Билјана Стојоска

Теорема на Стјуарт

Во овој напис ќе ја разгледаме теоремата на шкотскиот математичар Стјуарт (1717-1785) која се однесува на метричките односи на елементите на триаголникот.Оваа теорема и формулите добиени од неа се доста корисни при решавањето на некои задачи за триаголник.

Теорема. Ако на триаголникот ABC, на страната BC е избрана точка D која лежи меѓу точките B и C, тогаш отсечката $\overline{AD}=d$ од страната BC отсекува отсечки m и n за кои важи релацијата

$$d^2a=b^2m+c^2n-amn\,. \qquad (1)$$

Доказ. Да ги разгледаме триаголниците ABD и ADC (црт.1.) Нека $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BD}=m$, $\overline{DC}=n$, $\overline{BC}=a$, $\angle ADC=\delta$ и $\angle BDA=180^\circ-\delta$. Од косинусната теорема добиваме:

$$b^2=d^2+n^2-2nd\cos\delta$$

$$c^2=d^2+m^2+2md\cos\delta\,.$$

Ако првото равенство го помножиме со m, а второто со n, а потоа ги собереме, добиваме:

$$b^2m+c^2n=d^2(m+n)+mn(m+n)$$

Бидејќи $m+n=a$, добиваме:

$$d^2a=b^2m+c^2n-amn\,.$$

Примената на теоремата на Стјуарт ќе ја разгледаме на следните неколку примери:

Пример 1. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник ја поделиме н атриа еднакви дела и точките на поделба ги поврземе со темето на правиот агол, тогаш збирот од квадратите на страната на така добиениот среден триаголник е еднаков на $2/3$ од квадратот на хипотенузата. Докажи!

Решение.Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C (црт.2), а точките на поделба се D и E. Од Стјуартовата теорема за отсечките CD и CE следува:

$$\overline{CD}^2\cdot c=a^2\cdot\overline{AD}+b^2\cdot\overline{DB}-c\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DB}\,, \qquad (2)$$

$$\overline{CE}^2\cdot c=a^2\cdot\overline{AE}+b^2\cdot\overline{EB}-c\cdot\overline{AE}\cdot\overline{EB}\,. \qquad (3)$$

Од $\overline{AD}=\frac{1}{3}c$, $\overline{BD}=\frac{2}{3}c$, $\overline{DE}=\frac{1}{3}c$, $\overline{EB}=\frac{1}{3}c$, $\overline{AE}=\frac{2}{3}c$ (каде $\overline{AB}=c$) и равенствата (2) и (3) добиваме:

$$\overline{CD}^2\cdot c=\frac{a^2c}{3}+\frac{2b^2c}{3}-\frac{2c^3}{9}$$

$$\overline{CE}^2\cdot c=\frac{2a^2c}{3}+\frac{b^2c}{3}-\frac{2c^3}{9}\,.$$

Ако последните две равенки ги скратиме со c, а потоа ги собереме, тогаш имаме:

$$\overline{CD}^2+\overline{CE}^2=a^2+b^2-\frac{4c^2}{9}\,.$$

Бидејќи $a^2+b^2=c^2$ (според Питагорова теорема), а $\overline{DE}^2=\frac{c^2}{9}$ го додадеме на двете страни на последното неравенство, тогаш добиваме

$$\overline{CD}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=c^2-\frac{4c^2}{9}+\frac{c^2}{9}=\frac{2}{3}c^2\,.$$

Пример 2. Нека a,b,c се должините на страните на ΔABC, а m_a,m_b,m_c се должините на соодветните тежишни линии. Докажи дека:

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\,, \qquad (4)$$

$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}\,, \qquad (5)$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{b^2}{4}\,. \qquad (6)$$

Решение.Ќе ја докажеме релацијата (4).

Користејќи го цртежот 1 и неговите ознаки, имаме $m=n=\frac{a}{2}$ и $d=m_a$. Со замена во релацијата (1) ја добиваме релацијата

$$m_a^2 \cdot a = \frac{b^2a}{2} + \frac{c^2a}{2} - \frac{a^3}{4} .$$

По скратување на оваа релација со a се добива релацијата (4(, т.е.

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Релациите (5) и (6) се докажуваат како и релацијата (4).

Пример 3.Ако a,b,c се должини на страни на ΔABC, а h_a, h_b, h_c се должини на соодветните висини, тогаш е точно следново неравенство

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \le \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) . \qquad (7)$$

Докажи!

Решение.Со собирање на равенствата (4),(5) и (6) се добива:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) . \qquad (8)$$

Неравенството (7) непосредно следува од неравенствата

$$h_a \le m_a , \; h_b \le m_b , h_c \le m_c$$

и последното равенство (8).

Забелешка. Релацијата (7) може да биде равенство ако важи $h_a = m_a$, $h_b = m_b$, $h_c = m_c$, т.е. ако триаголникот е рамностран.

Пример 4.Должините н атежишните линии на еден триаголник се: $m_a = 9$ cm , $m_b = 12$ cm , $m_c = 15$ cm . Пресметај ја плоштината на тој триаголник.

Решение.Од релацијата (8) имаме:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) , \qquad (*)$$

а од релацијата (4) следува: со сведување на заеднички именител имаме $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$, од каде се добива релацијата

$$b^2 + c^2 = \frac{4m_a^2 + a^2}{2} . \qquad (9)$$

Од равенството (*) и од релацијата (9) добиваме дека:

$$a^2 = \frac{4}{9}[2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2] .$$

Аналогно, за b и c ги добиваме следните релации:

$$b^2 = \frac{4}{9}[2(m_a^2 + m_c^2) - m_b^2] , \qquad c^2 = \frac{4}{9}[2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2] .$$

Заменувајќи ги вредностите з атежиќните линии $m_a = 9$ cm , $m_b = 12$ cm , $m_c = 15$ cm , за a,b и c ги добиваме следните вредности за страните на триаголникот: $a = 2\sqrt{73}$, $b = 4\sqrt{13}$, $c = 10$. Со примена на Хероновата формула за плоштина на триаголник, добиваме:

$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, каде $s = \sqrt{73} + 2\sqrt{13} + 5$, т.е. $P = 72 \text{ cm}^2$.

