Регионални натпревари во средното образование
1978-2019

ПМЗ АРМАГАНКА
Скопје, ноември 2021 година

Издавач: ПМЗ АРМАГАНКА
Адреса: ул 2 бр 107/А
Скопје, Република Македонија

Рецензенти

Ана Димовска, професор по математика
Златко Петковски, професор по математика

ПРЕДГОВОР

Регионалните натпревари по математика за учениците од средното образование во Република Македонија имаат долга традиција. Првиот натпревар е одржан во 1978 година и оттогаш до сега се спроведуваат непрекинато, секоја година.

Направени се повеќе збирки задачи за истите, но никогаш досега тоа не е направена збирка која во која ги има задачите целосно. Издадени се периодични книги за регионалните натпревари, најчесто по десет последователни години.

Во оваа книга се собрани задачите од сите досега одржани регионални натпревари или вкупно 882 задачи. Секако дека тоа зборува за напорната работа на комисиите за натпревари, ако се земе предвид дека за овој натпревар изборот на задачи е меѓу најтешките. Многу колеги дадоа несебичен придонес за, пред се, да се соберат сите задачи, како и тие да се оформат во ракопис, имајќи го предвид големиот временски период кој е опфатен.

Во оваа книга ќе се препознаат многу колеги математичари, кои биле натпреварувачи на истите или пак биле ментори на ученици. Треба да се нагласи големата и клучна улога на професорите од средното образование. Во изминатите повеќе од 40 години тие ја играа главната улога во нивното спроведување.

Содржината на оваа збирка задачи ќе биде интересна покрај за колегите математичари, и за многу машински и електро инжинери, како и технолози, градежни инжинери, економисти, поранешни напреварувачи, или љубители на математиката.

Задачите од оваа збирка може да се користат во припремата на новите генерации талентирани млади математичари, како и во редовната настава.

Секако дека совршена книга нема, па затоа ќе бидеме благодарни на секој кој ќе даде предлог за нејзино подобрување, а воочените недостатоци и грешки ги пријави на адреса

aleksa.malceski@gmail.com

Тема	Задача
Системи линеарни рав.	129, 147, 150, 161, 162, 180, 195, 214, 249, 275, 277, 301, 393, 515, 516, 530, 592, 686
Геометриски тела	13, 34, 52, 68, 103, 104, 120, 128, 136, 151, 156, 168, 172, 212, 216, 228, 230, 236, 274, 286, 298, 430, 456, 496, 503, 541, 566, 589, 612, 672
Математичка логика и множества	84, 96, 113, 131, 145, 161, 209, 225, 229, 250, 273, 276, 295, 325, 369, 417, 443, 491, 538, 565, 591, 637, 663, 680
Основни бројни множества и теорија на броеви	1, 5, 20, 35, 51, 67, 69, 80, 96, 97, 98, 119, 126, 130, 144, 171, 193, 210, 226, 251, 260, 278, 300, 322, 345, 348, 349, 371, 373, 378, 388, 394, 441, 493, 495, 514, 542, 543, 562, 587, 588, 590, 611, 616, 619, 628, 634, 635, 638, 656, 661, 662, 680, 681, 701, 708
Алгебарски рационални изрази	17, 36, 49, 65, 81, 227, 253, 297, 323, 370, 418, 421, 450, 466, 467, 490, 499, 518, 519, 540, 542, 563, 586, 610, 632, 635, 636, 659, 660, 664, 683, 704, 706
Геометриски фигури во рамнина	6, 8, 10, 23, 24, 26, 38, 39, 44, 55, 56, 59, 62, 72, 76, 87, 88, 107, 118, 132, 146, 148, 163, 164, 167, 179, 184, 196, 232, 240, 241, 252, 254, 256, 264, 266, 270, 279, 288, 290, 302, 304, 328, 332, 334, 336, 351, 359, 372, 374, 376, 383, 395, 396, 398, 400, 412, 419, 420, 422, 424, 432, 434, 444, 445, 452, 462, 465, 468, 469, 470, 473, 475, 476, 492, 494, 517, 523, 530, 547, 550, 576, 577, 579, 600, 617, 621, 639, 642, 645, 667, 668, 669, 684, 688, 697, 700, 705, 707, 709, 710, 714, 716
Линеарна функција, линеарни равенки неравенки	3, 18, 21, 33, 66, 83, 99, 101, 177, 214, 277, 299, 324, 326, 350, 397, 515, 613, 682
Системи линеарни равенки и неравенки	37, 45, 50, 99, 129, 147, 180, 195, 301, 515, 517, 544, 686
Степени и корени	105, 133, 152, 165, 166, 211, 256, 260, 282, 284, 313, 331, 346, 352, 357, 378, 402, 404, 423, 446, 449, 474, 571, 572, 573, 593, 594, 620, 666, 715
Тригонометриски функции од остар агол во правоаголен триаголник	90, 100, 115, 116, 525, 530, 555, 578, 579, 601, 609, 645, 685, 719
Комплексни броеви	22, 40, 53, 85, 134, 149, 181, 197, 213, 259, 281, 283, 305, 307, 329, 354, 356, 375, 399, 425, 427, 451, 472, 501, 522, 545, 546, 569, 640, 641, 665, 712
Квадратна равенка, квадратни системи	7, 54, 63, 71, 86, 117, 135, 155, 162, 168, 187, 198, 199, 215, 218, 255, 258, 280, 306, 327, 353, 355, 377, 379, 380, 401, 403, 426, 428, 447, 471, 500, 520, 521, 548, 549, 570, 595, 596, 625, 643, 644, 690, 711, 713, 727
Квадратна функција и квадратна неравенка	9, 25, 57, 123, 137, 185, 235, 303, 320, 330, 448, 497, 498, 568, 604, 615, 674, 689, 713
Елементи од стереометрија	4, 13, 19, 29, 46, 79, 120, 124, 128, 138, 156, 168, 172, 188, 203, 220, 286, 312, 314, 342, 358, 361, 382, 410, 456, 483, 503, 527, 567, 649
Тригонометрија	12, 27, 43, 58, 60, 75, 82, 91, 92, 94, 106, 140, 142, 154, 159, 170, 174, 186, 187, 190, 204, 205, 219, 222, 238, 245, 247, 261, 268, 285, 292, 310, 313, 335, 339, 360, 364, 386, 388, 407, 408, 409, 412, 413, 437, 438, 440, 454, 455, 457, 458, 479, 480, 482, 504, 506, 524, 526, 531, 551, 554, 575, 578, 598, 599, 622, 623, 624, 650, 651, 673, 695, 696, 702,718, 719, 721, 723
Елементи од комбинаторика	16, 30, 77, 111, 114, 144, 157, 176, 189, 223, 243, 250, 294, 295, 319, 363, 366, 387, 392, 414, 439, 460, 464, 487, 488, 508, 509, 532, 559, 564, 581, 654, 656, 657, 676, 677, 724
Аналитичка геометрија	15, 32, 47, 61, 78, 93, 110, 125, 141, 160, 175, 191, 208, 224, 246, 248, 267, 291, 318, 343, 365, 367, 390, 411, 435, 463, 486, 510, 513, 535, 536, 537, 556, 583, 585, 678, 679
Низи и прогресии	14, 31, 48, 64, 95, 121, 127, 143, 158, 173, 192, 206, 221, 269, 271, 293, 315, 340, 341, 389, 391, 413, 415, 436, 452, 459, 484, 485, 533, 534, 557, 561, 580, 605, 629, 630, 631, 633, 653, 655, 675, 699, 722, 726
Функции и функционални равенки, полиноми	2, 41, 70, 73, 183, 194, 244, 265, 296, 311, 315, 316, 317, 321, 333, 344, 368, 384, 387, 488, 489, 511,558, 560, 582, 658, 703, 725
Неравенства	89, 122, 139, 169, 192, 207, 233, 234, 263, 268, 285, 308, 309, 337, 347, 358, 362, 384, 385, 409, 416, 429, 431, 442, 453, 512, 528, 584, 606, 607, 608, 614, 632, 687, 692, 698, 706, 717, 724
Експоненцијална и логаритамска функција	11, 28, 42, 74, 89, 108, 122, 139, 140, 153, 169, 201, 202, 217, 239, 242, 262, 287, 289, 309, 338, 381, 405, 429, 453, 461, 477, 478, 502, 505, 507, 528, 529, 552, 553, 574, 602,

	603, 626, 627, 647, 648, 670, 671, 693, 694, 717, 720

I регионален натпревар - 1978 година

I година

1. Докажи дека квадратот на секој природен непарен број може да се запише во обликот $8p+1$ каде што p е ненегативен цел број.

Решение. Пред се, секој непарен природен број може да се запише во облик $2n+1$, каде што n е ненегативен цел број. Имаме

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1, \qquad (1)$$

Треба да уочиме дека производ на два последователни цели броеви е парен број. Според тоа, производот $n(n+1)$ во (1) може да се напише во обликот $2p$, каде што p е ненегативен цел број, па имаме

$$(2n+1)^2 = 4 \cdot 2p + 1 = 8p + 1,$$

што и требаше да се докаже.

2. Разложи го на множители полиномот $x^3 - 7x + 6$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 &= x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2-1) - 6(x-1) = \\ &= x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = \\ &= (x-1)[x(x+1) - 6] = (x-1)(x^2 + x - 6) = \\ &= (x-1)(x^2 - 4 + x - 2) = \\ &= (x-1)[(x-2)(x+2) + x - 2] = \\ &= (x-1)x-2)(x+2+1) = \\ &= (x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

3. Таткото сега има 35 години, а синот има 7 години. По колку години таткото ќе биде двапати постар од синот?

Решение. Да го означиме со x бројот на годините што треба да поминат за таткото да биде двапати постар од синот. По изминувањето на x години, бројот на годините на таткото, $35+x$, ќе биде двапати поголем од бројот на годините на синот, $7+x$, па имаме

$$35 + x = 2(7 + x),$$

од каде што добиваме $x = 21$.

Значи, таткото ќе биде двапати постар од синот по 21 година.

4. Пет бакарни коцки со должини на рабовите $15, 16, 20, 24$ и 30 cm соодветно, треба да се слеат во една топка. Да се пресмета дијаметарот на топката и односот од збирот на плоштините на коцките и плоштината на топката.

Решение. Да го означиме со V (P) волуменот (плоштината) на топката чиј што радиус треба да се определи, а со V_1, V_2, V_3, V_4 и V_5 (P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5) волумените (плоштините) на коцките чиишто должини на рабовите се $15, 16, 20, 24$ и 30 cm соодветно.

Јасно е дека збирот од волумените на коцките е еднаков со волуменот на топката, т.е.

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V,$$

т.е.

$$15^3+16^3+20^3+24^3+30^3=\frac{4}{3}R^3\pi,$$

од каде што добиваме $R=\sqrt[3]{\frac{42221,25}{\pi}}$ cm, па дијаметарот на топката е $D=2R=2\sqrt[3]{\frac{42221,25}{\pi}}$ cm.

Сега да го определиме односот на збирот на плоштините на коцките спрема плоштината на топката. Имаме:

$$\frac{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5}{P}=\frac{6(15^2+16^2+20^2+24^2+30^2)}{4\cdot 23,8^2\cdot\pi}\approx 1,9.$$

II година

5. Збирот на цифрите на еден троцифрен број е 10. Цифрата на десетките е еднаква на збирот од цифрата на стотките и цифрата на единиците. Ако цифрата на единиците и цифрата на десетките си ги разменат местата се добива трицифрен број, којшто е за 9 помал од првобитниот број. Најди го тој број.

Решение. Ако x е цифрата на единиците, y цифрата на десетките и z-цифрата на стотките на бараниот трицифрен број, тогаш тој може да се запише во облик $x+10y+100z$. Бидејќи збирот на цифрите на бараниот број е 10, имаме:

$$x+y+z=10. \qquad (1)$$

Од друга страна, цифрата на десетките е еднаква со збирот од цифрата на единиците и цифрата на стотките, т.е.

$$y=x+z. \qquad (2)$$

Кога цифрата на единиците и цифрата на десетките во дадениот трицифрен број ќе си ги променат своите места, се добива трицифрен број $y+10x+100z$, којшто е за 9 помал од првобитниот $x+10y+100z$, па имаме

$$y+10x+100z+9=x+10y+100z. \qquad (3)$$

Решавајќи го системот составен од равенките (1), (2) и (3) добивме $x=4, y=5$ и $z=1$, па бараниот број е 154.

6. Нека P е внатрешна точка на триаголникот ABC. Да ги означиме со p_a, p_b и p_c растојанијата од точката P до страните BC, CA и AB соодветно, а со h_a, h_b и h_c висините спуштени од A, B и C соодветно. Да се докаже дека

$$\frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}=1.$$

Решение. Да ја означиме со S плоштината на триаголникот ABC, а со S_1, S_2 и S_3 плоштините на триаголниците PBC, PCA и PAB соодветно. Според тоа, имаме

$$\frac{S_1}{S}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot p_a}{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot h_a}=\frac{p_a}{h_a},\ \frac{S_2}{S}=\frac{\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot p_b}{\frac{1}{2}\overline{CA}\cdot h_b}=\frac{p_b}{h_b},\ \frac{S_3}{S}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot p_c}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h_c}=\frac{p_c}{h_c}.$$

Имајќи предвид дека плоштината на триаголникот ABC е збир на плоштините на триаголниците PBC, PCA и PAB, т.е. $S_1 + S_2 + S_3 = S$ па имаме

$$\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1 .$$

7. Да се најде $\frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5}$, каде што x_1 и x_2 се решенијата на квадратната равенка $x^2 + kx + s = 0$.

Решение. Според Виетовите правила, решенијата x_1 и x_2 на дадената квадратна равенка ги задоволуваат равенствата

$$x_1 + x_2 = -k \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = s .$$

Користејќи го овој факт, како и идентитетот $x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + x_2^4)$ имаме

$$\frac{1}{x_1^5} + \frac{1}{x_2^5} = \frac{x_1^5 + x_2^5}{x_1^5 x_2^5} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + x_2^4)}{(x_1 x_2)^5} =$$

$$= \frac{-k[(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2 x_2^2 - x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3)}{s^5} =$$

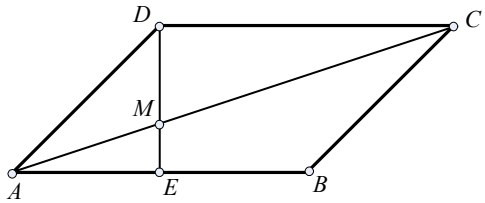
$$= \frac{-k\{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]^2 - (x_1 x_2)^2 - x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)\}}{s^5} =$$

$$= \frac{-k\{(k^2 - 2s)^2 - (x_1 x_2)^2 - s[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2]\}}{s^5} =$$

$$= -[(k^2 - 2s)^2 - s^2 - s(k^2 - 2s)] = -\frac{k}{s^5}(k^4 - 5k^2 s + 5s^2).$$

8. Нека E е средина на страната AB од паралелограмот $ABCD$ и нека $M = AC \cap DE$. Најдаи ги соодносите $\overline{AM} : \overline{MC}$ и $\overline{DM} : \overline{ME}$.

Решение. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (види цртеж). Имаме:



$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{DM} = \mu \overrightarrow{DE} = \mu\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right),$$

за некои броеви λ и μ. Бидејќи

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} ,$$

добиваме

$$\vec{b} + \mu\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) ,$$

а по средувањето $\left(\frac{1}{2}\mu - \lambda\right)\vec{a} = (\lambda + \mu - 1)\vec{b}$.

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, па од претходното равенство следува, дека

$$\frac{1}{2}\mu - \lambda = 0$$

$$\lambda + \mu - 1 = 0 ,$$

од каде што добиваме $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$.

Според тоа,

$$\overline{AM} : \overline{MC} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1:2, \quad \overline{DM} : \overline{ME} = 2:1.$$

III година

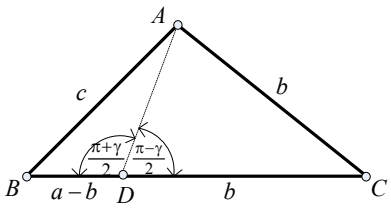
9. Квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, за $x = 1; 2; 3$, добива вредности $0; 1; 4$ соодветно. Која вредност овој полином добива за $x = 11$?

Решение. Од условите на задачата се добива следниов систем линеарни равенки со непознати a, b, c:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}.$$

Решавајќи го овој систем, се добива $a = 1, c = 1, b = -2$, па дадениот полином гласи $x^2 - 2x + 1$. Ако во добиениот полином ставиме $x = 11$, добиваме дека бараната вредност е 100.

10. Конструирај го триаголникот ABC ако се познати следните елементи: разликата $a - b$ на страните BC и AC, страната $\overline{AB} = c$ и збирот на аглите $\alpha + \beta$ кај темињата A и B.



Решение. Ако на страната BC на триаголникот ABC земеме точка D таква што $\overline{CD} = \overline{CA}$ (црт), тогаш триаголникот ADC е рамнокрак. Од тука следува дека $\measuredangle ADC = \frac{\pi - \gamma}{2}$, односно аголот

$$\measuredangle BDA = \frac{\pi + \gamma}{2} = \frac{\pi + \pi - (\alpha + \beta)}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Сега, триаголникот BDA може да се конструира, бидејќи се познати две негови страни: $\overline{BD} = a - b$, $\overline{BA} = c$ и еден негов агол $\measuredangle BDA = \pi - \frac{\alpha + \beta}{2}$. Во пресекот на правата BD со симетралата на страната AD се наоѓа третото теме C на бараниот триаголник ABC.

11. Докажи го идентитетот

$$\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{5^2} x} + \frac{1}{\log_{5^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{5^{10}} x} = \frac{55}{\log_5 x}.$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот $(\log_a b)^{-1} = \log_b a$, добиваме

$$\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{5^2} x} + \frac{1}{\log_{5^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{5^{10}} x} = \log_x 5 + \log_x 5^2 + \ldots + \log_x 5^{10} =$$

$$= \log_x 5 + 2\log_x 5 + \ldots + 10\log_x 5 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 10)\log_x 5 = 55\log_x 5 = \frac{55}{\log_5 x}.$$

12. Нека α, β, γ се аглите во еден триаголник. Докажи дека

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, имаме

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+\sin^2[\pi-(\alpha+\beta)]=$$
$$=1-\frac{1}{2}[\cos 2\alpha+\cos 2\beta]+\sin^2(\alpha+\beta)=1-\frac{1}{2}[\cos 2\alpha+\cos 2\beta]+1-\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=2-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=$$
$$=2-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos(-\beta)=2+\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta$$

од каде што се добива (1).

IV година

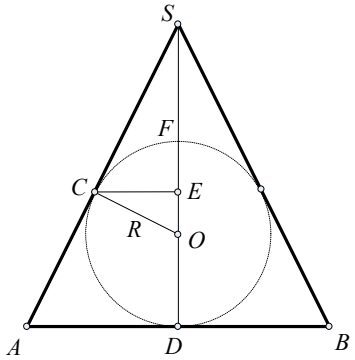
13. На провидна плоча се наоѓа непровидна топка со радиус R. Над топката, на замислена права којашто минува низ центарот на топката и стои нормално на плочата, се наоѓа светлосен извор во облик на точка, оддалечн од плочата за a ($a>2$) топкини радиуси.

а) Пресметај плоштината на осветлената површина од топката и плоштината на сенката на топката врз плочата.

б) Што се случува со тие плоштини кога a неограничено расте.

Решение. а) Од сличноста на триаголниците ΔCEO и ΔSCO (цртеж 3), добиваме

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{CO}}=\frac{\overline{CO}}{\overline{OS}},\qquad \frac{R-\overline{EF}}{R}=\frac{R}{(a-1)R},\qquad \text{т.е.}\qquad \overline{EF}=R\frac{a-2}{a-1}.$$



Според тоа, плоштината на осветлениот дел на топката е

$$P_1=2\pi R^2\frac{a-2}{a-1}=2\pi R^2\left(1-\frac{1}{a-1}\right).$$

Од сличноста на триаголниците ΔADS и ΔSCO, добиваме:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{SD}}=\frac{\overline{CO}}{\overline{CS}}\Leftrightarrow\frac{\overline{AD}}{aR}=\frac{R}{\sqrt{(a-1)^2R^2-R^2}}\Leftrightarrow\overline{AD}=\frac{aR}{\sqrt{a^2-2a}}$$

,

па плоштината на сенката од топката врз плочата е

$$P_2=\frac{\pi aR^2}{a-2}=R^2\left(1+\frac{2}{a-2}\right).$$

б) Ако $a\to\infty$, тогаш $P_1\to 2\pi R^2$ и $P_2\to R^2\pi$.

14. Сумата на членовите од една бескрајна опаѓачка геометриска прогресија што стојат на непарни места е 36, а сумата на членовите што стојат на парни места од истата геометриска прогресија е 12. Да се најде прогресијата.

Решение. Ако $a_1,a_2,...,a_n,...$ е бесконечна опаѓачка геометриска прогресија со количник q, тогаш низите $a_1,a_3,...,a_{2k+1},...$ и $a_2,a_4,...,a_{2k},...$, се бесконечни геометриски прогресии со количник q^2. Според условот на задачата, последните две низи имаат збир 36 и 12 соодветно, т.е.

$$\frac{a_1}{1-q^2}=36 \quad \text{и} \quad \frac{a_2}{1-q^2}=12 \ .$$

Имајќи предвид дека $a_2=a_1q$, со решавање на системот $\frac{a_1}{1-q^2}=36$, $\frac{a_1q}{1-q^2}=12$, добиваме дека $a_1=32$, $q=\frac{1}{3}$.

Значи, бараната прогресија гласи: $32,\frac{32}{3},\frac{32}{9},\ldots$.

15. Нека P_1 и P_2 се пресеците на произволна тангента од елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\ (a>b)$$

со тангентите на таа елипса што се повлечени во темињата на нејзината главна оска. Докажи дека отсечката P_1P_2 се гледа од кој било фокус на елипсата под прав агол.

Решение. Фокуси на елипсата се $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, каде што $c^2=a^2-b^2$. Равенката на тангентата на елипсата, повлечена во една нејзина произволна точка $(x_\circ,y_\circ)$, гласи $\frac{x_\circ x}{a^2}+\frac{y_\circ y}{b^2}=1$. Пресеците на ова тангента со правите $x=a$ и $x=-a$ се точките

$$P_1\left(a,\frac{b^2}{y_\circ}\left(1-\frac{x_\circ}{a}\right)\right) \qquad \text{и} \qquad P_2\left(-a,\frac{b^2}{y_\circ}\left(1+\frac{x_\circ}{a}\right)\right) \quad .$$

Коефициентите на правците на правите P_1F_1 и P_2F_2 се

$$k_1=\frac{b^2}{y_\circ}\frac{1-\frac{x_\circ}{a}}{a-c} \qquad \text{и} \qquad k_2=\frac{b^2}{y_\circ}\frac{1+\frac{x_\circ}{a}}{-a-c},$$

па имаме:

$$k_1k_2=\frac{b^2}{y_\circ}\frac{1-\frac{x_\circ}{a}}{a-c}\frac{b^2}{y_\circ}\frac{1+\frac{x_\circ}{a}}{-a-c}=\frac{b^4}{y_\circ^2}\frac{1-\frac{x_\circ^2}{a^2}}{-(a^2-c^2)}=\frac{b^4}{y_\circ^2}\frac{\frac{y_\circ^2}{b^2}}{-(a^2-c^2)}=\frac{b^2}{-(a^2-c^2)}=-1\ .$$

Значи, правите P_1F_1 и P_2F_1 зафаќаат прав агол, т.е. отсечката P_1P_2 се гледа од фокусот F_1 под прав агол.

Поради симетрија, истото тврдење важи и за фокусот F_2.

16. Од коцки со рабови 1 cm направен е правоаголен паралелопипед со рабови a cm, b cm, c cm (a,b,c се природни броеви поголеми од 1). Вака добиениот паралелопипед однадвор е обоен црвено. Колку коцки од кои е направен паралелопипедот, имаат:

а) само три ѕидови обоени црвено;

б) само два ѕида обоени црвено;

в) само еден ѕид обоен црвени;

г) ниту еден ѕид обоен црвено.

Решение. а) само три ѕидови обоено црвено имаат осум коцки, коишто се наоѓаат во темињата на паралелопипедот.

б) Само два црвено обоени ѕида имаат оние коцки, коишто се наоѓаат на рабовите на паралелопипедот, исклучувајќи ги коцките од темињата, а нивниот број е

$$4(a-2)+4(b-2)+4(c-2)\ .$$

в) Само еден црвено обоен ѕид имаат коцките, чијашто само една страна се наоѓа на површината на паралелопипедот. Нивниот број ќе го добиеме ако од бројот на сите коцки што се наоѓаат на површината на паралелопипедот го извадиме бројот на коцките со по два или три обоени ѕидови. Тој број изнесува $2[(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2)]$.

Ниеден црвено обоен ѕид имаат коцките, коишто се наоѓаат во внатрешноста на паралелопипедот. Нив ги има на број $(a-2)(b-2)(c-2)$ (тие образуваат паралелопипед со рабови $a-2, b-2, c-2$).

II регионален натпревар - 1979 година

I година

17. а) Да се упрости изразот $A=\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}$.

б) Дали за некој природен број n, бројот A е природен број?

Решение. а) Имаме

$$A=\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}=\frac{1}{n(n+a)}\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\frac{-(n^3-1)(a+n)}{-1}=$$

$$=\frac{1}{n(n+a)}\frac{n-n-1}{n-1}\frac{-(n^3-1)(a+n)}{-1}=\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}(n-1)(n^2+n+1)=\frac{n^2+n+1}{n}=n+1+\frac{1}{n}.$$

б) Користејќи го резултатот под а), имаме дека A е природен број ако и само ако $\frac{1}{n}$ е природен број, а тоа е можно за $n=1$. Но, изразот A не е дефиниран за $n=1$, па следствено, A не може да биде природен број за ниедна вредност на природниот број n .

18. Морска вода содржи 5% сол (тежински). Колку килограми обична вода треба да се дотури на 40 килограми морска вода, за да во новодобиената вода да има 2% сол?

Решение. Морската вода содржи 5% сол; значи, во 100 килограми вода има 5 килограми сол. Ако со x го означиме количеството сол (во килограми) што се наоѓа во 40 килограми морска вода, ќе имаме

100 кгр. м.в.	5 кгр. сол
40 кгр. м.в.	x кгр. сол

$$100x=200$$
$$x=2$$

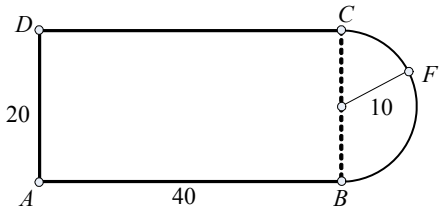
Значи, во 40 килограми морска вода има 2 килограми сол.

Да го означиме со y количеството обична вода (во килограми), што треба да се додаде на 40 килограми морска вода, за новодобиената вода да содржи 2% сол. Како и во претходната дискусија, имаме

100 кгр. м.в.	2 кгр. сол
$40+y$ кгр. м.в.	2 кгр. сол

$$2(40+y)=200$$
$$y=60$$

килограми морска вода.



19. Еден базен, длабок 2 m, има облик како на цртежот. Притоа правоаголникот $ABCD$ е со димензии 40×20 m, а радиусот на полукругот CFB е 10 m. Ако дебелината на ѕидовите и дното на базенот е 30 cm, да се пресмета колку m^3 бетон се потребни за негова изградба.

Решение. Да го означиме со V_1 волуменот на "телото", формирано од надворешните страни на ѕидовите на базенот, а со V_2 -волуменот на "телото" формирано од внатрешните страни. Имаме

$$V_1=40,3\cdot 30,6\cdot 2,3+\frac{10,3^2\pi\cdot 2,3}{2}=1909,414+122,0035\pi$$

$$V_2=40\cdot 20\cdot 2+\frac{10^2\pi\cdot 2}{2}=1600+100\pi$$

Волуменот на ѕидовите на базенот, а со тоа и бараните m^3 бетон коишто се потребни за изградба на базенот, изнесува

$$V=V_1-V_2=309,414+22,0035\pi\approx 378,54\ m^3.$$

20. Еден природен број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 9. Докажи!

Решение. Знаеме дека секој природен број n може да се запише во облик

$$n=10^k a_k+10^{k-1}a_{k-1}+\ldots+10^2a_2+10a_1+a_\circ,$$

каде што $a_\circ$ е цифрата на единиците, a_1 е цифрата на десетките, a_2 е цифрата на стотките итн. Имаме

$$n=a_\circ+a_1+\ldots+a_k+9a_1+99a_2+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{k}a_k=$$
$$=(a_\circ+a_1+\ldots+a_k)+9(a_1+11a_1+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{k}a_k)$$

Бидејќи вториот собирок е секогаш делив со 9, имаме дека природниот број n е делив со 9 ако и само ако првиот собирок, т.е. збирот на неговите цифри е делив со 9. Со тоа е докажано тврдењето на задачата.

II година

21. Ако од една страница на една книга се отфрлат по три букви од секој ред и потоа се извадат два такви реда, бројот на сите букви ќе се намали за 145. Ако пак додадеме на секој ред по четири букви и допишеме три такви реда, тогаш бројот на сите букви ќе се зголеми за 224. Колку редови има на таа страница и по колку букви има во секој ред?

Решение. Нека на таа страница има x редови, а во секој ред по y букви. Од првиот услов на задачата ја наоѓаме равенката

$$3x+2(y-3)=145 \qquad (1)$$

а од вториот, равенката

$$4x+3(y+4)=224\,. \qquad (2)$$

Решавајќи го системот равенки, составен од равенките (1) и (2), добиваме $x=29$, $y=32$. Значи, на споменатата страница од книгата има 29 реда, а во секој ред по 32 букви.

22. Да се упрости изразот

$$A=\left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^4\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^8\right] \text{ (i е имагинарна единица)}$$

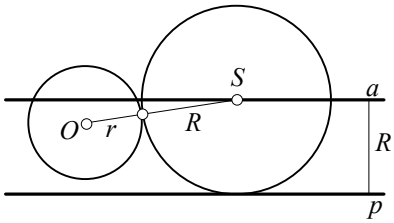
Решение. Бидејќи $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2=\frac{i}{2}$, $\left(\frac{1+i}{2}\right)^4=-\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1+i}{2}\right)^8=\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$, имаме

$$A=\left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\frac{i}{2}\right]\left[1-\frac{1}{4}\right]\left[1+\frac{1}{16}\right]=\frac{1}{2}(3+i)\frac{1}{2}(2+i)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{17}{16}=\frac{255}{256}(1+i)$$

23. Нека се дадени една кружница и една права.

а) Конструирај кружница со даден радиус која ги допира дадената кружница и дадената права.

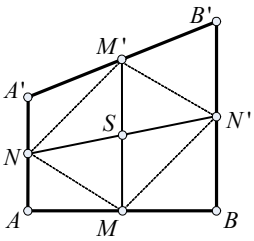
б) Да се изврши дискусија за бројот на решенија на дадената задача.



Решение. а) Нека p е дадената права, $k(O,r)$ дадената кружница и $k(S,R)$ бараната кружница (види цртеж). Бидејќи $k(S,R)$ ја допира p, следува дека S лежи на правата a, паралелна со p и на растојание R од неа. Исто така, S ќе мора да лежи на кружницата $k(O,R+r)$ односно на $k(O,|R-r|)$, па S ќе биде пресек на таа кружница со правата a.

б) Задачата може да има најмногу 8 решенија, зошто две прави и две кружници се сечат најмногу во 8 точки, а има најмалку две решенија.

Задачата не ќе има решение ако правата p и кружницата $k(O,R+r)$ односно $k(O,|R-r|)$ не се сечат, а тоа е можно во случај кога $2R+r$ е помало од растојанието на O од правата p.



24. Нека M е средина на отсечката AB, а M' е средина на отсечката $A'B'$. Докажи дека средините на отсечките AA', BB' и MM' се колинеарни.

Решение. Нека N е средина на отсечката AA', N' е средина на отсечката BB' и S е средина на отсечката MM' (види цртеж).

Доволно е да докажеме дека четириаголникот $MN'M'N$ е паралелограм (образложение: дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат; S е средина на дијагоналата MM'; значи, дијагоналата NN' мора да минува низ точката S, што повлекува дека точките

N, S и N' се колинеарни). За таа цел ќе докажеме дека векторите $\overrightarrow{MN'}$ и $\overrightarrow{NM'}$ се еднакви, што повлекува дека четириаголникот $MN'M'N$ е паралелограм. Имаме:

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{NA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{NM'}.$$

III година

25. Нека е $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

а) Да се одреди $f(x+1) - f(x)$.

б) Ако $f(x+1) - f(x) = x$, да се најдат a и b.

Решение. Имаме

а) $f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 - ax^2 - bx - 1 = 2ax + a + b$

б)Од $f(x+1) - f(x) = x$ имаме $2a = 1$ и $a + b = 0$, т.е. $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{1}{2}$.

26. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC, конструирана е симетралата на остриот агол кај темето B, која што ја сече страната CA во точката M. Над отсечките AM и CM се конструирани квадрати. Докажи дека плоштината на едниот квадрт е двапати поголема од плоштината на другиот.

Решение. Согласно со ознаките од цртежот имаме

$$P_1 = x^2 \qquad \text{и} \qquad P_2 = (a-x)^2,$$

каде што P_1 и P_2 се плоштините на соодветните квадрати. Бидејќи

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{x}{s}\frac{a}{s} = \frac{2ax}{s^2}, \tag{1}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

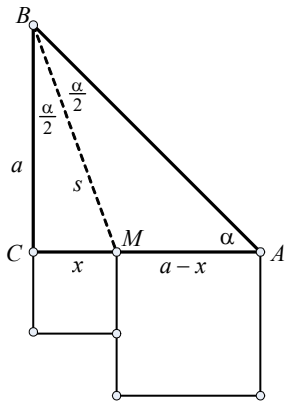
од (1) и (2) , добиваме

$$\frac{2ax}{s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т.е.

$$s^2 = 2\sqrt{2}ax. \tag{3}$$

Од друга страна



$$s^2 = a^2 + x^2. \tag{4}$$

Равенствата (3) и (4) ја даваат квадратната равенка

$$x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 0,$$

чии решенија се $x_1 = a\sqrt{2} + a$ и $x_2 = a\sqrt{2} - a$.

Бидејќи $a\sqrt{2} + a > a$, предвид доаѓа само второто решение $x_2 = a\sqrt{2} - a$.

Значи,

$$P_1 = (\sqrt{2}-1)^2 a^2 = (3 - 2\sqrt{2})a^2$$

$$P_2 = (a-x)^2 = (a - a\sqrt{2} + a)^2 = (2-\sqrt{2})^2 a^2 = (6 - 4\sqrt{2})a^2 = 2(3 - 2\sqrt{2})a^2 = 2P_1,$$

што требаше да се докаже.

27. а) Да се упрости изразот $A=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}$.

б) За кои вредности на x, $A>0$?

Решение. Користејќи ги тригонометриските идентитети, имаме

а) $A=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}=\dfrac{2\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x+1}{2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x+1}=\dfrac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{2\sin x(\cos x-\sin x)}=$

$=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$,

при што $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$.

б) $A>0$ ако и само ако $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x>0$. Според тоа

$$2x\in\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right)$$

$$x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi,\pi+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

28. Да се реши равенката (по x)

$\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0$, ако $a>1$.

Решение. Имаме

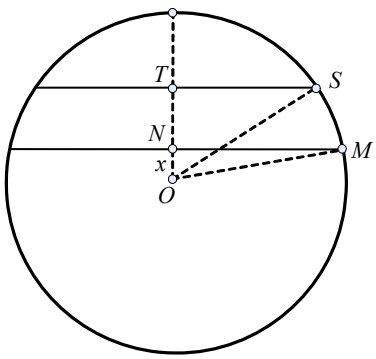
$$\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=\frac{1}{\log_a ax}+\frac{3}{\log_a a^2x}=\frac{\log_a a^2x+3\log_a ax}{\log_a ax\cdot\log_a a^2x}=\frac{\log_a a^5x^3}{\log_a ax\cdot\log_a a^2x};$$

притоа, $x\neq\dfrac{1}{a}$ и $x\neq\dfrac{1}{a^2}$.

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката $\dfrac{\log_a a^5x^3}{\log_a ax\cdot\log_a a^2x}=0$, од каде што се добива $\log_a a^5x^3=0$, т.е. $x=\dfrac{1}{a\sqrt[4]{a}}$.

IV година

29. Една топка е пресечена со две паралелни рамнини кои се наоѓаат од иста страна на нејзиниот центар и на растојание од 3 cm меѓу себе. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините, имаат радиуси 9 cm односно 12 cm.



Пресметај го волуменот на топката.

Решение. Ако топката, заедно со нејзините пресеци, ортогонално ја проектираме на рамнина, нормална на пресечните рамнини, ја добиваме сликата како на цртежот. Од правоаголните триаголници OMN и OST, согласно Питагоровата теорема, ги добиваме равенствата

$$R^2 = 12^2 + x^2$$

$$R^2 = 9^2 + (3+x)^2 ,$$

од каде што добиваме $x = 9$ и $R = 15$ cm. Според тоа,

$$V = \frac{4R^3\pi}{3} = 4500\pi \text{ cm}^3 .$$

30. Најди го збирот на сите четирицифрени броеви коишто се добиваат од цифрите $1, 2, 3$ и 4, при што цифрите не се повторуваат.

Решение. Од начинот на формирањето на четирицифрените броеви воочуваме дека станува збор за пермутации без повторување и нивниот вкупен број е $4! = 24$. На прво место, односно второ, трето, четврто место во четирицифрените броеви, цифрата 1 се јавува $3! = 6$ пати. Истото се однесува и за цифрите $2, 3$ и 4. Имајќи го предвид ова, за збирот S имаме:

$$S = 6 \cdot 1000(1+2+3+4) + 6 \cdot 100(1+2+3+4) + 6 \cdot 10(1+2+3+4) = 66660 .$$

31. Ако за една низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ се знае дека важи $\frac{S_m}{S_k} = \frac{m^2}{k^2}$, за секои $k, m \in \mathbb{N}$ каде што $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, да се докаже дека $\frac{a_m}{a_k} = \frac{2m-1}{2k-1}$.

Решение. Имаме

$$S_m = a_1 + a_2 + ... + a_m , \qquad S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$$

$$a_m = S_m - S_{m-1} , \qquad a_k = S_k - S_{k-1} ,$$

па според тоа

$$\frac{a_m}{a_k} = \frac{S_m - S_{m-1}}{S_k - S_{k-1}} = \frac{\frac{S_m}{S_{m-1}} - 1}{\frac{S_k}{S_{m-1}} - \frac{S_{k-1}}{S_{m-1}}} = \frac{\frac{m^2}{(m-1)^2} - 1}{\frac{k^2}{(m-1)^2} - \frac{(k-1)^2}{(m-1)^2}} = \frac{m^2 - (m-1)^2}{k^2 - (k-1)^2} = \frac{2m-1}{2k-1} .$$

32. а) Одреди го геометриското место на средините на тетивите на една кружница C, кои лежат на прави што минуваат низ дадена точка.

б) Изврши дискусија.

Решение. а) Нека равенката на кружницата е

$$x^2 + y^2 = r^2 , \tag{1}$$

а равенката на правите на тетивите што минуваат низ точка $A(a,b)$

$$y - b = k(x - a) . \tag{2}$$

Ако од (1) и (2) извршиме елиминација на y, ја добиваме квадратната равенка

$$(1+k^2)x^2 + 2k(b - ak)x + (ka - b)^2 - r^2 = 0 ,$$

чии што решенија ќе ги означиме со x_1 и x_2. Координатите на бараното геометриско место се $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

Од Виетовите формули и од равенката (2), добиваме

$$x = k\frac{ka-b}{1+k^2}, \qquad y = \frac{b-ka}{1+k^2}. \tag{3}$$

Елиминирајќи го k од равенствата (3), ја добиваме равенката на бараното геометриско место која гласи

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}. \tag{4}$$

б) Бараното геометриско место е кружницата (4), ако точката A е во внатрешноста на кружницата (1); дел од кружницата (4), ако A е надвор од кругот определен со равенката (1).

III регионален натпревар - 1980

I година

33. Некој човек, секој ден, прво трошел по 100, а потоа заработувал по $\frac{1}{3}$ од останатите. По три дена тој утврдил дека почетната сума пари се зголемила за два пати.

Колку пари имал човекот на почетокот?

Решение. Нека човекот на почетокот имал x денари. На крајот од првиот ден имал

$$x-100+\frac{x-100}{3}=\frac{4}{3}(x-100) \text{ денари.}$$

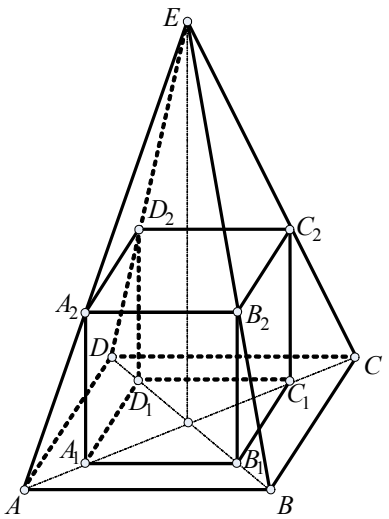
На крајот од вториот ден имал $\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(x-100)-100\right]$ денари. На крајот од третиот ден имал $\frac{4}{3}\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(x-100)-100\right]-100\right\}$ денари.

Според тоа:

$$\frac{4}{3}\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(x-100)-100\right]-100\right\}=2x.$$

Решението на ова равенка е $x=1480$ денари.

34. Во правилна четиристрана пирамида е впишана коцка, така што 4 нејзини темиња лежат на рабовите на пирамидата, а останатите 4 на основата на пирамидата. Определи ја страната на коцката, ако страната на пирамидата е a а висината е H.



Решение. Нека коцката $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, со страна y, е впишана во пирамидата $ABCDE$, со страна a и висина H, со дадениот услов, како на цртежот. Веднаш се гледа дека

$$\Delta ACE \sim \Delta A_2C_2E,$$

од што следува дека

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{a\sqrt{2}}{y\sqrt{2}} = \frac{H}{H-y},$$

т.е. $a(H-y) = Hy$. Од ова равенство следува $y = \frac{aH}{a+H}$.

35. Да се најде најмалиот природен број, кој поделен со секој од броевите $2,3,4,5,6$ и 7 дава остаток 1.

Решение. Ако n е бараниот број, тогаш $n-1$ е најмалиот број кој се дели со $2, 3, 4, 5, 6$ и 7, т.е. $n-1$ е НЗС (најмалиот заеднички содржател) на $2,3,4,5,6$ и 7. Според тоа,

$$n = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 + 1 = 421$$

36. Да се упрости следниов алгебарски израз:

$$\frac{\left(m^2 - \frac{1}{n^2}\right)^m \cdot \left(n + \frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2 - \frac{1}{m^2}\right)^n \left(m - \frac{1}{n}\right)^{m-n}}.$$

Решение. Дадениот израз да го означиме со J.

$$J = \frac{(m^2n^2-1)^m \cdot (mn+1)^{n-m} \cdot m^{2n} \cdot n^{m-n}}{(m^2n^2-1)^n \cdot (mn-1)^{m-n} \cdot n^{2m} \cdot m^{n-m}} = \frac{(m^2n^2-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}} \cdot \frac{(mn+1)^{n-m} \cdot m^{2n-n+m}}{n^{2m-m+n}} =$$

$$= \frac{(mn-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}} \frac{(mn+1)^{m-n}}{(mn+1)^{m-n}} \frac{m^{m+n}}{n^{m+n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}.$$

II година

37. Еден возач патувал од местото A до местото B, оддалечено 800 km едно од друго. Наместо да вози со планираната брзина од 80 km/h, на првата половина од својот пат, возачот бил принуден да вози со брзина $(80-m)$ km/h. Ако на втората половина од својот пат возачот вози со брзина $(80+m)$ km/h, дали ќе стигне на време во B?

Решение. Нека t_1 е времето со кое возачот ја поминал првата половина, а t_2 времето со кое ја поминал втората половина на патот. Тогаш

$$400 = (80-m)t_1 \quad \text{и} \quad 400 = (80+m)t_2.$$

Бидејќи $80-m < 80+m$, следува дека $t_1 > t_2$.

Собирајќи ги горните равенства, се добива

$$800 = (80-m)t_1 + (80+m)t_2 = 80(t_1+t_2) - m(t_1-t_2),$$

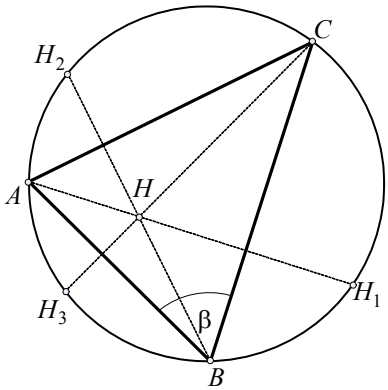
Од што следува дека $80(t_1+t_2) > 800$, т.е. $t_1+t_2 > 10\,\text{h}$.

Кога возачот би возел со планираната брзина, би стигнал во B за $\frac{800}{80} = 10\,h$. Значи, возачот ќе задоцни.

38. Дадени се триаголникот ABC, кружницата k опишана околу него и точките H_1, H_2 и H_3 што се пресечни точки на висините на триаголникот ABC со k. Докажи дека ортоцентарот H на триаголникот ABC се совпаѓа со центарот на впишаната кружница на триаголникот $H_1H_2H_3$.

Решение. Да го разгледаме цртежот. Доволно е да се докаже дека се исполнети следните равенства

$$\measuredangle H_3H_2B = \measuredangle BH_2H_1$$
$$\measuredangle H_2H_1A = \measuredangle AH_1H_3 \ .$$
$$\measuredangle H_1H_3C = \measuredangle CH_3H_2$$



Ќе докажеме дека $\measuredangle H_3H_2B = \measuredangle BH_2H_1$, а другите равенства се докажуваат на ист начин.

$\measuredangle H_3H_2B = \measuredangle H_3CB$	периферискі агли над ист лак
$\measuredangle H_3CB = 90^\circ - \beta$	од правоаголниот ΔBNC
$90^\circ - \beta = \measuredangle BAH_1$	од правоаголниот ΔBMA
$\measuredangle BAH_1 = \measuredangle BH_2H_1$	периферискі агли над ист лак.

39. Над страните на триаголникот ABC се конструирани произволни паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажи дека постои триаголник чии страни како вектори се еднакви со векторите $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$.

