavanje udžbenika Srbije, Beograd, 1970
54. Renzulli, J. S.: The Triad / Revolving Door System: A Research-Based Approach to Identification and Programming for the Gifted and Talented, Gifted Child Quarterly, No 4, Minnesota
55. Renzulli, J. S.; Hartman, R. K.: Scale for rating Behavioral Characteristics of Superior Students, 1980
56. Renzulli, J. S.; Reis, S. M.: The schoolwide enrichment model, Creative Learning Press, Inc. Mansfield Center, 1985
57. Rogers, K.: Rewiew of Research on the Education of Intellectually Talented Students, St. Paul, Minnesota Department of Education, 1986
58. Roščak, R.; Valečić, H.: Moja priroda, Školska knjiga, Zagreb, 2007

59. Salpeter, J.: The multimedia PC, Technology and Learning, 1991
60. Šimleša, P.: Suvremena nastava, Pedagoško-knjiženi zbor, Zagred, 1965
61. Smith, D., Keep, R.: Children's Opinions of Educational Software, Educational Research, Vol. 28, No. 2, 1986
62. Snider, J. H.: Desingning a program for gifted mathematics students in junior high / middle schools. Doctoral dissertation, George Peabody College for Teachers of Vanderbilt University, Tennessee, 1986
63. Sternberg, R. J.; Davidson, J. E.: Conceptions of giftedness, Cambridge University Pres, New York, 1988
64. Stiggins, R.: Assessment crisis: The absence of assessment for learning. Phi Delta Kappan, 83(10), 758-765, 2002
65. Stoiner, T.: Computers and the Future of Education, Copmputers in Education, North-Holand, IFIP, 1988
66. Wilmot, B. A.: The desing administration and analysis of an instrument which identifies mathematically gifted students in grades four, five and six. Doctoral dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, 1983
67. Арнаудова, В.; Ачкоска – Лешковска, Е.: Надарено дете, Филозовски факултет, УКИМ, 2000
68. Бабанский, К.: Об изучений причин неуспеваемости школьников, Сов. педагогика, 1, 1972
69. Бижков, Г., Попов, Н.: Сравнително образование, Универзитетско издателство Св. Климент Охридски, София, 1994
70. Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю.: Методика на обучението по математика, I част, Модул, София, 1996
71. Ганчев, И., Кучинов, Й.: Организация и методика на урока по математика, София, 1987
72. Ганчев, И.: Аналитико-синтетичният метод на мислене в УКМ, Обучението по математика, 2/1986
73. Ганчев, И.: За математическите задачи, София, 1971
74. Ганчев, И.: Обучението по математика в системата на междупредметните връзки, София, 1985
75. Ганчев, И.: Основни учебни дейности в урока по математика, "Модул", София, 1996
76. Гарбишек, С.; Бетел, Ц.: Матурските испити во Словенија – Меѓународен симпозиум "Оценување на постигањата на учениците" - Зборник на трудови; МОНБРО- Одделение за оценување, Скопје 2001
77. Гастева, С. А.; Крельштейн, Б. И.; Ляпин, С. Е.; Шидловская, М. М.: Методика преподавания математики, Просвещение, Москва, 1965
78. Гнеденко, Б. В.: Върху развитието на мисленето и речта в уроците по математика, Математика в школе, 3/1976, Москва (превод на бугарски)
79. Грубиќ, М.: Градинка во училиште, Просветно дело, Скопје, 1961

80. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифоски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
81. Димовски, И.; Малчески, Р.; Малческа, Ц.: Следење, проверување и оценување на постигањата на учениците, ФОН универзитет, Скопје, 2010
82. Ђорђевиќ, Д.: Психолошке особине и начини откривања и воспитања обдарене деца, Праћење развој ученика, Београд, 1972
83. Ђуриќ, Т. Р.: Професионална оријентација даровитих, КДДОС, Београд, 1996
84. Есипов, Б. П.: Сомостоятелната работа на учениците по време урока, Народна просвета, Софија, 1963
85. Занков, Л. В.: Обучение и развитие, Педагогика, Москва, 1982
86. Иванов, П.: Методика на обучението по математика, Наука и изкуство, Софија, 1965
87. Јанев, И.: Задачи и тестови по математика за приемни испити, Просветно дело, Скопје, 1994
88. Касабанова, М.: Човекът и природата, Просвета, Софија, 2007
89. Колосов, А. А.: Книга за извънкласно четене по математика, Народна просвета, Софија, 1962
90. Колягин, Ю., Луканкин, Г.Л. и др.: Методика на преподаването по математика в средното училище (обща методика), Народна просвета, Софија, 1980
91. Лесов, Х.; Дойчев, С.: Теми за класна и извънкласна работа по математика, Регалија, Софија, 1995
92. Малческа, Ц., Малчески, Р.: Образовни крстопати на прагот на XXI век, Просветно дело, 1999, Скопје
93. Малческа, Ц., Малчески, Р.: Оспособеноста на наставникот за успешно следење, проверување и оценување на постигањата на учениците - Меѓународен симпозиум "Оценување на постигањата на учениците" - Зборник на трудови; МОН-БРО-Одделение за оценување, Скопје, 2001
94. Малческа, Ц.: Откривање на пропустите во знаењата и умењата по биологија кај учениците во основното образование и патишта за нивно отстранување, Просветно дело, Скопје, 1999
95. Малческа, Ц.: Активноста на учениците во наставата по биологија, Образовни рефлекси, Скопје, 2001
96. Малческа, Ц.: Наставата по биологија на прагот на новиот милениум, Образовни рефлекси 2000, Скопје
97. Малчески Р., Малчески А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, II, III, IV, Сигма, Скопје, 2001
98. Малчески, А.; Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика⁺, 1997, Софија
99. Малчески, Р. ; Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994

100. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Вовед во теорија на броеви, МММ, Скопје, 1993
101. Малчески, Р., Малчески, А.: За развојот на талентираниите ученици за математика, I конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, 3-5.10.1996, Охрид
102. Малчески, Р., Малчески, А.: Решавање на текстуални задачи, Сигма, Скопје, 1996
103. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
104. Малчески, Р.: Белешка за бројот e , Сигма, Скопје, 2000
105. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот e , Сигма, Скопје, 1996
106. Малчески, Р.: Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје, 1996
107. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
108. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
109. Малчески, Р.: За докажување на условните неравенства, Plus, Тетово, 1998
110. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од n -ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
111. Малчески, Р.: И ова е лесно (алгоритам за решавање на задачи со прелевања), Нумерус, Скопје, 2005
112. Малчески, Р.: Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје, 2005
113. Малчески, Р.: Како да и помогнете на мува која не знае геометрија 1 и 2, Нумерус, Скопје, 1996
114. Малчески, Р.: Математика 2, Просветно дело, Скопје 2002
115. Малчески, Р.: Математички игри, Нумерус XX 1,2,3 и 4, Скопје, 1995
116. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Нумерус, Скопје, 2005
117. Малчески, Р.: Методска белешка за воведување на поимот ирационален број, Просветно дело, Скопје, 2003
118. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
119. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
120. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика⁺, Софија, 2003
121. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
122. Малчески, Р.: Проблем на паркетање, Математика⁺, Софија, 2001
123. Малчески, Р.: Семејно решавање на една “едноставна” задача, Нумерус, Скопје, 2005
124. Малчески, Р.: Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје, 1995
125. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
126. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Нумерус, Скопје, 2005

127. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
128. Малчески, Р.; Гоговска, В.: Интеграција на наставата, предизвик на современата настава по математика, Зборник трудови на Меѓународна конференција за математичко образование, Јуни 3-5, 2005, Свиштов, Р. Бугарија
129. Малчески, Р.; Малческа, Ц.: Работа со надарени ученици, ФОН универзитет, Скопје, 2010
130. Малчески, Р.; Малческа, Ц.; Малческа, Ф.: Стратегии и техники на учење и подучување, ФОН универзитет, Скопје, 2010
131. Малчески, Р.; Малчески, А.: За златниот пресек, Нумерус, 1995
132. Малчески, Р.; Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, Сигма, Скопје, 1993
133. Малчески, Р.; Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
134. Малчески, Р.; Малчески, А.; Димовски, Д.: За најмладите математичари, Сигма, Скопје, 2002
135. Малчески, Р.; Малчески, А.; Трајковска, И.: Комплексните броеви, можност за внатрешнопредметна интеграција во наставата по математика, Зборник на трудови од II конгрес на СМИМ, Охрид, 2000
136. Малчески, Р.; Цветковски, З.: Математичка индукција I, Сигма, 2005
137. Малчески, Р.; Цветковски, З.: Математичка индукција II, Сигма, 2005
138. Математика и естествознание, (под редакција на Шварцбург, С.И.), Просвещение, Москва, 1969
139. Пенавин, В.: Рад са талентованим ученицима, Педагошка стварност, 10, 1964
140. Петров, К.: За някои въпроси на обучението по математика, Народна просвета, София, 1980
141. Пијаже, Ж.; Инхелдер, Б.: Интелектуални развој детета, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1978
142. Пиперевски, Б.; Малчески, Р.; Малчески, А.; Трајковска И.: Избрани содржини од елементарна математика II, Сигма, Скопје, 2001
143. Пойа, Д.: Как да се решава задача, София, 1972
144. Пойа, Д.: Математиката и правдоподобните разсъждения, София, 1970
145. Пойа, Д.: Математичкото откритие, София, 1968
146. Попоски, К.: Знаењето и неговото усвојување, Просветно дело, Скопје, 1992
147. Попоски, К.: Психолошки основи на современата настава, Просветно дело, Скопје, 1997
148. Попоски, К.: Современи сваќања за проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците, МИС, Скопје, 1996
149. Рабунский, Е. Индивидуализация домашних заданий-важно средство повышени еффективности обучения, Сов. педагогика, 4, 1962
150. Ракочевић, М.М.: Откривање природе, Просветни преглед, Београд, 1982

151. Рудакова, И. А.: Дидактика, Феникс, Ростов на Дон, 2005
152. Седмая летная конференция турнира городов, Информационный центр турнира городов, Нови Сад, 1995
153. Скаткин, М.: Изискания към съвременния урок, Учебен процес, Народна просвета, София, 1971
154. Смиљаниќ, Ѓ. Нека питања оценивања ученика - Завод за издавање учебника Социјалистичке Републике Србије, Београд, 1966
155. Столяр, А. А.: Педагогика на математиката, Народна просвета, София, 1976
156. Столяр, А.А.: Логические проблемы преподавания математики, Минск, 1968
157. Столяр, А.А.: Чему должно учить методика преподавания математики, Математика в школе, 6/1979
158. Стяжкин, Н. И.: Формирование математической логики, Наука, Москва, 1967
159. Трајковска, И.; Маркоски, Ѓ.; Малчески, Р.: Избрани задачи од елементарна алгебра, Нумерус, Скопје, 2003
160. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
161. Фридман, Л.М.: Психолого-педагогические основы обучени по математики, Москва, 1983
162. Хилберт, Д.: Основания геометрии, Москва, 1948
163. Целакоски, Н.: Дидактика на математиката, Нумерус, Скопје, 1993
164. Цонев, П.: Методи на изпитване и оценываване, Педагогика, бр. 12, София, 1991
165. Цонева, В.: Децата на Тексас, Учителско дело, 29, 1992
166. Цонева, В.: Проекти на училиштето во XXI век во САЩ, Педагогика, 10, 1992
167. Чесноков, А.С., Нешков, К.И., Шварцбурд, Ц.И.: Дидактические материалы по математике, Просвещение, Москва, 1973