Пример 5.Докажи дека за секој триаголник важи неравенството:

$$b^2 + c^2 \ge 2am_a ,$$

каде a,b,c се должини на страните на триаголникот, а m_a е должина на медијаната.

Решение.Од равенството (9) и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме:

$$b^2 + c^2 = \frac{4m_a^2 + a^2}{2} \ge \sqrt{4m_a^2a^2} = 2am_a .$$

Пример 6.Изрази ги должините на симетралите на внатрешните агли на триаголникот со помош на должинитењ на страните на триаголникот:

Решение. Со $l_\alpha = \overline{AD}$ да ја означиме симетралата на внатрешниот агол α на триаголникот ABC (цртеж 1). Точката D ја дели страната BC пропорционално со страните c и b, т.е. $m:n = c:b$, а $m+n=a$. Според тоа,

$$m = \frac{ac}{b+c} , \; n = \frac{ab}{b+c} .$$

Од последните две равенства и релацијата (1) се добива:

$$l_\alpha^2 a = \frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} - \frac{a^3bc}{(b+c)^2} ,$$

т.е.

$$l_\alpha^2 = bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}. \qquad (10)$$

Аналогно добиваме и за другите две симетрали на внатрешните агли β и γ:

$$l_\beta^2 = ac\frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+c)^2} \qquad (11)$$

$$l_\gamma^2 = ba\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}. \qquad (12)$$

Пример 7.Ако во ΔABC должината на симетралата на аголот α е l_α, а отсечоците кои таа ги отсекува на страната BC се m и n (цртеж 1) тогаш $l_\alpha^2 = bc - mn$. Докажи!

Решение.Релацијата (10) можеме да ја запишеме и во обликот

$$l_\alpha^2 = bc - \frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ac}{b+c}.$$

Бидејќи

$$\frac{ab}{b+c} = n,\ \frac{ac}{b+c} = m,$$

Добиваме дека

$$l_\alpha^2 = bc - mn.$$

Аналогни, може да ги изведеме и формулите за l_β^2 и l_γ^2.

Дефинција.Симедијана е права симетрична на тежишната линија во однос на симетралата на аголот повлечена од исто теме на аголот.

На цртеж 3 имаме: AA_1 -тежишна линија, AD симетрала на аголот и AA_2 -симедијана.

За симедијаната важи следното својство(ќе го прифатиме за точно без доказ):

Отсечките кои симедијаната ги отсекува на страната се правопропорционални со квадратите на другите две страни, т.е. ако

$$m = \overline{BA_2},\ n = \overline{A_2C},\ \overline{AB} = c,\ \overline{AC} = b,$$

тогаш:

$$m : n = c^2 : b^2. \qquad (13)$$

Пример 8.Изрази ги должините на симедијаните на триаголникот со помош на должините на страните на тој триаголник.

Решение.Од $m+n=a$ и релаџијата (13) се добива:

$$m = \frac{ac^2}{b^2+c^2},\ n = \frac{ab^2}{b^2+c^2}. \qquad (14)$$

За симедијаната s_a (цртеж 3) според теоремата на Стјуарт, добиваме:

$$s_a^2 a = b^2 m + c^2 n - amn \qquad (15)$$

Ако во (15), за m и n ги замениме формулите од (14), па потоа скратиме со a, се добива:

$$s_a^2 = b^2c^2\frac{2(b^2+c^2) - a^2}{(b^2+c^2)^2}. \qquad (16)$$

Аналогно, за симедијаните s_b и s_c, добиваме:

$$s_b^2 = a^2c^2\frac{2(a^2+c^2) - b^2}{(a^2+c^2)^2}$$

и

$$s_c^2 = a^2b^2\frac{2(a^2+b^2) - c^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

На крајот на овој напис ќе дадеме неколку задачи за самостојна работа:

Задача 1.Ако должинитењ на страните на ΔABC се a,b,c а должините н атежишните линии се m_a, m_b, m_c, тогаш за нив важи равенството:

$$16(m_a^2m_b^2 + m_b^2m_c^2 + m_c^2m_a^2) = 9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Докажи!

Задача 2.Во правоаголниот триаголник ABC, на хипотенузата AB е земена точка M така што триаголниците MAB, MBC и MCA имаат еднакви плоштини. Докажи дека

$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 5\overline{MC}^2$.

Задача 3. Нека T е тежиштето на ΔABC и M е произволна точка во ΔABC. Докажи дека

$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 + 3\overline{MT}^2$.

Игра со топчиња

Секој од тројцата играчи во играта која ќе ја објасниме избрал едно од три топчиња, кои единствено се разликуваат според бојата и одлучил со колкава сума пари ќе ја започне играта. Играта се состои во тоа што двајца од играчите го ставаат своето топче во врежичка од која третиот играч извлекува едно топче. Игрчот чие топче е извлечено добива од својот противник, од играчот чие топче останало во врежичката, износ еднаков на оној кој веќе го има.Победникот ја игра следната игра со третиот играч, т.е. со оној кој во оваа игра го извлекувал топчето.

После три изиграни игри, играчите забележале дека:

а)секој од тројцата играчи победил во една игра, и

б)секој од играчите после овие три игри имал по 16 денари.

Колку пари имал секој од играчите пред да ја заиграат играта.