Решение. Ќе покажеме дека $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \vec{0}$, од што ќе следува дека бараниот триаголник постои, со забелешка дека таков триаголник постои кога векторите $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{C_1C_2}$ не се колинеарни.

Од условот на задачата следува дека

$$\overrightarrow{A_1A_2} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}\ , \quad \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{AA_2}\ , \quad \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BB_2}\ .$$

Тогаш , $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{BB_2} - \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{BB_2} = \vec{0}$.

40. Да се пресмета изразот

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4} + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}, \ (i \text{ е имагинарна единица}).$$

Решение. Да го означиме изразот со A. Тогаш

$$A = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n}\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4} + 1\right] + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}\left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4} + 1\right].$$

Да ги пресметаме изразите во средните загради:

$$\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)^4+1=\left(\frac{(1\pm i)^2}{2}\right)^2+1=\left(\frac{1\pm 2i-1}{2}\right)^2+1=(\pm i)^2+1=0\,.$$

Според тоа, $A=0$.

III година

41. Определи ги вредностите на k за кои равенката

$$x^3-(k^2-k+7)x-(3k^2-3k-6)=0$$

има корен -1. За така најдените вредности на k реши ја равенката.

Решение. За $x=-1$ равенката се сведува на $k^2-k-6=0$, која има корени $k_1=-2$ и $k_2=-3$. Заменувајќи го k со $k_1=-2$ или со $k_2=-3$ добиваме една иста равенка

$$x^3-13x-12=0\,.$$

Оваа равенка има корен $x_1=-1$, па делејќи ја со $x+1$, добиваме

$$x^3-13x-12=(x+1)(x^2-x-12)\,.$$

Решавајќи ја равенката $x^2-x-12=0$ се добиваат другите две решенија на равенката $x^3-13x-12=0$, а тоа се $x_2=-3$ и $x_3=4$.

42. Реши ја равенката

$$3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9\,.$$

Решение. Равенката ја логаритмираме со логаритам со основа 3, од каде се добива равенката

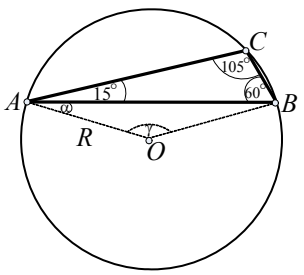
$$\log_x 3+(\log_3 x)^2=2\,.$$

Ставајќи $\log_3 x=u$ и користејќи го равенството

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

се добива равенката $\frac{1}{u}+u^2=2$, т.е. $u^3-2u+1=0$. Оваа равенка има решение $u_1=1$ и користејќи го методот како во претходната задача, се добиваат другите две решенија $u_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $u_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Според тоа, решенија на дадената равенка се $x_1=3$, $x_2=3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ и $x_3=3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.



43. Во кружница со радиус R впишан е триаголник со агли 15° и 60°. Да се најде плоштината на триаголникот.

Решение. Од тоа што централниот агол е двапати поголем од периферискиот агол над ист лак следува дека аголот γ од цртежот е 150°. Тогаш $\alpha=15^\circ$.

Од рамнокракиот триаголник ΔAOB следува дека $\overline{AB} = 2R\cos 15^\circ$. Од рамнокракиот триаголник ΔAOC следува дека $\overline{AC} = 2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$. Според тоа

$$P = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 15^\circ}{2} = \frac{2R\cos 15^\circ\cdot R\sqrt{3}\cdot\sin 15^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}\sin 30^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

44. Конструирај триаголник ABC со познати: страна c, висина h_b и тежишна линија t_a.

Решение. 1. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и да го разгледаме паралелограмот $ABCD$ од цртежот, каде што $BD \parallel AC$ и $CD \parallel AB$.

Од тоа што дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат, следува дека дијагоналата $\overline{AD} = 2t_a$. Според тоа, доволно е да конструираме параллелограм со страна C, дијагонала $2t_a$ и висина кон другата страна h_b.

2. Конструкција.

1°. $p \parallel q$, растојанието меѓу p и q е h_b.

2°. на p избираме произволна точка A,

3°. цртаме кружница $k(A,c)$.

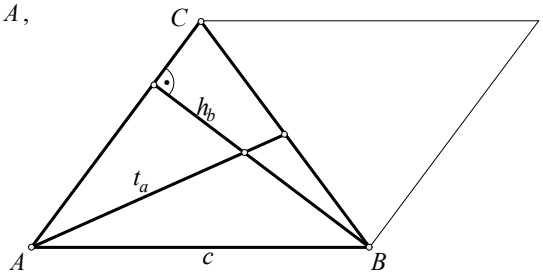
4°. $k \cap q = B$

5°. цртаме кружница $k_1(A,2t_a)$,

6°. $k_1 \cap q = D$,

7°. M, средината на AD,

8°. $C = BM \cap p$.



3. Доказ. Доказот следува од анализата и конструкцијата.

4. Дискусија. Од конструкцијата се гледа дека задачата нема решение ако и само ако $2t_a < h_b$ или $c < h_b$ или $2t_a = h_b = c$.

Ако $2t_a < h_b$ и $c > h_b$ задачата има две решенија, а во останатите случаи во кои има, има единствено решение.

IV година

45. Докажи дека равенството $a^2+1=2b$ повлекува $b \geq a$, и користејќи го овој резултат, да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}.$$

Решение. Од $a^2+1=2b$ следува дека $a^2-2a+1=2(b-a)$, т.е. $(a-1)^2=2(b-a)$. Бидејќи $(a-1)^2\geq 0$ следува дека $b\geq a$. Од системот равенки и горниот заклучок добиваме $x\geq z\geq y\geq x$, т.е. $x=y=z$. Тогаш од $x^2+1=2x$ следува дека системот има единствено решение $x=y=z=1$.

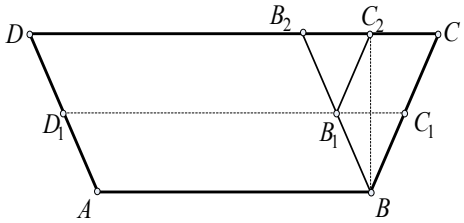
46. Канал за вода со должина од 5 m може да прими вода од $1{,}440\,\mathrm{m}^3$. Напречниот пресек на каналот е рамнокрак трапез чиј крак е 52 cm и висина 48 cm.

Колку вода може да прими тој канал ако се наполни до половина висина?

Решение. На цртежот , трапезот $ABCD$ го претставува пресекот на каналот, $BB_2 \parallel AD$, B_1 е средина на BB_2, $B_1C_1 \parallel AB$ и C_2 е подножната точка на висината, спуштена од B. Бидејќи ΔBCB_2 е рамнокрак, точката C_2 е средина на CB_2. Според тоа, $B_1C_1 \parallel BC$ и

$$\overline{CC_2}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{C_2B}^2}=\sqrt{0{,}52^2-0{,}48^2}=0{,}2\ \mathrm{m}.$$

Нека V е волуменот на водата кога каналот е наполнет со вода до половина на висината, а $V_1=1{,}440\ m^3$ кога е полн. Бидејќи трапезите ABC_1D_1 и $D_1B_1C_2D$ се складнии, $V_1=2V+P\cdot 5$ каде што P е плоштината на паралелограмот $B_1C_1CC_2$



$$P=\overline{CC_2}\cdot\frac{\overline{C_2B}}{2}=0{,}2\cdot 0{,}24=0{,}048\ \mathrm{m}^2.$$

Според тоа,

$$V=\frac{1{,}44-0{,}048\cdot 5}{2}=\frac{1{,}2}{}=0{,}6\ \mathrm{m}^3.$$

47. Да се докаже дека низ точката $A(4,3)$ можат да се повлечат две прави, кои отсекуваат од првиот квадрант триаголници со иста плоштина, еднаква на 27. Потоа да се најде аголот меѓу тие две прави.

Решение. Произволна права низ точката A има равенка $y=k(x-4)+3$, која има пресечни точки со x - и y - оската:

$$A_x\left(4-\frac{3}{k},0\right) \qquad \text{и} \qquad A_y\left(0,3-4k\right).$$

Од условот на задачата следува дека

$$\frac{\left(4-\frac{3}{k}\right)(3-4k)}{2}=27.$$

Решавајќи ја ова равенка, се добива $k_1=-\frac{3}{8}$ и $k_2=-\frac{3}{2}$.

Нека аголот меѓу тие прави е α. Тогаш $tg\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{18}{25}$

48. Во аритметичка низа се дадени $a_n = m$ и $a_m = n$. Да се најде членот a_p.

Решение. Бидејќи низата е аритметичка, $a_n = a_m + (n-m)d$, од каде што следува дека $d = -1$. Според тоа, $a_p = a_n + (p-n)(-1) = m + n - p$.

IV регионален натпревар - 1981 година

I година

49. Да се упрости изразот

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{1980} - \frac{a^{1981}}{1+a}$$

и да се најде неговата вредност за $a = -\frac{4}{5}$.

Решение. Користејќи ја формулата

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - yx^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}y^{n-1}),$$

добиваме

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{1980} - \frac{a^{1981}}{1+a} = \frac{(1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{1980})(1+a) - a^{1981}}{1+a} =$$

$$= \frac{1 + a^{1981} - a^{1981}}{1+a} = \frac{1}{1+a}$$

за $a = -\frac{4}{5}$, вредноста на изразот е 5.

50. Предната гума на еден велосипед се излижува по изминати $250\ \text{km}$, а задната по изминати $150\ \text{km}$. По колку изминати километри треба да ги замениме местата на гумите за да се излижат истовремено?

Решение. Ако по $x\ \text{km}$ треба да ги промениме местата на гумите, тогаш според условот на задачата ќе имаме

$$\frac{x}{250} + \frac{x}{150} = 1,$$

од каде што се добива $x = 93{,}75\ \text{km}$.

51. Еден двоцифрен број го има следното својство: ако го собереме со бројот што ги има истите цифри но во обратен редослед се добива полн квадрат.

Да се најдат сите такви двоцифрени броеви.

Решение. Ако x е цифрата на единиците, а y цифрата на десетките на бараниот двоцифрен број, тогаш според условот на задачата ќе имаме

$$(10y + x) + (10x + y) = m^2,$$

т.е.

$$11(x+y) = m^2. \qquad (1)$$

Според тоа, 11 е делител на m; ако $m = 11k$, добиваме

$$x + y = 11k^2. \qquad (2)$$

Од $1 \le x \le 9$ и $1 \le y \le 9$, следува дека $2 \le x + y \le 18$, што значи дека

$$x + y = 11. \qquad (3)$$

Од (3) следува дека бараните броеви се: $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ и 92 .

52. На една рамнина се поставени четири топки со ист радиус r, така што секоја од нив допира две други. Друга топка, со радиус R, поставена е така што ги допира сите четири топки. Колкаво е растојанието d од центарот на таа топка до рамнината? Дискутирај ги сите можности.

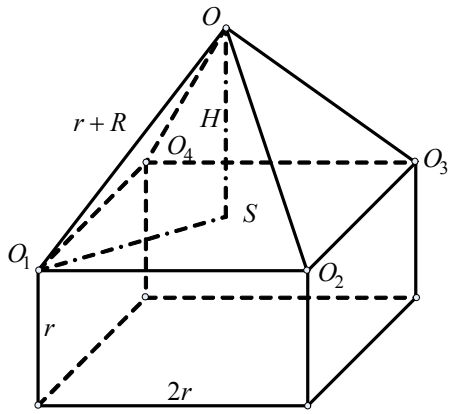
Решение. Да го сврземе центарот O на петтата топка со центрите O_i, $i = 1,2,3,4$, на дедените четири топки (види цртеж). Тогаш ќе имаме

$$d = H + r = r + \sqrt{(R+r)^2 - \overline{O_1S}^2} =$$

$$= r + \sqrt{(R+r)^2 - 2r^2} = r + \sqrt{R^2 + 2rR - r^2}.$$

За $R = r(\sqrt{2} - 1)$ имаме $d = r$, т.е петтата е меѓу четирите топки.

За $R > r(\sqrt{2} - 1)$, петтата топка е поставена над четирите топки.



II година

53. Да се пресмета изразот

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$$, (i е имагинарна единица).

Решение. Ставајќи $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ добиваме:

$$x^2 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \qquad x^3 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = -1.$$

Според тоа, ќе имаме

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30} = x^{60} + (-x^2)^{30} = x^{60} + x^{60} = 2x^{60} = 2(x^3)^{20} = 2.$$

54. На пат од a m предните тркала на еден трактор прават k завртувања повеќе од задните. Да се најде периметарот на секое тркало, ако периметарот на задното тркало е за b m поголем од периметарот на предното тркало.

Решение. Ако x е периметарот на предното тркало, тогаш периметарот на задното тркало ќе биде $x + b$.

На пат од a m задното тркало ќе направи $\frac{a}{x+b}$ завртувања, а предното тркало ќе направи $\frac{a}{x}$ завртувања.

Според условот на задачата ќе имаме $\frac{a}{x} = k + \frac{a}{x+b}$, т.е. $kx^2 + kbx - ab = 0$. Решенијата на ова квадратна равенка се:

$$x_{1/2} = \frac{1}{2k}\left(-kb \pm \sqrt{k^2b^2 + 4kab}\right).$$

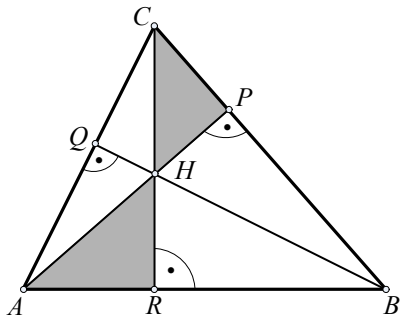
Решението x_2 е негативно; поради $\sqrt{k^2b^2+4kab} > kb$, следува дека решението x_1 е позитивно. Значи, периметарот на предното тркало е

$$x = \frac{1}{2k}\left(-kb + \sqrt{k^2b^2+4kab}\right),$$

а периметарот на задното тркало е

$$y = \frac{1}{2k}\left(kb + \sqrt{k^2b^2+4kab}\right).$$

55. Докажи дека производот на должините на двете отсечки на кои е поделена секоја висина со ортоцентарот во даден триаголник е константа за тој триаголник.



Решение. Триаголниците ARH и HPC се правоаголни и аглите кај темето H се еднакви, па значи тие се слични. Според тоа, имаме:

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{HR} : \overline{HP},$$

од каде што следува дека

$$\overline{AH} \cdot \overline{HP} = \overline{CH} \cdot \overline{HR},$$

а поради симетрија ќе имаме и

$$\overline{AH} \cdot \overline{HP} = \overline{BH} \cdot \overline{HQ},$$

што требаше да се докаже.

56. Во паралелограм $ABCD$, на страната AD е земена точка L, на дијагоналата AC точка M и на страната BC точка N, така што важи:

$5 \cdot \overline{AL} = \overline{AD}$, $\quad 4 \cdot \overline{AM} = \overline{AC}$,

$5 \cdot \overline{BN} = 2 \cdot \overline{BC}$.

а) Да се докаже дека точките L, M и N се колинеарни.

б) Во кој однос точката M ја дели отсечката LN?

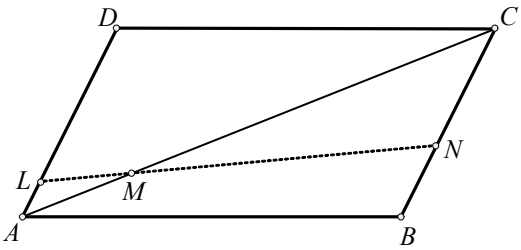
Решение. а) Ставајќи $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (види цртеж) ќе имаме

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC},$$

од каде што добиваме

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = -\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{20}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}.$$



Според тоа, имаме $\overrightarrow{LN} = 4\overrightarrow{LM}$, т.е. векторите $\overrightarrow{LN}$ и $\overrightarrow{LM}$ се колинеарни, па и точките L, M и N се колинеарни.

б) Според а), имаме $\overrightarrow{LN} = 4\overrightarrow{LM}$, т.е. $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{LM}$. Значи, точката M ја дели отсечката LN во однос $1:3$.

III година

57. При кои вредности на a неравенството $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$ важи за секој реален број x?

Решение. Неравенството (1) , при $a^2-1\neq 0$, важи за секој реален број x ако и само ако се исполнети следниве услови:

$$a^2-1>0\,,\qquad D=4(-a^2-2a+3)<0\,,$$

т.е. ако и само ако: $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ и $a\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$, од каде што добиваме дека $a\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

Во случајот кога $a^2-1=0$, имаме: левата страна на (1) за $a=1$ е 2, а за $a=-1$ е $-4x+2>0$, т.е. и $a=1$ е решение.

Следствено, неравенството (1) важи за секој реален број x ако и само ако $a\in(-\infty,-3)\cup[1,+\infty)$.

58. Ако важи $\sin\alpha+\sin\beta=a$, $\cos\alpha+\cos\beta=b$, $a^2+b^2\neq 0$, тогаш

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}\,.$$

Докажи!

Решение. Ако равенствата $\sin\alpha+\sin\beta=a$ и $\cos\alpha+\cos\beta=b$ ги помножиме меѓусебно, ќе добиеме

$$ab=\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}[\sin 2\alpha+\sin 2\beta]=$$
$$=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Ако пак ги квадрираме и ги собереме, добиваме

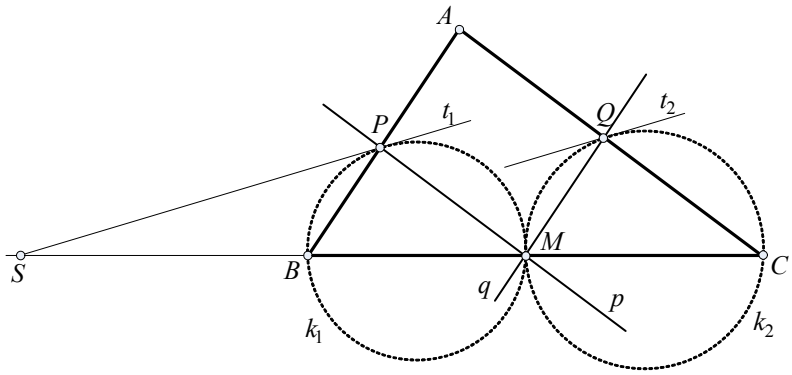
$$a^2+b^2=2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=2+2\cos(\alpha-\beta)=2[1+\cos(\alpha-\beta)]\,.$$

Според тоа, ќе имаме:

$$ab=\frac{a^2+b^2}{2}\sin(\alpha+\beta)\text{, т.е.}\qquad \sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}\,.$$

што требаше да се докаже.

59. Нека M точка од страната BC на триаголникот ABC. Низ точката M се повлечени прави p и q паралелни со AC и AB соодветно. Нека $P=p\cap AB$, $Q=q\cap AC$, а k_1 и k_2 се кружниците опишани околу триаголниците BMP и CMQ соодветно.



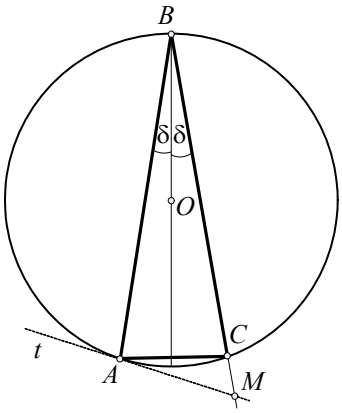
Да се докаже дека тангентите t_1 и t_2, повлечени на k_1 и k_2 соодветно во точките P и Q се паралелни.

Решение. Нека $S = PQ \cap BC$, а χ нека е хомотетија со центар S и коефициент $m = \frac{\overline{SM}}{\overline{SB}}$; тогаш $\chi(B) = M$. Од $BP \parallel MQ$ и $MP \parallel CQ$ следува дека $\chi(M) = C$ и $\chi(P) = Q$, а од тоа пак $\chi(k_1) = k_2$.

Од $\chi(k_1) = k_2$ и $\chi(P) = Q$, следува дека $\chi(t_1) = t_2$, што значи дека $t_1 \parallel t_2$.

60. Околу триаголникот ABC со агол $\beta = 2\delta < \frac{\pi}{3}$ е опишана кружница k со радиус R чиј дијаметар го преполовува аголот β. Да се најде плоштината на триаголникот ABM ако $M = t \cap BC$, каде што t е тангента на k повлечена во точката A.

Решение. Бидејќи дијаметарот на опишаната кружница е симетрала на аголот β (види цртеж), следува дека триаголникот ABC е рамнокрак. Според тоа, ќе имаме $\alpha = 90^\circ - \delta$, $\measuredangle CAM = 2\delta$, $\measuredangle ACM = 90^\circ + \delta$, $\measuredangle AMC = 90^\circ - 3\delta$.



Применувајќи ја синусната теорема за ΔABC, добиваме

$$\overline{AC} = 2R\sin 2\delta, \qquad \overline{AB} = 2R\sin(90^\circ - \delta) = 2R\cos\delta;$$

ако пак ја примениме на триаголникот AMC, ќе добиеме:

$$\overline{AM} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \delta)}{\sin(90^\circ - 3\delta)} = 2R\frac{\cos\delta}{\cos 3\delta}\sin 2\delta.$$

За плоштината на триаголникот ΔABM:

$$P = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AM}\sin(90^\circ + \delta) = 4R^2\frac{\sin\delta\sin^4\delta}{\cos 3\delta}.$$

IV година

61. Една права p која што минува низ координатниот почеток, ги сече правите $x + y - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ во точките A и B соодветно. Да се најде геометриското место на средините на отсечките AB, кога правата p ротира околу координатниот почеток.

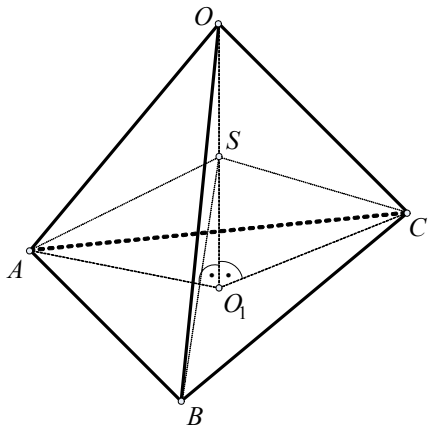
Решение. Равенка на произволна права низ координатниот почеток има облик $y = kx$. Пресечните точки на ова права со правите $x + y - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ се $A\left(\frac{1}{1+k}, \frac{k}{1+k}\right)$, $B\left(\frac{1}{1-k}, \frac{k}{1-k}\right)$, при $k \neq \pm 1$. Нека $M(x, y)$ е средина на отсечката AB. Тогаш

$$x = \frac{1}{1-k^2}, \qquad y = \frac{k}{1-k^2}.$$

Со елиминација на k добиваме $y^2 = x(x-1)$, што претставува равенка на бараното геометриско место на точки, а тоа е хипербола.

62. Во правилен тетраедар $ABCO$, средината S на висината, спуштена од темето O, е сврзана со темињата A, B, C. Да се докаже дека отсечките SA, SB, SC се заемно нормални.

Решение. Ќе покажеме само дека триаголникот ASC е правоаголен со прав агол кај темето S (види цртеж). Нека a е работ на тетраедарот; тогаш имаме



$$\overline{AO_1} = \overline{CO_1} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \overline{SO_1} = \frac{a}{6}\sqrt{6},$$

$$\overline{AS} = \overline{CS} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Бидејќи $\overline{AS}^2 + \overline{CS}^2 = a^2 = \overline{AC}^2$, следува дека ASC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето S, т.е. $AS \perp CS$.

63. Нека $x + \frac{1}{x} = 2\cos\phi$. Да се докаже дека $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\phi$ за секој природен број n.

Решение. Доказот ќе го дадеме вршејќи индукција по n.

За $n = 1$ тврдењето е точно според условот. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $n \le k$, т.е. за секој $n \le k$ важи

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\phi .$$

Бидејќи

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}},$$

добиваме

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) = 2\cos k\phi \cdot 2\cos\phi - 2\cos(k-1)\phi =$$
$$= 2 \cdot 2\cos k\phi \cos\phi - 2\cos(k-1)\phi = 2\cos(k+1)\phi$$

Според тоа, тврдењето е точно за секој природен број n.

64. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е аритметичка прогресија. Да се докаже дека

$$a_1^2 + a_3^2 + ... + a_{2k-1}^2 - (a_2^2 + a_4^2 + ... + a_{2k}^2) = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2).$$

Решение. Имаме:

$$a_1^2 + a_3^2 + ... + a_{2k-1}^2 - (a_2^2 + a_4^2 + ... + a_{2k}^2) =$$
$$= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) =$$
$$= -d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{2k-1} + a_{2k}) = -dk(a_1 + a_{2k}) =$$
$$= \frac{k}{2k-1}(a_1 - a_{2k})(a_1 + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2)$$

што требаше да се докаже.

V регионален натпревар - 1982 година

I година

65. Да се разложи на прости множители изразот

$$T=(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}T&=a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2-abc=\\&=(a^2b+a^2c)+(abc+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(abc+ac^2)=\\&=a^2(b+c)+ab(b+c)+bc(b+c)+ac(b+c)=\\&=(b+c)(a^2+ab+bc+ac)=(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]=\\&=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

66. Во 8 kg смеса има $65\,\%$ алкохол и $35\,\%$ вода. Колку вода треба да се додаде за да има во разредената смеса $45\,\%$ вода?

Решение. Бидејќи 1% од смешата е 80 gr, во смешата има 2800 грама вода и 5200 грама алкохол. Нека x е количеството вода, во грамови, што треба да се додаде. Тогаш $2800+x$ треба да е 45% од $8000+x$, т.е. $2800+x=0,45(8000+x)$, од каде што се добива $x=1454,(54)$

Значи, за да се добие смеса со $45\,\%$ вода треба да се додадат $1454,54$ грама вода.

67. Да се најде најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3 и поделен со 5 дава остаток 4.

Решение. Нека бараниот број е x; тогаш имаме

$$x=2x_1+1=3x_2+2=4x_3+3=5x_4+4\,.$$

За бројот $x+1$ ќе имаме

$$x+1=2(x_1+1)=3(x_2+1)=4(x_3+1)=5(x_4+1)\,,$$

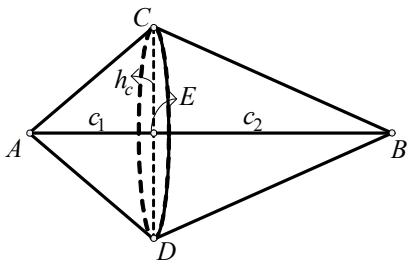
што значи дека $x+1$ е делив со $2,3,4$ и 5. Значи, бројот $x+1$ е најмалиот заеднички содржател на броевите $2,3,4$ и 5, т.е. $x+1=60$, од каде добиваме $x=59$.

68. Ако еден остроаголен триаголник со страни a,b,c ротира околу секоја од своите страни, се добиваат три тела. Да се најде односот на волумените на така добиените тела.

Решение. Да го најдеме волуменот V_c на телото кога триаголникот ABC ротира околу страната AB (види цртеж). Добиеното тело е составено од два слепени конуса со ист радиус h_c и висини c_1 и c_2 соодветно. За волуменот V_c ќе имаме:

$$V_c=\frac{1}{3}h_c^2\pi c_1+\frac{1}{3}h_c^2\pi c_2=\frac{1}{3}h_c^2\pi(c_1+c_2)=\frac{1}{3}h_c^2\pi c\,,$$

каде што $c=\overline{AB}=c_1+c_2$.



Слично, за волумените V_a и V_b на другите две тела ќе добиеме:

$$V_a=\frac{1}{3}h_a^2\pi a\,,\qquad V_b=\frac{1}{3}h_b^2\pi b\,,$$

па

$$V_a:V_b:V_c=h_a^2a:h_b^2b:h_c^2c\,.$$

Но, $ah_a=bh_b=ch_c=2P$

(P-плоштина на триаголникот ABC), па

$$V_a : V_b : V_c = h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

II година

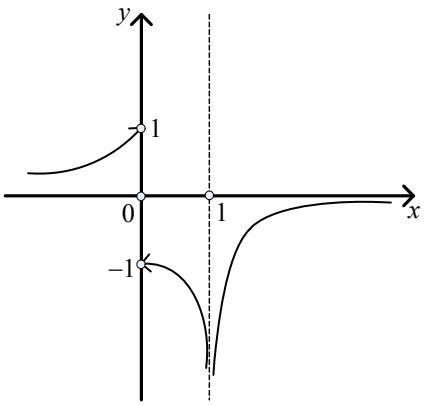
69. Во еден трицифрен број средната цифра е трипати помала од збирот на другите две, а збирот на последните две цифри е двапати помал од првата цифра. Ако си ги заменат местата цифрите на десетките и единиците, се добива број за 18 помал од дадениот. Кој е тој број?

Решение. Со x, y и z да ги означиме цифрите на единиците, десетките и стотките, соодветно на бараниот трицифрен број. Според условите на задачата

$$\begin{cases} 3y = x + z \\ x = 2(y + z) \\ 100x + 10y + z = 100x + 10z + y + 18 \end{cases}$$

Од каде што добиваме $x = 8, y = 3$ и $z = 1$. Значи, бараниот број е 831.

70. Да се скицира графикот на функцијата



$$y = -\frac{|x|}{|x-1|x}.$$

Решение. Функцијата не е дефинирана за $x = 0$ и $x = 1$. Ако $x > 0$ и $x - 1 > 0$, т.е. $x \in (1, +\infty)$ и ако $x < 0$ и $x - 1 < 0$, т.е. $x \in (-\infty, 0)$, тогаш функцијата може да се напише во обликот

$$y = -\frac{1}{x-1}.$$

Ако пак $x \in (0,1)$, тогаш функцијата може да се запише во обликот $y = \frac{1}{x-1}$.

Скица на графикот на функцијата е претставен на цртежот.

71. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $p^2x^2 + p^3x + 1 = 0$. Да се определи p, така што изразот $x_1^4 + x_2^4$ да има најмала вредност.

Решение. За изразот $x_1^4 + x_2^4$ користејќи ги Виетовите правила, имаме

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_2 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(p^2 - \frac{2}{p^2}\right)^2 - \frac{2}{p^4} = \left(p^4 + \frac{2}{p^4}\right) - 4.$$

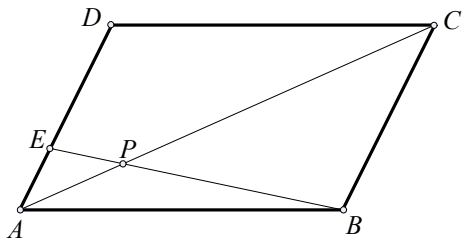
Значи, изразот $x_1^4 + x_2^4$ има најмала вредност ако и само ако изразот $p^4 + \frac{2}{p^4}$ има најмала вредност. За овој израз, пак, имаме

$$p^4 + \frac{2}{p^4} \geq 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{2}{p^4}} = 2\sqrt{2},$$

од каде што следува дека изразот $p^4 + \frac{2}{p^4}$ прима најмала вредност за $p = \pm\sqrt[8]{2}$.

72. На страната AD од паралелограмот $ABCD$ земена е точка E, така што $3\cdot\overline{AE}=\overline{AD}$.

Да се најдат односите $\overline{AP}:\overline{PC}$ и $\overline{BP}:\overline{PE}$, каде што $P=AC\cap BE$.



Решение. Векторите $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни, па постои реален број x, така што $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC}$. Исто така, постои реален број y, така што $\overrightarrow{PE}=y\overrightarrow{BE}$. Од цртежот се гледа дека $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, па следува $\overrightarrow{AP}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{PE}=y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$. Бидејќи $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$, ќе имаме

$$x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\vec{0}\quad\Rightarrow\quad(x-y)\overrightarrow{AB}+\left(x+\frac{y}{3}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не се колинеарни, па следува дека

$$\begin{cases}x-y=0\\ x+\frac{y}{3}=\frac{1}{3}\end{cases},$$

од каде што добиваме $x=y=\frac{1}{4}$. Според тоа, имаме $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$, а од тоа следува дека $\overline{AP}:\overline{PC}=1:3$, $\overline{BP}:\overline{PE}=3:1$.

III година

73. Да се докаже дека за секој природен број m полиномот

$$f(x)=(x-2)^{2m}+(x-1)^m-1$$

е делив со полиномот $p(x)=(x-1)(x-2)$, а потоа да се најде количникот.

Решение. Бидејќи $f(1)=(1-2)^{2m}+(1-1)^m-1=0$ следува дека полиномот $f(x)$ е делив со $x-1$; исто така, од $f(2)=(2-2)^{2m}+(2-1)^m-1=0$ следува дека полиномот $f(x)$ е делив со $x-2$. Значи, $f(x)$ е делив со $p(x)$.

Да го најдеме количникот $\frac{f(x)}{p(x)}$. Имаме:

$$\frac{f(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-1}\left[(x-2)^{2m-1}+\frac{(x-1)^m-1}{x-2}\right].$$

Бидејќи

$$\frac{(x-1)^m-1}{x-2}=\frac{(x-1)^m-1}{(x-1)-1}=\sum_{k=0}^{m-1}(x-1)^k,$$

ќе имаме

$$\frac{f(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-1}\left[(x-2)^{2m-1}+\sum_{k=0}^{m-1}(x-1)^k\right]=\frac{(x-2)^{2m-1}+1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sum_{k=1}^{m-1}(x-1)^k=$$

$$=\frac{(x-2)^{2m-1}+1}{(x-2)+1}+\sum_{k=0}^{m-2}(x-1)^k=\sum_{s=0}^{2m-2}(-1)^s(x-2)^s+\sum_{k=0}^{m-2}(x-1)^k$$

74. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2y-x} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

Решение. Имаме:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} = 3^{x-2y} \\ \log_2(x^2-y^2) = \log_2 16 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2y-x \\ x^2-y^2 = 16 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x = 5y \\ x^2-y^2 = 16 \end{cases},$$

од каде што добиваме $x = \pm 5$, $y = \pm 3$.

75. Да се пресмета $\sin^3 x + \cos^3 x$ ако $\sin x + \cos x = a$.

Решение. Изразот $\sin^3 x + \cos^3 x$ ќе го запишеме во обликот:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x =$$
$$= a^3 - 3(\sin x + \cos x)\sin x\cos x = a^3 - 3a\sin x\cos x$$

Квадрирајќи го равенството $\sin x + \cos x = a$, добиваме

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = a^2;$$

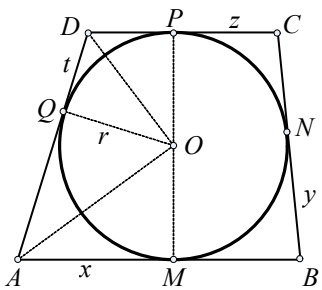
$$1 + 2\sin x\cos x = a^2;$$

$$\sin\cos x = \frac{a^2-1}{2}.$$

На крајот имаме

$$\sin^3 x + \cos^3 x = a^3 - 3a\cdot\frac{a^2-1}{2} = \frac{a}{2}(3-a^2).$$

76. Околу кружница со радиус r опишан е трапез $ABCD$. Ако M, N, P и Q се допирните точки на страните AB, BC, CD и DA соодветно, тогаш $\overline{AM}\cdot\overline{BN}\cdot\overline{CP}\cdot\overline{DQ} = r^4$. Докажи!



Решение. Да ставиме $\overline{AM} = \overline{AQ} = x$, $\overline{BM} = \overline{BN} = y$, $\overline{CN} = \overline{CP} = z$, $\overline{DP} = \overline{DQ} = t$ (види цртеж). Имаме:

$$\measuredangle AOM = \measuredangle QOA \text{ и } \measuredangle QOD = \measuredangle DOP$$

од каде што следува дека

$$\measuredangle AOD = \measuredangle AOQ + \measuredangle QOD = 90^\circ.$$

Значи, триаголникот AOD е правоаголен и $\overline{QO} = r$ е негова висина, спушена од темето O на правиот агол, па затоа $r^2 = xt$. Слично добиваме $r^2 = yz$, т.е. $xyzt = r^4$, што требаше да се докаже.

IV година

77. Од непарните природни броеви ги формираме множествата

$$A_1=\{1\}, \qquad A_2=\{3,5\}, \qquad A_3=\{7,9,11\}, \qquad A_4=\{13,15,17,19\},\ldots$$

Да се пресмета збирот на броевите на множеството A_n.

Решение. Да го најдеме првиот број во множеството A_n. Множествата $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ се попарно дисјунктни, па бројот на елементите во нивната унија е

$$1+2+3+4+...+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Значи, последниот број во множеството A_{n-1} е $n(n-1)-1$. Според тоа, првиот број во множеството A_n ќе биде $n(n-1)+1$, а последниот $n(n+1)-1$.

Броевите во множеството A_n формираат аритметичка прогресија со прв член $a_1=n(n-1)+1$, со последен член $a_n=n(n+1)-1$ и разлика $d=2$. Според тоа, нивниот збир ќе биде:

$$S_n=\frac{n}{2}\left(n(n-1)+1+(n(n-1)-1\right)=n^3.$$

78. Точката $T(1,2)$ е тежиште на триаголникот ABC; точката $D(3,4)$ е средина на страната BC, а точката $S\left(\frac{14}{9},\frac{10}{9}\right)$ е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Да се најдат темињата на триаголникот ABC.

Решение. Тежиштето T ја дели тежишната линија AD во однос $1:2$, па за $A(a_1,a_2)$ ќе имаме

$$1=\frac{a_1+2\cdot 3}{3}, \qquad 2=\frac{a_2+2\cdot 4}{3},$$

од каде што добиваме $a_1=-3$, $a_2=-2$, т.е. $A(-3,-2)$.

Нека $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$. Точката $D(3,4)$ е средина на BC, па ќе имаме

$$b_1+c_1=6, \qquad b_2+c_2=8. \tag{1}$$

Точката S е центар на опишаната кружница, па радиусот r на кружницата ќе биде

$$r^2=\overline{SA}^2=\left(-3-\frac{14}{9}\right)^2+\left(-2-\frac{10}{9}\right)^2=\frac{2465}{81}.$$

Од $\overline{SB}^2=r^2$ и $\overline{SC}^2=r^2$, добиваме

$$(9b_1-14)^2+(9b_2-10)^2=2465 \tag{2}$$

$$(9c_1-14)^2+(9c_2-10)^2=2465 \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) добиваме $b_1 = 7, b_2 = 2, c_1 = -1, c_2 = 6$ или $b_1 = -1, b_2 = 6, c_1 = 7, c_2 = 2$. Значи, $B(7,2), C(-1,6)$ или $B(-1,6), C(7,2)$.

79. Отсечките OA, OB и OC се заемно нормални и нивните должини се a, b и c соодветно. Да се докаже дека растојанието од точката O до рамнината ABC е

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение. Земајќи го триаголникот OAB за основа на пирамидата, за волуменот на пирамидата ќе имаме

$$V = \frac{abc}{3}.$$

Земајќи го пак триаголникот ABC за основа, ќе имаме

$$\frac{abc}{6} = \frac{P_{ABC} \cdot H}{3},$$

т.е.

$$H = \frac{abc}{2P_{ABC}}. \qquad (1)$$

За плоштината P_{ABC}, според Хероновата формула, ќе имаме (x, y и z се страните на триаголникот ABC):

$$16P_{ABC}^2 = 16s(s-x)(s-y)(s-z) = 16\frac{x+y+z}{2}\frac{y+z-x}{2}\frac{x+z-x}{2}\frac{x+y-z}{2} =$$
$$= (x^2+y^2+2xy-z^2)(z^2-x^2-y^2+2xy)$$

Но, $x^2 = a^2+b^2$, $y^2 = b^2+c^2$, $z^2 = c^2+a^2$, па:

$$16P_{ABC}^2 = (2b^2+2xy)(2xy-2b^2) = 4(b^4-x^2y^2) = 4[b^4-(a^2+b^2)(b^2+c^2)] = 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Значи,

$$P_{ABC}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Заменувајќи во (1), добиваме:

$$H^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-1},$$

од каде следува тврдењето на задачата.

80. Производот на бројот 21 со некој четицифрен број x е куб на некој цел број y. Да се најде бројот x.

Решение. Од условот на задачата имаме $21x = y^3$, од каде што следува дека 21 е делител на y, т.е. $y = 21z$. Заменувајќи во $21x = y^3$, добиваме $x = 441z^3$. Бројот x е четирицифрен, па z може да биде или 1 или 2, зашто за $z \geq 3$ имаме $x \geq 441 \cdot 27 = 11907$. За $z = 1$ имаме $x = 441$, а за $z = 2$ имаме $x = 3528$. Значи, $x = 3528$, и притоа $21x = 168^3$.

VI регионален натпревар - 1983 година

I година

81. Нека за броевите a,b и c е точно равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Да се покаже дека е исполнет барем еден од следниве три услови: $a=-b$, $a=-c$, $b=-c$.

Решение. Следната низа од равенства се еквивалентни меѓу себе:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc$$

$$a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2=abc$$

$$b(a^2+ac+ab+bc)+c(a^2+ac+bc+ca)=0$$

$$b[a(a+c)+b(a+c)]+c[a(a+c)+b(a+c)]=0$$

$$(a+c)[b(a+b)+c(a+b)]=0$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Од последното равенство непосредно се добива тврдењето од задачата.

82. Да се докаже идентитетот

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Решение. Имаме:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=1+\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\sin\alpha\right)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{2\left(\sin 30^\circ+\sin\alpha\right)}{2\cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

83. Од две парчиња легура со тежина 6 kg и 3 kg со различни проценти на бакар, отсечено е по едно парче со иста тежина. Секое од отсечените парчиња е слеано со остатокот на другото парче. По тоа спојување, процентот на бакар во двете легури се изедначува. Колку тежат отсечените парчиња?

Решение. Да ја означиме со A легурата чија тежина е 6 kg, а со B легурата чија тежина е 3 kg. Нека во 1 kg од легурата A има $u\text{ kg}$ бакар, а во 1 kg од легурата B има $v\text{ kg}$ бакар. Од условите на задачата имаме $u\neq v$. Нека тежината на отсечените парчиња од

легурите A и B е x kg. По спојувањето на отсечените парчиња со остатоците на другите парчиња, во 1 kg од легурата A ќе има $\frac{(6-x)u+xv}{6}$ kg бакар, а во 1 kg од легурата B ќе има $\frac{(3-x)v+xu}{3}$ kg бакар. Бидејќи процентот на бакар во двете легури по спојувањето е ист, имаме

$$\frac{(6-x)u+xv}{6}=\frac{(3-x)v+xu}{3}.$$

Од последната равенка се добива $(u-v)(9x-18)=0$, од каде имаме $x=2$, бидејќи $u\neq v$.

84. Седум соработници (Марија, Искра, Лиле, Петре, Миле, Тодор и Коста) ручаат заедно во три ресторани (P,Q и R).

Марија оди во ресторан само во среда.

Искра и Миле никогаш не се во можност заедно да одат во ресторан.

Лиле не оди во ресторан ако и Марија не пројде

Петре и Коста нема да одат во ист ресторан заедно ако и Искра не оди.

Миле не оди во ресторанот Q.

Ако шест од соработниците ручаат заедно во среда во еден од ресторените, кој од соработниците ќе биде отсутен?

Кој е најголемиот број на соработници што можат да одат заедно на ручек во вторник?

Решение. Јасно е дека ќе биде отсутен или Миле или Искра. Ако Искра е отсутна, тогаш Петре и Коста нема заедно да бидат во ресторан, па во тој случај најмногу 5 соработници ќе ручаат заедно. Според тоа, ако во среда ручаат заедно шест соработници, отсутен ќе биде Миле.

Во вторник и Марија не оди на ручек, што значи дека и Лиле тогаш нема да оди на ручек. Бидејќи Искра и Миле никогаш не ручаат заедно, се добива дека во вторник можат да ручаат најмногу четири соработници.

II година

85. Да се најдат сите комплексни броеви z за кои важи равенството

$$z^2=\overline{z}.$$

Решение. Нека $z=x+iy$ ($x,y\in\mathbb{R}$). Од $z^2=\overline{z}$ добиваме

$$x^2-y^2=x \qquad (1)$$

$$2xy=-y. \qquad (2)$$

Од равенката (2) добиваме $y=0$ или $2x+1=0$. Ако $y=0$, тогаш од равенката (1) се добива $x=0$ или $x=1$. Ако $2x+1=0$, т.е. $x=-\frac{1}{2}$, тогаш од равенката (1) се добива $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, бараните комплексни броеви се $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

86. Нека x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка

$$6x^2 - 5x + 1 = 0 .$$

Без да се решава дадената равенка, да се формира квадратната равенка по y чии решенија се броевите

$$y_1 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \text{ и } y_2 = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} .$$

Решение. Од равенката (1) според Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = \frac{5}{6}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{6}$. Нека $y^2 - px + q = 0$ е бараната равенка; тогаш пак според Виетовите правила, ќе имаме

$$p = y_1 + y_2 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} + \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} = \frac{(x_1 + 1)(x_2 - 1) + (x_2 + 1)(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{2x_1x \ - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -5$$

$$q = y_1 \cdot y_2 = \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} = \frac{x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = 6 .$$

Според тоа, бараната равенка е $y^2 + 5y + 6 = 0$.

87. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се n точки во рамнината. Да се покаже дека постои една и само една точка T таква што

$$\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + ... + \overrightarrow{TA_n} = \vec{0}$$

Решение. Нека O е произволна точка во рамнината и нека точката T е определена со равенството

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}) .$$

Тогаш имаме

$$\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + ... + \overrightarrow{TA_n} = (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_2}) + ... + (\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OA_n}) = n\overrightarrow{TO} + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}) =$$
$$= n\overrightarrow{TO} + n\overrightarrow{OT} = \vec{0}$$

Ако Q е точка од рамнината, таква што

$$\overrightarrow{QA_1} + \overrightarrow{QA_2} + ... + \overrightarrow{QA_n} = \vec{0}$$

тогаш

$$\overrightarrow{QA_1} + \overrightarrow{QA_2} + ... + \overrightarrow{QA_n} = \vec{0} = \overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TA_2} + ... + \overrightarrow{TA_n} ,$$

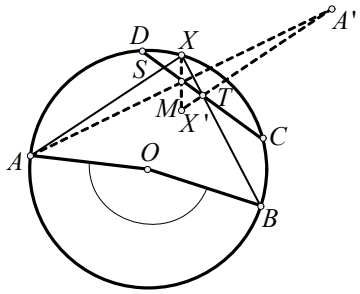
од каде што добиваме

$$(\overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{A_1Q}) + (\overrightarrow{TA_2} + \overrightarrow{A_2Q}) + ... + (\overrightarrow{TA_n} + \overrightarrow{A_nQ}) = \vec{0} .$$

Но, $\overrightarrow{TA_k} + \overrightarrow{A_kQ} = \overrightarrow{TQ}$ за $k = 1,2,3,...,n$, па последното равенство се сведува на равенството $n\overrightarrow{TQ} = \vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{TQ} = \vec{0}$, од каде што се добива $T \equiv Q$.

88. На кружница k дадени се четири точки A, B, C, D а на тетивата CD една точка M. На кружницата k да се најде точка X, така што правите AX и BX отсекуваат на тетивата CD отсечка ST чија средина е точката M.

Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена (види цртеж). Тогаш имаме $\sigma_M(S) = T$. Нека $\sigma_M(A) = A'$, $\sigma_M(X) = X'$. Правите $A'X'$ и AX се паралелни, па имаме



$$\measuredangle X'TB = \measuredangle AXB = \frac{1}{2}\measuredangle AOB .$$

Од анализата следува следнава конструкција. 1) Ја конструираме точката $A' = \sigma_M(A)$; 2) го конструираме геометриското место Γ на точки од кои отсечката $A'B$ се гледа под агол $\pi - \frac{1}{2}\measuredangle AOB$; 3) точката $T \in \Gamma \cap CD$. Со тоа задачата е решена.

III година

89. Да се докаже неравенството

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot ... \log_{1981} 1982 \cdot \log_{1982} 1983 < 11 .$$

Решение. За произволен број $c > 0$ важи равенството

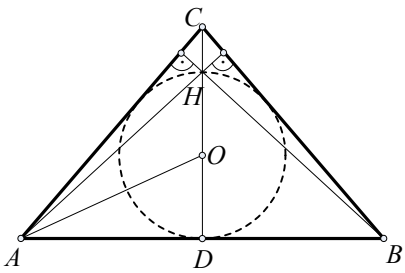
$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} ,$$

па за $c = 10$, за изразот A добиваме

$$A = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot ... \cdot \frac{\log 1982}{\log 1981} \cdot \frac{\log 1983}{\log 1982} = \frac{\log 1983}{\log 2} = \log_2 1983 .$$

Нека $\log_2 1983 = x$; тогаш $2^x = 1983$. За $x = 11$ имаме $2^{11} = 2048$, па значи, $1983 < 2^{11}$, т.е.

$$\log_2 1983 < 11 .$$



90. Нека ортоцентарот H на рамнокракиот триаголник ABC лежи на впишаната кружница. Да се најде косинусот на аголот α при основата AB на тој триаголник.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник ABC (види цртеж). Тогаш имаме $\measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle AHD = \alpha$. Од правоаголните триаголници AHD и AOD добиваме $\overline{HD} = \overline{AD}\,\mathrm{ctg}\alpha$ и $\overline{OD} = \overline{AD}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Бидејќи $\overline{HD} = 2\overline{OD}$, добиваме $\mathrm{ctg}\alpha = 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, од каде што, пак, добиваме $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

91. Нека a, b и c се должините на страните на еден триаголник и нека α, β и γ се неговите внатрешни агли (аголот α лежи спроти страната a, а β и γ -спроти b и c соодветно). Да се докаже дека

$$A = \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\cos\beta + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos\gamma = 3$$

Решение. Со примена на косинусна теорема, за изразот A имаме

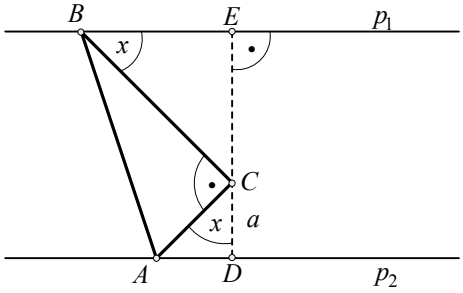
$$A=\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2c^2}+\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2a^2c^2}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2}$$

од каде што, по средувањето, ќе добиеме $A=3$.

92. Дадени се две паралелни прави p_1 и p_2 и една точка C меѓу нив. Да се одреди правоаголен триаголник ABC, со прав агол во дадената точка C и другите две темиња A и B кои лежат на правите p_1 и p_2 соодветно, така што неговата плоштина да биде најмала.

Решение. Нека d е растојанието меѓу правите p_1 и p_2 и нека a е растојанието од точката C до правата p_2 (види цртеж). Положбата на триаголникот ABC наполно е определена со аголот x што катетата AC го зафаќа со нормалата ED на правите p_1 и p_2. Бидејќи $\measuredangle CBE=\measuredangle ACD=x$ (како агли со заемно нормални краци), од правоаголните триаголници ACD и CEB, имаме



$$\overline{AC}=\frac{a}{\cos x},\qquad \text{и}\qquad \overline{BC}=\frac{d-a}{\sin x},$$

па плоштината на триаголникот ABC ќе биде

$$P=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d-a}{\sin x}=\frac{a(d-a)}{\sin 2x}.$$

Според тоа, плоштината P ќе биде најмала ако е $\sin 2x$ најголемо, т.е. ако $\sin 2x=1$, од каде што добиваме $x=\frac{\pi}{4}$.

IV година

93. Нека A и B се две дадени точки, а m е даден позитивен број. Да се најде геометриското место на точките M такви што $\overline{AM}=m\cdot\overline{BM}$.

Решение. Со O да ја означиме онаа точка од отсечката AB за која е $\overline{AO}:\overline{OB}=m$. Ако ставиме $\overline{OB}=a$ и ако поставиме правоаголен координатен сстем со координатен почеток во точката O и апсцисна оска-правата AB, тогаш ќе имаме $A(-ma,0)$ и $B(a,0)$. Ако $M(x,y)$ е точка од бараното геометриско место точки, од условот $\overline{AM}=m\cdot\overline{BM}$ добиваме

$$(x+ma)^2+y^2=m^2\left[(a-x)^2+y^2\right]$$

која по средувањето , се трансформира во облик

$$(m-1)x^2+(m-1)y^2=2max.$$

Со последната равенка дадено е геометриското место на точки и од неа се гледа дека при $m=1$ тоа геометриско место е правата $x=0$, додека при $m\neq 1$ геометриското место е кружницата

$$\left(x-\frac{ma}{m-1}\right)^2+y^2=\frac{m^2a^2}{(m-1)^2}.$$

94. Во правоаголниот триаголник ABC дадени се катетата $\overline{CA}=b$ и аголот $\alpha=60^\circ$ при темето A. Од темето C спуштена е нормал CD на хипотенузата AB. Од точката D спуштена е нормала DC_1 на катетата BC. Од точката C_1 спуштена е нормал C_1D_1 на хипотенузата AB итн. Да се пресмета збирот на должините на така добиените нормали, кога нивниот број неограничено се зголемува.

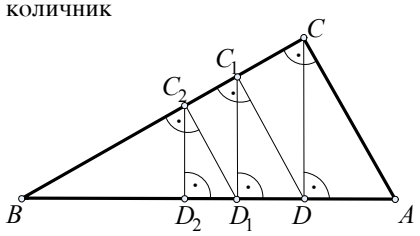
Решение. Аглите $\measuredangle CAD, \measuredangle DCC_1, \measuredangle C_1DD_1, \ldots$ се еднакви меѓу себе и се по 60°, бидејќи тоа се агли со заемно нормални краци (види цртеж). Од правоаголните триаголници $ACD, DCC_1, DD_1C_1, \ldots$ добиваме

$$\overline{CD}=b\sin 60^\circ, \quad \overline{C_1D}=\overline{CD}\cdot\sin 60^\circ, \quad \overline{C_1D_1}=\overline{C_1D}\cdot\sin 60^\circ, \ldots$$

$$\overline{CD}=b\sin 60^\circ, \quad \overline{C_1D}=b\cdot\sin^2 60^\circ, \quad \overline{C_1D_1}=b\cdot\sin^3 60^\circ, \ldots$$

Збирот на овие отсечки (кога нивниот број неограничено се зголемува) формира еден бесконечен геометриски ред со прв член $a_1=b\sin 60^\circ$ и количник

$$q=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}<1.$$



Според тоа, збирот S на овој ред ќе биде

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{b\cdot\sin 60^\circ}{1-\sin 60^\circ}=b\sqrt{3}(2+\sqrt{3}).$$

95. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е аритметичка прогресија и нека $a_n\neq 0$ за $n=1,2,3,\ldots$. Да се докаже дека

$$S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Решение. Нека $d=a_{k+1}-a_k$ ($k=1,2,3,4,\ldots,n,\ldots$) е разликата на аритметичката прогресија; тогаш имаме:

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})=\frac{1}{d}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})=$$

$$=\frac{1}{d}\frac{a_n-a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=\frac{1}{d}\frac{(n-1)d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

96. Од природните броеви ги формираме множествата

$$A_1=\{1\}, \quad A_2=\{2,3,4\}, \quad A_3=\{3,4,5,6,7\}, \quad A_4=\{4,5,6,7,8,9,10\}, \ldots$$

Со помош на математичка индукција да се докаже дека збирот на броевите во секое множество A_n, $n=1,2,3,4,\ldots$ е квадрат на некој непарен број.

Решение. Нека S_n е збирот на броевите во множеството $A_n = \{n, n+1, n+2, n+3, ..., 3n-2\}$; тогаш имаме:

$S_1 = 1 = 1^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2$

$S_2 = 2 + 3 + 4 = 9 = 3^2 = (2 \cdot 2 - 1)^2$

$S_3 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 = 5^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2$, итн.

Да претпоставиме дека $S_k = (2 \cdot k - 1)^2$. За S_{k+1} ќе имаме:

$$S_{k+1} = (k+1) + (k+2) + ... + 3(k+1) - 3 + 3(k+1) - 2 = S_k - k + 3k - 1 + 3k + 3k + 1 = S_k + b_k =$$
$$= (2k-1)^2 + 8k = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 = [2(k+1) - 1]^2 .$$

Според принципот на математичка индукција $S_n = (2n-1)^2$ за секој природен број $n \in \mathbb{N}$.

VII регионален натпревар - 1984 година

I година

97. Покажи дека на единствен начин со замена на различни букви со различни цифри се добива

$$\begin{array}{r} \text{Ш Е С Т} \\ \text{Е Д Н О} \\ + \quad \text{Д В Е} \\ \hline \text{Д Е В Е Т} \end{array}$$

при што $\text{Н} + 1 = \text{Т}$. (броевите не започнуваат со 0)

Решение. Очигледно е дека $\text{Д} = 1$. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се броевите кои ги памтиме при собирањето од десно на лево. Воочуваме дека $x_4 = 1$. Од $\text{Т} + \text{О} + \text{Е} = 10x_1 + \text{Т}$ следува дека $x_1 = 1$. Понатаму имаме $\text{Ш} + \text{Е} + x_3 = 10 + \text{Е}$ (зошто $x_4 = 1$), т.е. $\text{Ш} + x_3 = 10$. Бидејќи $\text{Е} + 1 + 1 + x_2 < 20$, заклучуваме дека $x_3 \le 1$, па значи $x_3 = 1$, $\text{Ш} = 9$. Од $x_3 = 1$ се добива дека $\text{Е} \in \{6,7,8\}$ (напиши ја соодветната шема).

Ако $\text{Е} = 6$, тогаш $x_2 = 2$, $\text{В} = 0$; но, $\text{С} + \text{Н} + \text{О} + 1 < 20$, па добиваме дека $x_2 \le 1$. Значи, $\text{Е} \ne 6$.

Ако $E = 7$, тогаш $x_2 = 1$ и $\text{В} = 0$; но, $\text{С} + \text{Н} + 1 = 10 + 7$, т.е. $\text{С} + \text{Н} = 16$; од друга, пак, страна, $\text{С} + \text{Н} \le 8 + 6 = 14$. Значи, $E \ne 7$.

За $\text{Е} = 8$, добиваме $\text{О} = 2$; од $\text{С} + \text{Н} + 1 = 8$ и $\text{Н} + 1 = \text{Т}$, добиваме $\text{С} = 3$, $\text{Н} = 4$, $\text{Т} = 5$.

Следствено,

$$\begin{array}{r} 9835 \\ 8142 \\ +\ \ 108 \\ \hline 18085 \end{array}$$

98. Нека x, y и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ се рационални броеви. Покажи дека и броевите $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ се рационални.

Решение. Да ставиме $\sqrt{x}+\sqrt{y}=p$, каде што p е рационален број. Со квадрирање на равенството $\sqrt{x}=p-\sqrt{y}$ добиваме

$$2p\sqrt{y}=p^2+y-x,$$

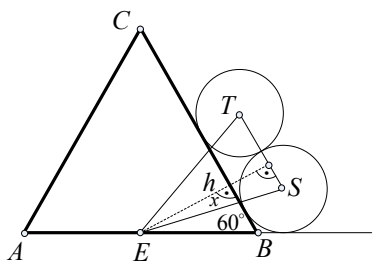
од каде што следува дека $\sqrt{y}$ е рационален број. Според тоа, $\sqrt{x}=p-\sqrt{y}$ е исто така рационален број.

99. Две илјади домина се исправени во редица на еднакво (и мало) растојание едно од друго. Потоа, домината се нумерираат од 1 до 2000. Пред доминото со реден број 1 се редат на ист начин уште неколку домина, а на другиот крај k пати повеќе ($k>8$). Едновремено и со еднаква сила крајните домина се поттурнуваат кон средината. Колку домина се наредени, ако на крајот останало доминото со реден број 1984?

Решение. Нека x е бројот на домината поставени пред доминото со реден број 1; тогаш $16+kx=1983+x$ од каде што добиваме $(k-1)x=1967$. Бидејќи $1967=7\cdot 281$, а броевите 7 и 281 се прости, добиваме $k-1=281$, $x=7$, зошто по услов $k>8$. Според тоа, наредени се вкупно

$$(k+1)x+2000=283\cdot 7+2000=3981$$

домино.



100. Даден е рамностран триаголник ABC со страна 12 cm. Две кружници со ист радиус еднаков на $\sqrt{3}$ cm ја допираат страната BC од надворешната страна на триаголникот, се допираат меѓу себе и едната кружница ја допира правата AB. Да се најде плоштината на триаголникот чии темиња се центрите на кружинците и средната на страната AB.

Решение. Нека S и T се центрите на кружниците и нека E е средината на страната AB (види цртеж). Тогаш, имаме $\overline{ST}=2\sqrt{3}$, $x=\overline{EB}\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$, $h=x+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Според тоа, плоштината P на триаголникот EST ќе биде:

$$P=\frac{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}{2}=12.$$

II година

101. Возраста на едно лице во оваа година (1984) е еднаква на збирот на цифрите од годината на неговото раѓање. Колку години има лицето?

Решение. Лицето има најмногу $9+9+9+9=36$ години, што значи дека е родено во XX - от век, т.е. првите две цифри на годината на неговото раѓање се 1 и 9. Нека x е цифрата на десетките, а y цифрата на единиците од годината на раѓањето; Според условот од задачата имаме $1+9+x+y=1984-(1000+900+10x+y)$, т.е.

$$11x+2y=74.$$

Бидејќи $0\le x,y\le 9$, од равенката добиваме $x=6$, $y=4$, односно лицето е родено 1964 година и сега има $1+9+6+4=20$ години.

102. Докажи дека за секој цел број m и $A=\frac{m^4}{24}+\frac{m^3}{4}+\frac{11m^2}{24}+\frac{m}{4}$ е цел број.

Решение. Дадениот израз да го напишеме на следниот начин:

$$A=\frac{m}{24}(m^3+6m^2+11m+6)=\frac{m}{24}(m^3+3m^2+2m+3m^2+9m+6)=$$
$$=\frac{m}{24}[m(m^2+3m+2)+3(m^2+3m+2)]=\frac{m}{24}(m^2+3m+2)(m+3)=$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}$$

Значи, за да докажеме дека A е цел број, треба да докажеме дека $n=m(m+1)(m+2)(m+3)$ е делив со 24. Производ од два последователни броја е делив со 2; од четири последователни броеви еден е делив со 4; значи, бројот n е делив со 8. Производ од три последователни броја е делив со 3, па, значи, n е делив со 3. Броевите 3 и 8 се заемно прости, што значи дека n е делив и со бројот $3\cdot 8=24$.

103. Основата на права четиристрана призма е ромб чии дијагонали се разликуваат за 10 cm. Ако поголемата дијагонала се зголеми за 2 cm, а помалата се намали за 1 cm, плоштината на ромбот останува иста.

Пресметај ја плоштината на призмата ако нејзината висина е двапати поголема од страната на ромбот.

Решение. Ако d_1 и d_2 се дијагоналит на ромбот, тогаш според условот на задачата, имаме:

$$d_1-d_2=10,\qquad \frac{d_1d_2}{2}=\frac{(d_1+2)(d_2-1)}{2},$$

од каде што добиваме $d_1=22\text{ cm}$, $d_2=12\text{ cm}$.

Дијагоналите на секој ромб се заемно нормални, па за страната a на ромбот ќе имаме:

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=157,\qquad a=\sqrt{157}\text{ cm}.$$

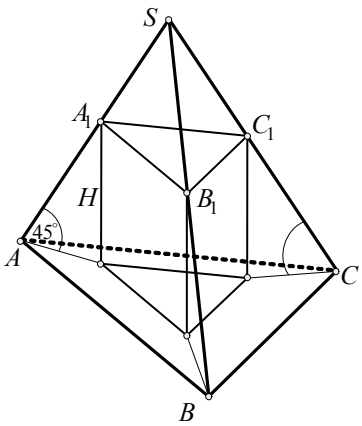
Висината на призмата е $H=2\sqrt{157}\text{ cm}$, па за плоштината P на призмата ќе имаме:

$$P=2B+M=2\frac{d_1d_2}{2}+4aH=1520\text{ cm}^2.$$

104. При тристрана пресечена пирамида рабовите на помалата основа се $7\text{ cm}, 5\text{ cm}$ и 3 cm, а бочните рабови со рамнината на поголемата основа зафаќаат агол од 45°. Да се пресмета волуменот на пресечената пирамида, ако нејзината висина е $\frac{2}{3}$ од висината на соодветната пирамида.

Решение. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е пресечената пирамида, а $ABCS$ соодветната пирамида (види цртеж). Од тоа што бочните рабови на поголемата основа зафаќаат агол од 45°, следува дека $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$, па значи, проекцијата на S врз рамнината ABC е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Сега, лесно се увидува дека $H=2R_1$, каде што H е висината на пресечената пирамида, а R_1 е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$.

Според Хероновата формула, за плоштината P_1 на триаголникот $A_1B_1C_1$ имаме:



$$P_1=\sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)}=\frac{15\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2,$$

па

$$R_1=\frac{a_1b_1c_1}{4P_1}=\frac{7\sqrt{3}}{3}\text{ cm},\qquad H=\frac{14\sqrt{3}}{3}\text{ cm}.$$

Висината на соодветната пирамида е $H_1=\frac{3}{2}H=\frac{14\sqrt{3}}{2}\text{cm}$, па за плоштината P на триаголникот ABC ќе имаме:

$$P:P_1=\left(\frac{14\sqrt{3}}{2}\right)^2:\left(\frac{14\sqrt{3}}{2}-\frac{14\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

т.е. $P=9P_1$.

На крајот за волуменот V на пресечената пирамида ќе имаме:

$$V=\frac{H}{3}\left(P+P_1+\sqrt{PP_1}\right)=\frac{13}{3}HP_1=227{,}5\text{ cm}^3.$$

III година

105. При $xyz\neq 0$ нека важат равенствата $x+y+z=xyz$, $x^2=yz$. Да се докаже дека y и z се реални ако и само ако $x^2\geq 3$.

Решение. Дадените равенства да ги запишеме во обликот

$$y+z=x^3-x,\qquad yz=x^2.$$

Значи, y и z се корени на квадратната равенка

$$t^2-(x^3-x)t+x^2=0,$$

која што има реални решенија ако и само ако $D\geq 0$, $x^2(x^4-2x^2-3)\geq 0$, т.е. ако и само ако

$$x^4-2x^2-3\geq 0,$$

од каде што добиваме $x^2\geq 3$.

106. Даден е збирот $S=\cos\frac{n\pi}{7}+\cos\frac{3n\pi}{7}+\cos\frac{5n\pi}{7}$, $n\in\mathbb{N}$. Ако n не е делив со 7, тогаш

$$S=-\frac{1}{2}\cos n\pi=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{ за n непарен број}\\ -\frac{1}{2}, \text{ за n парен број}\end{cases}.$$

Докажи!

Колку е S ако n е делив со 7?

Решение. Ако n е делив со 7 ($n=7k$), тогаш

$$S=\cos k\pi+\cos 3k\pi+\cos 5k\pi.$$

Ако k е парен, тогаш $S=3$, а ако k е непарен, тогаш $S=-3$.

Нека n не е делив со 7; се уочува дека:

$$\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7},$$

$$\sin\frac{6n\pi}{7}-\sin\frac{4n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{5n\pi}{7}$$

$$\sin\frac{4n\pi}{7}-\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{3n\pi}{7}$$

Собирајќи ги овие равенства добиваме

$$\sin\frac{6n\pi}{7}=2S\sin\frac{n\pi}{7},$$

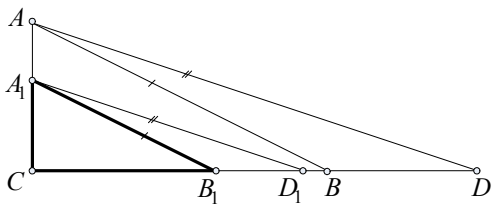
од каде што добиваме

$$S=\frac{\sin\frac{6n\pi}{7}}{2\sin\frac{n\pi}{7}}=\frac{\sin\left(n\pi-\frac{n\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{n\pi}{7}}=-\frac{1}{2}\cos n\pi.$$

(Делењето со $\sin\frac{n\pi}{7}$ е можно, зашто n не е делив со 7, па $\sin\frac{n\pi}{7}\neq 0$).

107. Да се конструира правоаголен триаголник кај кој едната катета е двапати поголема од другата и е познат збирот од катетите и висината спуштена на хипотенузата (т.е. познато е $a+b+h_c$).

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник, така што $\overline{BC}=2\overline{AC}$ и нека h е висината спуштена на хипотенузата. Тогаш $\overline{AB}^2=5\overline{AC}^2$, па за плоштината P добиваме



$$P=\overline{AC}^2 \quad \text{и} \quad P=\frac{\sqrt{5}\cdot\overline{AC}\cdot h}{2}.$$

Оттука добиваме

$$h=\frac{\overline{AC}}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AC}+\overline{BC}+h}{\overline{AC}}=3+\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Од дискусијата произлегува следнава конструкција.

Конструираме правоаголен триаголник A_1B_1C за кој $\overline{B_1C}=2\overline{A_1C}$ (види цртеж). На полуправата нанесуваме точки D и D_1, така што $\overline{CD_1}=\overline{A_1C}+\overline{B_1C}+h$ и $\overline{CD}=a+b+h$ (дадениот збир). Од односите

$$\overline{CD_1}:\overline{CA_1}=3+\frac{2}{\sqrt{5}}=\overline{CD}:\overline{CA} \quad \text{и} \quad \overline{BC}=2\overline{AC}$$

ги наоѓаме точките A и B со што триаголникот е конструиран.

Да забележиме дека задачата има единствено решение.

108. Реши ја равенката $\left(x^{\log_2 x}-1\right)^2=1$.

Решение. По ред имаме:

$$x^{2\log_2 x}-2x^{\log_2 x}+1=1$$

$$x^{2\log_2 x}=2x^{\log_2 x}$$

$$2(\log_2 x)^2=\log_2 2+(\log_2 x)^2$$

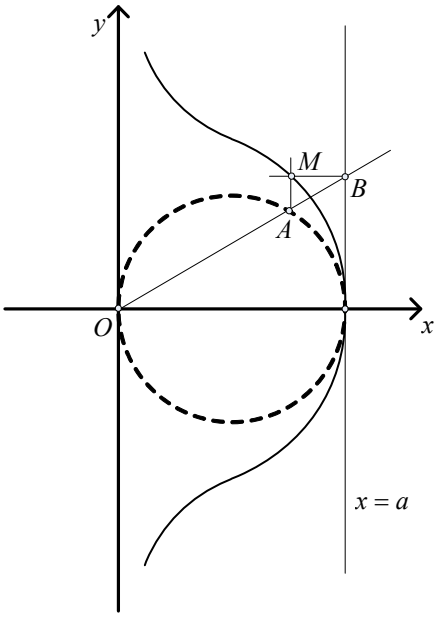
$$(\log_2 x)^2=1$$

$$\log_2 x=\pm 1$$

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

IV година

109. Дадена е правата $x=a$ ($a>0$) и кружница со радиус a која минува низ координатниот почеток и ја допира дадената права. Низ координатниот почеток е повлечена произволна права, којашто ја сече кружницата во точката A ($A\neq 0$), а дадената права во точката B. Низ точките A и B се повлечени прави паралелни соодветно со Oy и Ox. Нека тие прави се сечат во точката M. Најди го геометриското место на точките M.



Решение. Равенката на кружницата е $x^2+y^2-ax=0$, а равенката на произволна права низ координатниот почеток е $y=kx$, $k\in\mathbb{R}$. Според тоа, ќе имаме:

$$A\left(\frac{a}{1+k^2},\frac{ak}{1+k^2}\right),\qquad B(a,ak).$$

За координатите x,y на точката M имаме:

$$x=\frac{2}{1+k^2},\qquad y=ak,$$

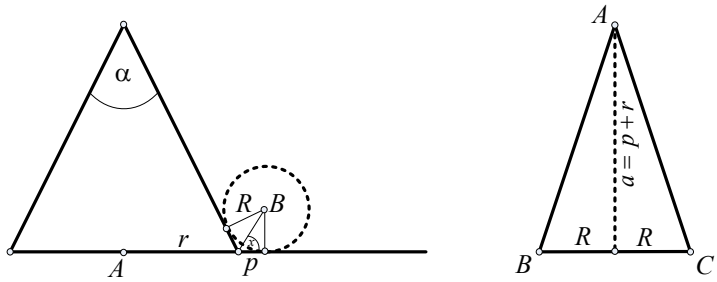
од каде што добиваме (со елиминација на k)

$$x(a^2+y^2)=a^3,$$

што претставува равенка на бараното геометриско место. Графикот е даден на цртежот.

110. Даден е прав кружен конус со радиус r и агол α при врвот на оскиниот пресек. Две сфери со радиус R го допираат конусот однадвор, се допираат меѓу себе и ја допираат рамнината во која лежи основата на конусот. Да се најде плоштината на триаголникот чии темиња се центрите на сферите и центарот на основата на конусот.

Решение. Нека B и C се центрите на сферите, а A центарот на основата на конусот



(види цртежи). Тогаш имаме:

$$\overline{BC} = 2R\,, \qquad x = \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\,, \qquad p = R\mathrm{ctg}x\,, \qquad \overline{AB}^2 = (r+p)^2 + R^2\,.$$

Јасно дека $\overline{AC} = \overline{AB}$, па

$$P_{ABC} = R(p+r) = R\left[r + R\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

111. Докажи дека елементите на Паскаловиот триааголник, кои лежат на назначената права, имаат својство да разликата на квадратите на кои било два последователни члена е еднаков на кубот од некој цел број.

Решение. Членот од n-тата редица на Паскаловиот триаголник што лежи на назначената права е $\binom{n}{n-2}$, а соодветниот член од $(n+1)$-та редица е $\binom{n+1}{n-1}$. Според тоа, имаме

$$\binom{n+1}{n-1}^2 - \binom{n}{n-2}^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 = n^3\,.$$

112. Одреди ги заедничките членови на аритметичките прогресии:

$1,5,9,13,17,21,...$ $\qquad$ $4,15,26,37,...$

Решение. Нека a_n и b_m се општите членови на аритметичките прогресии; тогаш имаме:

$$a_n = 1 + 4(n-1)\,, \qquad b_m = 4 + 11(m-1)\,.$$

Треба да ја решиме равенката $a_n = b_m$ во множеството на природните броеви. Оваа равенка се сведува на решавање на равенката

$$11m = 4(n+1)$$

од каде што добиваме $n+1 = 11k$, $m = 4k$. Според тоа, имаме $a_{11k-1} = b_{4k}$.

VIII регионален натпревар - 1985 година

I година

113. По натпреварот на кој учествувале Никола, Лазар,Весна и Соња, на прашањето каков бил редоследот одговориле:

Никола: “Венсна е прва, а Лазар е втор”

Лазар: “Весна е втора, а Соња е трета”

Весна: “Соња е четврта, а Никола е втор”

Секој од нив дал по еден точен и еден неточен одговор. Каков бил редоследот?

Решение. Ако исказот на Лазар “Весна е втора” е точен, тогаш двата искази на Никола се неточни, што не е можно. Значи, Весна не е втора, а Соња е трета. Тогаш исказот на Весна “ Никола е втор” е точен. Бидејќи Никола е втор, исказот на Никола “ Весна е прва” е точен. Според тоа, редоследот бил следниот: Весна е прва, Никола е втор, Соња е трета и Лазар е четврт.

114. Да се најдат сите можности за запишување на бројот 1985 како збир од 1973 непарни природни броеви. Забелешка: Распоредот на броевите во збирот не е битен; на пример $3+1$ и $1+3$ е една можност.

Решение. Нека $1985 = a_1 + a_2 + ... + a_{1973}$, каде што $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_{1973}$ се непарни природни броеви. Лесно се докажува дека $a_7 = a_8 = ... = a_{1973}$. Според тоа бараните можности се всушност можности за запишување на бројот 18 како збир од 6 непарни природни броеви. Бидејќи $4 \cdot 5 = 20 > 18$ и $15 + 5 > 18$, се добива дека a_4, a_5, a_6 можат да бидат 1 или 3, а $3 \leq a_1 \leq 13$. Со комбинирање на броевите $1,3,5,7,9,11$ и 13 се добиваат бараните можности:

$3+3+3+3+3+3$, $5+3+3+3+3+1$, $5+5+3+3+1+1$

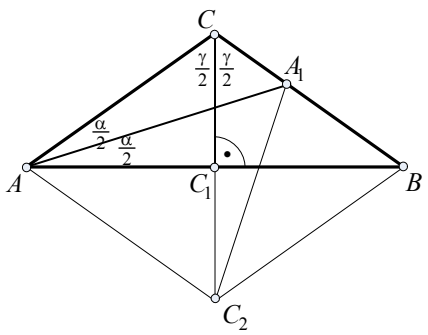
$5+5+5+1+1+1$, $7+3+3+3+1+1$, $7+5+3+1+1+1$

$7+7+1+1+1+1$, $9+3+3+1+1+1$, $9+5+1+1+1+1$,

$11+3+1+1+1+1$, $13+1+1+1+1+1$.

115. Даден е рамнокрак триаголник ABC во кој $\overline{AC} = \overline{BC}$ и висината спуштена од темето C е еднаква на половина од симетралата на аголот кај темето A. Најди го аголот кај темето C.

Решение. Нека CC_1 е висина спуштена од темето C и нека AA_1 е симетрала на аголот α кај темето A (види цртеж). Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, точката C_1 е средина на страната AB и CC_1 е симетрала на аголот γ кај темето C. Нека C_2 е точка од правата CC_1, така што $\overline{CC_1} = \overline{C_1C_2}$ (види цртеж). Од тоа што дијагоналите на четириаголникот AC_2BC се половат, следува дека тој четириаголник е паралелограм. Бидејќи $AC_2 \parallel CA_1$ и $\overline{AA_1} = \overline{CC_2}$, четириаголникот AC_2A_1C е рамнокрак трапез, од што следува дека $\frac{\gamma}{2} = \measuredangle C_2CA_1 = \measuredangle CA_1A$. Од триаголниците AC_1C и AA_1C се добива $\gamma = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ и $\frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \gamma - \frac{\gamma}{2}$ соодветно. Тогаш од равенството $90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 2\left(180^\circ - \gamma - \frac{\gamma}{2}\right)$ се добива дека $\gamma = 108^\circ$.

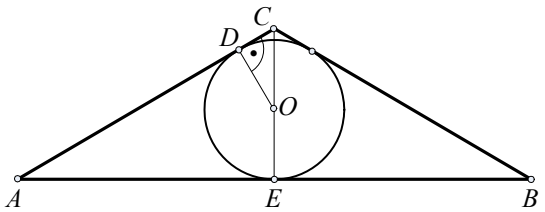


116. Во рамнокрак триаголник со агол 120° впишаната кружница има радиус $5\,\text{cm}$. Определи ги страните на триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во дадениот триаголник ABC со агол 120° кај темето C. Нека D и E се допирните точки на кружницата со AC и AB соодветно (види цртеж). Во правоаголниот триаголник ODC, $\measuredangle DCO = 60^\circ$.

Од тоа следува дека $\overline{DO} = \overline{CO}\sin 60^\circ$, т.е. $\overline{CO} = \overline{DO}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Според тоа,

$$\overline{CE} = \overline{CO} + \overline{OE} = \frac{10}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{5(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$



Од триаголникот ACE следува дека $\overline{CE} = \overline{AC}\cos 60^\circ$, т.е. $\overline{AC} = \frac{10(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}$ cm.

Слично се добива дека $\overline{AE} = \overline{AC}\cos 60^\circ$, т.е. $\overline{AB} = 10(\sqrt{3}+2)$ cm.

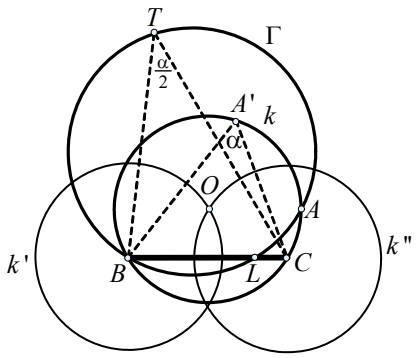
II година

117. Нека a и b се корени на равенката $x^2 + px + 1 = 0$ и нека b и c се корени на равенката $x^2 + qx + 2 = 0$. Докажи дека $(b-a)(b-c) = pq - 6$.

Решение. Од Виетовите правила се добива дека $a + b = -p$, $ab = 1$, $b + c = -q$ и $bc = 2$. Тогаш:

$$\begin{aligned}(b-a)(b-c) &= (b+a-2a)(b+c-2c) = (-p-2a)(-q-2c) = pq - 2aq - 2cp + 4ac = \\ &= pq - 2a(b+c) - 2c(b+a) + 4ac = pq - 2ab - 2bc - 2ac + 4ac = \\ &= pq - 2ab - 2bc = pq - 2 - 4 = pq - 6\end{aligned}$$

118. Да се конструира триаголник ABC со познати: страната BC, точката L на страната BC низ која минува симетралата на аголот кај темето A, и радиусот на опишаната кружница.



Решение. Нека ABC е триаголник со радиус R на опишаната кружница и нека L е точка од BC така што AL е симетрала на аголот α кај темето A. Отсечките BC и BL се гледаат под агол α и $\frac{\alpha}{2}$ од A соодветно. Аголот α е определен со опишаната кружница и отсечката BC, како периферискиагол. Според тоа, A е пресечна точка на опишаната кружница со геометриското место на точки од кои отсечката BL се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$.

<u>Конструкција.</u> Ги цртаме отсечката BC и точката L. Цртаме кружници k' и k'' со радиус R и

центри во B и C соодветно. Ако $R<\frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш $k'\cap k''=\varnothing$, па задачата нема решение. Нека $R\geq\frac{1}{2}\overline{BC}$ и нека $O=k'\cap k''$. Конструираме кружница k со центар во O и радиус R. Нека A' е точка од k и нека $\alpha=\measuredangle BA'C$. Го конструираме геометриското место Γ на точки од кои отсечката BL се гледа под агол $\frac{\alpha}{2}$. Γ е лак од кружница. Тогаш бараниот триаголник е ABC каде што A е пресечната точка на k и Γ различна од B (види цртеж).

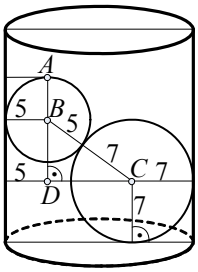
Доказ. Следува од: теоремата за периферискиагли, конструкцијата и анализата.

Дискусија. Веќе докажавме дека задачата нема решение ако $R<\frac{1}{2}\overline{BC}$. Ако $R>\frac{1}{2}\overline{BC}$ тогаш во зависност од изборот на лакот на кој лежи A' се добиваат две различни вредности на аголот α, па задачата има две решенија. Ако $R=\frac{1}{2}\overline{BC}$, тогаш аголот α е еднозначно определен, па задачата има единствено решение.

119. Најди трицифрен број кој помножен со 7 дава куб од природен број.

Решение. Нека бараниот број е a. Од условот на задачата следува дека $7a=n^3$, $n\in\mathbb{N}$. Значи, 7 е делител на n^3. Бидејќи 7 е прост број, следува дека 7 е делител на n. Нека $n=7k$. Тогаш $a=7^2k^3=49k^3$. Ако $k\geq 3$, тогаш a има повеќе од 3 цифри. Ако $k=1$, тогаш a има две цифри. Значи $k=2$ и $a=392$.

120. Даден е прав кружен цилиндер со дијаметар на основата 22 cm. Во него има две метални топки кои: го допираат ѕидот цилиндерот во две дијаметрално спротивни точки; се допираат меѓу себе и едната едната од нив го допира дното на цилиндерот. Топките имаат радиуси 5 cm и 7 cm. Во цилиндерот се турени $4{,}5\text{ l}$ вода. Дали водата ги покрива топките? Одговорот да се образложи.



Решение. Нека A е точка од топките чие растојание до дното на цилиндерот е најголемо и нека тоа растојание го означиме со h (види цртеж). Од правоаголниот триаголник BCD се добива дека $\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{DC}^2}=\sqrt{12^2-(22-12)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$.

Значи, $h=7+5+\overline{BD}=12+2\sqrt{11}$. Нека V е волуменот на цилиндерот со висина h, V_1 и V_2 волумените на топките со радиус 5 и 7 соодветно. За водата да ги покрие топките, треба $V-V_1-V_2$ да биде помало од $4{,}5\text{ dm}^3$. Со пресметување на волумените се добива дека:

$$V=2\pi\cdot 11^2\cdot(6+\sqrt{11})\text{ cm}^3,\qquad V_1=\frac{4\pi}{3}5^3\text{ cm}^3,\qquad V_2=\frac{4\pi}{3}7^3\text{ cm}^3,$$

од што следува дека $V-V_1-V_2=2\pi\left[121(6+\sqrt{11}-\frac{250}{3}-\frac{686}{3}\right]\text{cm}^3$, што е поголемо од $4{,}5\,l$. Значи, водата не ги покрива топките.

III година

121. Докажи дека бројот $A=2^1+2^2+\ldots+2^{1985}$ е делив со 31.

Решение. Имаме:

$$A=(2+2^2+2^3+2^4+2^5)+(2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10})+\ldots+(2^{1981}+2^{1982}+2^{1983}+2^{1984}+2^{1985})=$$
$$=2(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^6(1+2+2^2+2^3+2^4)+\ldots+2^{1981}(1+2+2^2+2^3+2^4)=$$
$$=31(2+2^6+2^{11}+\ldots+2^{1981})$$

од каде што следува дека бројот A е делив со 31.

122. Реши ја неравенката $\log_3(x+2)\geq\log_{x+2}3$.

Решение. Нека $a=\log_3(x+2)$ и $b=\log_{(x+2)}3$. Тогаш $x+2=3^a$ и $3=(x+2)^b$, т.е. $x+2=(x+2)^{ab}$. Според тоа $ab=1$, т.е. $b=\frac{1}{a}$. Од $a\geq b$ следува дека $a\geq\frac{1}{a}$. За $a>0$, од $a^2\geq 1$ следува дека $a\geq 1$. Тогаш $x+2=3^a\geq 3$, т.е. $x\geq 1$. За $a<0$, од $a^2\leq 1$ следува дека $-1\leq a<0$. Тогаш од $x+2=3^a$ се добива дека $3^{-1}\leq x+2<1$, т.е. $-\frac{5}{3}\leq x<-1$. Значи решенија на неравенката се $x\geq 1$ или $-\frac{5}{3}\leq x<-1$.

123. Да се најдат сите вредности на α за кои збирот од квадратите на корените на равенката $x^2+(\sin\alpha-1)x-\frac{1}{2}\cos^2\alpha=0$ е најголем.

Колкав е тој збир?

Решение. Од Виетовите правила следува дека

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[-(\sin\alpha-1)]^2-2\left(-\frac{1}{2}\cos^2\alpha\right)=\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1+\cos^2\alpha=$$
$$=2-2\sin\alpha=2(1-\sin\alpha)$$

Значи, $x_1^2+x_2^2$ има најголема вредност за $\sin\alpha=-1$ и тој збир $2(1+1)=4$.

124. Во правилна тристрана призма впишана е топка што ги допира трите ѕидови и двете основи на призмата. Да се најде односот на плоштините на топката и призмата.

Решение. Нека a е страната на рамностраниот триаголник кој е основа на призмата, и нека R е радиусот на впишаната топка. Од условот на задачата следува дека радиусот на впишаната кружница во основата на призмата е R, т.е $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Бидејќи топката ги допира двете основи, висината h на призмата е $2R$, т.е. $R=\frac{h}{2}$. Нека P_1 и P_2 се плоштините на топката и призмата соодветно. Тогаш $P_1=4\pi R^2$, а

$$P_2=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}+a^2\frac{\sqrt{3}}{4}+3ah=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3ah=2\frac{(2\sqrt{3}R)^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot 2\sqrt{3}R\cdot 2R=18R^2\sqrt{3}$$

Значи, $\frac{P_1}{P_2}=\frac{4\pi R^2}{18R^2\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

IV година

125. Да се определи геометриското место на точките M од кои елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ се гледа под прав агол.

Решение. Нека $M(\alpha,\beta)$ е точка од која дадената елипса се гледа под права агол. Произволна права низ M има равенка

$y-\beta=k(x-\alpha)$, т.е. $y=kx+\beta-k\alpha$

или $x=\alpha$. Услов за правата $y=kx+\beta-k\alpha$ и елипсата да имаат точно една заедничка точка е системот равенки по x и y

$$y=kx+\beta-k\alpha\,,\quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

да има единствено решение, т.е. равенката

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2k(\beta-k\alpha)x+a^2(\beta-k\alpha)^2-a^2b^2=0$$

да има единствено решение. Значи, потребно е и доволно е дискриминантата да биде нула, т.е.

$$(a^2-\alpha^2)k^2-2\beta\alpha k+b^2-\beta^2=0\,.$$

Нека k_1 и k_2 се решенија на оваа квадратна равенка. За елипсата да се гледа под прав агол од M потребно е правите $y=k_1x+\beta-k_1\alpha$ и $y=k_2x+\beta-k_2\alpha$ да се сечат под прав агол, т.е. $k_1k_2=-1$. Но, $k_1k_2=\dfrac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}$, од што следува дека $b^2-\beta^2=-a^2+\alpha^2$, т.е. $\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2$. Ако правата $x=\alpha$ е тангента на елипсата тогаш $\alpha=\pm a$ и за елипсата да се гледа под прав агол од M мора да биде $\beta=\pm b$. Значи и во овој случај $\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2$. Според тоа, бараното геометриско место е кружница со центар во $(0,0)$ и радиус a^2+b^2.

126. Да се докаже дека 19 е делител на бројот

$$A_k=5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}$$

Решение. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k. За $k=1$ имаме

$$A_1=5^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^3=8\cdot(125+27)=8\cdot 19\cdot 8\,,$$

што значи дека A_1 е делив со 19. Нека тврдењето е точно за k, т.е. $A_k=19m$; тогаш

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=5^{2(k+1)+1}\cdot 2^{(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}\cdot 2^{2(k+1)+1}=25\cdot 2\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+3\cdot 4\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}=\\&=50(19m-3^{k+2}2^{2k+1})+12\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}=\\&=50\cdot 19m-38\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}=19(50m-2\cdot 3^{k+1}\cdot 2^{2k+1})\end{aligned}$$

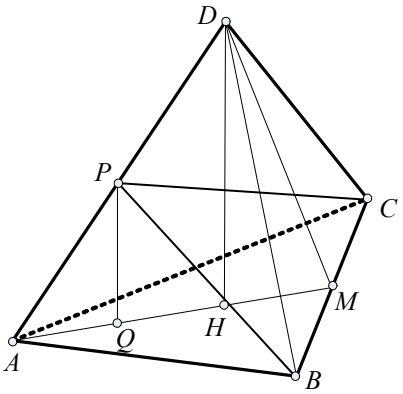
Следствено, бројот A_k е делив со 19 за секој природен број k.

127. Да се докаже дека: ако броевите a^2,b^2,c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш и броевите $\dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}$ се членови на аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи a^2,b^2,c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија, следува дека $b^2-a^2=c^2-b^2\neq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned}\frac{1}{c+a}-\frac{1}{c+b}&=\frac{b-a}{(c+a)(c+b)}=\frac{(b-a)(b+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{b^2-a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\\&=\frac{c^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(c-b)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}=\\&=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}\end{aligned}$$

Значи, $\dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија.



128. Дадена е правилна триастрана пирамида со основен раб a и висина h. Да се најде плоштината на пресекот на пирамидата со рамнина која минува низ еден од основните рабови и низ средината на спротивниот бочен раб.

Решение. Нека $ABCD$ е дадената пирамида со основа ABC, нека P е средина на AD, нека пресекот е BPC, нека M е средина на BC и нека H е тежиштето на триаголникот ABC. Тогаш $\overline{DH}=h$ и $\overline{AM}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Нека Q е точка од MA за која $PQ \parallel DH$ (види цртеж). Бидејќи P е средина на AD, следува дека PQ е средна линија на триаголникот ADH и $\overline{PQ}=\frac{h}{2}$. Значи,

$$\overline{AQ}=\overline{QH}=\overline{MH}=\frac{\overline{AM}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \text{и} \quad \overline{MQ}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Бидејќи $DH \perp MA$, следува дека $PQ \perp MQ$. Според тоа $\overline{PM}^2=\overline{MQ}^2+\overline{QP}^2=\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}$ па бараната плоштина е $P=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{PM}}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}}$.

IX регионален натпревар - 1986 година

I година

129. Два автомобили тргнале од едно исто место но во спротивна насока. Во моментот кога нивното растојание било $18\ \text{km}$, едниот автомобил поминал $3\ \text{km}$ помалку од двојниот пат на другиот. Да се одреди патот на двата автомобили што го поминале до тој момент.

Решение. Нека x и y се патиштата што ги поминале автомобилите. Од условот на задачата: $x+y=9$ и $x=2y-3$. Решение на овој сsстем равенки е $x=11$, $y=7$. Значи, едниот автомобил поминал $11\ \text{km}$, а другиот $7\ \text{km}$.

130. Дали може бројот 1986 да се претстави како разлика од квадрати на два цели броја? Одговорот да се образложи.

Решение. Одговорот е не. Образложението е како што следува:

(i) $m=2k$, $n=2t$. Тогаш $m^2-n^2=4(k^2-t^2)$, т.е. 4 е делител на m^2-n^2, а 4 не е делител на 1986.

(ii) $m=2k+1$, $n=2t+1$. Тогаш $m^2-n^2=4(k^2-t^2+k-t)$, т.е. 4 е делител на m^2-n^2, а 4 не е делител на 1986.

(iii) $m=2k$, $n=2t+1$ или $m=2k+1$, $n=2t$. Тогаш m^2-n^2 е непарен број, а 1986 е парен број.

131. Весна, Борис и Никола се одлични ученици кои никогаш не лажат. На прашањето што добиле на писмената работа по математика, тие одговориле:

Весна: "Ако Никола и јас добивме 5, тогаш и Борис доби 5";

Борис: " Ако јас добив 5, тогаш и Весна доби 5"; и

Никола: " Ако Борис или јас добивме 5, тогаш и Весна доби 5"

Познато е дека еден од нив добил 4 а другите двајца добиле 5. Кои оценки ги добиле Весна, Борис и Никола?

Решение. Нека p, q и r се исказите "Весна добила 5", "Борис добил 5" и "Никола добил 5", соодветно. Знаејќи дека еден од нив не е точен, а другите два се точни ја правиме следната таблица:

Бидејќи исказите на Весна, Борис и Никола (т.е. $p \wedge r \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $q \vee r \Rightarrow p$) се точни, од таблицата се добива дека Весна и Борис добиле 5, а Никола добил 4).

p	q	r	$p \wedge r \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$q \vee r \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

132. Нека A, B, C, D и E се пет точки, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека тие определуваат една, седум или десет рамнини.

Решение. Можни се следните случаи:

(i) Точките се компланарни, т.е. сите точки припаѓаат на една рамнина,

(ii) Четири од точките се компланарни, а петтата не припаѓа на рамнината определена со нив.

(iii) Кои било четири од дадените пет точки не се компланарни.

Во случајот (i) точките определуваат единствена (една) рамнина.

Во случајот (ii), нека A, B, C, D се компланарни, т.е. $A, B, C, D \in \Sigma_1$ и $E \notin \Sigma_1$. Тогаш точките A, B, C, D, E ги определуваат рамнините Σ_1; $\Sigma_2 = ABE$, $\Sigma_3 = ACE$, $\Sigma_4 = ADE$, $\Sigma_5 = BCE$, $\Sigma_6 = BDE$ и $\Sigma_7 = CDE$. Потребно е да се докаже дека Σ_1 до Σ_7 се различни рамнини. Јасно е дека $\Sigma_1 \neq \Sigma_i$, за секој $i = 2,3,4,5,6,7$. Ќе докажеме дека $\Sigma_2 \neq \Sigma_3$, а другите нееднаквости се докажуваат на ист начин. Бидејќи $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ и $A, B \in \Sigma_1$ и $A, B \in \Sigma_2$, следува дека $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ е правата AB. Ако $\Sigma_2 = \Sigma_3$, тогаш од $C \in \Sigma_3 = \Sigma_2$ и $C \in \Sigma_1$ следува дека $C \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = AB$, но тоа е спротивно со претпоставката A, B и C да не се колинеарни.

Во случајот (iii), која било тројка од точките определува една рамнина. Такви тројки има 10. Две различни тројки определуваат две различни рамнини, затоа што кои било четири од дадените пет точки се некомпланарни. Значи, во овој случај точките определуваат 10 рамнини.

II година

133. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-9}+\sqrt{x+12}-\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=0 \ .$$

Решение. Со квадрирање на равенката $\sqrt{x-9}+\sqrt{x+12}=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}$ се добива

$$x-9+2\sqrt{x^2+3x-108}+x+12=x-3+2\sqrt{x^2-7x+12}+x-4 \ ,$$

т.е.

$$\sqrt{x^2+3x-108}=\sqrt{x^2-7x+12}-5 \ .$$

Со повторно квадрирање, се добива $x^2+3x-108=x^2-7x+12-10\sqrt{x^2-7x+12}+25$,
т.е.

$$2\sqrt{x^2-7x+12}=29-2x \ .$$

Со уште едно квадрирање, се добива $4x^2-28x+48=841-116x+4x^2$
т.е.

$$88x=793 \ .$$

Бидејќи $\frac{793}{88}-9=\frac{1}{88}>0$, бараното решение е

$$x=\frac{793}{88} \ .$$

134. Да се пресмета вредноста на изразот

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{1986}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{1986}, \ i \text{ е имагинарна единица.}$$

Решение. Лесно се проверува дека $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=1=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{1986}$.

Според тоа, дадениот израз има вредност 2, бидејќи 3 е делител на 1986.

135. Дадена е квадратната равенка по x

$$4(p-2)^2x^2-4(p-2)qx+q(4p-3q+4)-(p-1)^2=0 \ , \ \ p,q\in\mathbb{N} \ .$$

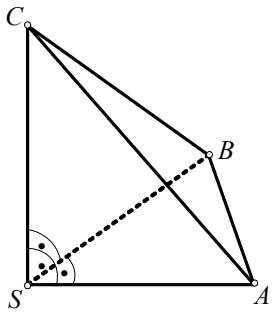
Каков услов треба да исполнуваат p и q за равенката да има двоен корен? Да се најде барем еден двоен корен кој е природен број.

Решение. За дадената равенка да биде квадратна, потребно е $p-2\neq 0$. Непосредно се проверува дека дискриминантата на равенката е $D=4(p-2)^2(2q-p-1)^2$. За равенката да има двоен корен, потребно е $D=0$. Бидејќи $4(p-2)^2\neq 0$, потребно е $2q-p-1=0$, а тоа е и условот кој треба да го задоволуваат p и q за квадратната равенка да има двоен корен. Тој двоен корен е

$$x=\frac{2(p-2)q}{4(p-2)^2}=\frac{q}{2(p-2)}=\frac{p+1}{4(p-2)} \ .$$

За x да биде природен број, потребно е $p\geq 3$ и $p+1\geq 4(p-2)$, од каде следува дека $p=3$ и $x=1$ е еден двоен корен.

136. Бочните рабови на тристрана пирамида се нормални меѓу себе. Плоштините на бочните ѕидови се B_1, B_2, B_3. Да се докаже дека волуменот на пирамидата е $\frac{1}{3}\sqrt{2B_1B_2B_3}$.



Решение. Пирамидата е прикажана на цртежот, при што B_1, B_2, B_3 се плоштините на ѕидовите ABS , BCS и CAS соодветно. Волуменот на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3}B_3 \cdot \overline{SB} = \frac{1}{6}\overline{AS} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CS} .$$

Од тоа што

$$B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = \frac{1}{8}\overline{AS} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{AS} = \frac{1}{8}\overline{AS}^2 \cdot \overline{BS}^2 \cdot \overline{CS}^2$$

следува дека

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{8B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} = \frac{1}{3}\sqrt{2B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} .$$

III година

137. Реши ја неравенката

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9} + \frac{x-2}{x-3} - 12 < 0 \text{, во множеството реални броеви } \mathbb{R}$$

Решение. Неравенката се сведува до неравенката $\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2} - \frac{x-2}{x-3} - 12 < 0$, при што мора да биде $x \neq 3$. Ставајќи $y = \frac{x-2}{x-3}$ се добива: $y^2 + y - 12 < 0$. Бидејќи нули на полиномот $y^2 + y - 12$ се $y = -4$ и $y = 3$, а коефициентот пред y^2 е 1, т.е. поголем од 0, се добива дека $-4 < y < 3$, т.е. $-4 < \frac{x-2}{x-3} < 3$. Според тоа, множеството решенија на дадената равенка ќе биде пресекот на решенијата на неравенките:

$$\frac{x-2}{x-3} - 3 < 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x-2}{x-3} + 4 > 0 . \qquad (2)$$

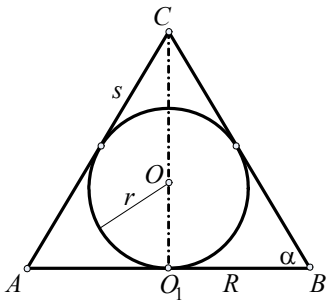
Множеството решенија на неравенката (1) е $(-\infty,3) \cup \left(\frac{7}{2},+\infty\right)$, а множеството решенија на неравенката (2) е $\left(-\infty,\frac{14}{5}\right) \cup (3,+\infty)$. Значи, множеството решенија на дадената неравенка е $\left(-\infty,\frac{14}{5}\right) \cup \left(\frac{7}{2},+\infty\right)$.

138. Плоштината на впишаната топка во прав кружен конус е двапати помала од плоштината на конусот. Пресметај го аголот α што го зафаќа изводницата со основата на конусот.

Решение. Нека R е радиусот на основата на конусот, r -радиусот на впишаната топка и s изводницата на конусот (види цртеж). Од условот на задачата следува дека

$$\pi R(s+R)=8\pi r^2 .$$

Од триаголниците OBO_1 и BOC се добива дека $r=R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\overline{BC}=s=\frac{R}{\cos\alpha}$, соодветно. Заменувајќи во (3) и кратејќи со πR^2, добиваме:



$$1+\frac{1}{\cos\alpha}=8\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

Со помош на равенството

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

равенството (2) се трансформира во

$$\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=8\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

од каде со смената $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=z$ се добива биквадратната равенка $z^4-z^2+\frac{1}{4}=0$.

Последната равенка има двоен корен $z^2=\frac{1}{2}$, па, значи $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Од условот на задачата ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) следува дека

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

139. Реши ја неравенката $\log_3 x\geq\log_x 81$.

Решение. Областа на дефинираност на $\log_3 x$ и $\log_x 81$ е $(0,1)\cup(1,+\infty)$, па множеството решенија на дадената неравенка мора да е подмножество од таа област. Дадената неравенка се трансформира во:

$$\log_3 x\geq\frac{4}{\log_3 x}.$$

Можни се два случаи.

(i) $\log_3 x>0$, т.е. $x>1$. Тогаш неравенката се трансформира во $\log_3 x\geq 2$, а од тука се добива дека $x\geq 3^2=9$. Множеството решенија во овој случај е $[9,+\infty)$.

(ii) $\log_3 x<0$, т.е. $0<x<1$. Тогаш неравенката се трансформира во $\log_3 x\geq -2$, а од тука се добива дека $x\geq\frac{1}{9}$. Множеството решенија во овој случај е $\left[\frac{1}{9},1\right)$.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е $\left[\frac{1}{9},1\right)\cup[9,+\infty)$.

140. Да се најде збирот

$$\log\mathrm{tg}1^\circ+\log\mathrm{tg}2^\circ+\ldots+\log\mathrm{tg}89^\circ.$$

Решение. Имаме

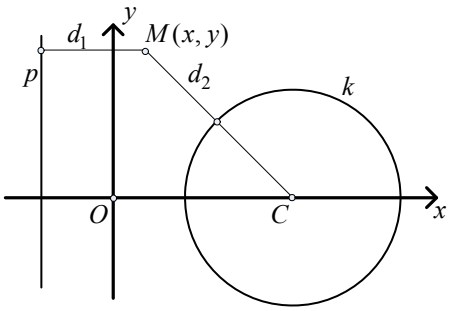
$$\log\mathrm{tg}1^\circ+\log\mathrm{tg}2^\circ+\ldots+\log\mathrm{tg}89^\circ=\log(\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}89^\circ)=$$

$$=\log(\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}44^\circ\cdot\mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{ctg}44^\circ\cdot\ldots\cdot\mathrm{ctg}1^\circ)=$$

$$=\log((\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{ctg}1^\circ)\cdot(\mathrm{tg}2^\circ\cdot\cdot\mathrm{ctg}2^\circ)\ldots\cdot(\mathrm{tg}44^\circ\cdot\mathrm{ctg}44^\circ)\cdot\mathrm{tg}45^\circ)=\log(1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1)=\log 1=0$$

IV година

141. Дадени се кружница $(x-5)^2+y^2=9$ и права $x+2=0$. Да се најде геометриското место на точки еднакво оддалечени од кружницата и правата.



Решение. Нека k и p се дадената кружница и права. Нека $M(X,Y)$ е точка од рамнината чии растојанија до p и k се d_1 и d_2 соодветно (види цртеж), при што $d_1=|X+2|$ и

$$d_2=|\overline{MC}-3|=|\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3|.$$

Точката M припаѓа на бараното геометриско место ако и само ако $d_1=d_2$, т.е.

$$|X+2|=|\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3|.$$

Притоа, $X+2>0$ и $\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3>0$ (види цртеж). Значи, $X+2=\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3$, од каде што се добива дека $Y^2=20X$. Според тоа, бараното геометриско место е параболата $y^2=20x$.

142. Да се реши равенката $\sin x+\cos x=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$.

Решение. Дадената равенка се трансформира во равенка $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$, т.е. во $\sin x+\cos x=\dfrac{2}{\sin 2x}$. Со квадрирање и средување се добива:

$$\sin^2 2x+\sin^3 2x=4.$$

Бидејќи $-1\le\sin 2x\le 1$, следува дека $\sin^2 2x+\sin^3 2x\le 2<4$, т.е. дадената равенка нема решение.

143. Да се пресмета збирот

$$S_n=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+..+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $x\ne\pm1$,

$$S_n=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+..+\left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right)=$$
$$=x^2+x^4+...+x^{2n}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+...+\frac{1}{x^{2n}}+2n=$$
$$=\frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2}+\frac{x^{2n}-1}{x^n(x^2-1)}+2n=\frac{(x^{2n}-1)(1+x^{2n+2})}{x^{2n}(x^2-1)}+2n$$

(Притоа, $x^2+x^4+...+x^{2n}$ и $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+...+\dfrac{1}{x^{2n}}$ се геометриски прогресии). За $x=\pm1$, $S=2^2+2^2+2^2+...+2^2=4n$.

144. Да се докаже дека производот на k последователни природни броеви е делив со $k!$.

Решение. Нека $n+1,n+2,...,n+k$ се k последователни природни броеви. Дека нивниот производ е делив со $k!$, следува од тоа што $\dbinom{n+k}{k}$ е природен број и од тоа што

$$\frac{(n+k)(n+k-1)...(n+2)(n+1)}{k!}=\frac{(n+k)!}{k!(n+k-k)!}=\binom{n+k}{k}.$$

X регионален натпревар - 1987 година

I година

145. Ана, Борче, Весна и Горан ги освоиле првите четири награди на натпреварот по математика. Нивните професори се Илиевски, Јовановски, Костовски и Лазов. Учениците заедно со своите професори дошле од градовите Прилеп, Ресен, Скопје и Тетово.

(1) Ученикот на професорот Костовски не освоил на прва ни втора награда. (2) Весна освоила прва награда. (3) Ученикот од Тетово освоил втора награда. (4) Ана е од Прилеп. (5) Горан, ученикот на профессор Јовановски освоил четврта награда. (6) Професорот Лазов е од Ресен.

ученик	А	Б	В	Г
награда			*I*	*IV*
професор				Ј
град	П			

Решение. Формираме таблица со четири редици и четири колони. Во првата редица ги ставаме имињата на учениците, во втората наградата што секој од учениците ја освоил, во третата нивните професори и во четвртата градовите. (Ќе ги пишуваме само првите букви од имињата).

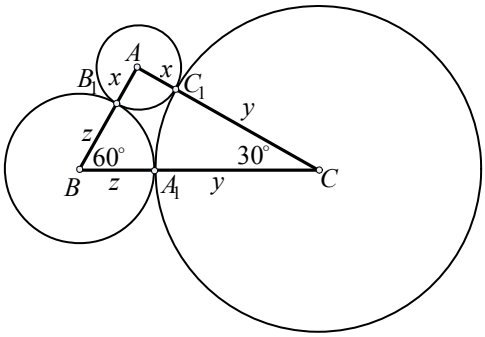
Според условите (2), (4) и (5) табелата можеме да ја пополниме на начин кој што е прикажан. Бидејќи само во колоната на Борче непознати се наградата и градот истовремено, според условот (3) добиваме дека Борче е од Тетово и освоил втора награда. Понатаму, според условите (5) и (1) добиваме дека ученикот на професорот Костовски е Ана и таа освоила *III* награда. Сега табелата изгледа:

ученик	А	Б	В	Г
награда	*III*	*II*	*I*	*IV*
професор	К			Ј
град	П	Т		

Бидејќи само во колоната на Весна непознати се професорот и градот истовремено, спортед суловот (6) имаме дека Весна е ученик на професорот Лазов и дека таа е од Ресен.

146. Секое теме на правоаголниот триаголник ABC со катети $\overline{AB}=4\sqrt{3}$ и $\overline{AC}=4$ е центар на кружница при што трите кружници се допираат меѓусебно и ни една кружница не лежи во внатрешноста на друга кружница. Пресметај ја плоштината на делот од триаголникот ABC што лежи надвор од трите кружници.

Решение. Бидејќи $\overline{BC}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8=2\overline{AC}$, аглите α,β и γ при темињата A,B и C ќе бидат $90^\circ,30^\circ$ и 60° соодветно. Користејќи ги ознаките од цртежот, ќе ставиме



$$x=\overline{AB_1}=\overline{AC_1},\ y=\overline{BA_1}=\overline{BC_1},\ x=\overline{AC_1}=\overline{CB_1}.$$

Според тоа го добиваме системот равенки:

$$x+y=4\sqrt{3};\quad y+z=8;\quad z+x=4.$$

Негово решение е $x=2\sqrt{3}-2$, $y=2\sqrt{3}+2$ $z=6-2\sqrt{3}$. Значи, збирот од плоштините на исечоците со темиња во A,B и C ќе биде:

$$\frac{x^2\pi}{4}+\frac{y^2\pi}{12}+\frac{z^2\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(3x^2+y^2+2z^2)=\frac{8\pi}{3}(5-2\sqrt{3}).$$

Бараната плоштина P ќе изнесува $P=8\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}(5-2\sqrt{3})$.

147. Пресметај ги брзината и должината на возот кој за 8 секунди поминува покрај неподвижен набљудувач, а за 12 секунди го поминува перонот долг 480 метри.

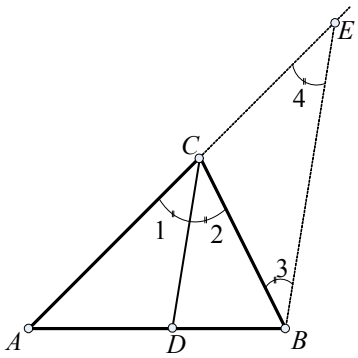
Решение. Нека v е брзината на возот изразена во m/s, а s е неговата должина во метри. Тогаш од условот на задачата имаме:

$$v=\frac{s}{8} \qquad \text{и} \qquad v=\frac{s+480}{32}.$$

Од тука добиваме $s=160$ m и $v=20m/s$ ($=72$ km/h).

148. Во триаголникот ABC, симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Да се докаже дека

$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{CA}:\overline{CB}.$$



Решение. Од темето B на триаголникот ABC повлекуваме права $BE \parallel DC$, при што $E\in AC$.

Аглите што при тоа се добиваат да ги означиме како на цртежот. Бидејќи $BE\parallel DC$, $\measuredangle 3=\measuredangle 2=\measuredangle 1$. Според тоа $\measuredangle 1+\measuredangle 2=\measuredangle 3+\measuredangle 4$, од каде добиваме $\measuredangle 1=\measuredangle 4$, т.е. $\measuredangle 3=\measuredangle 4$. Значи триаголникот BEC е рамнокрак, па $\overline{CE}=\overline{CB}$. Од сличноста на триаголниците ADC и ABE добиваме дека

$$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{CE}=\overline{AC}:\overline{CB}.$$

II година

149. Да се пресмета збирот

$$S=\frac{1-i}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1987},$$ i е имагинарна единица.

Решение. Да ставиме $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Бидејќи $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=\frac{1-2i-1}{2}=-i$ добиваме:

$$S=z-i+i+zi^2-i^3-zi^3+i^4+zi^4-\ldots+i^{1992}+zi^{1992}-zi^{1993}=$$
$$=z(1-i+i^2-i^3+i^4-i^5+i^6-\ldots+i^{1992})-i(1-i+i^2-i^3+i^4-i^5+i^6-\ldots+i^{1992})=$$
$$=(z-i)(1-i+i^2-i^3+i^4-i^5+i^6-\ldots+i^{1992})=$$
$$=(z-i)[(1-i+i^2-i^3)+(i^4-i^5+i^6-i^6)+\ldots+(i^{988}-i^{989}+i^{990}-i^{991})+i^{992}]-zi^{993}=$$
$$=(z-i)-zi=\frac{1-i}{\sqrt{2}}-i-\frac{(1-i)i}{\sqrt{2}}=\frac{-2i-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-i(\sqrt{2}+1)$$

150. Еден базен се полни со 2 цевки. Двете заедно го полнат базенот за 12 часа. Ако првата цевка сама го исполни базенот до половина, а втората цевка сама продолжи да го дополнува базенот, тогаш целиот базен ќе се наполни за 25 часа. За колку време секоја цевка сама може да го наполни базенот?

Решение. Нека x е бројот на часови за кои првата цевка сама го полни базенот, а y е бројот на часови за кои втората цевка сама го полни базенот. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} \frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25 \end{cases}.$$

Од втората равенка добиваме $y=50-x$, и ако ова го замениме во првата равенка ја добиваме квадратната равенка $x^2-50x+600=0$.

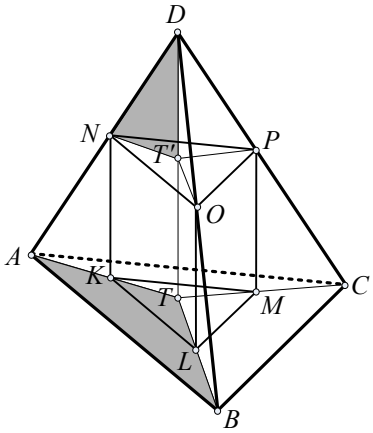
Решенија на ова равенка се $x_1=20$, $x_2=30$. Значи, првата цевка го полни базенот за 20 (30) часа, а втората за 30 (20) часа.

151. Во еднакворабна тристана пирамида (правилен тераедар) со волумен V, впишана е правилна еднакворабна тристрана призма така што три нејзини темиња лежат на основата, а другите три на бочните рабови на пирамидата. Да се пресмета волуменот на призмата!

Решение. Нека a,H,b се соодветно должините на: работ на тетраедарот, висината на тетраедарот, и работ на призмата. Нека DT е висината спуштена од врвот D на основата ABC (види цртеж). Од сличноста на триаголниците ATD и $NT'D$ следува

$$\overline{AT}:\overline{NT'}=\overline{DT}:\overline{T'D}.$$

Бидејќи $AB \parallel KL$, триаголниците ABT и KTL се слични, па според тоа



$$\overline{AT}:\overline{KT}=\overline{AB}:\overline{KL}.$$

Од горните две равенства и од $\overline{KT}=\overline{NT'}$ добиваме дека $a:b=H:(H-b)$, што заедно со $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, повлекува дека $b=\frac{aH}{a+H}=a(\sqrt{6}-2)$.

Значи, волуменот V_1 на призмата е $V_1=\frac{b^3\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}(6-\sqrt{2})^3$. Бидејќи $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, добиваме дека

$$\frac{V_1}{V}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)^3}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } V_1=6V(27-11\sqrt{6}).$$

152. Да се реши по x равенката $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$.

Решение. Со квадрирање на ирационалната равенка добиваме

$$x-\sqrt{x-a}=a^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-a}=x-a^2.$$

Со повторно квадрирање ја добиваме следната квадратна равенка

$$x^2-(2a^2+1)x+a^4+a=0,$$

чии решенија се: $x_1=a^2+a$, $x_2=a^2-a+1$.

Треба да се провери во кој случај тие се решенија на ирационалната равенка. За $a<0$ равенката нема решение. Затоа нека $a\geq 0$, т.е. $\sqrt{a^2}=a$. Ако вредноста $x=a^2+a$ ја замениме во ирационалната равенка добиваме:

$$\sqrt{a^2+a-\sqrt{a^2+a-a}}=\sqrt{a^2+a-a}=a.$$

Значи, $x=a^2+a$ е решение на ирационалната равенка, за секое $a\geq 0$.

Ако вредноста $x=a^2-a+1$ ја замениме во ирационалната равенка, добиваме:

$$\sqrt{a^2-a+1\sqrt{a^2-a+1-a}}=\sqrt{a^2-a+1-|a-1|}=\begin{cases} a & \text{, за } a\leq 1 \\ \sqrt{a^2-2a-2} & \text{, за } a>1 \end{cases}.$$

Бидејќи за $a>1$, $\sqrt{a^2-2a-2}<a$ добиваме дека $x=a^2-a+1$ е решение на ирационалната равенка само за $0\leq a\leq 1$.

Заклучок. Равенката има две решенија за $0\leq a\leq 1$, едно решение за $a>1$ и нема решенија за $a<0$.

III година

153. Да се пресметаат $\lg 2$ и $\lg 5$ ако се знае дека $\lg 2\cdot\lg 5=0,210$.

Решение. Нека $\lg 2=x_1$ и $\lg 5=x_2$. Тогаш за x_1 и x_2 важи

$$x_1\cdot x_2=0,210$$
$$x_1+x_2=1$$

па x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка

$$x^2-x+0,210=0.$$

Решенијата на ова равенка се $0,7$ и $0,3$. Бидејќи $\lg 2<\lg 5$, добиваме дека $\lg 2=0,3$ и $\lg 5=0,7$.

154. Да се најдат решенијата на равенката $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$ во интервалот $0\leq x\leq\pi$.

Решение. Бројот x е решение на горната равенка ако и само ако x е решение на системот

$$\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)^2=8 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\geq 0 \qquad (2)$$

Од равенката (1) имаме

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin x\cos x}=8;$$

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{2}{\sin x\cos x}=8;$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{4}{\sin 2x}=8,$$

$$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 .$$

Ставајќи $y = \sin 2x$ добиваме квадратна равенка по y чии решенија се $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Решенија на равенката $\sin 2x = -1$ во интервалот $[0,\pi]$ се $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{12}$, а на равенката $\sin 2x = \frac{1}{2}$ е $x = \frac{5\pi}{12}$. Останува да се провери дали за овие вредности е исполнето неравенството (2), т.е.

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{\cos x} .$$

Бидејќи на интервалот $[0,\pi]$, $\sin x \geq 0$, неравенството (2) е секогаш исполнето за $\cos x < 0$, т.е. за сите $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Ако $\cos x > 0$, тогаш неравенството се трансформира во

$$\cos x \geq \sin x ,$$

кое е исполнето за сите $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Конечно, решенија на почетната равенка се решенијата на (1) кои лежат во $\left(0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, т.е. $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{12}$.

155. За кој природен број a равенката $x^2 + y^2 = axy$ има решенија во множеството природни броеви.

Решение. Ако ја разгледаме равенка како квадратна равенка по y, т.е. $y^2 - axy + x^2 = 0$, тогаш $y_{1/2} = \frac{ax \pm x\sqrt{a^2-4}}{2}$.

За да решението е природен број, мора $a^2 - 4$ да е полн квадрат, т.е. мора да постои природен број k така што

$$a^2 - 4 = k^2$$

односно

$$a^2 - k^2 = 4 ,$$
$$(a-k)(a+k) = 4 .$$

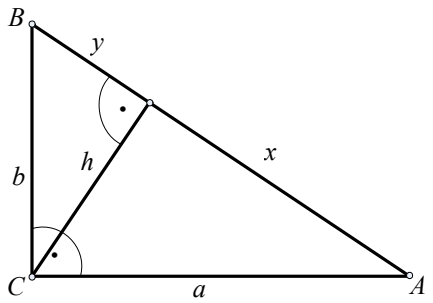
Бидејќи a и k се природни броеви $a+k$ е природен број па заради горното равенство $a-k$ е природен број. Уште мора $a+k \geq a-k$. Заради ова можни се следниве два случаи:

а) $a-k=2, a+k=2$, што повлекува $a=2$, $k=0$

б) $a-k=1, a+k=4$, што повлекува $a=\frac{5}{2}$, $k=\frac{3}{2}$.

Бидејќи само во случајот а) a е природен број, единствено решение на задачата е $a=2$.

156. Ако со V_a, V_b, V_c се означат волумените на телата добиени со ротација на правоаголен триаголник околу катетата a, катетата b и хипотенузата c соодветно, тогаш важи равенството



$$\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}=\frac{1}{V_c^2}.$$

Докажи!

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C, $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{CD}=h$ -висината спуштена од темето C на хипотенузата, $x=\overline{AD}$ и $y=\overline{BD}$ (види цртеж). Тогаш:

$$V_c=\frac{\pi}{3}h^2x+\frac{\pi}{3}h^2y=\frac{\pi}{3}h^2c=\frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c^2}c=\frac{\pi}{3}\frac{a^2b^2}{c}.$$

Од друга страна

$$\frac{1}{V_a^2}+\frac{1}{V_b^2}=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}b^2a\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}a^2b\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\frac{a^4b^4}{c^2}}=\frac{1}{V_c^2}$$

IV година

157. На колку различни начини можат да се распоредат n-жени и n-мажи така што било било кои два соседи да не бидат од ист пол и тоа:

а) во една редица,

б) на еден рингишпил кој има $2n$ седишта.

Решение. Нека со $a_1,a_2,...,a_n$ ги означиме жените, а со $b_1,b_2,...,b_n$ мажите.

а) Ги разгледуваме низите од облик $a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_n,b_n$ (кога жена е на прво место). За еден фиксен распоред на $a_1,a_2,...,a_n$ се добиваат $n!$ распореди на $b_1,b_2,...,b_n$. Значи, има $n!n!=(n!)^2$ распореди од ваков облик. Исто толку распореди има од облик $b_1,a_1,b_2,a_2,...,b_n,a_n$ (кога маж е на прво место). Значи, вкупниот број на вакви распореди е $2(n!)^2$.

б) Да фиксираме еден елемент од множеството $b_1,b_2,...,b_n$. Преостанатите елементи од ова множество може да се распоредат на $(n-1)!$ нажини. При секој ваков распоред $a_1,a_2,...,a_n$ може да се распоредат на $n!$ начини. Значи, бараниот број на распореди е $(n-1)!n!$.

158. Нека $a_1,a_2,...a_n,...$ е аритметичка прогресија, и нека m е даден природен број. Ако ставиме

$$S_1=a_1+a_2+...+a_m$$
$$S_2=a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}$$
$$S_3=a_{2m+1}+a_{2m+2}+...+a_{3m}$$
$$.....$$

докажи дека и $S_1,S_2,...,S_n,...$ е аритметичка прогресија.

Решение. Од условот на задачата $S_k=a_{(k-1)m+1}+a_{(k-1)m+2}+...+a_{km}$. Нека d е разликата во аритметичката прогресија $a_1,a_2,...a_n,...$. Од познатите формули за општ член на аритметичката прогресија и збир од последователни m нејзини членови добиваме:

$$S_{k+1}-S_k=\frac{m}{2}(a_{km+1}+a_{(k+1)m})-\frac{m}{2}(a_{(k-1)m+1}+a_{km})=$$
$$=\frac{m}{2}(a_1+kmd+a_1+[(k+1)m-1]d)-\frac{m}{2}(a_1+(k-1)md+a_1+(km-1)d)=m^2d$$

Значи, $S_1,S_2,...,S_k,...$ е аритметичка прогресија со разлика m^2d.

159. Да се реши тригонометриската равенка

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right).$$

Решение. Запишувајќи ја дадената равенка во обликот

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$$

и користејќи ја формулата за разлика на синуси се добива

$$2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{3x}{10}-\frac{x}{2}\right).$$

Користејќи ја тригонометриската врска $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ равенката ја трансформираме во

$$2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right),\ \text{т.е.}\quad 2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)\left[2\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)-1\right]=0\ .$$

Од последната равенка, следува

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

Од првата равенка се добива

$$\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

а од втората

$$x-\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\qquad x-\frac{\pi}{10}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Значи решенијата на дадената равенка се:

$$x=\frac{3+10k}{5}\pi\ ,\qquad x=\frac{4+30k}{5}\pi\ ,\qquad x=\frac{14+30k}{15}\pi\ ,$$

каде $k\in\mathbb{Z}$.

160. Да се определи геометриското место на центрите на кружинците што минуваат низ точката $A(3,0)$ и ја допираат кружницата $x^2+y^2=25$.

Решение. Нека точката $M(p,q)$ припаѓа на бараното геометриско место на точки од задачата. Тогаш постои кружница со центар во M

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \tag{1}$$

која минува низ точката A и ја допира дадената кружница.

Бидејќи кружницата (1) минува низ точката A добиваме $(3-p)^2+(0-q)^2=r^2$, т.е.

$$r^2-p^2-q^2=9-6p\ . \tag{2}$$

Бидејќи кружницата (1) ја допира дадената кружница, системот

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x^2+y^2-2(px+qy)=r^2-p^2-q^2\end{cases}$$

кој со оглед на (2) се запишува во облик

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x^2+y^2-2(px+qy)=9-6p\end{cases} \tag{3}$$

има единствено решение. Ако од првата равенка на системот (3) ја одземеме втората равенка се добива $qy=8+3p-px$.

Единствената точка на бараното геометриско место на точки, за која $q=0$ е точката $M_\circ(-1,0)$. Ќе го разгледаме бараното место точки без ова точка, т.е. ќе претпоставиме дека $q\neq 0$. Тогаш

$$y=\frac{8+3p-px}{q}.$$

Ако ова вредност ја замениме во првата равенка од системот (3) добиваме квадратна равенка по x

$$x^2-\frac{2p(8+3p)}{p^2+q^2}x+\frac{(8+3p)^2-25q^2}{p^2+q^2}=0. \qquad (4)$$

Бидејќи системот (3) има единствено решение, и равенката (4) има единствено решение, односно мора дискриминантата на квадратната равенка да биде еднаква на нула, т.е.

$$4\frac{p^2(8+3p)^2}{(p^2+q^2)^2}-4\frac{(8+3p)^2-25q^2}{p^2+q^2}=0.$$

Ова равенство се трансформира во $16p^2+25q^2-48p-64=0$ или $\dfrac{\left(p-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\dfrac{q^2}{4}=1$.

Исто така точката $M_\circ(-1,0)$ ја задоволува ова равенка. Значи бараното геометриско место на точки е елипса.

XI регионален натпревар - 1988 година

I година

161. Кога еден новинар прашал кои двојки ги освоиле првите три места на еден натпревар по танцување, ги добил следните одговори:

Светлана: „Секоја девојка е помлада од својот партнер за 3 години.“
Игор: „Сите заедно имале 115 години.“
Јулија: „Јас и Игор заедно имаме 36 години.“
Антон: „Јас и Јулија заедно имаме 40 години.“
Максим: „Најмлада меѓу нас е Ира.“

Кој со кого играл? Одговорот да се образложи.

Решение. Ако Игор има x, Антон y, а Максим z години, тогаш од условот на задачата го добиваме равенството $x+y+z+x-3+y-3+z-3=115$, т.е. $x+y+z=62$. Ако Јулија играла со Игор, тогаш од $x+x-3=36$ следува дека $2x=39$, што не е можно бидејќи 39 не е парен број. Слично, ако Јулија играла со Антон, тогаш од $y+y-3=40$ следува дека $2y=43$. Значи, Јулија играла со Максим. Според тоа, $z-3+x=36$, т.е. $z+x=39$ од што следува дека $y=62-39=23$. Од $z-3+y=40$ следува дека $z=20$, па од $x+y+z=115$, следува дека $x=19$. Најмлад е игор и играл со Ира, Максим играл со Јулија, а Анон играл со Светлана.

162. Речен брод за 11 часа, без прекин поминал 168 km по течението, а 48 km спротивно од течението на реката. Друг пат, за истото време поминал 144 km по, а 60 km спротивно од течението на реката. Колкава е брзината на бродот, а колкава на реката?

Решение. Нека x е брзината на бродот а y брзината на реката. Од условите на задачата се добива следниот систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} \dfrac{168}{x+y}+\dfrac{48}{x-y}=11 \\ \dfrac{144}{x+y}+\dfrac{60}{x-y}=11 \end{cases}$$

Овој систем се трансформира во системот

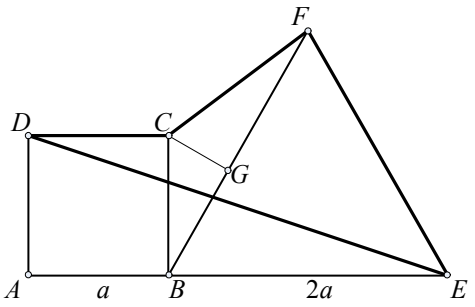
$$\begin{cases} 168(x-y)+48(x+y)=11(x^2-y^2) \\ 144(x-y)+60(x+y)=11(x^2-y^2) \end{cases},$$

од каде што со одземање на втората равенка од првата се добива дека $24(x-y)-12(x+y)=0$, т.е. $x=3y$. Со замена во една од равенките, добиваме $\frac{168}{4y}+\frac{48}{2y}=11$, а со решавање на таа равенка имаме $y=6$. Според тоа, брзината на бродот е 18 km/h, а на реката е 6 km/h.

163. Даден е просторен четириаголник $ABCD$, при што точките A,B,C,D не се компланарни. Докажи дека отсечките што ги сврзуваат средините на спротивните страни и отсечката што ги сврзува средините на дијагоналите од четириаголникот, минуваат низ една иста точка која што ги преполовува.

Решение. Нека P,Q,R,S се средини на AB,BC,CD,DA соодветно. Тогаш SP и QR се средни линии на триаголниците ABD и BCD соодветно, па: $SP \parallel DB \parallel QR$. Слично, PQ и SR се средни линии на триаголниците ABC и ACD, па: $PQ \parallel AC \parallel SR$. Значи, четириаголникот $PQRS$ е параллелограм, а паралелограм е рамнински четириаголник во кој дијагоналите (PR и QS) се сечат и преполовуваат. Истата дискусија применета на четириаголникот $ABCD$ покажува дека PR и EF се сечат и се преполовуваат, каде што E и F се средини на BD и CA соодветно. Со тоа, задачата е решена.

164. Точките A,B и E лежат на иста права, така што B е помеѓу A и E. Од иста страна на правата се конструирани квадрат $ABCD$ и рамностран триаголник BEF. Ако $\overline{BE}=2\overline{AB}$, да се покаже дека плоштината на четириаголникот $CDEF$ е еднаква на плоштината на триаголникот BEF.



Решение. Нека е CG висина на триаголникот BCF. Бидејќи $\measuredangle ABC=90^\circ$ и $\measuredangle FBE=60^\circ$, а $\measuredangle ABC+\measuredangle CBG+\measuredangle FBE=180^\circ$, наоѓаме дека $\measuredangle CBG=30^\circ$. Според тоа, во правоаголниот триаголник BCG катетата CG е еднаква на половината од хипотенузата BC, т.е. $\overline{CG}=\frac{a}{2}$. Според тоа, плоштината P на четириаголникот $CDEF$ е:

$$P = P_{ABCD} + P_{BEF} + P_{BCF} - P_{ADE} = a^2 + P_{BEF} + \frac{1}{2}2a\frac{a}{2} - \frac{1}{2}3a \cdot a = a^2 + P_{BEF} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} = P_{BEF}$$

II година

165. Докажи го Лагранжовиот идентитет

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

за $a > 0, b > 0$, $a^2 > b$, и примени го во изразот

$\sqrt{3a + 2a\sqrt{2}}$, за $a > 0$.

Решение. Да го означиме со D изразот $\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$. Тогаш

$$D^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = a \pm 2\sqrt{\frac{a^2 - (\sqrt{a^2 - b})^2}{2}}$$

Бидејќи $a^2 > b$, $(\sqrt{a^2 - b})^2 = a^2 - b$. Според тоа, $D^2 = a \pm \sqrt{b}$. Бидејќи $a > 0, b > 0$ и $a^2 > b$, следува дека $a \geq \sqrt{b}$, па и $a \pm \sqrt{b} > 0$. Според тоа, $D = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, со што идентитетот е докажан.

За $a > 0$, дадениот израз $\sqrt{3a + 2a\sqrt{2}}$, со лагранжовиот идентитет се трансформира во изразот $\sqrt{2a} + \sqrt{a}$, т.е. $\sqrt{3a + 2a\sqrt{2}} = \sqrt{a}(1 + \sqrt{2})$.

166. Да се реши равенката $\frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$.

Решение. Воведуваме смена $t = \sqrt[3]{x}$, со што равенката се трансформира во:

$$\frac{t^4 - 1}{t^2 - 1} - \frac{t^2 - 1}{t - 1} = 4.$$

За $t \neq -1$ и $t \neq 1$, ова равенка е еквивалентна со равенката

$t^2 + 1 - t + 1 = 4$, т.е. $t^2 - t - 2 = 0$,

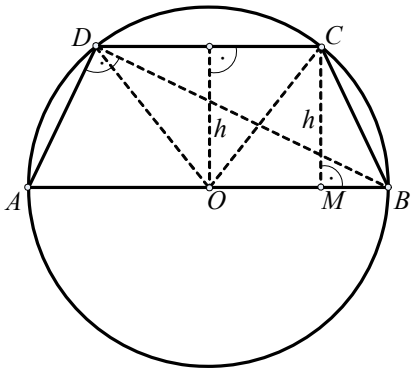
чии решенија се: $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Бидејќи $t \neq -1$, единствено решение на равенката е x за кое $\sqrt[3]{x} = 2$, т.е. $x = 8$.

167. Над трапез $ABCD$ опишана е кружница со центар на основата AB и радиус R. Да се изрази должината на кракот AD преку R, ако важи

$$\overline{AD}^2 + 3\overline{CD}^2 = 2R^2.$$

Решение. Бидејќи над трапезот е опишана кружница со центар во основата, следува дека трапезот е рамнокрак. Нека O е центарот на опишаната кружница, (види цртеж). Триаголникот COD е рамнокрак со крак R и основа CD. Нека h е висината на трапезот.

Тогаш $\left(\frac{\overline{CD}}{2}\right)^2 = R^2 - h^2$. Од сличноста на триаголниците CMB и BDA, следува дека $h = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{2}$. Според тоа, $\overline{CD}^2 = 4R^2 - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{R^2}$, од што, заедно со даденото равенство



$\overline{AD}^2 + 3\overline{CD}^2 = 2R^2$, следува дека

$$3\overline{CD}^2 = 12R^2 - \frac{3\overline{AD}^2\cdot\overline{BD}^2}{R^2} = 2R^2 - \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

Бидејќи триаголникот ABD е правоаголен, $\overline{BD}^2 = 4R^2 - \overline{AD}^2$, од што со замена во (1) добиваме дека:

$$12R^4 - 12\overline{AD}^2R^2 + 3\overline{AD}^4 = 2R^4 - \overline{AD}^2R^2,$$

т.е.

$$3R^4 - 11\overline{AD}^2R^2 + 10\overline{AD}^4 = 0.$$

Решавајќи ја горната равенка по $\overline{AD}^2$, добиваме: $\overline{AD} = \frac{11R^2 \pm R^2}{6}$. Бидејќи $ABCD$ е трапез (а не е триаголник), добиваме дека $\overline{AD}^2 = \frac{5R^2}{3}$, т.е. $\overline{AD} = R\frac{\sqrt{15}}{3}$.

168. Плоштините на двете основи на пресечена пирамида се Q и G и висината е H. Да се определи волуменот на целата пирамида и волуменот на отсечената пирамида.

Решение. Нека висината на отсечената пирамида е h. Тогаш висината на целата пирамида е $H+h$. Според теоремата за паралелни пресеци кај пирамиди, важи:

$$\frac{Q}{G} = \frac{(H+h)^2}{h^2},$$

од каде што добиваме дека $h = H\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}$. Според тоа, волуменот на целата пирамида е $V_c = \frac{1}{3}Q(H+h) = \frac{1}{3}\frac{QH\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}$, а на отсечената пирамида е $V_\circ = \frac{1}{3}G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot G\cdot H\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{Q}-\sqrt{G}}$, т.е. $V_c = \frac{HQ(Q+\sqrt{QG}}{3(Q-G)}$ и $V_\circ = \frac{HG(G+\sqrt{QG}}{3(Q-G)}$.

III година

169. Да се реши неравенката $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4(x^2-5)\right) > 0$.

Решение. Бидејќи $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_3 x^{-1} = -\log_3 x$ добиваме $-\log_3(\log_4(x^2-5)) > 0$, од каде што следува дека $0 < \log_4(x^2-5) < 1$. Според тоа, $1 < x^2 - 5 < 4$, т.е. $6 < x^2 < 9$.

Решението на неравенката е $(-3,-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6},3)$.

170. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Решение. Со собирање на двете равенки и одземање на првата од втората равенка, добиваме $\begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ \sin(y-x)=1 \end{cases}$. Тогаш: $x+y=n\pi$, $y-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, од каде што следува дека:

$$x=\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right), \qquad y=\pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right), \qquad n,k\in\mathbb{Z}.$$

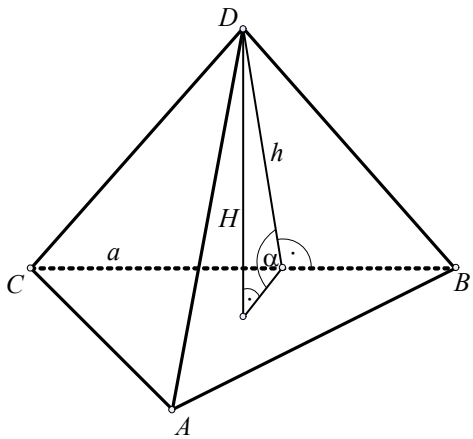
171. Нека p,q,r се природни броеви помали од 100 за кои $p^2+q^2=r^2$. Со допишување на една иста цифра ($\neq 0$) од левата страна на p,q,r се добиени броевите a,b,c соодветно. Да се најдат p,q,r ако $a^2+b^2=c^2$.

Решение. Ако броевите p,q,r се едноцифрени, тогаш $a=10k+p$, $b=10k+q$, $c=10k+r$, каде што $1\le k\le 9$. Од $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$, следува дека $5k+p+q=r$. Со квадрирање на ова равенка добиваме $25k^2+p^2+q^2+10kp+10kq+2pq=r^2$, т.е. $25k^2+10kp+10kq+2pq=0$, што не е можно. Значи, p,q,r не можат да бидат едноцифрени. До иста контрадикција доаѓаме и ако претпоставиме дека p,q,r се двоцифрени.

Ако p и q се едноцифрени а r е двоцифрен, тогаш $a=10k+p$, $b=10k+q$, $c=100k+r$, за $1\le k\le 9$. Од $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$, следува $9800k^2+200rk=20pk+20qk$, т.е. $4900k+100r=p+q$, што не е можно, бидејќи p и q се едноцифрени броеви.

Ако p е едноцифрен а q и r се двоцифрени, тогаш $a=10k+p$, $b=100k+q$, $c=100k+r$. Од $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$, следува дека $5k+p+10q=10r$. Значи p мора да е делив со 5, т.е. $p=5$, бидејќи p е едноцифрен. Според тоа $p^2=25=r^2-q^2=(r-q)(r+q)$. Бидејќи $q,r\ge 10$, не може $q+r=5$ или $q+r=1$, што значи $q+r=25$ и $r-q=1$, т.е. $r=13, q=12$.

Ако q е едноцифрен, а p и r двоцифрени, тогаш, исто како погоре, се добива дека $q=5, r=13, p=12$. Значи бараните броеви се: $p=5, q=12, r=13$ или $p=12, q=5, r=13$.



172. Нека S и P се плоштините на две страни на еден тетраедар, нека a е должината на нивниот заеднички раб, и нека α е аголот меѓу тие две страни. Да се докаже дека волуменот на тетраедарот е $V=\dfrac{2\cdot S\cdot P\cdot \sin\alpha}{3a}$.

Решение. Нека A,B,C,D се темиња на тетраедарот, а S и P плоштините на страните ABC и BCD соодветно (види цртеж). Нека H е висината на тетраедарот спуштена од

темето D, а h е висината на триаголникот BCD спуштена од темето D. Тогаш, $h=\frac{2P}{a}$, а

$$H=h\sin\alpha=\frac{2P\sin\alpha}{3a}.$$

Според тоа,

$$V=S\frac{H}{3}=\frac{2\cdot S\cdot P\cdot\sin\alpha}{3a}.$$

IV година

173. Да се пресмета збирот $S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}$ каде $a_1,a_2,....,a_n,a_{n+1}$ се последователни членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Ставајќи

$$a_2-a_1=a_3-a_2=...=a_{n+1}-a_n=d,$$

и множејќи го даденото равенство со d, имаме $Sd=\frac{d}{a_1a_2}+\frac{d}{a_2a_3}+...+\frac{d}{a_na_{n+1}}$, т.е.

$$Sd=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+...+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+...+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{nd}{a_1a_{n+1}}.$$

174. Да се упрости изразот

$$\frac{\sin 53^\circ-2\cos 40^\circ\sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}$$

Решение. Користејќи го тригонометрискиот идентитет

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),$$

имаме

$$\frac{\sin 53^\circ-2\cos 40^\circ\sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}=\frac{\sin 53^\circ-[\sin(13^\circ+40^\circ)+\sin(13^\circ-40^\circ)]}{\cos 63^\circ}=$$

$$=-\frac{-\sin(-27^\circ)}{\sin 63^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-27^\circ)}{\sin 63^\circ}=1$$

175. На елипсата $9x^2+4y^2-18x-16y=11$ да се најде точка A најблиска до правата $x+y=8$ и точка B најоддалечена од истата права.

Решение. Бараните точки се точки во кои елипсата допира прави p и q кои се паралелни со правата $x+y=8$. Нека s е права паралелна со правата $x+y=8$, т.е. $s:\ y=n-x$, за некој $n\in\mathbb{R}$. Заменувајќи во $9x^2+4y^2-18x-16y=11$, добиваме:

$$9x^2+4(n-x)^2-18x-16(n-x)=11,$$

т.е.

$$13x^2-x(8n+2)+4n^2-16n-11=0. \qquad (1)$$

Точките A и B се единствени, па затоа решението на (1) по x е двоен корен, што значи дека дискриминантата на (1) е нула, т.е.

$$D=(8n+2)^2-4\cdot 13\cdot(4n^2-16n-11)=0.$$

Со средување, се добива дека $D=-144(n^2-6n-4)$, па од $n^2-6n-4=0$, добиваме дека $n=3\pm\sqrt{13}$. За $n=3+\sqrt{13}$ ја добиваме најблиската точка $A\left(1+\frac{4\sqrt{13}}{13},2+\frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$, а за $n=3-\sqrt{13}$ ја добиваме најоддалечената точка $B\left(1-\frac{4\sqrt{13}}{13},2-\frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$.

176. На колку различни начини може да бидат наредени n книги на една полица, така што однапред нумерирани k од тие книги се во растечки или опаѓачки редослед.

Решение. Секој избор на местата на кои се наоѓаат нумерираните книги е комбинација на n елементи од класа k без повторување. Бројот на такви комбинации е

$$A=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Во секој од A-те избори на местата за нумерираните книги, преостанатите $n-k$ книги се разместуваат произволно, со што се добиваат $(n-k)!$ начини на редење на книгите. Нумерираните книги можат да бидат наредени само на два начини, т.е. во опаѓачки или растечки редослед.

Според тоа, бараниот број на начини на редење на книгите е:

$$2\cdot A\cdot(n-k)!=2\frac{n!}{k!}.$$

XII регионален натпревар - 1989 година

I година

177. Возот влегол во тунел за 15 секунди. До излегувањето од тунелот на последниот вагон поминале уште 30 секунди. Колку е долг возот и со која брзина се движел, ако тунелот е долг 300 m.

Решение. Брзината на возот е 10 m/s, а неговата должина е 150 m.

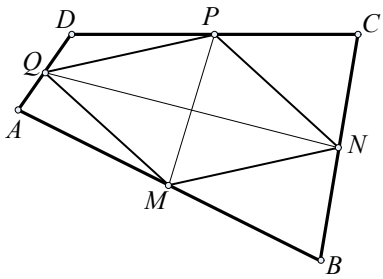
178. Дадени се рамнината Σ и правите a и b, кои не лежат во Σ. Низ секоја од правите a и b да се повлече рамнина, така што двете рамнини да се различни и правата во која се сечат да лежи во Σ.

Решение. Нека a и b се меѓусебно паралелни прави и нека Π е рамнина во која лежат правите a и b. Ако M е произволна точка од Σ и не лежи во Π, тогаш бараните рамнини Σ_1 и Σ_2 се определени со M и a односно M и b.

Нека правите a и b се сечат во точката P. Ако P лежи во Σ, тогаш бараните рамнини се произволни рамнини Σ_1 и Σ_2 низ правите a и b соодветно; ако, пак, P не лежи во Σ, тогаш таквите рамнини не постојат.

Нека правите a и b се разминувачки. Ако тие се паралелни со Σ, тогаш такви рамнини не постојат; ако $a \cap \Sigma = A$, $b \parallel \Sigma$, тогаш бараните рамнини се произволна рамнина Σ_1 низ правата а и рамнината Σ_2 определена со A и b; ако $a \cap \Sigma = A$, $b \cap \Sigma = B$, тогаш барнаните рамнини се рамнините Σ_1 и Σ_2 определени со A и b односно со B и a.

179. Нека точките M, N, P и Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот $ABCD$. Ако $MN \perp NQ$ тогаш $\overline{AC} = \overline{BD}$. Докажи!



Решение. Четириаголникот $MNPQ$ (види цртеж) е паралелограм на кој дијагоналите MP и NQ се заемно нормални, па тој е ромб. Значи, $\overline{MN} = \overline{MQ}$. Но $\overline{AC} = 2\overline{MN}$, $\overline{BD} = 2\overline{MQ}$, па $\overline{AC} = \overline{BD}$.

180. На излет биле 4 момчиња и 4 девојчиња. Познато е дека секое момче е брат на едно девојче, т.е. дека има четири пара браќа и сестри од четири различни семејства, и познати се имињата и презимињата на девојчињата и момчињата соодветно. На излетот изеле 32 колачи и тоа: Марија 1 колач, Јованка 2 колачи, Иванка 3 колачи и Ана 4 колачи. Момчињата изеле: Петрески колку и неговата сестра, Маркоски двапати повеќе од својата сестра, Попоски трипати повеќе од својата сестра и Павлоски четири пати повеќе од својата сестра. Како гласат имињата и презимињата на девојчињата.

Решение. Девојчињата со презимиња Петреска, Маркоска, Попеска и Павлоска нека изеле a, b, c и d колачи соодветно. Тогаш братот и сестрата Петрески изеле $2a$ колачи, Маркоски $3b$ колачи, Попоски $4c$ колачи и Павлоски $5d$ колачи. Притоа, $a, b, c, d \le 4$ и $2a + 3b + 4c + 5d = 32$, од каде следува дека b и d се и двата се парни или и двата се непарни броеви. Значи, имаме четири можности: $b = 1, d = 3$; $b = 3, d = 1$; $b = 2, d = 4$ и $b = 4, d = 2$. Лесно се проверува дека е можен само случајот $b = 4$, $d = 2$, $a = 3$, $c = 1$.

Следователно, девојчињата се: Иванка Петреска, Ана Маркоска, Марија Попоска и Јованка Павлоска.

II година

181. Да се пресмета $\dfrac{(1+i)^{1989}}{(1-i)^{1989} - (1+i)^{1989}}$ $(i^2 = -1)$.

Решение. Бидејќи

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \qquad \text{и} \qquad (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i,$$

ќе имаме

$$(1+i)^{1989}=(1+i)^{1989}(1+i)=(2i)^{994}(1+i)=2^{994}(i^2)^{497}(1+i)=-2^{994}(1+i)$$

а слично и $(1-i)^{1989}=-2^{994}(1-i)$. Користејќи ги овие равенства, добиваме

$$\frac{(1+i)^{1989}}{(1-i)^{1989}-(1+i)^{1989}}=\frac{-2^{994}(1+i)}{-2^{994}(1-i)+2^{994}(1+i)}=\frac{-(1+i)}{-(1-i)+(1+i)}=\frac{-(1+i)}{-1+i+1+i}=\frac{-(1+i)}{2i}=\frac{-(1+i)i}{-2}=\frac{i-1}{2}.$$

182. За кои вредности на параметарот a разликата од корените на равенката $2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$ е еднаква на нивниот производ?

Решение. Нека x_1 и x_2 се корените на дадената равенка. Според Виетовите формули, имаме $x_1+x_2=\frac{a+1}{2}$, $x_1x_2=\frac{a-1}{2}$. По услов од задачата имаме $x_1-x_2=x_1x_2$, па, решавајќи го системот

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{a+1}{2} \\ x_1-x_2=\frac{a-1}{2} \end{cases},$$

добиваме $x_1=\frac{a}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$. Ако едниот од овие корени го замениме во равенката, добиваме $a=2$.

183. Да се реши равенката $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)=40$, во $\mathbb{C}$.

Решение. Бидејќи $(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$, $(x-2)(x-4)=x^2-6x+8$, равенката добива облик

$$(x^2-6x+5)(x^2-6x+8)=40.$$

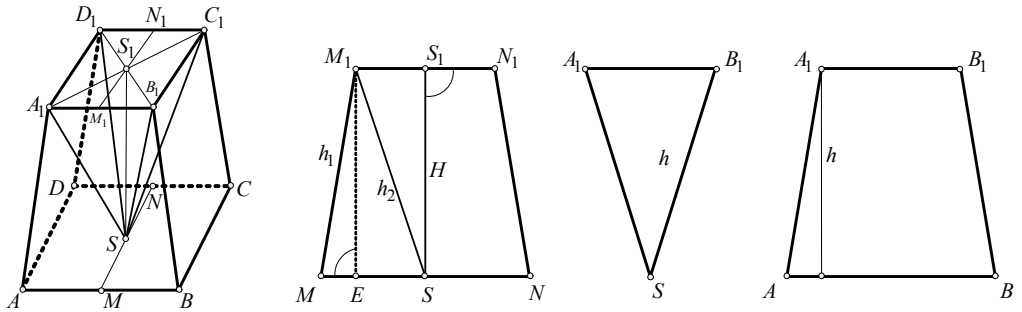
Ставајќи $x^2-6x+5=y$, ја добиваме равенката $y(y+3)=40$ чии решенија се $y_1=5$ и $y_2=-8$. Решавајќи ги сега равенките

$$x^2-6x+5=5, \qquad x^2-6x+5=-8,$$

ги добиваме корените на дадената равенка: $x_1=0$, $x_2=6$, $x_3=3+2i$, $x_4=3-2i$.

184. Во една правилна четиристрана пресечена пирамида да се впише пирамида, земајќи го за основа горниот квадрат, а за теме центарот на долниот квадрат. Страните на квадратите се: на долниот a, на горниот b. Колку изнесува висината на пирамидата, ако бочните плоштини на двете пирамиди се еднакви? (Да се утврди при кои услови задачата има решение.)

Решение. Нека M,N,M_1 и N_1 се средини на рабовите AB, CD, A_1B_1 и C_1D_1 соодветно (види цртеж). Тогаш четириаголникот MNM_1N_1 е трапез со основи $\overline{MN}=a$ и $\overline{M_1N_1}=a$. Се бара висината $H=\overline{SS_1}$ на овој трапез. Нека $\overline{MM_1}=h_1$, $\overline{M_1S}=h_2$. За бочните плоштини P_1 и P_2 на дадената пирамида и впишаната соодветно, ќе имаме:



$$P_1 = \frac{4(a+b)}{2}h_1 = 2(a+b)h_1\,, \qquad P_2 = \frac{4bh_2}{2} = 2bh_2\,.$$

Со $P_1 = P_2$ добиваме

$$2(a+b)h_1 = bh_2\,. \tag{1}$$

Од правоаголниот триаголникк MEM_1 (види цртеж) имаме

$$H^2 = h_1^2 - \frac{(a-b)^2}{4}\,,$$

а од правоаголниот триаголник SS_1M_1 имаме

$$H^2 = h_2^2 - \frac{b^2}{4}\,.$$

Значи,

$$h_1^2 - \frac{(a-b)^2}{4} = h_2^2 - \frac{b^2}{4}\,,$$

т.е.

$$4h_2^2 = 4h_1^2 - a^2 + 2ab\,. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $h_1^2 = \dfrac{b^2(2b-a)}{4(2b+a)}$ па $H^2 = \dfrac{b^2(2b-a)}{4(2b+a)} - \dfrac{(a-b)^4}{4} = \dfrac{a(2b^2-a^2)}{4(2b+a)}$.

Задачата има решение ако и само ако $2b^2 - a^2 > 0$, т.е. $a < b\sqrt{2}$.

III година

185. Определи ги сите вредности на параметарот m, така што за секој x важи

$$(4m^2 - 5m + 1)x^2 + 2(m+1)x + 1 > 0\,. \tag{1}$$

Решение. Неравенството $ax^2 + bx + c > 0$ важи за секој реален број x ако и само ако $a > 0$ и $D = b^2 - 4ac < 0$. Во нашиов случај

$$a = 4m^2 - 5m + 1 = (m-1)(4m-1)$$

$$D = 4(m+1)^2 - (4m^2 - 5m + 1) = 4m(-3m+7)\,.$$

Од $a>0$ следува дека $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(1,+\infty)$, а од $D<0$, пак, следува дека $m\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$, т.е. важи неравенството (1) за секој реален број x ако и само ако

$$m\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{3},+\infty\right).$$

186. Да се докаже идентитетот

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\sin\alpha. \qquad (1)$$

Решение. За левата страна L на (1) имаме:

$$L=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

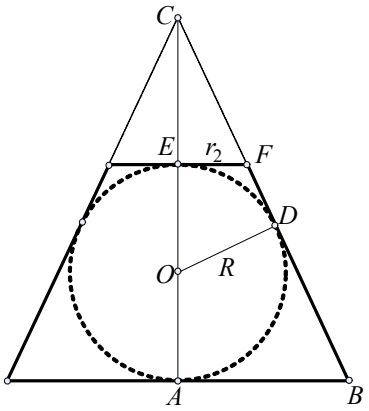
$$=\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha$$

187. За кои реални броеви x и y важи равенството

$$4x^2+12x\sin(xy)+9=0?$$

Решение. Имаме

$$4x^2+12x\sin(xy)+9=4x^2+12x\sin(xy)+9\sin^2(xy)-9\sin^2(xy)+9=(2x+3\sin(xy))+9\cos^2(xy)$$



па дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$(2x+3\sin(xy))+9\cos^2(xy)=0.$$

Од последната равенка следува дека

$$2x+3\sin(xy)=0 \qquad \text{и} \qquad \cos(xy)=0$$

Од втората равенка добиваме:

$$xy=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

Па заменувајќи во првата равенка ќе имаме

$$x_1=-\frac{3}{2}, \qquad x_2=\frac{3}{2},$$

и соодветно

$$y_1=-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, \qquad y_1=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

188. Околу топка со радиус R е опишан пресечен конус при кој плоштината на едната основа е четирипати поголема од плоштината на другата основа. Да се пресмета волуменот на пресечениот конус.

Решение. Од условот $P_1=4P_2$ добиваме дека $r_1=2r_2$. Триаголниците ABC и EFC се слични, па имаме $r_1:r_2=(h+2R):R$. Исто така, триаголниците CEF и CDO се слични, па

имаме $r_2 : R = h : \overline{CD}$. Од триаголникот ΔCDO добиваме $\overline{CD} = \sqrt{2Rh + h^2}$. Значи, ги добиваме равенствата:

$$r_1 = 2r_2, \qquad r_1 R = r_2(h + 2R), \qquad r_2\sqrt{2Rh + h^2} = hR,$$

од каде што следува дека:

$$h = 2R, \qquad r_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \qquad r_1 = R\sqrt{2}.$$

Следствено, за волуменот V на пресечениот конус добиваме:

$$V = \frac{2R\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{7R^3\pi}{3}.$$

IV година

189. Колку природни броеви меѓу 1000 и 3000 може да се формираат од цифрите $1,2,3,4,5$ ако:

а) е дозволено повторување на цифрите;

б) не е дозволено повторување на цифрите?

Решение. Според условот на задачата, треба да се најде бројот на сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$, каде што $a = 1$ или $a = 2$, $a,b,c,d \in \{1,2,3,4,5\}$, т.е. доволно е да го најдеме бројот на сите трицифрени броеви $\overline{bcd}$, каде што $b,c,d \in \{1,2,3,4,5\}$ во двата случаја.

а) Бројот на сите трицифрени броеви од цифрите $1,2,3,4,5$ каде што е дозволено повторување на цифрите, се совпаѓа со бројот V_5^3 од сите варијации со повторување од класа 3 над множество од 5 елементи. Тој број е $V_5^3 = 5^3$, па постојат точно $2 \cdot 5^3 = 250$ природни броеви со бараното својство.

б) Ако не е дозволено повторување на цифрите, тогаш бројот на сите трицифрени броеви од цифрите $2,3,4,5$ ($1,3,4,5$) е еднаков на $\binom{4}{3}3! = 4!$. Значи, бараниот број е $2 \cdot 4! = 48$.

190. Да се докаже дека еден триаголник е остроаголен ако и само ако за аглите α, β и γ на триаголникот се исполнети неравенствата

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1,$$
$$\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma > 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma > 1.$$

Решение. Нека претпоставиме дека триаголникот ABC е остроаголен, т.е. дека $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$ и $\gamma < 90^\circ$. Тогаш $\cos\gamma > 0$, па

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma < 0,$$

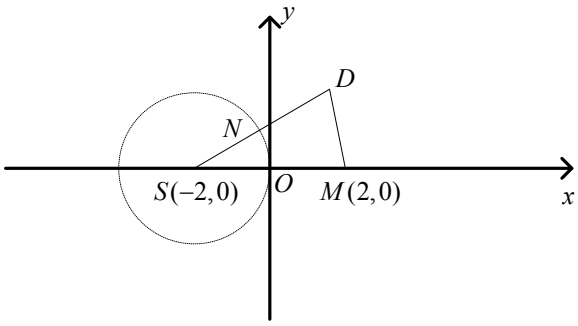
т.е. $\cos\alpha\cos\beta < \sin\alpha\sin\beta$, од каде што поради $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, добиваме дека $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$.

Обратно, да претпоставиме дека $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$. Ќе докажеме дека $\gamma < \frac{\pi}{2}$. Од $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$ следува дека $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 0$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\beta > 0$ (еден триаголник не може да има два тапи агли). Значи, $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$, т.е. $\cos\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$. Според тоа, неравенството

$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 1$ можеме да го напишеме во обликот $\sin\alpha\sin\beta > \cos\alpha\cos\beta$, т.е. $\cos(\alpha+\beta) < 0$, па $\cos\gamma > 0$. Следствено, $\gamma < 90^\circ$.

191. Да се најде геометриското место на на точките $P(u,v)$ кои се еднакво оддалечени од кривата $x^2 + 4x + y^2 = 0$ и од точката $M(2,0)$.

Решение. Кривата $x^2 + 4x + y^2 = 0$ е кружница со центар $S(-2,0)$ и радиус 2 (види цртеж). Ако $N(x,y)$ е произволна точка од кружницата, тогаш според условот на задачата,



имаме $\overline{NP} = \overline{MP}$,

$$\overline{SP} = \overline{SN} + \overline{NP} = 2 + \overline{MP}.$$

Бидејќи

$\overline{SP}^2 = (u+2)^2 + v^2$, $\overline{MP} = (u-2)^2 + v^2$, заменувајќи во второто равенство на (1), добиваме

$$\sqrt{(u+2)^2 + v^2} = 2 + \sqrt{(u-2)^2 + v^2},$$

т.е.

$$u^2 - \frac{v^2}{3} = 1.$$

Следствено, бараното геометриско место на точки е хипербола.

192. Ако $a > b > c > d > 0$ и a,b,c,d се четири последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш

$$a^n + d^n > b^n + c^n.$$

Решение. Од $a > b > c > d$ следува неравенството

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1} > c^{n-1} + c^{-2}d + \ldots + d^{n-1}. \qquad (1)$$

Бидејќи, пак, a,b,c,d се последователни членови на аритметичка прогресија и $a > b > c > d$, следува дека

$$a - b = c - d > 0. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) го добиваме неравенството

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) > (c-d)(c^{n-1} + c^{-2}d + \ldots + d^{n-1})$$

$$a^n - b^n > c^n - d^n.$$

XIII регионален натпревар - 1990 година

I година

193. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $n^7 - n$ е делив со 7.

Решение. Доволно е да докажеме дека бројот $n^7 - n$ е делив со 7 за $n = 1,2,3,4,5,6,7$. Имаме:

$1^7 - 1 = 0$, $\qquad 2^7 - 2 = 126 = 7\cdot 18$, $\qquad 3^7 - 3 = 2184 = 7\cdot 312$,

$4^7-4=16380=7\cdot 2340$ $\quad 5^7-5=78120=7\cdot 11160$ $\quad 6^7-6=279930=7\cdot 39990$

$7^7-7=7(7^6-1)$.

194. Да се упрости изразот $\dfrac{x^{12}+28x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}$.

Решение. Имаме

$$x^{12}-128x^6+4096=(x^6-64)^2=(x^3-8)^2(x^3+8)^2=(x-2)^2(x^2+2x+4)^2(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$$

$$x^3-4x^2+8x-8=(x^3-8)-4x(x-2)=(x-2)(x^2+2x++4-4x)=(x-2)(x^2-2x+4)\ .$$

Значи,

$$\frac{x^{12}+28x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}=\frac{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2(x+2)^2(x^2-2x+4)^2}{(x-2)^2(x^2-2x+4)^2}=$$
$$=(x+2)^2(x^2+2x+4)^2.$$

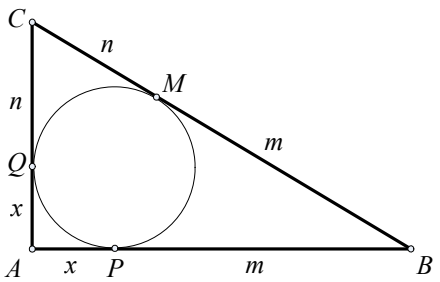
195. По патеката покрај стрмна пруга се движи пешак (по надолнина) со брзина од $6\ \text{km/h}$. Тој забележал дека возот што доаѓа од спротивен правец минува крај него за 12,6 секунди. Со истиот воз, со кој по угорнина се движел со брзина од 3,6 km/h се разминувал 15 секунди. Колку е долг возот и колкава му е брзината?

Решение. Нека брзината на возот е $x\ \text{m/sec}$, а неговата должина е $y\ \text{m}$. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки:

$$\begin{cases}12,6x+6\cdot 12,6=y\\ 15x\ \ -3,6\cdot 15=y\end{cases}$$

Од каде добиваме $x=15$, $y=210$. Значи, брзината на возот е $15\ \text{m/sec}=54\ \text{km/h}$, а неговата должина е $210\ \text{m}$.

196. Даден е правоаголен триаголник ABC и во него е впишана кружница, која што ја допира хипотенузата BC во точката M. Ако $\overline{BM}=m$, $\overline{MC}=n$, тогаш $P_{ABC}=mn$. Докажи!



Решение. Нека P и Q се допирните точки на впишаната кружница со катетите AB и AC соодветно (види цртеж). Тогаш имаме $\overline{BP}=\overline{BM}=m$, $\overline{CQ}=\overline{CM}=n$. За плоштината P_{ABC} имаме:

$$2P_{ABC}=(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn\ .$$

Според Питагоровата теорема,

$$(x+m)^2+(x+n)^2=(m+n)^2,$$

т.е. $x^2+(m+n)x=mn$, што значи дека $P_{ABC}=mn$.

II година

197. Нека $f(n)=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ каде i е имагинарна единица.

Пресметај $f(1986)+f(1990)$!

Решение. Ако $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, тогаш $z_1^2=i$, $z_2^2=-i$, $z_1^4=z_2^4=-1$. Користејќи го тоа, добиваме:

$$f(1986)+f(1990)=z_1^{1986}+z_2^{1986}+z_1^{1990}+z_2^{1990}=z_1^{1986}(1+z_1^4)+z_2^{1986}(1+z_2^4)=$$
$$=z_1^{1986}(1-1)+z_2^{1986}(1-1)=0.$$

198. Ако a,b,c се непарни броеви, тогаш корените на равенката $ax^2+bx+c=0$ не се рационални броеви. Докажи!

Решение. Ако $a=2k+1, b=2m+1, c=2n+1$, тогаш

$$D=(2m+1)^2-4(2k+1)(2n+1)=4m(m+1)-8(2kn+k+n)-3=$$
$$=4m(m+1)-8(2kn+k+n+1)+5$$

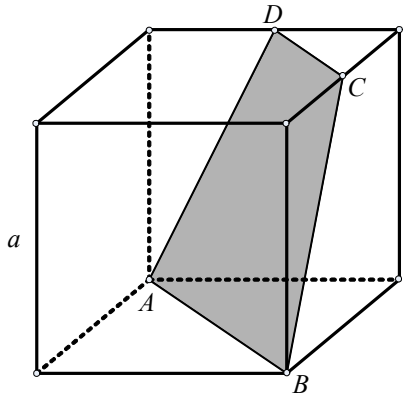
Бројот $m(m+1)$ е секогаш парен, па бројот $4m(m+1)$ е делив со 8. Значи, $D=8p+5$. За корените на равенката да бидат рационални броеви, треба $D=8p+5$ да биде потполн квадрат. Но D е непарен број па $D=(2q+1)^2=4q(q+1)+1$, т.е. D не може да биде потполн квадрат. Следователно, корените на равенката не може да се рационални броеви.

199. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3=341 \\ xy+yx^2=330 \end{cases}$$

Решение. Ако втората равенка ја помножиме со 3, а потоа двете равенки ги собереме, добиваме $(x+y)^3=11^3$, од каде што $x+y=11$. Заменувајќи во втората равенка добиваме $xy=30$. На крајот имаме $x=5, y=6$ или $x=6, y=5$.

200. Коцка со раб a пресечена е со рамнина која минува низ дијагоналата на еден ѕид и низ средините на два соседни раба од спротивниот ѕид. Да се пресмета плоштината на пресекот.



Решение. Пресекот $ABCD$ (види цртеж) е рамнокрак трапез со основи $\overline{AB}=a\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и крак $\overline{BC}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. За висината h на трапезот ќе имаме

$$h^2=\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2=\frac{9a^2}{8}.$$

Значи,

$$P=\frac{a\sqrt{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{9a^2}{8}.$$

III година

201. Да се реши равенката $5^x\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$.

Решение. Со степенување на дадената равенка добиваме $5^{x^2}\cdot 8^{x-1}=2^{2x}\cdot 5^{3x}$, т.е. $5^{x^2-3x}=2^{3x}$. Понатаму, со логаритмирање ќе имаме

$$(x^2-3x)\log_2 5=3-x,$$

$$(x-3)(x\log_2 5+1)=0$$

од каде што добиваме $x_1=3, x_2=-\log_5 2$.

202. Да се реши равенката

$$\log_{(3x+7)}(9+12x+4x^2)+\log_{(2x+3)}(6x^2+23x+21)=4.$$

Решение. Бидејќи

$$9+12x+4x^2=(3+2x)^2, \qquad 6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7),$$

дадената равенка се сведува на равенката

$$2\log_{(3x+7)}(2x+3)+1+\log_{(2x+3)}(3x+7)=4,$$

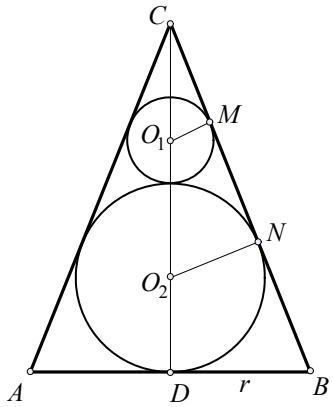
т.е. $2[\log_{(3x+7)}(2x+3)]^2-3\log_{(3x+7)}(2x+3)+1=0$, од каде што добиваме

$$\log_{(3x+7)}(2x+3)=1, \qquad \log_{(3x+7)}(2x+3)=\frac{1}{2}.$$

Решавајќи ги овие равенки добиваме $x_1=-4$, $x_2=-2$ и $x_3=-\frac{1}{4}$. Лесно се проверува дека решение на равенката е само $x_3=-\frac{1}{4}$.

203. Во конус се поставени две топки со радиуси 2 и 1. Поголемата топка ја допира основата и обвивката. Да се пресмета волуменот на конусот.

Решение. Да го разгледаме напречниот пресек на конусот (види цртеж). Нека $\overline{CO_1}=x$. Од сличноста на триаголниците CO_1M и CO_2N добиваме $\overline{CO_1}:\overline{CO_2}=\overline{O_1M}:\overline{O_2N}$, т.е. $x:(x+3)=1:2$, од каде што $x=3$. За висината H на конусот ќе имаме



$$H=\overline{CD}=\overline{CO_1}+\overline{O_1O_2}+\overline{O_2D}=8.$$

Од сличноста, на триаголниците CO_1M и CDB добиваме

$$\overline{O_1M}:\overline{CM}=r:\overline{CD}.$$

Бидејќи $\overline{O_1M}=1$, $\overline{CD}=8$ и $\overline{CM}^2=\overline{O_1C}^2-\overline{O_1M}^2=8$, добиваме $r=2\sqrt{2}$. Значи,

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi H=\frac{64\pi}{3}.$$

204. Да се докаже дека $\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{1}{4}$.

Решение. Имаме:

$$\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}=\frac{2\cos 72^\circ\sin 72^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}=$$

$$=\frac{\sin(180^\circ-36^\circ)}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{1}{4}$$

IV година

205. Ако $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$, тогаш $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$. Докажи!

Решение I. Од $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ ја добиваме равенката $x^2-2x\cos\alpha+1=0$ чии решенија се

$$x_1=\cos\alpha+i\sin\alpha, \qquad x_2=\cos\alpha-i\sin\alpha.$$

Бидејќи $\frac{1}{x_1}=x_2$, имаме:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha+\cos n\alpha-i\sin n\alpha=2\cos n\alpha$$

Решение II. Нека

$$S_n=x^n+\frac{1}{x^n}.$$

Прво да забележиме дека

$$S_{n+1}=S_nS_1-S_{n-1}.$$

Да претпоставиме дека равенството важи за секој природен број помал или еднаков на n. Тогаш имаме

$$S_{n+1}=4\cos n\alpha\cos\alpha-2\cos(n-1)\alpha=2(2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-1)\alpha)=2\cos(n+1)\alpha$$

Следствено, според принципот на математичка индукција, равенството важи и за секој природен број.

206. Нека A_1 е средината на отсечката AB. Со A_2 ја означуваме средината на AA_1, со A_3 средината на A_1A_2, со A_4 средината на A_2A_3 итн. Да се најде границата кон која тежи низата од должините на отсечките $AA_1, AA_2, AA_3, \ldots$.

Решение. Нека $\overline{AB}=a$; тогаш

$$\overline{AA_n}=a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)=\frac{a}{3}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right].$$

Значи,

$$\lim_{n\to\infty}\overline{AA_n}=\frac{a}{3}.$$

207. Да се докаже дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи неравенството

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. За таа цел, левата страна на даденото неравенство да ја означиме со S_n. Имаме

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1.$$

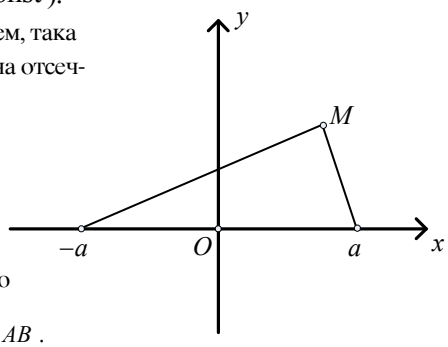
Да претпоставиме дека $S_k>1$. Тогаш имаме:

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}=S_k+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=$$

$$=S_k+\frac{1}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>S_k>1$$

Значи, според принципот на математичката индукција, неравенството е точно за секој природен број n.

208. Дадена е отсечка AB ($\overline{AB}=2a$). Да се најде геометриско место на точките M, за кои важи $\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=2c$ ($c-\text{const}$).



Решение. Избираме правоаголен координатен систем, така што x-оската е правата AB, а y-оската симетралата на отсечката AB. Тогаш имаме $A(-a,0)$, $B(a,0)$. Од условот

$$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=2c,$$

добиваме

$$(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=2c$$

Од каде што, пак, добиваме $x=\frac{c}{2a}$. Значи, бараното геометриско место е права нормална на отсечката AB.

XIV регионален натпревар - 1991 година

I година

209. Двајца пријатели Душан и Никола се сретнале после многу години. Душан изјавил дека има три сина. Никола запрашал по колку години имаат. "Производот од нивните години е 36, а збирот е еднаков на бројот на автобусот што моментално поминува покрај нас"-одговорил Душан. Врз основа на овие податоци Никола не можел да ја одреди нивната старост. "Само најстариот од нив е смеќ како мене" додал Душан. Додавајќи ја ова информација Никола ги пресметал годините на децата? (Годините се изразени со природни броеви).

Решение. Производот на три природни броја може да биде еднаков на 36 само во следните случаи: $1\cdot1\cdot36$, $1\cdot2\cdot18$, $1\cdot3\cdot12$, $1\cdot4\cdot9$, $1\cdot6\cdot6$, $2\cdot2\cdot9$, $2\cdot3\cdot6$, $3\cdot3\cdot6$. За секој од овие случаи збирот е еднаков на: $38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10$ соодветно. Бидејќи Никола не можел врз основа на бројот на автобусот да ги одреди годините, следува дека бројот на автобусот е 13. Кога Душан додал дека најстариот син е смеќ, Никола од комбинациите $1,6,6$ и $2,2,9$ ја одбрал втората, зашто тука се знае кој син е најстар.

210. Да се докаже дека производот на сите природни броеви од 101 до 200 е делив со 2^{100}, но не е делив со 2^{101}.

Решение. Имаме:

$$101\cdot102\cdot103\cdot\ldots\cdot200=\frac{(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100)\cdot(101\cdot102\cdot\ldots\cdot200)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100}=\frac{(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot199)\cdot2^{100}\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100}$$
$$=2^{100}\cdot(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot199)$$

Значи, производот $101\cdot102\cdot103\cdot\ldots\cdot200$ е делив со 2^{100} но не е делив со 2^{101}, зашто сите множители во заградата се непарни броеви.

211. Да се докаже дека $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Решение. Имаме

$$20+14\sqrt{2}=8+12+12\sqrt{2}+2\sqrt{2}=2^3+3\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^3=(2+\sqrt{2})^3$$

Слично, $20-14\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^3$.

На крајот, $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

212. Основата на права четиристрана призма е ромб чии дијагонали се разликуваат за $14\,\text{cm}$. Ако помалата дијагонала се зголеми за 2, а поголемата се намали за 4, плоштината на ромбот останува иста. Да се пресмета плоштината на призмата ако нејзината висина е два пати поголема од страната на ромбот.

Решение. Дијагоналите на ромбот да ги означиме со d_1 и d_2, $d_1>d_2$. Од условите на задачата имаме: $d_1-d_2=14$, $\frac{d_1d_2}{2}=\frac{(d_1-4)(d_2+2)}{2}$, од каде што добиваме $d_1=24$, $d_2=10$.

Бидејќи дијагоналите во секој ромб се заемно нормални(направи цртеж), следува дека

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=12^2+5^2=169,\ \text{т.е. } a=13.$$

На крајот, за плоштината P на призмата ќе имаме $P=2\frac{d_1d_2}{2}+4aH=1592$.

II година

213. Да се докаже дека $|1-\bar{a}b|-|a-b|=(1+|ab|)^2-(|a|+|b|)^2$ каде што a и b се комплексни броеви.

Решение. Имаме:

$$|1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2=(1-\bar{a}b)\overline{(1-\bar{a}b)}+(a-b)\overline{(a-b)}=(1-\bar{a}b)(1-\bar{b}a)+(a-b)(\bar{a}-\bar{b})=$$
$$=1+\bar{a}b\,a\bar{b}-a\bar{a}-b\bar{b}=1+|ab|^2-|a|^2-|b|^2-2|ab|-2|ab|=(1+|ab|^2)-(|a|+|b|)^2$$

214. Возраста на едно лице во ова година е еднаква на збирот на цифрите од годината на неговото раѓање. Колку години има лицето?

Решение. Лицето има најмногу $9+9+9+9=36$ години, што значи дека е родено во XX-от век, т.е. во $\overline{19xy}$ година. Според условот на задачата, имаме

$$1+9+x+y=1991-(1000+900+10x+y),$$

т.е.

$$11x+2y=81,$$

од каде што добиваме $x=7, y=2$. Следствено, лицето е родено во 1972 година и сега има $1+9+7+2=19$ година.

215. Дадена е равенката $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}=1,\quad a\in\mathbb{R}$.

а) Да се докаже дека за секој a решенијата на равенката се реални.

б) Да се одреди a, така што $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=3$.

Решение. Дадената равенка може да се напише во обликот

$$x^2-(3a+2)x+2a^2+3a=0.$$

а)Корените на равенката се реални ако $D \geq 0$. Но

$$D = (3a+2)^2 - 4(2a^2+3a) = a^2 + 4 > 0,$$

па значи корените се реални и различни.

б)Според Виетовите правила имаме:

$$x_1 + x_2 = 3a + 2 \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = 2a^2 + 3a,$$

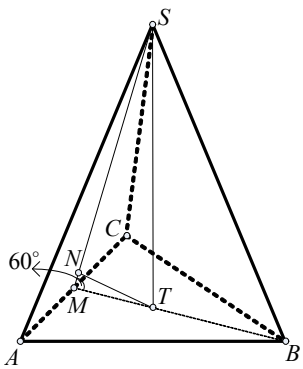
па од $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3$, добиваме

$$\frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = 3,$$

$$\frac{(3a+2)^2 - 2(2a^2+3a)}{2a^2+3a} = 3.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката $a^2 + 4a - 3 = 0$, чии решенија се $a_1 = 1$ и $a_2 = -4$.

216. Основниот раб на правилна триаголна пирамида е a, а бочниот ѕид е наведнат кон основата под агол од 60°. Да се определи растојанието од тежиштето на основата до бочниот ѕид на пирамидата.



Решение. Бочниот ѕид SAC е рамностран триаголник чија висина SM со висината MN на основата образува агол од 60°, $\measuredangle SBM = 60^\circ$. Бараното растојание е отсечката TN, катета на правоаголниот триаголник MTN. Според тоа,

$$\overline{MT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{TN}}{\overline{MT}},$$

т.е. $\overline{TN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}$.

III година

217. Реши ја равенката

$$\log_x a + \log_{\sqrt{x}} a + ... + \log_{\sqrt[8]{x}} a = \log_a x, \ a > 0.$$

Решение. Имаме

$$\log_x a + \log_{\sqrt{x}} a + ... + \log_{\sqrt[8]{x}} a = \log_a x, \ a > 0$$

$$\log_x a + 2\log_x a + ... + 8\log_x a = \log_a x, \ x > 0$$

$$36\log_x a = \log_a x$$

$$36\log_a^2 x = 1$$

$$\log_a x = \pm\frac{1}{6}$$

Решенија на равенката се: $x = \sqrt[6]{a}$ и $x = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$.

218. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}.$$

Решение. Со собирање на равенките на системот добиваме

$$x^2+1+y^2+z^2+1=2x+2y+2z$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-2z+1)=0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$

Збирот од квадратите на три броја е еднаков на нула, ако секој од собироците е еднаков на нула, т.е. $x-1=0, y-1=0$ и $z-1=0$. Оттука следува дека $x=1, y=1, z=1$.

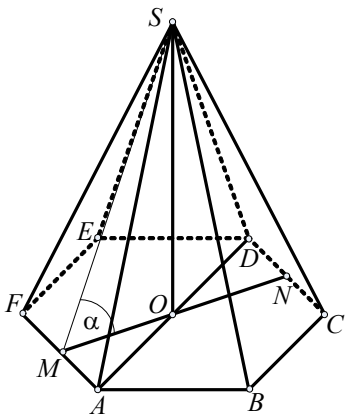
219. Ако $\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{3}$, тогаш x не може да биде агол во триаголник.

Решение. Од равенката директно следува дека $\frac{x}{2}=\frac{x}{3}+2k\pi$ и $\frac{x}{2}=-\frac{x}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Бидејќи x е агол во триаголник, следува дека $k\geq 1$. Но во тој случај $x=12k\pi>\pi$ и $x=\frac{12k\pi}{5}>\pi$, од каде добиваме дека x не може да биде агол во триаголник.

220. Апотемата на правилна шестстрана пирамида е m, а аголот помеѓу основата и бочниот ѕид е α. Да се најде плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Нека M и N се средините на страните AF и CD соодветно(види цртеж). Триаголникот MNS е рамнокрак со крак $m=\overline{MS}=\overline{NS}$ и агол при основата α. Затоа, $MN=2m\cos\alpha$. Ако a е страната на основата, тогаш $\overline{MN}=2\overline{OM}=a\sqrt{3}$. Значи,

$$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}m\cos\alpha.$$



За плоштината P на пирамидата имаме

$$P=6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{am}{2}\right)=2m^2\sqrt{3}(1+\cos\alpha)\cos\alpha.$$

Висината на пирамидата е $H=m\sin\alpha$, па за волуменот V добиваме:

$$V=\frac{2\sqrt{3}}{3}m^2\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

IV година

221. Да се пресмета вредноста на изразот

$$S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}},$$

каде што $a_1>0, a_2>0, \ldots, a_n>0$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуваат аритметичка прогресија.

Решение. Имаме:

$$S=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}=-\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right)=$$
$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$$

222. Нека $a=p^2+p+1$, $b=p^2+2p$ и $c=2p+1$ ($p>0$) се должините на страните на еден траиголник. Да се пресмета средниот по големина агол на тој триаголник.

Решение. Прво имаме

$$a=(p+1)^2-p, \qquad b=(p+1)^2-1, \qquad c=2p+1,$$

па

-ако $0<p<1$, тогаш $b<a<c$;

-ако $p=1$, тогаш $a=b=c=3$;

-ако $p>1$, тогаш $c<a<b$.

Значи, a е средна по големина страна на триаголникот, па α е среден по големина агол на триаголникот. Според косинусната теорема, имаме

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(p^2+2p)^2+(2p+1)^2-(p^2+p+1)^2}{2(p^2+2p)(2p+1)}=\frac{1}{2},$$

па $\alpha=60^\circ$.

223. На кои цифри завршува биномниот коефициент $\binom{n}{4}$, $n=4,5,6,\ldots$.

Решение. Имаме

$$\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}. \tag{1}$$

Секој природен број може да се претстави во еден од облиците

$$5k, \quad 5k+1, \quad 5k+2, \quad 5k+3, \quad 5k+4.$$

Ако n е од облик $5k$ или $5k+1$ или $5k+2$ или $5k+3$, тогаш бројот $n(n-1)(n-2)(n-3)$ е делив со 5. Бидејќи 5 и 24 се заемно прости,, следува дека $\binom{n}{4}$ е делив со 5, па $\binom{n}{4}$ завршува на 0 или 5.

Ако $5k+4$, тогаш, заменувајќи во (1), ќе добиеме дека

$$\binom{n}{4}=\frac{5m}{24}+1. \tag{2}$$

користејќи дека 5 и 24 се заемно прости и дека $\frac{5m}{24}$ е природен број, следува дека $\frac{5m}{24}$ е делив со 5, т.е. тој завршува со 0 или 5. Според тоа, бројот $\binom{n}{4}$, $n\geq 5$ ќе завршува на 1 или 6.

224. Дадени се две заемно нормални прави p и q и една точка O што не лежи на ниедна од правите p и q. Една променлива права низ точката O ги сече правите p и q соодветно во точките A и B. Да се најде геометриското место на средините M од отсечките AB.

Решение. Да избереме правоаголен координатен систем со почеток во точката O и координатни оски паралелни со правите p и q соодветно. Ако x-оската е паралелна со правата p, а y-оската е паралелна со правата q, тогаш равенките на правите p и q ќе бидат соодветно $y=a$ и $x=b$. Равенката на произволна права низ точката O ќе биде $y=kx$, каде што k е реален параметер. Оваа права ја сече правата p во точката $A\left(\frac{a}{k},a\right)$, а правата q во точката $B(b,kb)$. Средината M на отсечката AB ќе има координати

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{k}+b\right), \qquad y=\frac{1}{2}(a+kb).$$

Со елиминација на параметарот k добиваме

$$2xy=ax+by$$

што претставува равенка на бараното геометриско место.

XV регионален натпревар - 1992 година

I година

225. Ученик ги отчукува по ред природните броеви од 1 до 1000. Која цифра стои на 1992-то место?

Решение. Со отчукување на едноцифрените и двоцифрените броеви, учникот отчукал $9\cdot 1+90\cdot 2=189$ цифри. Значи, остануваат уште $1992-189=1803$ цифри, а $1803:3=601$, т.е. учникот ги отчукал првите 601 трицифрени броеви. Според тоа, 1992-та цифра е третата цифра на 601-от трицифрен број, т.е. 700. Следствено, бараната цифра е 0.

226. Да се докаже дека бројот $2222^{5555}+5555^{2222}$ е делив со 7.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
2222^{5555}+5555^{2222} &= (2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})= \\
&=(2222+4)(2222^{5554}-2222^{5553}\cdot 4+....-2222\cdot 4^{5553}+4^{5554})+ \\
&+(5555-4)(5555^{2221}+5555^{2220}\cdot 4+...+5555\cdot 4^{2220}+4^{2221})+ \\
&+4^{2222}(4^{3333}-1)=7A+7B+4^{2222}(64^{1111}-1)= \\
&=7A+7B+4^{2222}(64-1)(64^{1110}+64^{1109}+...+64+1)= \\
&=7A+7B+7C=7(A+B+C)
\end{aligned}$$

227 А. Ако барем еден од броевите a,b и c е различен од нула, тогаш барем еден од броевите $(a+b+c)^2-8ab$, $(a+b+c)^2-8bc$ и $(a+b+c)^2-8ca$ е позитивен. Докажи!

Решение. Го претпоставуваме спротивното, т.е. дека

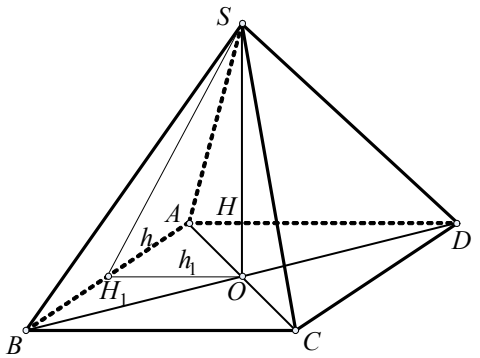
$$(a+b+c)^2-8ab\le 0, \qquad (a+b+c)^2-8bc\le 0, \qquad (a+b+c)^2-8ca\le 0.$$

Ако ги собереме овие три неравенства се добива

$$a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\le 0,$$

што е во спротивност со условот $a^2+b^2+c^2>0$. Затоа, барем еден од дадените три броја е позитивен.

228 А. Основата на правилна четириаголна пирамида е ромб со страна $a = 2\text{ cm}$, составен од два рамностранни триаголници. Пократкиот раб на пирамидата има должина $b = 2\text{ cm}$. Да се определи плоштината и волуменот на пирамидата.



Решение. Бидејќи основата на пирамидата е ромб составен од два рамностранни триаголници со страна $a = 2\text{ cm}$ имаме

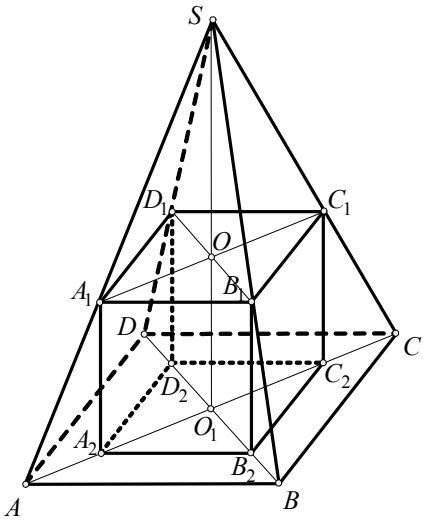
$$B = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

За да ја определиме плоштината на обвивката на пирамидата треба да ја определиме висината $h = \overline{SH_1}$. Триаголникот ACS е рамностран со страна a, па неговата висина е $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи ΔAEO е половина од рамностран триаголник, неговата висина h_1 е половина од висината на ΔAEC, т.е. $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Но ΔH_1OS е правоаголен па $h = \sqrt{H^2 + h_1^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. Значи, плоштината на пирамидата е $P = B + 4 \cdot \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2\frac{a^2\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$ а волуменот на пирамидата е

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4} = 2.$$

229 Б. Во продавница имало 6 сандаци со јаболка со тежини од 15 kg, 18 kg, 19 kg, 20 kg и 31 kg. Двајца купувачи купиле 5 сандаци, така што едниот зел двапати повеќе јаболка од другиот. Кој сандак останал непродаден?

Решение. Збирот на тежините на сите сандаци изнесува 119 kg. Купувачите зеле 5 сандаци, со тоа што едниот зел двапати повеќе од другиот, па затоавкупната тежина мора да е делива со 3. Тоа е единствено можно ако се изостави сандакот од 20 kg, бидејќи само 20 при делење со три има ист остаток како и при делењето на 119 со 3. За да провериме дека задачата има смисла, да видиме кои сандаци ги купиле купувачите. Вкупната тежина на петте сандаци е 99 kg. Првиот купувач зел 66 kg, а вториот 33 kg. Значи, првиот ги купил сандаците со тежини 16 kg, 19 kg и 31 kg, а вториот ги купил сандаците со тежини 15 kg и 18 kg.



230 Б. Во права правилна четириаголна пирамида е впишана коцка, така што четири нејзини раба се на бочните ѕидови

на пирамидата, а други четири раба се на основата на пирамидата. Да се определи волуменот и плоштината на коцката ако пирамидата има висина h и основен раб a.

Решение. Пирамидата да ја означиме со $SABCD$, а коцката впишана во неа со $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Да го означиме со x работ на коцката. Од сличноста $\Delta SO_1B \sim \Delta SOB_1$ добиваме $\overline{SO} : \overline{SO_1} = \overline{OB_1} : \overline{O_1B}$. Знаеме дека

$$SO_1 = h, \quad \overline{SO} = h - x, \quad \overline{ON} = \frac{x}{2}, \quad \overline{O_1B} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

од каде се добива $\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a}$, $x = \frac{ah}{a+h}$.

Од овде, за плоштината и волуменот на коцката се добива

$$P = 6x^2 = 6\left(\frac{ah}{a+h}\right)^2, \qquad V = x^3 = \left(\frac{ah}{a+h}\right)^3.$$

II година

231. Најди комплексен број z што ги задоволува равенствата

$$|z+2i| = |z-4i| \qquad \text{и} \qquad |z-4| = 1.$$

Решение. Нека $z = a + ib$. Со замена во равенствата добиваме

$$|a+ib+2i| = |a+ib-4i| \qquad \text{и} \qquad |a+ib-4| = 1$$

кои се еквивалентни со

$$|a+i(b+2)| = |a+i(b-4)| \qquad \text{и} \qquad |a-4+ib| = 1$$

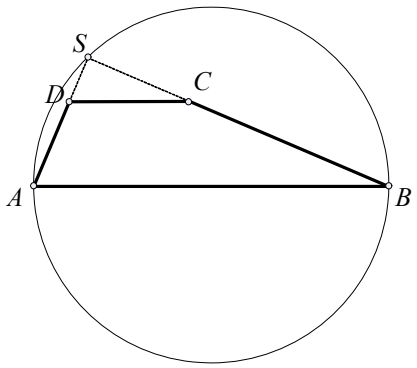
$$\sqrt{a^2+(2+b)^2} = \sqrt{a^2+(b-4)^2} \qquad \text{и} \qquad \sqrt{(a-4)^2+b^2} = 1$$

$$a^2+b^2+4b+4 = a^2+b^2-8b+16 \qquad \text{и} \qquad a^2-8a+16+b^2 = 1$$

$$12b = 12 \qquad \text{и} \qquad a^2-8a+16b^2 = 1.$$

Затоа, $b = 1$, а 4 е решение на на равенката $a^2 - 8a + 16 = 0$. Одовде $a = 4$, па $z = 4 + i$.

232. Ако краците на еден трапез се меѓусебно нормални, тогаш збирот од квадратите на неговите дијагонали е еднаков на збирот од квадратите на неговите основи. Докажи!



Решение. Нека краците на трапезот се сечат во точката S. Од ΔACS и ΔBDS имаме

$$\overline{AC}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{CS}^2, \qquad \overline{BD}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{DS}^2,$$

а од овде

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2 + \overline{DS}^2. \qquad (1)$$

Од правоаголните триаголници ΔABS и ΔDCS имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2, \qquad \overline{DC}^2 = \overline{DS}^2 + \overline{CS}^2.$$

Со замена на ова во (1) се добива

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2.$$

233 А. Ако a,b и c се реални броеви, такви што $a+b+c=2$ и $ab+bc+ca=1$, тогаш $0 \le a \le \frac{4}{3}$. Докажи!

Решение. Од $a+b+c=2$ се добива $b+c=2-a$. Од $ab+bc+ca=1$, се добива

$$bc=1-a(b+c)=1-a(2-a).$$

Затоа броевите b и c се решенија на квадратната равенка

$$x^2+(a-2)x+1-a(2-a)=0.$$

Бидејќи b и c се реални броеви, мора дискриминантата на квадратната равенка да е ненегативна, т.е.

$$0 \le D=(a-2)^2-4(1-a(2-a))=-3a^2+4a,$$

од каде што следува $0 \le a \le \frac{4}{3}$.

234 А. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \le |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|$$

Решение.Даденото неравенство е еквивалентно со

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \le (|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|)^2. \qquad (1)$$

Десната страна на (1) е

$$|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+...+|a_n|^2+\sum_{1\le i<j\le n} 2|a_i|\cdot|a_j| \ge |a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+...+|a_n|^2=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

па со тоа неравенството (1) е докажано.

235 Б. Со формулата

$$y=x^2-2(k-1)x+k^2,\ k\in\mathbb{R},$$

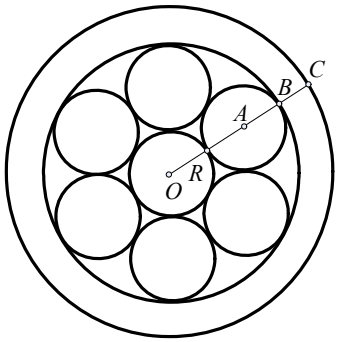
дадено е множество од параболи.

Да се определи геометриското место на темињата на параболите.

Решение. Темето на параболата $y=ax^2+bx+c$ е зададено со $T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Заменувајќи $a=1, b=2(k-1)$ и $c=k^2$, се добива дека темето е $T(k-1,2k-1)$ за даден реален број k. Бидејќи $2k-1=2(k-1)+1$, бараното геометриско место е правата $y=2x+1$

236 Б. Дадена е кружница што допира шест еднакви на неа кружници што се допираат меѓу себе. Околу нив е опишан концентричен прстен со плоштина еднаква на плоштината на сите седум кругови заедно. Да се докаже дека ширината на прстенот е еднаква на радиусот на круговите.



Решение. Да го означиме центарот на дадениот круг со O, радиусот со R, а ширината на прстенот BC со x. Плоштината на концентричниот прстен по услов на задачата е еднаква нап лоштината на сите кругови заедно. Затоа

$$\pi(\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2) = \pi[(3R+x)^2 - (3R)^2] = 7\pi R^2,$$

од каде што следува

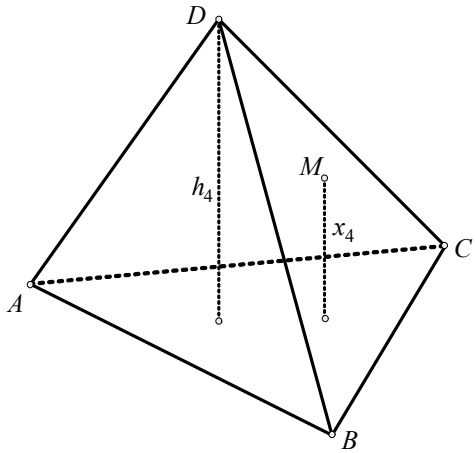
$$x^2 + 6Rx - 7R^2 = 0.$$

Бидејќи $x > 0$, од квадратната равенка се добива $x = R$.

III година

237. Ако x_1, x_2, x_3 и x_4 се растојанијата од произволна точка M во еден тетраедар $ABCD$ до неговите ѕидови, а h_1, h_2, h_3 и h_4 се соодветните висини на тетраедарот, тогаш

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$



Решение. Нека h_1, h_2, h_3 и h_4 се висините спуштени од темињата A, B, C и D соодветно. Плоштините на триаголниците BCD, ACD, ABD и ABC да ги означиме соодветно со S_1, S_2, S_3 и S_4. Тогаш

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = \frac{\frac{1}{3}x_1 \cdot S_1}{\frac{1}{3}h_1 \cdot S_1} + \frac{\frac{1}{3}x_2 \cdot S_2}{\frac{1}{3}h_2 \cdot S_2} + \frac{\frac{1}{3}x_3 \cdot S_3}{\frac{1}{3}h_3 \cdot S_3} + \frac{\frac{1}{3}x_4 \cdot S_4}{\frac{1}{3}h_4 \cdot S_4} = \frac{V_{BCDM}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{ACDM}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{ABDM}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{ABCM}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = 1$$

238. Да се докаже дека $2 + \mathrm{tg}1^\circ \mathrm{tg}2^\circ = \mathrm{ctg}1^\circ \mathrm{tg}2^\circ$.

Решение. Од $\mathrm{tg}1^\circ = \mathrm{tg}(2^\circ - 1^\circ) = \dfrac{\mathrm{tg}2^\circ - \mathrm{tg}1^\circ}{1 + \mathrm{tg}2^\circ \mathrm{tg}1^\circ}$ се добива $1 + \mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}1^\circ = \mathrm{ctg}2^\circ \mathrm{tg}1^\circ - 1$ односно

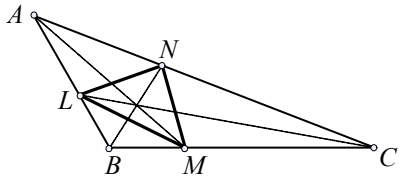
$$2 + \mathrm{tg}1^\circ \mathrm{tg}2^\circ = \mathrm{ctg}1^\circ \mathrm{tg}2^\circ.$$

239 А. Да се реши равенката

$$\log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3\sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{x^2+7}\right) - 1} = 1$$

Решение. Мора да биде $-x^2 + 7x - 10 > 0$, од каде што се добива $2 < x < 5$. Исто така, мора да биде $\cos(\pi\sqrt{x^2+7}) - 1 \geq 0$ од каде се добива $\cos(\pi\sqrt{x^2+7}) = 1$, т.е. $\pi\sqrt{x^2+7} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ или $\sqrt{x^2+7} = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Од $\sqrt{x^2+7} \geq 0$ добиваме $\sqrt{x^2+7} = 2k$ каде што $k = 0,1,2,...$. Затоа, $2 < x = \sqrt{4k^2 - 7} < 5$ каде што $k = 0,1,2,...$. За $k = 0$ и $k = 1$, x не постои во множеството на реалните броеви. За $k = 2$ се добива $x = 3$, а за $k \geq 3$ се добива $x \geq \sqrt{29} > 5$ што не е можно. Значи, равенката има смисла само за $x = 3$, а тоа е и решение на равенката.

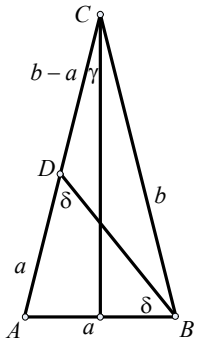
240 А. Ако во даден триаголник еден негов агол изнесува 120°, тогаш триаголникот со темиња во пресеците на симетралите на аглите со спротивни страни е правоаголен. Докажи!



Решение. Нека $\measuredangle ABC = 120^\circ$, а со L, M и N да ги означиме пресеците на симетралите на аглите кај темињата C, A и B со страните AB, BC и CA соодветно. Ќе докажеме дека NL е симетрила на аголот $\measuredangle ANB$. Навистина, растојанието од L до правата AC е еднакво со растојанието од L до правата BC, зашто CL е симетрала на аголот $\measuredangle BCA$. Но, растојанието од L до правата BC е еднакво со растојанието од L до правата BN, бидејќи $\measuredangle NBL = \measuredangle LBK = 60^\circ$. Затоа растојанието од L до правата AC е еднакво со растојанието од L до правата BN, и од овде следува дека NL е симетрала на аголот $\measuredangle ANB$. Аналогно се покажува дека MN е симетрала на аголот $\measuredangle BNC$. Затоа,

$$\measuredangle LNM = \measuredangle LNB + \measuredangle BNM = \frac{1}{2}\measuredangle ANB + \frac{1}{2}\measuredangle BNC = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ .$$

241 Б. Да се конструира рамнокрак триаголник, ако се дадени аголот при врвот и разликата на кракот и основата.



Решение. Нека ΔABC има страна $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = \overline{CA} = b$ и $\gamma = \measuredangle ACB$ е дадениот агол. Нека точката D е избрана на отсечката AC така што $\overline{CD} = b - a$. Од условот

$$2\cdot\measuredangle ACB + \gamma = 180^\circ ,$$

добиваме $\measuredangle BAC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Користејќи дека ΔABD е рамнокрак се добива дека $\measuredangle ABD = \delta$. Тогаш од условот

$$\measuredangle BAC + 2\delta = 180^\circ ,$$

заменувајќи ја добиената вредност за аголот $\measuredangle BAC$, се добива $\delta = 45^\circ + \frac{\gamma}{4}$.

Одовде следува дека $\measuredangle BDC = 180^\circ - \delta = 135^\circ - \frac{\gamma}{4}$. Затоа, ΔBDC може да се конструира(имено, познати се: страната $\overline{CD} = b - a$, аголот γ и $\measuredangle BDC$). Нека s е симетрала на страната BD. Тогаш $s \cap CD = \{A\}$.

242Б. Да се најде множеството решенија на равенката

$$\log_2[1 + \log_2(1 + \log_2 x)] = \sqrt{\frac{1}{2}x - x^2} .$$

Решение. Мора да биде $1 + \log_2 x > 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$. Исто така, мора да биде $\frac{1}{2}x - x^2 \geq 0$ од каде што следува $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Според тоа, множеството решенија на равенката е празно множество.

IV година

243. Во јазикот на едно племе има само две букви. Познато е дека ниту еден збор од тој јазик не е почеток на друг збор. Дали може речникот на ова племе да има:

3 збора со четири букви,
10 збора со пет букви,
30 збора со шест букви и
5 збора со седум букви?

Решение. Ќе покажеме дека одговорот е “не”. Да земеме кои било пет збора со со должина 7. Од условот на задачата треба да имаме $30\cdot 2^1=60$ збора со должина 6 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7. Од условот на задачата исто така се добива дека треба да имаме $10\cdot 2^2=40$ збора со должина 5 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7 и треба да имаме $3\cdot 2^3=24$ зборови со должина 4 кои не се јавуваат како почеток на зборови со должина 7. Затоа, доколку одговорот на задачата е позитивен, тогаш постојат барем $5+60+40+24=129$ збора со должина 7. Но ова е противречност бидејќи зборови со должина 7 има точно $128=2^7$.

244. Да се определат броевите A,B и C, така што за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ да важи равенството

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\frac{An+B}{2^n}+C. \qquad (1)$$

Решение. A,B и C треба да се одредат така што да важи (1) за секој природен број n. За $n=1$ се добива

$$\frac{1}{2}=\frac{A+B}{2}+C. \qquad (2)$$

За $n+1$ равенството (1) станува

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{A(n+1)+B}{2^{n+1}}+C.$$

При претпоставка дека равенството (1) важи за бројот n, претходното равенство важи ако и само ако

$$\frac{An+B}{2^n}+C+\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{A(n+1)+B}{2^{n+1}}+C.$$

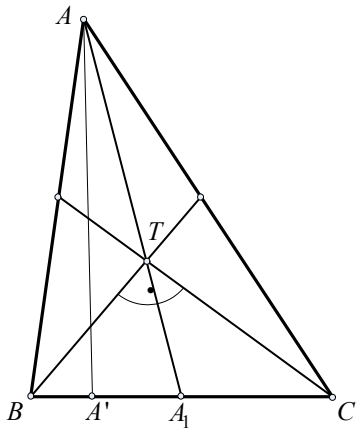
По средувањето се добива

$$(A+1)n+(B-A+1)=0.$$

Ова равенство треба да важи за секој природен број n, па затоа $A+1=0$ и $B-A+1=0$, т.е. $A=-1$ и $B=-2$. Од (2) се добива $C=2$. Од принципот на математичка индукција произлегува дека за овие вредности на A,B и C равенството (1) навистина важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

245 А. Нека во остроаголен триаголик ABC тежишните линии повлечени во B и C се заемно нормални. Докажи дека

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B+\operatorname{ctg}\measuredangle C\geq\frac{2}{3}.$$



Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот, A_1 е средината на отсечката BC, а A' е проекцијата

на точката A врз правата BC (види цртеж). Од

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B = \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}}, \qquad \operatorname{ctg}\measuredangle C = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}},$$

добиваме

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B + \operatorname{ctg}\measuredangle C = \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BA'} + \overline{CA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AA'}} \geq \frac{\overline{BC}}{\overline{AA_1}} \qquad (1)$$

Бидејќи $\measuredangle BTC = 90^\circ$, следува дека $\overline{TA_1} = \overline{A_1C} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, а освен тоа $\overline{AA_1} = 3\overline{TA_1}$. Според тоа, од (1) добиваме

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B + \operatorname{ctg}\measuredangle C \geq \frac{\overline{BC}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{BC}}{3\overline{TA_1}} = \frac{2\overline{TA_1}}{3\overline{TA_1}} = \frac{2}{3}.$$

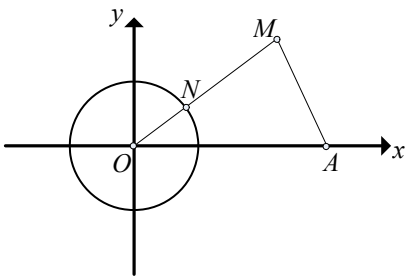
246 А. Што претставува геометриското место на точки во рамнината Oxy еднакво оддалечени од кружницата $x^2 + y^2 = 1$ и точката $A(3,0)$?

Решение. Нека $M(x,y)$ е произволна точка од бараното геометриско место точки и N е точка во која правата OM (O е координатен почеток) се сече со кружницата. Бидејќи $\overline{NM} = \overline{AM}$, имаме

$$\overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON} = \overline{OM} - 1, \qquad \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \overline{AM} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

добиваме

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$



Со квадрирање се добива

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3x - 4.$$

Со повторно квадрирање се добива

$$8x^2 - 24x - y^2 + 16 = 0;$$

$$8\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - y^2 = 2,$$

а ова е равенка на хипербола.

247 Б. Да се покаже дека за секој триаголник ABC важи равенството

$$\frac{a^2 \sin(\beta - \gamma)}{\sin\alpha} + \frac{b^2 \sin(\gamma - \alpha)}{\sin\beta} + \frac{c^2 \sin(\alpha - \beta)}{\sin\gamma} = 0$$

Решение. Од $a^2 = 4R^2 \sin^2\alpha$, $b^2 = 4R^2 \sin^2\beta$ и $c^2 = 4R^2 \sin^2\gamma$, каде што R е радиусот на опишаната кружница, доволно е да се покаже дека

$$\sin\alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin\beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin\gamma \sin(\alpha - \beta) = 0. \qquad (1)$$

Но,

$$\sin\alpha \sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta + \gamma) - \cos(\alpha + \beta - \gamma)]$$

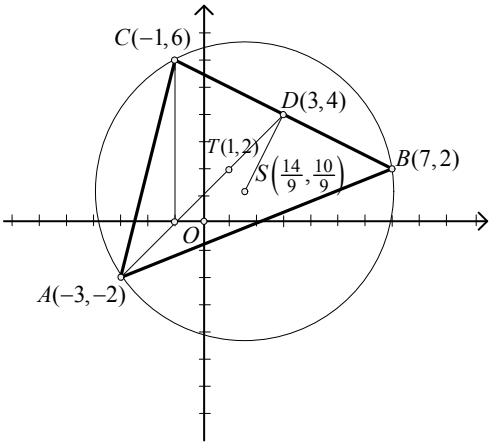
$$\sin\beta \sin(\gamma - \alpha) = \frac{1}{2}[\cos(\beta - \gamma + \alpha) - \cos(\beta + \gamma - \alpha)]$$

$$\sin\gamma \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}[\cos(\gamma - \alpha + \beta) - \cos(\gamma + \alpha - \beta)]$$

па со собирање на овие три равенства се добива равенството (1).

248 Б. Точката $T(1,2)$ е тежиште на триаголникот ΔABC, точката $D(3,4)$ е средина на страната BC, а $S\left(\frac{14}{9},\frac{10}{9}\right)$ е центар на опишаната кружница на триаголникот ABC. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC.

Решение. Од својството на тежиштето имаме $\overline{AT}:\overline{TD}=2:1$. Според тоа, $A(-3,-2)$. Значи, квадратот на радиусот на опишаната кружница на триаголникот ΔABC е $r^2=\overline{AS}^2=\frac{2465}{81}$, а равенката на кружницата гласи



$$(9x-14)^2+(9y-10)^2=2465. \qquad (1)$$

Коефициентот на правецот на симетралата DS на страната BC е $k=2$. Затоа, коефициентот на правецот на страната BC е $k'=\frac{1}{k}=-\frac{1}{2}$, а нејзината равенка гласи

$$x+2y-11=0 \qquad (2)$$

Со решавање на системот равенки (1) и (2) добиваме $B(7,2)$ и $C(-1,6)$.

XVI регионален натпревар - 1993 година

I година

249. Два работника со постојано темпо на работа можат да завршат една работа за 30 дена. По 6 дена заедничка работа, првиот работник се откажува, а вториот ја завршува работата за 40 дена од денот на откажувањето на првиот работник. За колку дена би ја завршил првиот работник истата работа ако тој остане сам по 6 дена заедничка работа?

Решение. Нека првиот работник сам ја завршува целата работа за a дена, а вториот за b дена. Тогаш $x=\frac{1}{a}$ е делот од работата што првиот работник ја завршува за еден ден, а $y=\frac{1}{b}$ е делот од работата што вториот работник ја завршува за еден ден. Бидејќи целата работа двајцата работници ја завршуваат за 30 дена, добиваме дека

$$30x+30y=1. \qquad (1)$$

Од друга страна, бидејќи по 6 дена заедничка работа, вториот работник работи уште 40 дена за да ја доврши работата, добиваме дека

$$6x+6y+40y=1. \qquad (2)$$

Решавајќи го системот линеарни равенки (1) и (2), се добива дека

$$x=\frac{1}{75}, \qquad y=\frac{1}{50}, \qquad (3)$$

т.е. првиот работник сам целата работа ја завршува за 75 дена, а вториот за 50.

Со z да го означиме бројот на денови потребни првиот работник да ја доврши работата по 6 дена заедничка работа. Тогаш

$$6x+6y+zx=1, \qquad (4)$$

Заменувајќи ги вредностите на x и y од (3) во (4) се добива $z=60$. Значи, на првиот работник би му биле потребни 60 дена додатна работа за да ја заврши работата по 6 дена заедничка работа.

250. На една кружница се нанесени 1993 точки при што една од нив е обоена црвено, а сите други сино. Дадените точки определуваат разни многуаголници, впишани во кружницата, при што ако едно од темињата на многуаголникот е црвената точка, многуаголникот е црвен, а ако сите темиња на многуаголникот се сини и многуаголникот е син. Дали постојат повеќе црвени или сини многуаголници и зошто? (При решавањето да не се земаат предвид многуаголниците кај кои што постои сечење на несоседни страни.)

Решение. Да разгледаме еден син многуаголник. Темињата на овој многуаголник заедно со црвеното теме определуваат црвен многуаголник. На овој начин на секој син n-аголник му придружуваме еден црвен $(n+1)$-аголник. При тоа, различни сини многуаголници определуваат различни црвени многуаголници, бидејќи добиените црвени многуаголници се разликуваат во своите сини темиња. Значи, постојат барем онолку црвени многуаголници колку што постојат сини. Од друга страна, црвените триаголници не соодветствуваат на наведениот начин на ниту еден син многуаголник, па значи, постојат повеќе црвени многуаголници отколку сини.

251 А. Да се определат сите парови цели броеви x и y кои што се решенија на равенката $(x+y+1993)^2=x^2+y^2+1993^2$.

Решение. Имаме

$$(x+y+1993)^2=x^2+y^2+1993^2,$$

$$x^2+y^2+1993^2+2xy+2\cdot 1993x+2\cdot 1993y=x^2+y^2+1993^2,$$

$$xy+1993x+1993x=0, \qquad (x+1993)(y+1993)=1993^2$$

Имајќи во предвид дека 1993 е прост број, а x и y се цели броеви од последната равенка се добиваат следните шест системи линеарни равенки:

$$\begin{cases} x+1993=1 \\ y+1993=1993^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+1993=1993^2 \\ y+1993=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+1993=1993 \\ y+1993=1993 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1993=-1 \\ y+1993=-1993^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+1993=-1993^2 \\ y+1993=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+1993=-1993 \\ y+1993=-1993 \end{cases}.$$

чии што решенија се паровите:

$(-1992,3970056)$, $(3970056,-1992)$, $(0,0)$,

$(1994,-3974042)$, $(-3974042,-1994)$, $(-3986,3986)$.

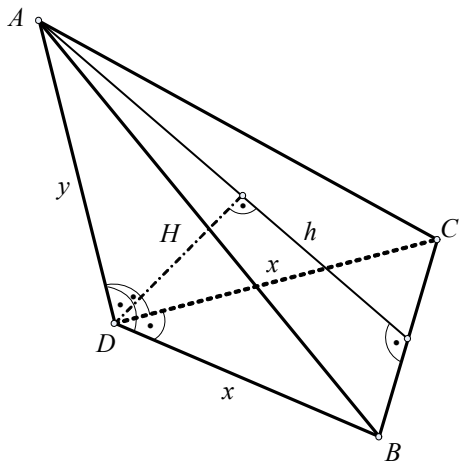
252 А. Нека $ABCD$ е тристрана пирамида при што сите три агли кај темето D се прави. Да се пресмета висината на пирамидата спуштена од темето D, ако се дадени должините на рабовите $\overline{AB}=\overline{AC}=5$ и $\overline{BC}=4\sqrt{2}$.

Решение. Триаголниците ABD и ACD се складни, бидејќи се правоаголни триаголници со теме во D, заедничка катета AD и еднакви хипотенузи $\overline{AB}=\overline{AC}$. Од складноста на овие триаголници, добиваме дека $\overline{BD}=\overline{CD}$. Ќе ја означиме ова должина со x. Триаголникот BCD е правоаголен со теме во D. Според Питагоровата теорема, за неговите страни важи $x^2+x^2=(4\sqrt{2})^2$, од каде што се добива $x=4$.

Да ја означиме должината на работ AD со y. Триаголникот ADB е правоаголен со теме во D. Според Питагоровата теорема, за неговите страни важи $x^2+y^2=5^2$, од каде што се добива $y=3$.

Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак со теме во A, висината спуштена од темето A кон основата BC (чија што должина ја означуваме со h) истата ја преполовува. Според Питагоровата теорема, добиваме

$$h=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}\ .$$



Да ја означиме непознатата должина на висината на пирамидата со H. Волуменот на пирамидата е

$$V=\frac{1}{3}P_{ABC}H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}\cdot H=\frac{2}{3}\sqrt{34}\cdot H\ .$$

Од друга страна, бидејќи аглите кај темето D се прави, волуменот на пирамидата е

$$V=\frac{1}{3}\cdot P_{BCD}\cdot y=\frac{1}{6}x\cdot x\cdot y=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 4\cdot 3=8.$$

Бидејќи, е $B=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{34}\cdot H$, добиваме дека $H=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6}{17}\sqrt{34}$.

253 Б. Да се скрати алгебарскиот рационален израз

$$A=\frac{x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3}{2x^3+x^2y-4xy^2-3y^2}.$$

Решение. Да го разложиме броителот на множители:

$$x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3=x^3+x^2+x^2y++2x^2y+2xy+2xy^2+xy^2+y^2+y^3=$$
$$=x^2(x+1+y)+2xy(x+1+y)+y^2(x+1+y)=(x+y)^2(x+1+y)$$

Да се обидеме сега да го разложиме именителот на множители од кои што едниот множител е $x+y$:

$$2x^3+x^2y-4xy^2-3y^2=2x^3+2x^2y-x^2y-x^2y-3xy^2-3y^2=2x^2(x+y)-xy(x+y)-3y^2(x+y)=$$
$$=(x+y)(2x^2-xy-3y^2)$$

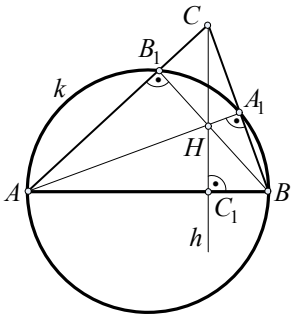
Полиномот $2x^2-xy-3y^2$ го разложуваме на множители

$$2x^2-xy-3y^2=2x^2+2xy-3xy-3y^2=2x(x+y)-3y(x+y)=(x+y)(2x-3y)\ .$$

Конечно, добиваме $A=\frac{(x+y)^2(x+y+1)}{(x+y)^2(2x-3y)}=\frac{x+y+1}{2x-3y}$.

254 Б. Нека во рамнината е дадена кружница k и на неа се нанесени две дијаметрално спротивни точки A и B. Во рамнината е дадена и точка C која што не лежи на кружницата k ниту на правата AB. Само со помош на линијар да се конструира нормала од точката C кон правата AB.

Решение. Конструкција:



1° Повлекуваме прави AC и BC; нека $AC \cap k = B_1$ и $BC \cap k = A_1$.

2° Ги повлеуваме правите AA_1 и BB_1; нека $AA_1 \cap BB_1 = H$.

3° Правата CH е бараната нормала.

Доказ. Навистина, по конструкција, точките A_1 и B_1 лежат на кружница k, па, според Талесовата теорема, ΔAB_1B и ΔAA_1B се правоаголни со прави агли во B_1 и A_1 соодветно. Со други зборови, AA_1 и BB_1 се висини на триаголникот ABC спуштени кон страните BC и AC соодветно, па значи точката H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Бидејќи правата CH минува низ ортоцентарот на триаголникот ABC и низ темето C, јасно е дека таа е нормална на страната AB на триаголникот ABC.

Досегашната дискусија (а и конструкцијата) важи само ако $A_1 \neq B$ и $B_1 \neq A$. Но, доколку, на пример важи $A_1 = B$, тогаш правата CB е тангента на кружницата k во точката B, па значи е нормална на дијаметарот AB.

II година

255. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, каде што p е произволен реален параметар . За која вредност на параметарот p важи $x_1^4 + x_2^4 = 2 + \sqrt{2}$.

Решение. Според Виетовите врски имаме

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1x_2 = -\frac{1}{2p^2}.$$

Од друга страна $(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_2^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^3$, од каде што

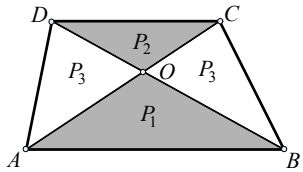
$$x_2^4 + x_1^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1^2x_2^2(x_1 + x_2) + 6(x_1x_2)^2 = 2 + p^4 + \frac{1}{2p^4}.$$

Од равенката $2 + p^4 + \frac{1}{2p^4} = 2 + \sqrt{2}$, добиваме $\left(p^2 - \frac{1}{\sqrt{2}p^2}\right)^2 = 0$, т.е. $p = \pm\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

256. Нека O е пресечната точка на дијагоналите на трапезот $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, а P_1 и P_2 се плоштините на триаголниците ABO и CDO соодветно. Да се изрази плоштината на трапезот $ABCD$ преку плоштините P_1 и P_2.

Решение. Триаголниците ABC и ABD имаат еднакви плоштини, бидејќи имаат заедничка основа и еднакви висини. Според тоа, од $P_{AOD} = P_{ABD} - P_1$ и $P_{BCO} = P_{ABC} - P_1$, се добива $P_{ADO} = P_{BCO} = P_3$.

Бидејќи триаголникот ADO и ABO имаат еднакви висини, односот на нивните плоштини е еднаков на односот на нивните основи, т.е.



$$P_3 : P_1 = \overline{OD} : \overline{OB}. \qquad (1)$$

Аналогно, за плоштините на триаголниците CDO и CBO важи

$$P_2 : P_3 = \overline{OD} : \overline{OB}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива $P_3 = \sqrt{P_1 P_2}$, па за плоштината на трапезот добиваме

$$P = P_1 + 2P_3 + P_2 = P_1 + 2\sqrt{P_1 P_2} + P_2 = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

257 А. Пресметај ја вредноста на збирот

$$S = \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1993}, \ i \text{ е имагинарна единица.}$$

Решение. Да ставиме $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Лесно се проверува дека $z^2 = i$. Од тука се добива

$$S = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{1993} = z(1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{1992}) + (z^2 + z^4 + \ldots + z^{1992}) = z + (z+1)(z^2 + z^4 + \ldots + z^{1992}) =$$
$$= z + (z+1)(i + i^2 + \ldots + i^{996}) = z + z(z+1)[(i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \ldots + (i-1-i+1)] = z$$

258 А. Нека равенката $ax^2 + bx + c = 0$, каде што $a \neq 0$, нема реални решенија. Да се определи знакот на c, ако се знае дека $a + b + c < 0$.

Решение. Според условот на задачата, квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ нема реални нули, па значи $f(x) < 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ или $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Но $f(1) = a + b + c < 0$, па значи мора $f(0) = c < 0$.

259 Б. Да се упрости изразот

$$A = \left(1 + \frac{1+i}{2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^4\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^8\right), \ i \text{ е имагинарна единица.}$$

Решение. Имаме $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{i}{2}$, $\left(\frac{1+i}{2}\right)^4 = -\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1+i}{2}\right)^8 = \frac{1}{16}$, па, значи

$$A = \left(1 + \frac{1+i}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right) = -\frac{255}{256}(1+i).$$

260 Б. Да се определат првите 1993 цифри по децималната запирка на бројот $\sqrt{0{,}9999...9}$, каде што во децималниот запис на бројот под корен се искористени 1993 деветки.

Решение. Да ставиме $a = 0{,}999...9$. Бидејќи важи $0 < a < 1$, добиваме дека $0 < \sqrt{a} < 1$. Од последните две неравенства се добива

$$0 < a = \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a} < 1,$$

т.е. $0 < a < \sqrt{a} < 1$ од каде што следува дека првите 1993 цифри по децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$ се деветки.

III година

261. Не користејќи таблици ниту калкулатор, да се пресмета остриот агол α ако се знае дека $\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

Решение. Имаме

$$\operatorname{ctg}\alpha = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{2\sin\frac{105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ}{2}}{2\sin\frac{15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{15^\circ}{2}$$

Да забележиме дека при кратењето го користиме фактот што

$$\sin\frac{105^\circ}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{105^\circ}{2}\right) = \cos\frac{75^\circ}{2}.$$

Бидејќи α е остар агол и $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}7^\circ 30'$, добиваме $\alpha = 7^\circ 30'$.

262. Да се реши равенката $\log_{3x+4}(2x+1)^2 + \log_{2x+1}(6x^2+11x+4) = 4$.

Решение. За основите на логаритмите да бидат позитивни треба $3x+4>0$ и $2x+1>0$, од каде што се добива дека $x > -\frac{1}{2}$. За ваквите вредности на x, $2x+1$ и $6x^2+11x+4 = (2x+1)(3x+4)$ се, исто така, позитивни. Значи, равенката е осмислена само за $x > -\frac{1}{2}$. По ред имаме:

$$\log_{3x+4}(2x+1)^2 + \log_{2x+1}(6x^2+11x+4) = 4$$
$$2\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(2x+1)(3x+4) = 4$$
$$\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(3x+4) = 3$$
$$\log_{3x+4}(2x+1) + \frac{1}{\log_{3x+4}(2x+1)} = 3.$$

Воведуваме смена $\log_{3x+4}(2x+1) = t$ и ја добиваме равенката $2t + \frac{1}{t} = 3$, чии што решенија се 1 и $\frac{1}{2}$. Заменувајќи ги овие вредности за t во направената смена, се добиваат решенија за x и тоа $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ и $x_3 = \frac{3}{4}$. Од нив само за третата вредност на x равенката е осмиследна. Значи, единственото решение на дадената равенка е $x = \frac{3}{4}$.

263 А. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви и $x_1 + x_2 + ... + x_n > n$. Докажи дека $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 > x_1 + x_2 + ... + x_n$

Решение. Нека $x_i = 1 + y_i$ за $i = 1, 2, ..., n$. Од тука се добива

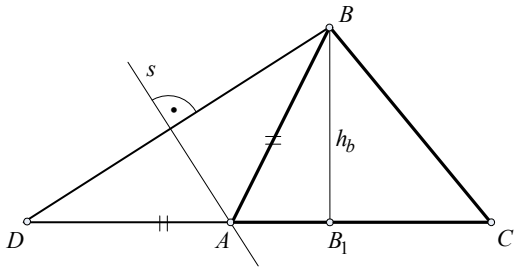
$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n + y_1 + y_2 + ... + y_n.$$

Од условот $x_1 + x_2 + ... + x_n > 0$ добиваме $y_1 + y_2 + ... + y_n > 0$.

Од друга страна, за квадратите на x_i важи $x_i^2 = (1 + y_i)^2 = 1 + 2y_i + y_i^2$, (за $i = 1,2,3,...,n$) па значи

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = n + 2(y_1 + y_2 + ... + y_n) + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 \geq n + 2(y_1 + y_2 + ... + y_n) \geq$$
$$\geq n + y_1 + y_2 + ... + y_n > x_1 + x_2 + ... + x_n .$$

264 А. Да се конструира ΔABC, ако се познати должините $\overline{BC} = a$, $\overline{BB_1} = h_b$ (висината спуштена од темето B, со подножје во B_1) и $\overline{AC} + \overline{AB} = b + c$. Да се изврши дискусија за постоењето на решенија, како и за нивниот број, во зависност од дадените должини.



Решение. Анализа. Нека ΔABC е бараниот триаголник. Триаголникот BB_1C може да се конструира, бидејќи е правоаголен триаголник со познати катета и хипотенуза. Точката A лежи на правата $p = CB_1$. На правата CB_1 може да се определи точката D, така што

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = b + c .$$

Да го разгледаме триаголникот BAD. Бидејќи $\overline{AD} = b + c - \overline{CA} = c = \overline{AB}$, добиваме дека триаголникот BAD е рамнокрак со теме во A и основа BD. Значи, темето A лежи на симетралата на страната BD. Од тука следува дека темето A е во пресекот на правата $p = CB_1$ и симетралата на страната BD.

Дискусија. Јасно е дека за да постои решение мора да биде исполнето $h_a \leq a < b + c$ (ова важи за секој триаголник).

Нека $h_a < a < b + c$. Бидејќи точката D можеме да ја конструираме на правата CB_1 мерејќи го растојанието $b + c$ кон точката B_1, но и во спротивна насока, јасно е дека задачата има две решенија и тоа во првиот случај аголот кај темето C е остар, а во вториот аголот кај темето C е тап.

Ако $h_a = a < b + c$, тогаш бараниот триаголник е правоаголен со теме во C и точките C и B_1 се совпаѓаат. Во овој случај правата p на која што лежат точките A и D се добива како нормала на правата BB_1 во точката B_1. Понатамошната конструкција е иста како и во претходниот случај, со тоа што е сеедно на која страна ќе го нанесеме растојанието $b + c$ за да ја определиме точката D, т.е. двата добиени триаголници се складни.

Конструкцијата и доказот се јасни од анализата и дискусијата.

265 Б. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти при што $|P(3)| = |P(7)| = 1$. Докажи дека $P(x)$ нема целобројни корени.

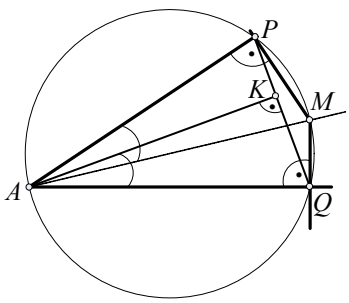
Решение. Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_\circ$, каде што a_i се цели броеви за $0 \leq i \leq n$. Нека b и c се произволни цели броеви. Тогаш

$$P(b)-P(c)=a_n(b^n-c^n)+a_{n-1}(b^{n-1}-c^{n-1})+...+a_1(b-c)=(b-c)M\ ,$$

каде M е цел број. Значи, $b-c$ е делител на $P(b)-P(c)$.

Да претпоставиме дека d е целоброен корен на полиномот $P(x)$. Според претходната дискусија $7-d$ мора да е делител на $P(7)-P(d)=\mp 1$, од каде што се добива дека $d=6$ или $d=8$. Од друга страна, $3-d$ мора да е делител на $P(3)-P(d)=\mp 1$, од каде што се добива дека $d=2$ или $d=4$. Поради ова гледаме дека не постои целоброен корен на полиномот $P(x)$.

266 Б. Од произволна точка M, што се наоѓа во внатрешноста на даден остар агол со теме во A, се спуштени нормали MP и MQ кон краците на аголот, при што P и Q лежат на краците на аголот. Од темето A е спуштена нормал AK кон PQ, така што K лежи на правата PQ. Докажи дека $\measuredangle PAK=\measuredangle MAQ$.



Решение. Нека k е кружница со дијаметар AM. Точките P и Q лежат на кружницата k, бидејќи $\measuredangle APM=\measuredangle AQM=90^\circ$. Тогаш

1) $\measuredangle MAQ=\measuredangle MPQ$, (како периферски агли над MQ);

2) $\measuredangle PAK=90^\circ-\measuredangle APK$;(бидејќи $MP\perp AP$)

3) $\measuredangle MPQ=90^\circ-\measuredangle APK$;(бидејќи $MP\perp AP$)

Од (2) и (3) следува $\measuredangle PAK=\measuredangle MPQ$, па од 1) имаме $\measuredangle PAK=\measuredangle MAQ$.

IV година

267. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем со почеток O. Точките A и B се дадени со своите координати $A(a,0)$ и $B(-a,0)$, при што $a>0$. На нормалата на x-оската во A, дадена е произволна точка C, а точката D се наоѓа на нормалата на x-оската во B, така што аголот COD е прав. Да се определи и испита геометриското место на точки определено со пресеците на правите BC и AD.

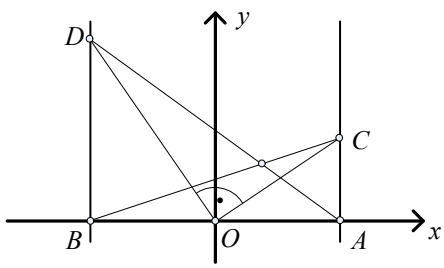
Решение. Нека равенката на правата OC е $y=kx$, каде што k е произволен параметер. Бидејќи правата OD е нормална на правата OC нејзината равенка е

$$OD:\qquad y=-\frac{1}{k}x\ .$$

Од тука лесно се добиваат координатите на точките C и D, т.е.

$$C(a,ka)\qquad \text{и}\qquad D\left(-a,\frac{1}{k}a\right).$$

Равенките на правите AD и BC се



$$AD: \quad y=-\frac{1}{2k}(x-a) \qquad \text{и} \qquad BC: \quad y=\frac{k}{2}(x+a).$$

(1)

Координатите на точката $AD \cap BC$ се добиваат со решавање на системот (1) , што значи меѓусебна зависност на координатите на пресечната точка се добиваат со елиминација на параметарот k од системот (1).

Од равенката на BC се добива $k=\frac{2y}{x+a}$, па со замена на равенката на AD, се добива

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е елипса чија што голема оска е AB, а малата оска е половина од големата.

Од ова елипса треба да се исклучат точките A и B, бидејќи ако пресекот на правите AD и BC лежат на правата AB, тогаш и точките D и C лежат на правата AB, па тогаш аголот COD не може да е прав.

268. Да се најдат оние $x \in [0, 2\pi]$, кои што ја задоволуваат неравенката

$$2\cos x \le |\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|$$

Решение. Да забележиме прво дека неравенката е осмислена за секоја вредност на x.

Ако $\cos x<0$, левата страна на неравенката е негативна, а десната е ненегативна, па значи неравенката е задоволена за сите x за кои што $\cos x<0$, т.е. за сите $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Нека $\cos x \ge 0$, т.е. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Во тој случај и двете страни на неравенката се негативни, па по квадрирањето насоката на неравенството се менува, и добиваме

$$4\cos^2 x \le 2-2\sqrt{\cos^2 2x}$$
$$2\cos^2 2x \le 1-|\cos 2x|$$
$$|\cos 2x| \le -\cos 2x$$

Последната неравенка е очигледно задоволена за сите x за кои што $\cos 2x \le 0$, па водејќи сметка дека $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, добиваме дека $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Заедно со другите решенија (кога $\cos x<0$), добиваме дека $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

269 А. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е аритметичка прогресија со разлика d. Да се пресмета

$$S_n = a_1^2 + a_4^2 + a_7^2 + \ldots + a_{3n-2}^2 - a_2^2 - a_5^2 - \ldots - a_{3n-1}^2,$$

т.е. да се изрази S_n преку a_1, d и n.

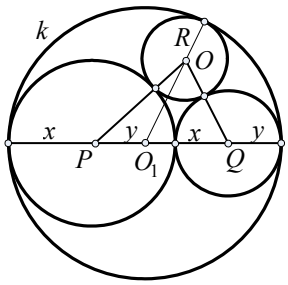
Решение. Имаме

$$S_n = a_1^2 + a_4^2 + a_7^2 + \ldots + a_{3n-2}^2 - a_2^2 - a_5^2 - a_8^2 - \ldots - a_{3n-1}^2 = a_1^2 - a_2^2 + a_4^2 - a_5^2 + \ldots + a_{3n-2}^2 - a_{3n-1}^2 =$$
$$= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_4 - a_5)(a_4 + a_5) + \ldots + (a_{3n-2} - a_{3n-1})(a_{3n-2} + a_{3n-1}) =$$
$$= -d(a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{3n-2} + a_{3n-1}) = -d(a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{3n-2} + a_2 + a_5 + \ldots + a_{3n-1}) =$$
$$= -d\left[(2a_1 + (n-1)3d)\cdot\frac{n}{2} + (2a_2 + (n-1)3d)\cdot\frac{n}{2}\right] = -dn(2a_1 + (3n-2)d)$$

270 А. Две кружници, со радиуси x и y, кои што се допираат однадвор, ја допираат кружницата $k_1(O_1, R_1)$ одвнатре во две нејзини дијаметрално спротивни точки. Кружницата $k(O,R)$ ги допира сите три кружници. Докажи дека:

а) $xy = \dfrac{RR_1^2}{R + R_1}$

б) $R \le \dfrac{R_1}{3}$. Во кој случај се достигнува равенство?



Решение. Нека точките P и Q, кои што лежат на еден дијаметар на k_1, се центри на двете впишани кружници. Нивните радиуси се x и y, соодветно.

Тогаш $x + y = R_1$, $\overline{O_1P} = R_1 - x = y$, $\overline{O_1Q} = R_1 - y = x$, $\overline{OP} = R + x$, $\overline{OQ} = R + y$ и $\overline{O_1O} = R_1 - R$. Имајќи предвид дека

$$\measuredangle PO_1O + \measuredangle QO_1O = 180^\circ,$$

добиваме $\cos\measuredangle PO_1O + \cos\measuredangle QO_1O = 0$, од каде што, користејќи ја косинусната теорема, се добива

$$\frac{(R_1 - R)^2 + y^2 - (R + x)^2}{2y(R_1 - R)} + \frac{(R_1 - R)^2 + x^2 - (R + y)^2}{2x(R_1 - R)} = 0.$$

По средувањето на последниот израз, се добива $xy = \dfrac{RR_1^2}{R + R_1}$. Користејќи го неравенството $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$, кое што важи за сите реални броеви (а еднаквоста е исполнета само за $x = y$).

Но, $x + y = R_1$, па затоа $\dfrac{RR_1^2}{R + R_1} \le \dfrac{R_1^2}{4}$, од каде што се добива бараното неравенство. Равенство важи само во случај кога $x = y$, т.е. двете впишани кружници се еднакви и двете имаат радиуси $\dfrac{R_1}{2}$.

271 Б. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се членови на аритметичка прогресија. Докажи дека

$$S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

Решение. За произволно $k \ge 1$ важи

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{d}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right),$$

Од каде што се добива

$$S = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{d} \cdot \frac{(n-1)d}{a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

272 Б. За кој природен број n изразот $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n}$ прима најмала вредност?

Решение. Нека $\frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \ldots \cdot \lg n}{10^n} = a_n$. Тогаш $a_n = a_{n-1}\frac{\lg n}{10}$. Од тука е јасно дека:

ако $\frac{\lg n}{10} < 1$, тогаш $a_n < a_{n-1}$

ако $\frac{\lg n}{10} = 1$, тогаш $a_n = a_{n-1}$ и

ако $\frac{\lg n}{10} > 1$, тогаш $a_n > a_{n-1}$.

Равенство е исполнето само за $n = 10^{10}$; за $n < 10^{10}$ важи $a_n < a_{n-1}$, а за $n > 10^{10}$ важи $a_n > a_{n-1}$.

Значи, низата $a_1, a_2, \ldots$ опаѓа до $n = 10^{10} - 1$, за $n = 10^{10} - 1$ и $n = 10^{10}$ се добиваат еднакви членови, а потоа низата расте. Најмалата вредност на a_n се добива значи за $n = 10^{10}$ и $n = 10^{10} - 1$.

XVII Регионален натпревар - 1994

I година

273. Еден селанец одејќи по пат ги сретнал Итар Пејо и Насрадин Оџа. Еве го нивниот разговор:

Селанецот: -Добар ден

Пејо и Насрадин: -Добар ден.

Селанецот: - Кој ден е денес?

Насрадин: -Утре ќе зборувам вистина.

Селанецот: -А, кој ден е утре?

Насрадин: -Утре не е недела.

Селанецот се врти кон Пејо: -Пејо, дај барем ти кажи кој ден е денес?

Пејо: прозборува нешто и оди.

Селанецот се врти кон Насрадин: -Ете ти сега, не слушнав добро. Што рече Пејо?

Насрадин: -Рече дека не е понеделник.

Селанецот: -Е, сега знам кој ден е денес. Ајде догледање.

Можете ли да утврдите кој ден во неделата е воден разговорот, ако го знаете она што и селанецот го знае, а тоа е дека Пејо лаже во понеделник, вторник и среда, а другите денови зборува вистина, додека Насрадин лаже во четврток, петок и сабота, а другите денови зборува вистина?

Решение. Со оглед на условите од задачата, својата прва изјава Насрадин не може да ја даде во среда, затоа што во среда зборува вистина, а изјавата би била лажна и не може да ја даде во сабота, затоа што во сабота лаже, а изјавата би била вистинита. Во сите други денови оваа изјава е можна.

Втората изјава Насрадин не може да ја даде во четврток и петок, затоа што во тие денови лаже, а изјавата би била вистинита. Во сите други денови изјавата на Насрадин е можна.

Значи, разговорот е воден во недела, понеделник или вторник. Во сите овие денови Насрадин зборува вистина, па значи Пејо навистина рекол дека е понеделник.

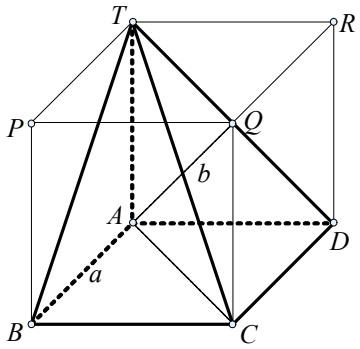
Но, Пејо во недела не би рекол дека е понеделник, затоа што во недела не лаже, а во понеделник не би рекол дека е понеделник, затоа што тогаш лаже.

Значи, останува единствената можност разговорот да е воден во вторник. Лесно се проверува дека во вторник ниту една од дадените изјави не е невозможна, па значи вторник е бараниот ден.

274. Нека $ABCDT$ е пирамида чија основа $ABCD$ е квадрат и работ TA е нормален на основата.

а) Докажи дека околу пирамидата може да се опише сфера.

б) Ако плоштината на опишаната сфера е 11π, а основниот раб е 1, да се определи волуменот на пирамидата.



Решение. а) Во темињата B, C и D повлекуваме нормали на основата и на нив избираме точки P, Q и R соодветно, така што $ABCDTPQR$ е квадар. Околу секој квадар може да се опише сфера со центар во пресекот на главните дијагонали на истиот. Во дадениот случај центарот е во пресекот на дијагоналите AQ и TC. Сферата опишана околу $ABCDTPQR$ е опишана и околу пирамидата $ABCDT$.

б) Да ја означиме со r должината на радиусот на опишаната сфера, со P плоштината на истата, со h должината на работ TA, со a должината на основниот раб и со b должината на работ TC.

Според првиот дел на задачата, центарот на сферата е на половина на работ TC, па, значи, $b = 2r$. Бидејќи работ TA е нормален на основата, според Питагоринатa теорема, добиваме $h^2 = b^2 - (a\sqrt{2})^2$, односно $h^2 = 4r^2 - 2a^2$. Бидејќи $P = 4r^2\pi$ и $P = 11\pi$, добиваме $4r^2 = 11$, од каде што добиваме $h^2 = 11 - 2 = 9$, односно $h = 3$. За волуменот на пирамидата $ABCDT$, конечно, добиваме $V = \frac{1}{3}a^2h = 1$.

275 А. Некоја стока, која чини 455 денари, е платена со монети од 5 денари и банкноти од 10 и 50 денари, при што вкупно се дадени 23 монети и банкноти. Бројот на монетите од 5 денари е помал од бројот на банкнотите од 10 денари. Со колку монети од 5 денари и банкноти од 10 и 50 денари е платена стоката?

Решение. Го означуваме бројот на монети од 5 денари со x , а броевите на банкноте со 10 и 50 денари со y и z соодветно.

За избрано z, најмала можна сума што може да се плати со расположивите банкноти и монети е $50z+(23-z)\cdot 5=45z+115$. Ако $z\geq 8$ оваа сума ќе ја надмине сумата од 455 денари, па значи, $z\leq 7$.

Слично, за избрано z, најголема сума што може да се плати е $50z+(23-z)\cdot 10$ односно $40z+230$. Ако $z\leq 5$ оваа сума ќе биде помала од 455 денари, па, значи, $z\geq 6$.

Нека $z=7$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases}5x+10y=105\\ x+y=16\end{cases}$$

чие што решение $x=11$, $y=5$ не ги задоволува условите од задачата, бидејќи е познато дека $x<y$.

Нека $z=6$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases}5x+10y=155\\ x+y=17\end{cases}$$

чиешто мрешение е $x=3, y=14$. Ова решение ги задволува сите услови на задачата.

Значи, стоката е платена со 3 монети од 5 денари, 14 банкноте од 10 денари и 6 банкноте од 50 денари.

276 А. На мудрецот S му го кажале само збирот на три последователни природни броеви, а на мудрецот P само нивниот производ, но ниеден од нив не бил во состојба да утврди кои се трите почетни броеви.

”Ако јас знаев, рекол” S, ”дека твојот број е поголем од мојот, ќе ги определев броевите”.

”Но мојот број е помал од твојот” заклучил P, и ”броевите се ..., ... и ...”.

Определи ги трите броеви.

Решение. Да ја означиме сумата на трите броеви со s , а производот со p . Јасно е дека $s\geq 3$.

Мудрецот S ја знае сумата s , но таа е таква да тој не може да ги одреди броевите знаејќи ја само оваа сума без дополнителна информација.

Ако $s=3$, трите дадени броеви се еднакви на 1 , во тој случај мудрецот S веднаш би ги одредил броевите. Значи, s не е 3 .

Ако $s=4$, трите броеви се $2,1$ и 1 , но и во овој случај мудрецот S веднаш би ги одредил броевите. Значи, s не е 4 .

Ако $s=5$, трите броеви се $3,1$ и 1, или, пак $2,2$ и 1. Во првиот случај $p=3$, а во вториот $p=4$. Во двата случаи $p<s$; што значи дека S во овој случај знае дека производот е помал од сумата и не би ја дал изјавата дадена во текстот. Занчи, s не е 5.

Нека $s\geq 7$. Освен другите можности, трите броеви можат да бидат $2,2$ и $s-4$, како и $2,1$ и $s-3$. Во првиот случај:

$p=4s-16=s+3s-16\geq s+211-16=s+5>s$, а во вториот:

$p=2s-16=s+s-16\geq s+7-6=s+1>s$.

Во двата случаи производот е поголем од збирот, па мудрецот S дури и ако знае дека производот е поголем од збирот, не може да одреди кои се трите броеви (има барем две можности). Значи, $s\leq 6$.

Останува можноста $s=6$. Во овој случај трите броеви се $4,1$ и 1 или $3,2$ и 1 или $2,2$ и 2. Во првиот случај $p=4$, во вториот $p=6$ а во третиот $p=8$. Мудрецот S ги знае овие три можности и доколку знае дека производот е поголем, може да заклучи дека трите дадени броеви се $2,2$ и 2. Значи, $s=6$.

Мудрецот P размислува на претходно изложениот начин и заклучува дека $s=6$. P го знае производот и тврди дека тој е помал од збирот. Значи, $p=4$ и дадените броеви се $4,1$ и 1.

277 Б. Во златарската работилница треба да се направи 5 kg смеса во која односот на количествата на злато и сребро е $22:41$. Во залиха има две смеси. Во едната количествата злато и сребро се наоѓаат во однос $4:5$, а во втората $2:5$. Колку треба да се земе од секоја смеса за да се добие бараната смеса?

Решение. Во новата смеса од $5\,\text{kg}$ треба да има $5\cdot\frac{22}{63}$ kg злато. Да земеме x kg од првата и y kg од втората смеса. Количеството злато што треба да се добие на овој начин е $x\cdot\frac{4}{9}+y\cdot\frac{2}{7}$.

Според условите на задачата го добиваме системот $\begin{cases} x\cdot\frac{4}{9}+y\cdot\frac{2}{7}=5\cdot\frac{22}{63} \\ x+y=5 \end{cases}$ чиешто решение е $x=2$ и $y=3$.

Според тоа, треба да земеме 2 kg од првата и 3 kg од втората смеса.

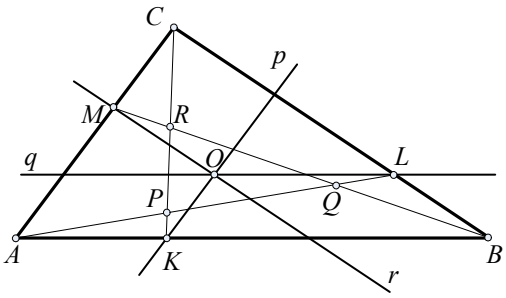
278 Б. Најди ги сите цели броеви m за кои дропката $\dfrac{m^3+1}{m-1}$ е исто така цел број.

Решение. Имаме $\dfrac{m^3+1}{m-1}=m^2+m+1+\dfrac{2}{m-1}$, па $(m-1)\,|\,2$. Од овде се добива дека $m-1\in\{-2,-1,1,2\}$, односно $m\in\{-1,0,2,3\}$.

II година

279. Нека O е внатрешна точка во ΔABC. Понатаму, нека правите p,q и r минуваат низ точката O при што $p\parallel AC$, $q\parallel AB$ и $r\parallel BC$ и нека K,L и

M се пресечните точки на p, q и r со правите AB, BC и AC соодветно. Точките P, Q и R се пресечните точки на правите CK и AL, AL и BM, BM и CK, соодветно. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците AKP, BLQ и CMR е еднаков на плоштината на триаголникот PQR.



Решение. Имаме

$$P_{PQR} = P_{ABC} - P_{ABL} - P_{BCM} - P_{CAK} + P_{AKP} + P_{BLQ} + P_{CMR}. \qquad (1)$$

Претходното важи бидејќи плоштината на PQR може да се пресмета на тој начин што од плоштината на ΔABC ќе се одземат плоштините на ΔABL, ΔBCM и ΔACK, а потоа, бидејќи со ваквото одземање на плоштините на ΔAKP, ΔBLQ ΔCMR се одземени по два пати, истите плоштини се додадат по еднаш.

Триаголниците ABL и ABO имаат иста основа AB и еднаква висина ($q \parallel AB$), па значи $P_{\Delta ABL} = P_{\Delta ABO}$. Аналогно, важи и $P_{\Delta BCM} = P_{\Delta BCO}$, како и $P_{\Delta CAK} = P_{\Delta CAO}$. Но, бидејќи $P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO} = P_{\Delta ABC}$, добиваме $P_{\Delta ABL} + P_{\Delta BCM} + P_{\Delta CAK} = P_{\Delta ABC}$, од каде што со замена во (1) се добива бараното тврдење.

280. Нека a, b и c се позитивни реални броеви при што $a+b+c=1$ и еден корен на равенката $ax^2 + bx + c = x$ е во интервалот $(0, 1)$.

Докажи дека $2a+b>1$.

Решение. Веднаш се гледа дека едно решение на дадената равенка е 1. Да го означиме ова решение со x_1, а другото со x_2. Од виетовите врски имаме $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, а бидејќи $x_1 = 1$, добиваме $x_2 = \frac{c}{a}$. Од двете решенија само x_2 може да се наоѓа во интервалот $(0, 1)$, па значи $\frac{c}{a} < 1$. Оттука добиваме $c < a$ и

$$1 = a+b+c < a+b+a = 2a+b.$$

281 А. Нека a, b и c се комплексни броеви за чиишто модули важи: $|a| = |b| = |c| = 1$. Докажи дека $\left| \frac{ab+bc+ac}{a+b+c} \right| = 1$.

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. За произволни комплексни броеви z и w важи $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$ и $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Користејќи ги овие својства добиваме $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$. Понатаму:

$$|ab+bc+ac|^2=(ab+bc+ac)\overline{(ab+bc+ac)}=(ab+bc+ac)(a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b}+c\cdot\bar{c})=$$
$$=3+a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b+b\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot b+a\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot c$$

$$|a+b+c|^2=(a+b+c)\cdot\overline{(a+b+c)}=3+a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b+b\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot b+a\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot c\ ;$$

и конечно $\left|\dfrac{ab+bc+ac}{a+b+c}\right|^2=1$, од каде што директно следува бараното тврдење.

282 А. Да се одредат реалните решенија на равенката $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=a$ каде што a е произволен реален број. Во зависност од параметарот a да се определи бројот на решенија на равенката и тие да се наведат.

Забелешка: Корените се сметаат за аритметички, т.е. вредностите на корените се ненегативни.

Решение. Јасно е дека равенката нема решение ако $a<0$, затоа што левата страна на равенката никогаш не е негативна. Поради тоа претпоставуваме $a\geq 0$.

Да воведеме смена $\sqrt{x-1}=t$, каде што $t\geq 0$ (поради ненегативноста на корените). Од смената добиваме $x=t^2+1$. Со замена во дадената равенка добиваме:

$$\sqrt{t^2+1+3-4t}=a \Leftrightarrow \sqrt{t^2-4t+4}=a \Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2}=a \Leftrightarrow |t-2|=a \qquad (1)$$

Поради знакот на апсолутна вредност, разгледуваме два случаи:

I. $t\geq 2$. Во овој случај $|t-2|=t-2$ и равенката (1) добива облик $t-2=a$, од каде што $t=a+2$.

Но поради условите $t\geq 0$ и $t\geq 2$, за параметарот a треба да важи $a+2\geq 0$ и $a+2\geq 2$, односно $a\geq -2$ и $a\geq 0$. Значи, $t=a+2$ за $a\geq 0$.

II. $t<2$. Во овој случај $|t-2|=2-t$ и равенката (1) го добива обликот $2-t=a$, од каде што $t=2-a$.

Но, поради условите $t\geq 0$ и $t<2$, за параметарот a треба да важи $2-a\geq 0$ и $2-a<2$, односно $a\leq 2$ и $a>0$. Значи, $t=2-a$ за $a\in(0,2]$.

Се враќаме на смената $\sqrt{x-1}=t$, односно $x=t^2+1$ и конечно добиваме:

-ако $a<0$ равенката нема решение.

-ако $a=0$ равенката има единствено решение $x=5$;

-ако $a\in(0,2]$ равенката има две решенија $x=a^2\pm 4a+5$;

-ако $a>2$ равенката има единствено решение $x=a^2+4a+5$.

283 Б. Нека се a,b и c се комплексни броеви. Докажи дека

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2=|a+b|^2+|b+c|^2+|a+c|^2.$$

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2=z\cdot\bar{z}$. За произволни комплексни броеви z и w важи $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$. Користејќи ги овие својства добиваме:

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a+b+c|^2=a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b}+c\cdot\bar{c}+(a+b+c)\cdot\overline{(a+b+c)}=$$
$$=2a\cdot\bar{a}+2b\cdot\bar{b}+2a\cdot\bar{b}+b\cdot\bar{a}+a\cdot\bar{b}+b\cdot\bar{c}+c\cdot\bar{b}+c\cdot\bar{a}+a\cdot\bar{c}$$

$$|a+b|^2+|b+c|^2+|c+a|^2=(a+b)\overline{(a+b)}+(b+c)\overline{(b+c)}+(c+a)\overline{(c+a)}$$
$$=2a\cdot\overline{a}+2b\cdot\overline{b}+2a\cdot\overline{b}+b\cdot\overline{a}+a\cdot\overline{b}+b\cdot\overline{c}+c\cdot\overline{b}+c\cdot\overline{a}+a\cdot\overline{c}$$

од каде што директно следува тврдењето.

284 Б. Да се определат реалните решенија на равенката

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-2}\,.$$

Забелешка. Корените се сметаат за аритметички, т.е. вредностите на корените се ненегативни.

Решение. Бидејќи $x-1<x+1$ за секој реален број x јасно е дека за секој реален број од дефиниционата област на равенката важи $\sqrt{x-1}<\sqrt{x+1}$, односно $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}<0$. Бидејќи левата страна на равенката е негативна, а десната е ненегативна, дадената равенка нема решение.

III година

285. Да се реши неравенката

$$tg^2x_1+tg^2x_2+...+tg^2x_{997}+ctg^2x_1+ctg^2x_2+...+ctg^2x_{997}\le 1994$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката:

$$(tgx_1-ctgx_1)^2+(tgx_2-ctgx_2)^2+...+(tgx_{997}-ctgx_{997})^2\le 0,$$

од каде добиваме дека за секој $i\in\{1,2,....,997\}$ важи:

$tgx_i-ctgx_i=0$ односно $tgx_i=ctgx_i$.

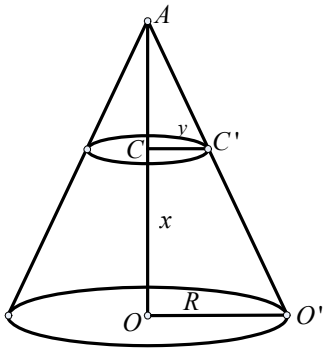
Од последната равенка добиваме дека за $i\in\{1,2,....,997\}$ важи:

$$x_i\in\left\{\tfrac{\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{3\pi}{4}+m\pi/m\in\mathbb{Z}\right\}$$

За ваквите вредности на x_i, всушност во неравенката важи равенство.

286. Прав цилиндар со радиус $r=\sqrt{39}$ и прав конус со радиус $R=9$ имаат еднаква висина $H=15$. На која ненулта висина x, треба да се пресечат цилиндарот и конусот за да новодобиениот цилиндар со висина x и пресечениот конус со висина x имаат еднакви волумени?

Решение. Со y го означуваме радиусот на помалата основа на пресечениот конус со висина x. Од сличноста на триаголниците AOO' и ACC', добиваме



$$\frac{y}{R}=\frac{H-x}{H} \qquad (1)$$

За волуменот на пресечениот конус важи

$$V_k=\frac{R^2\pi H}{3}-\frac{y^2\pi(H-x)}{3}=\frac{\pi}{3}(R^2H-y^2H+y^2x)\,. \qquad (2)$$

Ако од (1) го изразиме y и го замениме во (2) добиваме

$$V_k=\frac{R^2\pi x}{3H^2}(x^2-3Hx+3H^2)\,. \qquad (3)$$

Со изедначување на овој волумен и волуменот на цилиндерот со висина x ја добиваме равенката:

$r^2\pi x = \frac{R^2\pi x}{3H^2}(x^2 - 3Hx + 3H^2)$.

Ако ја поделиме равенкиата со x ($x \neq 0$) и ги замениме дадените вредности за r, H и H, добиваме $x^2 + 45x + 350 = 0$.

Решенијата на последната равенка се 10 и 35, од кои второто не го земаме предвид бидејќи ја надминува висината на дадените цилиндар и конус.

Значи, цилиндарот и конусот треба да се пресечат на висина $x = 10$.

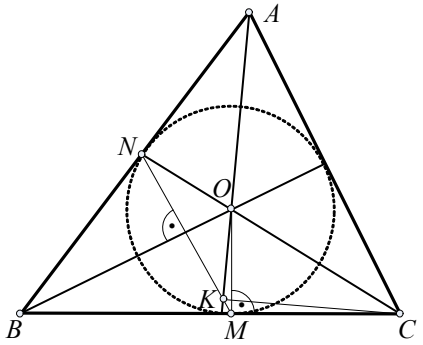
287 А. Да се реши равенката $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$.

Решение. Воведуваме смена $t = 2^x$. Со замена во дадената равенка се добива равенката $t^3 - \frac{8}{t^3} - 6\left(t - \frac{2}{t}\right) = 1$, која што е еквивалентна со равенката $\left(t - \frac{2}{t}\right)^3 = 1$. Од последната равенка се добива $t - \frac{2}{t} = 1$ од каде што $t = -1$ или $t = 2$. Со оглед на направената смена, t е позитивен број, па, значи $t = 2$, од каде што добиваме $x = 1$.

Лесно се проверува дека $x = 1$ е навистина решение на дадената равенка.

288 А. Нека ABC е триаголник, при што $\gamma > \beta$ (со γ е означен аголот кај темето C, а со β аголот кај темето B). Нека O е центарот на впишаната кружница, а M, N и L се точките на страните BC, AB и AC, соодветно, во кои што впишаната кружница ги допира страните на триаголникот. Понатаму, нека K е пресечната точка на правите AO и MN. Докажи дека $\angle AKC$ е прав.

Решение. Аголот $\angle AKC$ е еднаков на аголот $\angle OKC$. Аголот $\angle OMC$ е прав бидејќи е агол меѓуи тангентата и соодветен радиус на впишаната кружница. За да докажеме дека $\angle AKC = \angle OKC$ е прав доволно е да покажеме дека четириаголникот $OKMC$ е тетивен (постои кружница опишана околу $OKMC$), затоа што во тој случај аглите $\angle OKC$ и $\angle OMC$ се еднакви како периферни агли над иста тетива OC.



Ќе покажеме дека $OKMC$ е тетивен на тој начин што ќе докажеме дека

$\angle KOC + \angle KMC = 180^\circ$.

Имаме

$\angle KOC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$	($\angle KOC$ е надворешен за OAC)	(1)
$\Delta BOM \cong \Delta BON$	(признак CAC)	(2)
$BMON$ е делтоид	(директно од (2))	(3)
$MN \perp BO$	(директно од (3)	(4)

$\angle BOM = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ ($\angle BMO = 90^\circ$) (5)

$\angle KMO = \frac{\beta}{2}$ (од (4) и (5)) (6)

$\angle KMC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$ ($\angle OMC = 90^\circ$ и (6)) (7)

$\angle KOC + \angle KMC = 180^\circ$ (од (1), (7) и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)

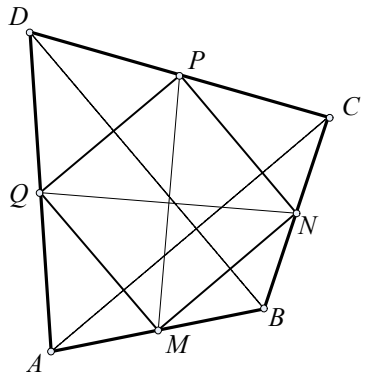
Со тоа доказот е завршен.

289 Б. Да се определат реалните решенија на равенката $8^{\frac{x-3}{2x-7}} \sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{0,5^{4x+3}}} = 1$.

Решение. Имајќи предвид дека $8 = 2^3$ и $0,5 = 2^{-1}$, а во согласност со правилата за степенување и коренување, дадената равенка ја сведуваме на равенката $2^{\frac{x-3}{2x-7}} \cdot 2^{\frac{-4x-3}{3x-3}} = 1$, од каде што добиваме $2^{\frac{x-3}{2x-7}+\frac{-4x-3}{3x-3}} = 1$. Но $2^y = 1$ ако и само ако $y = 0$, па од претходната равенка ја добиваме равенката $\frac{3x-9}{2x-7} + \frac{-4x-3}{3x-3} = 0$, која што се сведува на квадратната равенка $x^2 - 14x + 48 = 0$, чии решенија се $x_1 = 6$ и $x_2 = 8$.

За овие вредности на x, изразите во почетната равенка се дефинирани, а освен тоа за нив равенката е задоволена. Значи, равенката има две реални решенија $x_1 = 6$ и $x_2 = 8$.

290 Б. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Докажи дека дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални, ако и само ако дијагоналите на $MNPQ$ се еднакви.



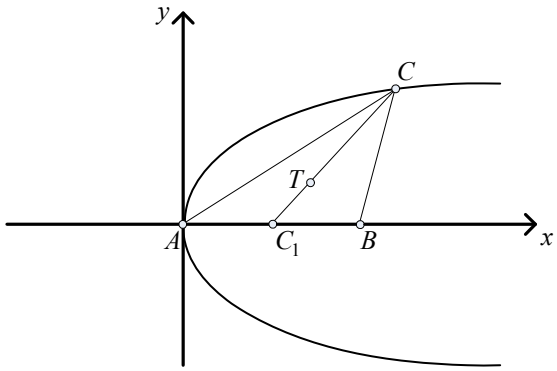
Решение. Ќе покажеме прво дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм. Навистина, MN и PQ се средни линии на триаголниците ABC и ADC, соодветно, па, значи двете се паралелни на AC. Добиваме дека MN, PQ и AC се паралелни. Аналогно се добива дека и NP, QM и BD се паралелни. Оттука е јасно дека $MNPQ$ е паралелограм чии страни се паралелни на дијагоналите на $ABCD$.

Ако дијагоналите на паралелограмот $MNPQ$ се еднакви, тогаш тој паралелограм е правоаголник, од каде што добиваме дека дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални.

IV година

291. Што претставува геометриското место на тежиштата на триаголниците со темиња: A е во темето на параболата $y^2 = 2px$, B во фокусот на параболата и C на дадената парабола?

Решение. Нека $C=(x_1,y_1)$ е произволна точка од параболата $y^2=2py$, различна од $A(0,0)$. Точката C се бира да биде различна од A за да ABC биде триаголник. Нека $T=(x,y)$ е тежиштето на триаголникот ABC. За темето B коешто е во фокусот на параболата $B=\left(\frac{p}{2},0\right)$, а за половината на страната AB имаме $C_1=\left(\frac{p}{4},0\right)$. Бидејќи T ја дели отсечката C_1C во однос $1:2$, добиваме $x=\frac{p+2x_1}{6}$ и $y=\frac{y_1}{3}$, од каде што $x_1=\frac{6x-p}{2}$ и $y_1=3y$. Бидејќи $C(x_1,y_1)$ лежи на параболата, добиваме $9y^2=2p\frac{6x-p}{2}$, од каде што:



$$y^2=2p\left(x-\frac{p}{6}\right) \qquad (1)$$

Значи, бараното геометриско место на точки е парабола дадена во (1), но без темето $\left(\frac{p}{6},0\right)$, затоа што $A\neq Cx$.

292. Докажи дека за секој природен број n, $\cos(nx)$ може да се изрази како полином по $\cos x$ од n-ти степен.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Индукцијата ќе ја спроведуваме по n. Во доказот се користат формулите:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

и

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

За $n=1$ тврдењето е очигледно.

Нека тврдењето важи за секој $n\leq k$ и нека за такви n имаме:

$$\cos(nx)=P_n(\cos x)$$

каде што $P_n(\cos x)$ е полином по $\cos x$ од n-та степен.

За $k+1$ добиваме:

$$\cos((k+1)x)=\cos(kx+x)=\cos(kx)\cdot\cos x-\sin(kx)\cdot\sin x=$$
$$=\cos(kx)\cdot\cos x-\tfrac{1}{2}\cos((k-1)x)+\tfrac{1}{2}\cos((k+1)x)$$

од каде што се добива

$$\cos((k+1)x)=2\cos(kx)\cdot\cos x-\cos((k-1)x)=2P_k(\cos x)\cdot\cos x-P_{k-1}(\cos x)$$

Дадениот израз за $\cos((k+1)x)$ е полином по $\cos x$ од степен $k+1$.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето важи за секој природен број.

293 А. Определи ги сите аритметички прогресии со разлика $d=2$, така што односот $\frac{S_{3n}}{S_n}$ не зависи од n.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија која го задоволува дадениот услов е a_1. Сумата на првите k -членови на оваа прогресија е $S_k = \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1)\cdot 2] = k(a_1 + k - 1)$.

Од условот следува дека за $n=1$ и $n=2$ важи $\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_6}{S_2}$ од каде што ја добиваме равенката $\frac{3(a_1+2)}{a_1} = \frac{6(a_1+5)}{2(a_1+1)}$, чие единствено решение е $a_1 = 1$.

Значи, ако некоја прогресија со разлика 2 го задоволува дадениот услов, тогаш таа има прв член $a_1 = 1$.

Обратно, ако $a_1 = 1$, тогаш

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{3n(1+3n-1)}{n(1+n-1)} = \frac{9n^2}{n^2} = 9,$$

па значи, дадениот однос не зависи од n.

Значи, постои само една таква прогресија и тоа $1,3,5,\ldots$.

294 А. Определи ги сите природни броеви n, за кои постојат три последователни коефициенти во развојот на $(a+b)^n$ кои што формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{k+1}$ се три последователни коефициенти на развојот на $(a+b)^n$, при што $0<k<n$. Потребен и доволен услов да овие три коефициенти формираат аритметичка прогресија е:

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1},$$

од каде што, по средувањето, добиваме:

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0. \qquad (1)$$

Значи, бараните броеви се сите оние $n \in \mathbb{N}$ за кои равенката (1) има барем едно целобројно решение k така што $0<k<n$.

Решенијата на равенката се $k_{1/2} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$.

Бидејќи треба да важи $0<k_1<n$ или $0<k_2<n$, добиваме $-n<\sqrt{n+2}<n$. Условот $-n<\sqrt{n+2}$ е секако исполнет за $n \in \mathbb{N}$, а условот $\sqrt{n+2}<n$ е исполнет за $n \geq 3$.

Обратно, ако $n \geq 3$, тогаш важи $0<k_1<k_2<n$.

За да барем едно решение на равенката (1) биде цел број потребно е $n+2$ да е квадрат на природен број, т.е. $n+2=s^2$ за некој $s \in \mathbb{N}$.

Обратно, ако $n+2=s^2$ за некој $s \in \mathbb{N}$, решенијата на равенката (1) се: $k_{1/2} = \frac{s(s\pm 1)}{2} - 1$, а овие два броја се цели бидејќи $s(s-1)$ и $s(s+1)$ се производи на последователни броеви, па значи, деливи се со 2.

Конечно, заклучуваме дека бараните броеви се: $n = s^2 - 2$, за $s = 3,4,5,\ldots$.

295 Б. Множеството природни броеви е разбиено на множества на следниот начин:

$\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9,10\}$, ...

Нека S_k е збирот на броевите во k-тото множество (множество со k елементи). Докажи дека $S_1 + S_3 + S_5 + ... + S_{2n-1} = n^4$.

Решение. Пред најмалиот природен број во k-тото множество има

$$1 + 2 + 3 + ... + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

броеви, па, значи, најмалиот број во k-тото множество е $\frac{(k-1)k}{2} + 1$. Сумата S_k може да се добие како сума на k членови на аритметичка прогресија со разлика 1 и прв член $\frac{(k-1)k}{2} + 1$. Добиваме: $S_k = \frac{k}{2}\left[2\left(\frac{k(k-1)}{2} + 1\right) + (k-1)\right] = \frac{k^3 + k}{2}$.

Ќе го докажеме даденото тврдење со помош на принципот на математичка индукција.

За $n = 1$ тврдењето важи, бидејќи $S_1 = 1 = 1^4$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = m$, т.е.

$$S_1 + S_3 + S_5 + ... + S_{2m-1} = m^4.$$

Тогаш, за $n = m + 1$, добиваме:

$$S_1 + S_3 + S_5 + ... + S_{2m-1} + S_{2(m+1)-1} = S_1 + S_3 + S_5 + ... + S_{2m-1} + S_{2m+1} =$$

$$= m^4 + \frac{(2m+1)^3 + (2m+1)}{2} = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 = (m+1)^4$$

Според принципот на математичка индукција, тврдењето важи за секој природен број n.

296 Б. Нека $P(x) = (2 + 3x)^{1994}$. Пресметај го збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$, кои стојат пред непарните степени на x.

Забелешка. Крајните резултати треба да бидат дадени во што пократок облик, т.е. не треба да фигурираат суми од голем број на собироци.

Решение. Имаме

$$P(x) = (2+3x)^{1994} = 2^{1994} + \binom{1994}{1} 2^{1993} \cdot 3x + \binom{1994}{2} 2^{1992} \cdot (3x)^2 + ... + \binom{1994}{1993} 2 \cdot 3^{1993} x^{1993} + 3^{1994} x^{1994}$$

Да го означиме збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$ со s, а збирот на сите коефициенти на полиномот $P(x)$ кои стојат пред парните степени на x, со t.

Од развиената форма на $P(x)$ се гледа дека s е еднаков на вредноста на $P(x)$ за $x = 1$, т.е., $s = P(1) = 5^{1994}$.

Да го разгледаме $P(1) + P(-1)$. Во овој збир коефициентите пред парните степени на x се собрани два пати (еднаш кај $P(1)$ и еднаш кај $P(-1)$), додека коефициентите пред непарните степени на x не се воопшто вклучени (односно, при сумирањето се кратат бидејќи се еднакви по апсолутна вредност, но со различни знаци). Значи:

$$t = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{5^{1994} + 1}{2}.$$

XVII регионален натпревар - 1995 година

I година

297. Нека збирот на три реални броја е 0, а збирот на нивните квадрати е 4. Да се пресмета збирот на четвртите степени на трите броја.

Решение. Да ги означиме трите броја со x, y и z. Според условите на задачата, имаме

$$x+y+z=0\,, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=4\,. \tag{2}$$

Ако го квадрираме првото равенство, добиваме:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0\,,$$

од каде добиваме

$$xy+yz+zx=-2 \tag{3}$$

Ако го квадрираме равенството (3), добиваме:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2yz+xy^2z+xyz^2)=4\,,$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)=4\,,$$

од каде заради (1) следува дека:

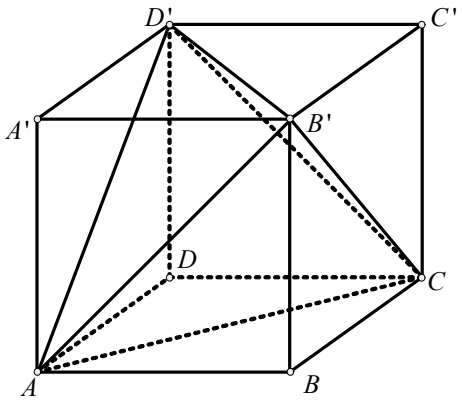
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=4\,, \tag{4}$$

Ако го квадрираме равенството (2), добиваме:

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=16$$

од каде, поради (4), следува дека $x^4+y^4+z^4=8$.

298. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е коцка со раб a, каде $ABCD$ е еден од ѕидовите на коцката, а AA', BB', CC' и DD' се рабови на коцката. Да се пресмета (во зависност од a) висината на пирамидата $ACB'D'$, спуштена од темето D.



Решение. Веднаш да забележиме дека сите рабови на пирамидата $ACB'D'$ се еднакви и имаат должина $b=a\sqrt{2}$. Значи, $ACB'D'$ се добива од дадената коцка, кога ќе се отстранат четирите еднакви тристрани пирамиди $ACB'B, ACD'D$, $AB'D'A'$ и $CB'D'C'$ со волумени еднакви на $\frac{a^3}{6}$. Значи, волуменот V на $ACB'D'$ е $\frac{a^3}{3}$. Од друга страна за волуменот V важи $V=\frac{b^2h\sqrt{3}}{12}$, каде h е бараната висина, па со изедначување на двата волумени по средувањето, добиваме $h=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

299 А. Автомобил се движел од градот A кон градот B со брзина 60 km/h на нагорнините, 72 km/h на рамните делови и 90 km/h на надолнините и целиот пат го изминал за 5 часа. За да се врати назад, движејќи се со истите брзини на автомобилот му биле потребни 4 часа.

Колкаво е растојанието од A до B.

Решение. Нека g km од патот A до B се состои од нагорнини, r km се состои од рамни делови и d km се состои од надолнини. Тогаш, според условите на задачата, добиваме:

$$\frac{g}{60}+\frac{r}{72}+\frac{d}{90}=5 \qquad (1)$$

Движејќи се наназад, оние делови кои биле нагорнини стануваат надолнини и обратно, па затоа имаме:

$$\frac{g}{90}+\frac{r}{72}+\frac{d}{60}=4\,. \qquad (2)$$

Од сумирањето на (1) и (2) добиваме $\frac{g+r+d}{36}=9$, односно $g+r+d=324$.

Значи, растојанието од A до B е 324 km.

300 А. Докажи дека постојат два позитивни природни броеви така што нивната сума е 1995 а производот е делив со 1995.

Решение. Да претпоставиме дека постојат два такви броја и нека тоа се x и y. Според условите од задачата, имаме:

$$x+y=1995 \text{ и } xy=1995k\,,$$

каде k е позитивен природен број. Ако го изразиме од првото равенство и го замениме во второто, добиваме:

$$x^2=1995(x-k)\,,$$

односно

$$x^2=3\cdot 5\cdot 7\cdot 19(x-k)\,.$$

Значи, x^2 е делив со 3, од каде добиваме дека и x е делив со 3. Аналогно заклучуваме дека x е делив со $5,7$ и 19. Значи, x е делив со $3,5,7$ и 19, што значи, дека е делив и со нивниот заеднички содржател, односно со 1995. Од последното, бидејќи x е природен број, добиваме дека $x\geq 1995$, од каде што добиваме дека $y\leq 0$. Последниот заклучок противречи на претпоставката, па значи не постојат природни броеви со бараните својства.

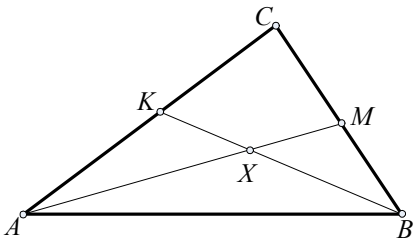
301 Б. На располагање ни се смеса AB составена од супстанциите A и B во однос $2:3$, смеса BC, составена од супстанциите B и C во однос $1:2$ и смеса CA, составена во однос $1:1$. По колку грама од секоја од смесите треба да се земат за да се добие 24 g смеса во која односот на супстанциите A,B и C е $1:1:1$?

Решение. Да земеме x грама од првата смеса, y грама од втората смеса и $24-x-y$ грама од третата смеса.Во добиената смеса треба да има по 8 грама од секоја од супстанциите. Од друга страна, во добиената смеса има $\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}(24-x-y)$ грама од супстанцијата A и $\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}y$ грама од супстанцата B. Решавајќи го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}\,(\,24-x-y\,)=8\\ \frac{3}{5}x+\frac{1}{3}\,y\;=\;8\end{cases},$$

добиваме $x=10, y=6$, а оттаму и $z=8$.

Значи, потребни се 10 g од првата, 6 g од втората и 8 g од третата смеса.



302 Б. Нека ABC е триаголник, K е точка на страната AC, различна од A и C, M е точка од страната BC различна од B и C и нека X е пресечна точка на KB и MA. Докажи дека не е можно да бидат исполнети равенствата $\overline{KX} = \overline{XB}$ и $\overline{MX} = \overline{XA}$.

Решение. Да претпоставиме дека е можно да се исполнети дадените равенства. Тогаш $ABMK$ е четириаголникот чии дијагонали се преполовуваат, од каде следува дека $ABMK$ е параллелограм. Од тука добиваме дека отсечките AK и BM, односно отсечките AC и BC се паралелни, што не е можно.

II година

303. Нека a,b и c се должини на страни на триаголник. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дадена со:

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) + c^2,$$

прима позитивна вредност за секој реален x.

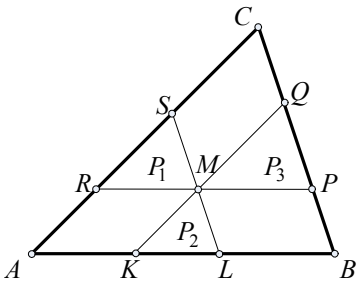
Решение. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дадена со $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ прима позитивна вредност за секој реален број x ако и само ако $A > 0$ и $D = B^2 - 4AC < 0$.

Бидејќи, во дадениот случај, имаме $A = b^2 > 0$, првиот услов е исполнет.

За вториот услов, имаме

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) =$$
$$= [(b+c)^2 - a^2][(b-c)^2 - a^2] = (a+b+c)(b+c-a)(b-c-a)(a+b-c).$$

Бидејќи a,b и c се должини на страни на триаголник, имаме $a+b+c>0$, $b+c-a>0$, $b-c-a<0$ и $a+b-c>0$, од каде што се добива дека $D<0$, односно дека е исполнет и вториот услов.



304. Низ внатрешна точка M на триаголникот ABC повлечени се прави паралелни на страните на триаголникот ABC. Истите го делат триаголникот на шест делови од кои три се триаголници со плоштини P_1, P_2 и P_3. Изрази ја плоштината на триаголникот ABC преку плоштините P_1, P_2 и P_3.

Решение. Нека P е плоштината на ΔABC. Секој од триаголниците RMS, KLM и MPQ е сличен на триаголникот ABC, па затоа

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{RM}}{\overline{AB}},\ \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{AB}} \text{ и } \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{AB}}.$$

Со собирање на горните равенства имајќи предвид дека $\overline{RM} = \overline{AK}$ и $\overline{MP} = \overline{LB}$, добиваме

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{AK}+\overline{KL}+\overline{LB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}=1,$$

од каде што следува дека $P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3})^2$.

305 А. Нека z е комплексен број, a е реален број и $z+\frac{1}{z}=a$. Докажете дека z е реален број или $|z|=1$.

Решение. Од дадениот услов, добиваме $z^2-az+1=0$. Значи, z е решение на квадратната равенка $x^2-ax+1=0$. Последната равенка има реални решенија, и тогаш z е реален број, или решенијата и се парот конјугирани комплексни броеви z и $\overline{z}$. Но, тогаш според Виетовите врски, добиваме $z\overline{z}=1$, односно $|z|=1$.

306 А. Нека a,b и c се цели броеви и $a>0$. Докажи дека, ако равенката $ax^2+bx+c=0$ има две реални решенија во интервалот $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, тогаш $a\geq 5$.

Решение. Нека x_1 и x_2 се решенија на дадената равенка. Според Виетовите врски, имаме $x_1x_2=\frac{c}{a}$, од каде, бидејќи $x_1,x_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, добиваме $0<\frac{c}{a}<\frac{1}{4}$, односно $0<4c<a$. Од последното е јасно дека c е позитивен број, па бидејќи и a и c се цели позитивни броеви, добиваме $a\geq 4c+1\geq 4\cdot 1+1=5$.

307 Б. Да се определат сите комплексни броеви z за кои важи

$$z\overline{z}+1=-i(z-\overline{z}).$$

Решение. Нека $z=a+ib$, каде a и b се реални броеви. Бидејќи $z\overline{z}=a^2+b^2$ и $z-\overline{z}=2bi$, дадената равенка се трансформира во $a^2+b^2+1=2b$, од каде добиваме $a^2+(b-1)^2=0$. Но, збир на квадрати на реални броеви е 0 ако и само ако квадрираните броеви се 0, од каде добиваме дека $a=0$ и $b-1=0$, односно $b=1$.

Значи, постои единствен комплексен број кој ги исполнува условите и тоа е $z=i$.

308 Б. Докажи дека ако $10x+11y=\frac{1}{3}$, тогаш $x^2+y^2>\frac{1}{1995}$.

Решение. Од условот $10x+11y=\frac{1}{3}$, добиваме $y=\frac{1-30x}{33}$, од каде

$$x^2+y^2=x^2+\left(\frac{1-30x}{33}\right)^2=\frac{1}{1089}(1989x^2-60x+1).$$

Да ставиме $f(x)=1989x^2-60x+1$. Тогаш, минималната вредност на f е

$$f_{\min}(x)=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot 1989-3600}{4\cdot 1989}=\frac{121}{221}.$$

Значи, $x^2+y^2=\frac{1}{1089}(1989x^2-60x+1)\geq\frac{1}{1089}\cdot\frac{121}{221}=\frac{1}{1989}>\frac{1}{1995}$.

III година

309. Определи ги реалните решенија на равенката:

$$\log_2(1+\sqrt{x})=\log_3 x.$$

Решение. Воведуваме смена $\log_3 x = y$, од каде што се добива $\sqrt{x} = \sqrt{3^y}$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме

$$\log_2(1+\sqrt{3^y}) = y,$$

$$1+\sqrt{3^y} = 2^y,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1.$$

Едно очигледно решение на последната равенка е $y = 2$. Ако $y \geq 2$, тогаш

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y < \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

од каде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Ако пак $y < 2$, тогаш $\left(\frac{1}{2}\right)^y > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, од каде

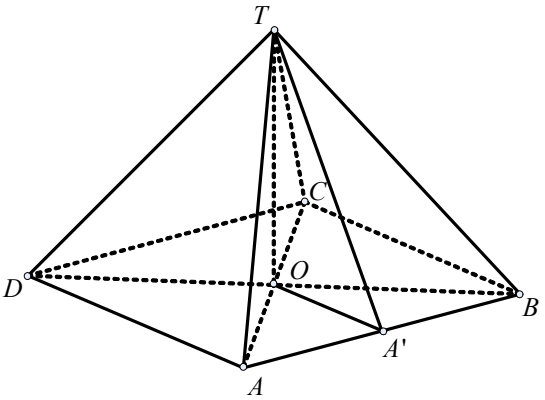
$$\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Значи, $y = 2$ е единственото решение на равенката $\left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1$, од каде што се добива, (враќајќи се во извршената смена), дека $x = 9$ е единственото решение на почетната равенка.

310. Нека $ABCDT$ е четиристрана пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња) чии дијагонали AC и BD се заемно нормални и се сечат во точката O која е подножје на висината на пирамидата од врвот T. Нека $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ се соодветно, аглите меѓу висината на пирамидата и висините спуштени на бочните ѕидови ABT, BCT, CDT и DAT, спуштени од врвот T. Докажи дека

$$ctg^2\alpha + ctg^2\gamma = ctg^2\beta + ctg^2\delta.$$

Решение. Да ги означиме со A', B', C' и D', соодветно, подножјата на висините на бочните ѕидови ABT, BCT, CDT и DAT, спуштени од врвот T; со a', b', c' и d', должините на отсечките OA', OB', OC' и OD', соодветно; со a, b, c и d должините на отсечките OA, OB, OC и OD, соодветно; со h должината на висината на пирамидата.



Имаме:

$$ctg^2\alpha + ctg^2\gamma = \frac{h^2}{a'^2} + \frac{h^2}{c'^2}$$

и

$$ctg^2\beta + ctg^2\delta = \frac{h^2}{b'^2} + \frac{h^2}{d'^2}.$$

Да го разгледаме триаголникот ABO. Тој е правоаголен, со прав агол во темето O, а отсечката OA' му е висина спуштена кон хипотенузата. Значи,

$$\frac{1}{a'^2}=\frac{\overline{AB}^2}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

и аналогно $\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{c'^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$ и $\frac{1}{d'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{d^2}$. Со оглед на добиените равенства, имаме:

$$ctg^2\alpha+ctg^2\gamma=h^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)=ctg^2\beta+ctg^2\delta.$$

311 А. Докажи дека не постои полином P со реални коефициенти така што за секој реален број x важи $P(\sin x)=\cos x$.

Решение. Прв начин. Да претпоставиме дека постои таков полином. Нека $t=\sin x$. Тогаш за $-1\le t\le 1$ важи

$$(P(t))^2=1-t^2 \qquad (1)$$

од каде што е јасно дека P мора да е линеарен полином, односно $P(t)=at+b$. Со замена во (1), добиваме

$$a^2t^2+2bt+b^2=-t^2+1,$$

од каде што, добиваме $a^2=-1$, што не е можно за ниту еден реален број.

Значи, не постои полином со бараното својство.

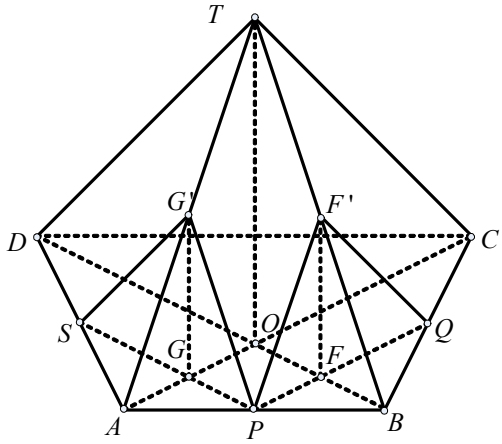
Решение. Втор начин. Да претпоставиме дека постои таков полином. Тогаш

$$-1=\cos\pi=P(\sin\pi)=P(0)=P(\sin 0)=\cos 0=1,$$

што не е можно.

Значи, не постои полином со бараното својство.

312 А. Нека $ABCDT$ е пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња), чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O, која е подножје на висината на пирамидата од врвот T. Нека P, Q, R и S се средините на отсечките AB, BC, CD и DA, соодветно. Низ отсечките PQ, QR, RS и SP се повлечени 4 рамнини, нормално на основата на пирамидата кои од пирамидата отсекуваат 4 тристрани пирамиди кои ги отфрламе. Докажи дека плоштината на преостанатиот дел на пирамидата е еднаква на вкупната плоштина на четирите отфрлени пирамиди.



Решение. Нека F е пресечна точка на отсечките PQ и BD. Отсечката PQ е средна линија за триаголникот ABC. Затоа F е средина на отсечката BO, а висината FF' на отфрлената пирамида со основа PQB е средна линија на триаголникот OTB.

Заклучуваме дека отсечките PF и QF' се средни линии на триаголниците ATB и CTB, соодветно. Аналогни заклучоци можат да се изведат за секоја од отфрлените пирамиди.

За да се пресмета вкупната плоштина на отфрлените пирамиди, од интерес е да се знае вкупната плоштина на нивните основи. Од друга страна, не е тешко да се покаже дека средните линии на секој триаголник истиот го делат на четири триаголници со еднаква плоштина, односно секој од добиените четири дела има плоштина еднаква на четвртина од плоштината на дадениот триаголник. Оттаму следува дека вкупната плоштина $B_\circ$ на основите на отфрлените пирамиди е

$$B_\circ = P_{PQB} + P_{RSD} + P_{QRC} + P_{SPA} =$$
$$= \frac{1}{4}(P_{ACB} + P_{BDC} + P_{CDA} + P_{DBA}) = .$$
$$= \frac{1}{4}2B = \frac{B}{2}$$

каде со B е означена плоштина на основата $ABCD$. Значи, половина од плоштината на основата на почетната пирамида е во преостанатиот дел, а половина учествува во плоштината на отфрлените пирамиди.

Нека плоштината на обвивката на почетната пирамида е M. Да го разгледаме триаголникот ABT. Два од четирите дела на кои тој е поделен со своите средни линии се во преостанатиот дел, а два се во отфрлените пирамиди. Аналогна дискусија може да се изврши и за другите бочни ѕидови на почетната пирамида. Значи, половина од плоштината на обвивката на почетната пирамида е во преостанатиот дел, а половина учествува во плоштината на отфрлените пирамиди.

Сите преостанати ѕидови се всушност ѕидовите по кои е вршено отсекувањето на отфрлените делови и истите се заеднички заз преостанатиот дел и за отфрлените пирамиди. Нека нивната плоштина е Z.

Значи, плоштината на преостанатиот дел, како и вкупната плоштина на отфрлените пирамиди, е еднаква на $\frac{B}{2} + \frac{M}{2} + Z$.

313 Б. Да се определи аголот α, ако се знае дека $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и

$$\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Решение. Имаме

$$\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{4(1-\sqrt{2})}\left(\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} =$$
$$= \cos\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + \sin\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \cos\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} + \sin\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$$
$$= \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{24}$$

од каде што е јасно дека $\alpha = \frac{7\pi}{24}$.

314 Б. Нека $ABCDT$ е пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња), чии дијагонали AC и BD се сечат во точката O, која е подножје

на висината на пирамидата од врвот T. Нека P, Q, R и S се средини на отсечките AB, BC, CD и DA соодветно. Низ отсечките PQ, QR, RS и SP се повлечени четири рамнини, нормално на основата на пирамидата, кои од пирамидата отсекуваат 4 тристрани пирамиди кои ги отфрламе. Докажи дека волуменот на преостанатиот дел на пирамидата е три четвртини од волуменот на пирамидата $ABCDT$.

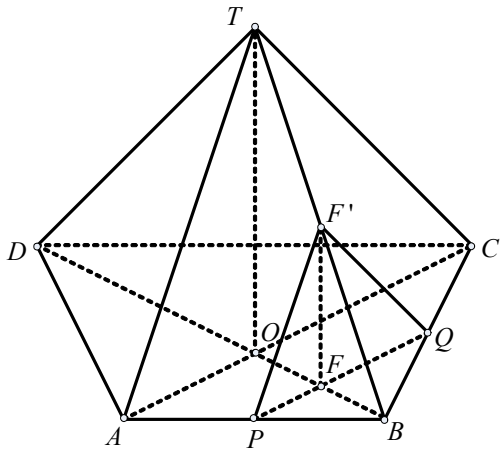
Решение. Нека F е пресечната точка на отсечките PQ и BD. Отсечката PQ е средна линија за триаголникот ABC. Затоа F е средина на отсечката BO, а висината на отфрлената пирамида со основа PQB е средна линија на триаголникот OTB. Значи, висината $H_\circ$ на оваа пирамида е половина од висината H на почетната пирамида. Истото важи за висината на секоја од четирите отфрлени пирамиди. За да се пресмета вкупниот волумен на отфлените пирамиди од интерес е да се знае вкупната плоштина на нивните основи. Од друга страна, не е тешко да се покаже дека средните линии на секој триаголник истиот го делат на четири триаголници со еднаква плоштина, односно секој од добиените четири дела има плоштина еднаква на четвртина од плоштината на дадениот триаголник. Оттаму следува дека вкупната плоштина $B_\circ$ на основите на отфрлените пирамиди е:

$$B_\circ = P_{PQB} + P_{QRC} + P_{RSD} + P_{SPA}$$
$$= \frac{1}{4}(P_{ABC} + P_{BCD} + P_{CDA} + P_{DBA})$$
$$= \frac{1}{4}2B = \frac{B}{2}.$$

каде со B е означена плоштината на основата $ABCD$. Вкупниот волумен на отфрлените пирамиди $V_\circ$ е

$$V_\circ = \frac{1}{3}B_\circ H_\circ = \frac{1}{3}\frac{B}{2}\frac{H}{2} = \frac{1}{4}\frac{BH}{3},$$

па волуменот на преостанатиот дел е $\frac{3}{4}\frac{BH}{3}$



IV година

315. Да се определи коефициентот пред x^3 во развиената форма (по извршените степенувања) на изразот

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + \ldots + (1+x)^{1995}.$$

Решение. Според формулата за сума на геометриска прогресија, добиваме:

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + \ldots + (1+x)^{1995} = \frac{(1+x)^3[(1+x)^{1993} - 1]}{x} = \frac{(1+x)^{1996} - (1+x)^3}{x}.$$

Бидејќи во именителот се наоѓа x, за определување на бараниот коефициент доволно е да се определи коефициентот пред x^4 во броителот. Но, x^4 не се јавува во $(1+x)^3$, па доволно е да се определи коефициентот пред x^4 во $(1+x)^{1996}$.

Значи, бараниот коефициент е $\binom{1996}{4}$.

316. Нека $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ е функција така што за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ важи

$$2f(\sin x)+3f(\cos x)=\sin x\,. \qquad (1)$$

а) да се определи $f(0)$,

б) да се определи функцијата f.

Решение. а) Ако во (1) замениме за $x=0$ и за $x=\frac{\pi}{2}$, го добиваме системот линеарни равенки $\begin{cases}2f(0)+3f(1)=0\\2f(1)+3f(0)=1\end{cases}$, по чие решавање се добива $f(0)=\frac{3}{5}$.

б) Ако ја воведеме смената $t=\frac{\pi}{2}-x$, од (1), добиваме дека за $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ важи $2f(\cos t)+3f(\sin t)=\cos t$, односно за $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ важи

$$2f(\cos x)+3f(\sin x)=\cos x\,. \qquad (2)$$

Решавајќи го системот равенки (1) и (2) по непознати $f(\sin x)$ и $f(\cos x)$, добиваме

$$f(\sin x)=\frac{1}{5}(3\cos x-2\sin x)\,.$$

Конечно, ставајќи $\sin x=y$, добиваме дека за $y\in[0,1]$ важи $f(y)=\frac{3}{5}\sqrt{1-y^2}-\frac{2}{5}y$.

Лесно се проверува дека добиената функција го задоволува равенството (1).

317 А. Нека $a_1,a_2,\ldots$ е бесконечна аритметичка прогреија чии членови се цели броеви. Докажи дека ако во дадената аритметичка прогреија постои член кој е куб на цел број, тогаш бесконечно многу членови на прогресијата се кубови на цели броеви.

Решение. Бидејќи членовите на прогресијата се цели цели броеви, јасно е дека разликата d е цел број. Нека важи $a_k=n^3$, каде n е цел број. Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви на $a=n^3$, односно сите се кубови на цел број. Да претпоставиме дека разликата d не е нула. Имаме

$$(n+d)^3=n^3+3n^2d+3nd^2+d^3=a_k+(3n^2+3nd+d^2)d=a_{k+(3n^2+3nd+d^2)}$$

и поопшто

$$(n+id)^3=n^3+3n^2id+3ni^2d^2+i^3d^3=a_k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)d=a_{k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)}\,.$$

Бидејќи за различни природни броеви i на левата страна на последното равенство фигурираат кубови на различни цели броеви ($d\neq 0$), јасно е дека дадената прогресија содржи бесконечно многу членови кои се кубови на цели броеви, но само под услов бројот

$$k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)$$

да е позитивен за секој ненегативен цел број i (бидејќи е тоа очигледно за $i=0$, доволно е да се разгледува само случајот кога i е природен број). Но, дискриминантата на квадратниот трином (разгледуван по d) $i^3d^2+3ni^2d+3n^2i$ е $D=-3n^2i^4\le 0$, а за главниот коефициент i^3 важи $i^3>0$, па значи $i^3d^2+3ni^2d+3n^2i\ge 0$, од каде следува дека $k+(3n^2i+3ni^2d+i^3d^2)$ е позитивен број.

318 А. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, каде $a>b>0$. Што претставува геометриското место на точки кои се средини на сите тетиви на елипсата кои минуваат низ десниот форкус $F_2(e,0)$?

Решение. Равенката на произволна права низ десниот фокус е:

$$y = k(x - e)\,. \tag{1}$$

Со замена во равенката на елипсата, добиваме:

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 - 2a^2k^2ex + a^2k^2e^2 - a^2b^2 = 0\,. \tag{2}$$

Ако со x_1 и x_2 ги означиме решенијата на квадратната равенка (2), кои се всушност апсцисите на крајните точки на тетивата определена со правата (1), апсцисата на средната точка на соодветната тетива, според Виетовите формули, е:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2k^2e}{b^2 + a^2k^2} \tag{3}$$

Соодветната ординате е:

$$y = k(x - e) = -\frac{b^2ke}{b^2 + a^2k^2}\,. \tag{4}$$

Од (3) и (4) следува:

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2k}{b^2}\,, \tag{5}$$

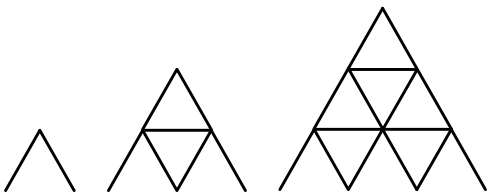
па со елиминација на k од (1) и (5) ја добиваме равенката на бараното геометриско место на точки:

$$b^2\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + a^2y^2 = \left(\frac{eb}{2}\right)^2, \qquad \frac{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2}{\left(\frac{e}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{eb}{2a}\right)^2} = 1\,.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е елипса.

319 Б. За кула од карти оде ден кат потребни се две карти, за два ката потребни се 7 карти, а за кула од три ката потребни се 15 карти (види цртеж). Колку карти се потребни за кула од n ката?

Решение. За првиот кат (броено од горе) се потребни една карта накосена на десно, една накосена на лево и ниту една хоризонтална, за вториот две накосени надесно, две налево и една хоризонтално поставена, за третиот кат три накосени надесно, три налево и две хоризонтално поставени и се така до n-тиот кат, за кој се потребни n карти накосени надесно, n налево и $n-1$ хоризонтално поставена. Значи, вкупниот број на потребни карти е:



$$(1+1+0)+(2+2+1)+\ldots+[n+n++(n-1)] = 2(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+..+n-1) =$$

$$= \frac{2n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

320 Б. Со $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2$, каде k е реален број е дадено множество параболи (секој број k определува по една парабола). Да се определи геометриското место на на точки кои се темиња на дадените парболи.

Решение. Апсцисата на темето на параболата $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2$, е $x = -\frac{b}{2a} = k - 1$, а соодветната ордината е $y = (k-1)^2 - 2(k-1)(k+1) + k^2 = 2k - 1$. Со елиминација на параметарот k, ја добиваме равенката на бараното геометриско место на точки:

$$y = 2x + 1\,.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е права.

XIX Регионален натпревар - 1996 година

I година

321 А. Разложи го на множители полиномот x^5+x+1.

Решение. За дадениот израз имаме

$$\begin{aligned} x^5+x+1 &= x^5+x^4+x^3-x^4-x^3-x^2+x^2+x+1= \\ &= x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+1(x^2+x+1)= \\ &= (x^2+x+1)(x^3-x^2+1) \end{aligned}$$

322 А. Дадени се броевите $5,52,525,5252,52525,\ldots$. Одреди го најмалиот меѓу нив кој е делив со 99.

Решение. Нека S_1 е збирот на цифрите на непарните места, а S_2 е збирот на цифрите на парните места во произволен број a_N од дадената низа.Број е делив со 11 ако $11 \mid S_1-S_2$. Број е делив со 9 ако $9 \mid S_1+S_2$.

1) Нека бројот на цифри N е парен. Тогаш збирот на цифрите на бројот a_N е еднаков на $\frac{7N}{2}$, а $S_1-S_2=\frac{3N}{2}$. За да бројот a_N биде делив со 99 мора $9 \mid S_1+S_2$ и $11 \mid S_1-S_2$. Овој услов го исполнуваат сите броеви N за кои $99 \mid N$, т.е. $N=99k$. Најмалиот k за кој ова е исполнето е $k=2$. Најмал ваков a_N ќе има $2\cdot 99=198$ цифри. ($N=198$).

2) Нека N е непарен. Тогаш

$$S_1+S_2=\frac{7(N-1)}{2}+5=\frac{7N+3}{2},$$

$$S_1-S_2=\frac{3(N-1)}{2}+5=\frac{3N+7}{2}.$$

Притоа

$$9 \mid S_1+S_2 \;\Leftrightarrow\; 9 \mid \frac{7N+3}{2} \;\Leftrightarrow\; 9 \mid (7N+3) \;\Leftrightarrow\; N \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 9).$$

Освен тоа,

$$11 \mid S_1-S_2 \;\; 11 \mid \frac{3N+7}{2} \;\Leftrightarrow\; 11 \mid (3N+7) \;\Leftrightarrow\; 11 \mid 4(3N+7) \;\Leftrightarrow\; 11 \mid (N+6) \;\Leftrightarrow\; N \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 11)$$

Најмалиот непарен број N таков што $N \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 9)$ и $N \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 11)$ е 159.

323 Б. Ако за позитивните реални броеви a,b и c важи равенството

$$ab\left(\frac{a+b}{2}-c\right)+bc\left(\frac{b+c}{2}-a\right)+ac\left(\frac{c+a}{2}-b\right)=0,$$

тогаш $a=b=c$. Докажи!

Решение. Равенството е еквивалентно со

$$\frac{a}{2}(b-c)^2+\frac{a}{2}(a-c)^2+\frac{c}{2}(a-b)^2=0.$$

Бидејќи a,b,c се позитивни реални броеви, се добива дека $a-b=b-c=c-a=0$, т.е. $a=b=c$.

324 Б. Легура на цинк и сребро со маса $3,5$ килограми содржи 75% сребро. Кога оваа легура ќе се стопи и ќе се измеша со друга легура од истите елементи, се добива трета легура со маса $10,5$ килограми, која има $84\,\%$ сребро. Колкав е процентот на сребро во втората легура?

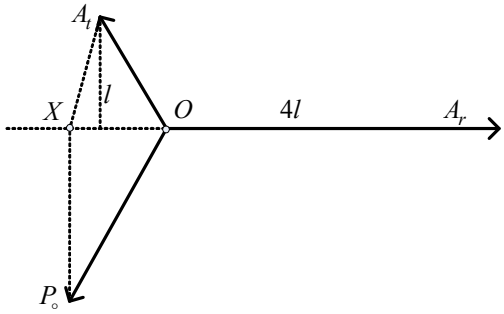
Решение. Во првата легура имало $3,5\cdot 0,75\text{ kg}=2,625\text{ kg}$ сребро. Во третата легура имало $10,5\cdot 0,84\text{ kg}=8,82\text{ kg}$ сребро. На првата легура и се додадени $(10,5-3,5)\text{kg}=7\text{kg}$ легура, која имала $(8,82-2,66)\text{kg}=6,16\text{ kg}$ сребро. Значи, во втората легура имало $\frac{6,195\cdot 100}{7}=88\%$ сребро.

325 АБ. Игор, Јован, Кире и Лазар ги поканиле своите девојки на игранка. На еден танц Бети играла со Игор, Ана со момчето на Вера, Гордана со момчето на Ана, Јован со девојката на Кире а Кире со девојката на Игор. Определи ги вљубените парови.

Решение. (1) Бети играла со Игор, (2) Ана со момчето на Вера, (3) Гордана со момчето на Ана, (4) Јован со девојката на Киро, (5) Киро со девојката на Игор.

Дали сите играле со туѓ партнер? Евентуално би можело тоа да не е бети и Игор, но од (5) тоа се елиминира, па (6) никој не играл со својата девојка. Од (1), (2) и (3), а земајќи предвид (6) следува дека (7) Гордана е девојка на Игор. Од (2), (3) и (5) следува дека (8) Киро е момчето на Ана, (9) Јован е момчето на Вера. На крајот остана дека (10) Бети е девојка на Лазар.

326 АБ. Тројца мускетари Атос, Портос и Арамис после краткотрајно дружење во крајпатната кафеана заминале кон своите домови, по насоки кои зафаќале агли од 120°. Брзините со кои се движеле мускетарите соодветно се: $10, 20$ и 40 километри на час. Докажете дека во секој момент положбите на мускетарите се темиња на правоаголен триаголник.



Решение. Нека O е кафеаната, а $A_t, P_\circ$ и A_r точките во кои во одреден момент се наоѓаат мускетарите. Во секој момент Атос се наоѓа на растојание l, Портос на растојание $2l$ и арамис на растојание $4l$ од точката O. Јасно $\Delta P_\circ OX$ е правоаголен,

со $\overline{XP_\circ} = l\sqrt{3}, \overline{XO} = l$, па затоа $\overline{P_\circ A_r}\sqrt{(l\sqrt{3})^2 + (l+4l)^2} = \sqrt{28}l$, $\overline{P_\circ A_t} = \sqrt{(l\sqrt{3})^2 + (l+4l)^2} = \sqrt{28}l$, $\overline{A_t A_r}^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}l + 4l\right)^2} = \sqrt{21}l$. Со проверка се уверуваме дека

$$\overline{P_\circ A_r}^2 = \overline{P_\circ A_t}^2 "+ \overline{A_t A_r}^2 .$$

II година

327 А. Решете ја во $\mathbb{R}$ равенката

$$(x^2-3)^3 - (4x+6)^3 + 6^3 = 18(4x+6)(3-x^2).$$

Решение. Со смените:

$$a = x^2 - 3,\ b = -(4x+6),\ c = 6$$

равенката го добива обликот

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c=0) \text{ или } a-b = a-c = b-c = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 - 4x - 6 + 6 = 0 \text{ или } \begin{cases} x^2 - 3 + 4x + 6 = 0 \\ x^2 - 3 - 6 = 0 \\ -4x - 6 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

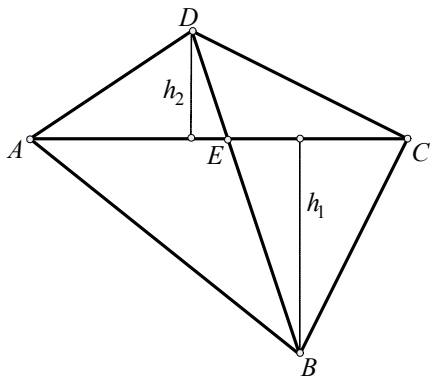
$$\Leftrightarrow x_1 = 2+\sqrt{7},\ x_2 = 2-\sqrt{7},\ x_3 = -3.$$

328 А. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката E. Пресметајте ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ ако плоштините на триаголниците ABD, ACD и AED соодветно изнесуваат $10\ \text{cm}^2$, $9\ \text{cm}^2$ и $6\ \text{cm}^2$.

Решение. Нека $P_1 = P_{\Delta AED}, P_2 = P_{\Delta DEC}, P_3 = P_{\Delta CEB}, P_4 = P_{\Delta ABE}$. Ќе докажеме дека

$$P_1P_3 = P_2P_4, \qquad (*)$$

Навистина, нека со h_1 ја означиме висината спуштена од темето D на дијагоналата AC, а со h_2 ја означиме висината спуштена од темето B на истата дијагонала AC. Тогаш



$$P_1P_3 = \frac{1}{2}\overline{AE}\cdot h_1 \cdot \frac{1}{2}\overline{EC}\cdot h_2 = \frac{1}{4}\overline{AE}\cdot\overline{EC}\cdot h_1\cdot h_2 \qquad (1)$$

$$P_2P_4 = \frac{1}{2}\overline{EC}\cdot h_1 \cdot \frac{1}{2}\overline{AE}\cdot h_2 = \frac{1}{4}\overline{AE}\cdot\overline{EC}\cdot h_1\cdot h_2. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува (*). Сега добиваме

$$P_2 = P_{\Delta DEC} = P_{\Delta ACD} - P_{\Delta AED} = 9\text{cm}^2 - 6\text{cm}^2 = 3\text{cm}^2$$

$$P_3 = P_{\Delta AEB} = P_{\Delta ABD} - P_{\Delta AED} = 10\text{cm}^2 - 6\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2.$$

Од (*) и од горните пресметки, добиваме

$$P_3 = \frac{P_2P_4}{P_1} = \frac{3\cdot 4}{6}\text{cm}^2 = 2\text{cm}^2.$$

Конечно,

$P_{ABCD} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = (6+3+4+2)\text{cm}^2 = 15\text{cm}^2$.

329 Б. Нека z_1, z_2 се комплексни броеви. Ако $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 z_2 \neq -1$, тогаш $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ е реален број. Докажете!

Решение. Комплексниот број z е реален ако и само ако $z = \overline{z}$. Според тоа

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} \Leftrightarrow z_1 + z_2 + |z_1|^2\,\overline{z_2} + |z_2|^2\,\overline{z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + |z_1|^2\,z_2 + |z_2|^2\,z_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 + \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + z_2 + z_1 .$$

330 Б. Најдете x, за којшто функцијата $y = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_{1996})^2$ прима најмала вредност.

Решение. Имаме

$$y = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_{1996})^2 = x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + \ldots + x^2 - 2xx_{1996} + x_{1996}^2 ,$$

па затоа

$$y = 1996x^2 - 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{1996}) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1996}^2) .$$

Последната е квадратна функција со коефициент $a = 1996 > 0$, па значи прима најамала вредност во $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{1996}}{1996}$.

331 АБ. Ако $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$, тогаш $x + y = 0$. Докажете!

Решение. Ако дадено равенство се помножи со $x - \sqrt{x^2+1}$ добиваме

$$(-1)(y + \sqrt{y^2+1}) = x - \sqrt{x^2+1} . \qquad (1)$$

Ако, пак, го помножиме со $y - \sqrt{y^2+1}$ добиваме

$$(-1)(x + \sqrt{x^2+1}) = y - \sqrt{y^2-1} . \qquad (2)$$

Така од (1) имаме $x + y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}$, а од (2) имаме $x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}$. Со собирање на последните две равенки добиваме: $2(x+y) = 0$ од каде $x + y = 0$.

332 АБ. Ако аглите на триаголникот ABC се: $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 90^\circ$, тогаш за неговите страни важи равенството $a^2 = (b+c)c$. Докажете!

Решение. Да повлечеме права CD која зафаќа $\sphericalangle ACD = 40^\circ$ (направи цртеж), тогаш и $\delta = 60^\circ$, па триаголникот CDA е рамнокрак со $\overline{AD} = \overline{AC} = b$. Очигледно е дека $\Delta ABC \sim \Delta CBD$. Оттука

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CB} : \overline{BD} \;\Rightarrow\; c : a = a : (b+c) \;\Rightarrow\; a^2 = (b+c)c .$$

III година

333 А. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција зададена со

$$f(x)=1+a\cos x+b\sin x+c\cos 2x+d\sin 2x\,.$$

Докажете дека, ако за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $f(x)>0$, тогаш за секој $x\in\mathbb{R}$ важи и $f(x)<3$.

Решение. Ако ги искористиме равенствата

$$\cos x+\cos\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)=0$$

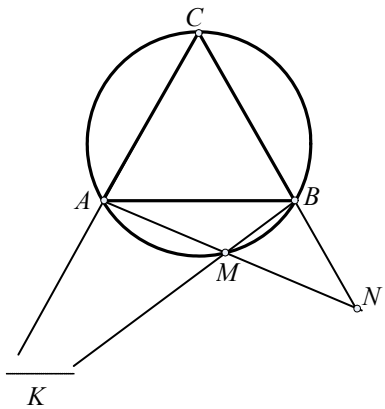
$$\cos 2x+\cos 2\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)+\cos 2\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)=0$$

$$\sin x+\sin\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)=0$$

$$\sin 2x+\sin 2\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)+\sin 2\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)=0$$

добиваме $f(x)+f\left(x+\tfrac{2\pi}{3}\right)+f\left(x-\tfrac{2\pi}{3}\right)=3$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Но бидејќи $f(y)>0$ за секој $y\in\mathbb{R}$, следува дека $f(x)<3$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

334 А. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC. На кружниот лак AB кој не ја содржи точката C, избрана е точка M различна од A и B. Нека правите AC и BM се сечат во точката K, а правите BC и AM во точката N. Докажете дека производот од должините на отсечките AK и BN не зависи од изборот на точката M.



Решение. Четириаголникот $ACBM$ е впишан во кружницата. Според тоа

$$\sphericalangle AMK=180^\circ-\sphericalangle AMB=\sphericalangle ACB=60^\circ.$$

Од особините на надворешен агол за триаголникот AMK добиваме

$$\sphericalangle MAC=\sphericalangle CKB+\sphericalangle AMK.$$

Од друга страна $\sphericalangle MAC=\sphericalangle MAB+\sphericalangle BAC$. Бидејќи $\sphericalangle BAC=\sphericalangle AMK=60^\circ$ и последните две равенства добиваме $\sphericalangle MAB=\sphericalangle CKB$. Освен тоа, $\sphericalangle KAB=\sphericalangle ABN=120^\circ$. Според тоа, триаголниците ABK и BNA се слични, што значи $\overline{AK}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{NB}$, т.е.

$$\overline{AK}\cdot\overline{NB}=\overline{AB}^2=\text{cosnt}\,.$$

335 Б. Најдете го аголот α на триаголникот ABC, ако за неговите агли α,β,γ важи равенството $\sin\alpha=\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$.

Решение. Бидејќи α,β,γ се агли на триаголник, од $\sin\alpha=\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$ добиваме $\cos\beta+\cos\gamma\neq 0$, $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}\neq 0$, $\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$ па затоа

$$\sin\alpha=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\;\Rightarrow\;2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\;\Rightarrow\;\cos\frac{\alpha}{2}=0\text{ или}$$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1\;\Rightarrow\;\alpha=\pi$, што не е можно, или $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

336 Б. Даден е квадрат $ABCD$ со страна a и центар во точката O. Низ спротивните темиња A и C на квадратот се повлечени полуправи AX и CY нормални на рамнината на квадратот и од иста страна на таа рамнина. На AX е земена точка M таква што $\overline{OM} = a$, а на CY точка N таква што $\overline{MN} = 2a$. Докажете дека MN е нормална на рамнината DMB.

Решение. Ќе покажеме дека ΔMON е правоаголен, т.е.

$$\overline{OM}^2 + \overline{NM}^2 = \overline{ON}^2 .$$

Од ΔOMA (нацртај цртеж) наоѓаме

$$\overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

па според тоа $\overline{MA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Нека P е точка на полуправата CY таква што $\overline{PC} = \overline{MA}$. Од ΔMPN катетата NP изнесува $\overline{NP} = \sqrt{(2a)^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$. Бидејќи $\overline{PC} = \overline{MA}$, имаме

$$\overline{NC} = \overline{PC} + \overline{NP} = \overline{MA} + \overline{NP} = \frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} = \frac{3a}{2}\sqrt{2} .$$

За ΔOCN важи:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{NC}^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5a^2 .$$

Тогаш, $\overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 = a^2 + 4a^2 = \overline{ON}^2$.

337 АБ. Решете ја неравенката $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \geq xy$.

Решение. Бидејќи $x \geq 1$ и $y \geq 1$, дадената неравенка е еквивалентна со:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{y} \geq 1 .$$

Сега секој од собироците на левата страна од неравенката не е поголем од $0{,}5$, т.е.

$$\frac{\sqrt{t-1}}{t} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(t-1) = t^2 \Leftrightarrow (t-2)^2 \geq 0$$

при што равенство се достигнува кога $t = 2$. Значи, $x = y = 2$.

338 АБ. Најдете ги сите вредности на параметарот k, за кои што равенката

$$\lg(x^2 + 2kx) - \lg(8x - 6k - 3) = 0$$

има двоен корен, а потоа одреди го тој корен.

Решение. Дадената равенка ја трансформираме во квадратна равенка

$$x^2 + 2(k-4)x + 6k + 3 = 0$$

која што има двоен корен ако дискриминантата е еднаква на нула, т.е. ако

$$4(k-4)^2 - 4(6k+3) = 0 ,$$

односно $k^2 - 14k + 13 = 0$. Оттука $k_1 = 1$, $k_2 = 13$.

$i)$ За $k=1$, почетната равенка го добива обликот $\lg(x^2+2x)-\lg(8x-9)=0$ или $x^2-6x+9=0$, од каде што $x_1=x_2=3$.

$ii)$ За $k=13$, на сличен начин наоѓаме дека $x_1=x_2=-9$, но за оваа вредност на x логаритмот не е дефиниран.

Значи, единствена вредност за k е 1, и во тој случај $x=3$.

IV година

339 А. Без употреба на логаритамски таблици, докажете дека $\mathrm{tg}1^\circ<0,2$.

Решение. Нека $\mathrm{tg}\alpha=0,2$. Тогаш

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1\text{-}\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12},\ \mathrm{tg}4\alpha=\frac{2\mathrm{tg}2\alpha}{1\text{-}\mathrm{tg}^2 2\alpha}=\frac{120}{119}\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}4\alpha>1=\mathrm{tg}45^\circ,$$

Функцијата тангенс е растечка на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, па следува $4\alpha>45^\circ$, т.е. $\alpha>11^\circ$. Значи, $\mathrm{tg}1^\circ<\mathrm{tg}\alpha=0,2$.

340 А. Нека $a_1,a_2,....$ е аритметичка прогресија со разлика d, а $b_1,b_2,....$ е геометриска прогресија со количник $q, q\neq 1$.

Пресметајте го збирот

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n.$$

Решение. Бидејќи за секој природен број k важи

$$a_k=a_1+(k-1)d\ ;\ b_k=b_1q^{k-1}$$

за S_n добиваме:

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n=a_1b_1(1+q+q^2+...+q^{n-1})+db_1q(1+2q+...+(n-1)q^{n-2})=$$
$$=a_1b_1\frac{1-q^n}{1-q}+db_1q(1+2q+...+(n-1)q^{n-2})=a_1b_1\frac{1-q^n}{1-q}+db_1q\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$$

Збирот $1+2q+...+(n-1)q^{n-2}$ се пресметува на следниот начин:

$$1+2q+...+(n-1)q^{n-1}=(1+q+q^2+...+q^{n-1})+(q+q^2+...+q^{n-2})+...+(q^{n-3}+q^{n-2})+q^{n-2}=$$
$$=\frac{1-q^{n-1}}{1-q}+q\frac{1-q^{n-2}}{1-q}+q^2\frac{1-q^{n-3}}{1-q}+...+q^{n-3}\frac{1-q^2}{1-q}+q^{n-2}=$$
$$=\frac{1+q+q^2+...+q^{n-2}-(n-1)q^{n-1}}{1-q}=\frac{\frac{1-q^{n-1}}{1-q}-(n-1)q^{n-1}}{1-q}=\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(1-q)^2}$$

341 Б. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се членови на аритметичка прогресија. Докажете дека

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_2}+\frac{1}{a_1a_n}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right).$$

Решение. Бидејќи $a_1,a_2,...,a_n$ е аритметичка прогресија, следува:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=....=a_n+a_1$$

и

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_2}+\frac{1}{a_1a_n}=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{1}{a_2+a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\ldots+\frac{1}{a_n+a_1}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right)=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right)$$

342 Б. Нека за аглите α,β,γ на триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=1.$$

Пресметајте го аголот α.

Решение. Според синусната теорема имаме: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, па според тоа

$$1=\frac{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}-\frac{a^2}{4R^2}}{\frac{bc}{4R^2}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}.$$

Значи,

$$a^2=b^2+c^2-bc. \qquad (1)$$

Од косинусна теорема имаме

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2\cos\alpha=1$ а оттука $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

343 АБ. Ако темињата на еден триаголник припаѓаат на хиперболата $xy=1$, тогаш неговиот ортоцентар припаѓа на таа хипербола. Докажете!

Решение. Нека $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$ се темиња на триаголникот. Равенката на висината спуштена од темето A е:

$$y-y_1=-\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x-x_1).$$

Ако замениме $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$, $y_3=\frac{1}{x_3}$ добиваме

$$y-\frac{1}{x_1}=x_2x_3(x-x_1) \qquad (1)$$

Равенката на висината спуштена од темето B е: $y-y_2=-\frac{x_3-x_1}{y_3-y_1}(x-x_2)$. Со замена $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$, $y_3=\frac{1}{x_3}$ добиваме:

$$y-\frac{1}{x_2}=x_3x_1(x-x_2). \qquad (2)$$

Со решавање на системот равенки (1) и (2) по непознати x и y добиваме $x=-\frac{1}{x_1x_2x_3}$, $y=-x_1x_2x_3$. Значи, $x=-\frac{1}{x_1x_2x_3}$, $y=-x_1x_2x_3$ се координатите на ортоцентарот. За нив важи $xy=1$, од каде следува дека ортоцентарот припаѓа на хиперболата.

344 АБ. Ако $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$, најдете ја $f(x)$.

Решение. Да ставиме $t=\frac{x+1}{x-1}$, тогаш $x=\frac{t+1}{t-1}$, па добиваме

$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t+1}{t-1}. \qquad (1)$$

Да ставиме $t=\frac{x-1}{x+1}$, тогаш $x=\frac{1+t}{1-t}$, па добиваме

$$2f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+t}{1-t}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) наоѓаме $f(t)=\frac{1+t}{1-t}$, следствено $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

XX регионален натпревар - 1997 година

I година

345. Најдете троцифрен број со различни цифри, којшто е пет пати помал од збирот на другите трицифрени броеви запишани со истите цифри. Одредете ги сите решенија!

Решение. Од

$$5\overline{xyz}=\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx},$$

т.е.

$$6\overline{xyz}=\overline{xyz}+\overline{xzy}+\overline{yxz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}+\overline{zyx},$$

добиваме

$$6(100x+10y+z)=222(x+y+z)$$
$$7x=3y+4z$$
$$7(x-z)=3(y-x).$$

Според тоа $7\,|\,(y-z)$ и бидејќи z и y се едноцифрени броеви, добиваме $(y,z)\in\{(8,1),(1,8),(9,2),(2,9)\}$. Со замена во последната равенка ги добиваме броевите $481, 518, 592$ и 629.

346. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=1$$

347А. Докажи дека, ако $a>0, b>0, c>0$, тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Притоа знак за равенство ќе важи ако и само ако $a=b=c$.

Решение 1. Од

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{2a(a+b)(a+c)+2b(b+c)(b+a)+2c(c+a)(c+b)-3(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

Добиваме дека неравенството важи за секои $a>0, b>0, c>0$.

За да го докажеме вториот дел од тврдењето ќе користиме дека, ако $\alpha>0, \beta>0, \gamma>0$, тогаш $\alpha A^2+\beta B^2+\gamma C^2=0$ ако и само ако $A=B=C=0$.

Бидејќи $\frac{1}{2(b+c)(c+a)}>0$, $\frac{1}{2(a+b)(c+a)}>0$, $\frac{1}{2(a+b)(b+c)}>0$ имаме

$$\frac{1}{2(b+c)(c+a)}(a-b)^2+\frac{1}{2(a+b)(c+a)}(b-c)^2+\frac{1}{2(a+b)(b+c)}(a-c)^2=0,$$

ако и само ако $a-b=b-c=c-a=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

Решение 2. Нека ставиме

$$x=b+c, \qquad y=c+a, \qquad z=a+b. \tag{2}$$

Од $a>0, b>0, c>0$ следува $x>0, y>0, z>0$. Од (2) имаме $a=\frac{y+z-x}{2}$, $b=\frac{z+x-y}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$. Со овие трансформации неравенството (1) е еквивалентно на неравенството $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$, т.е. на неравенството

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 6. \tag{3}$$

Од $x>0, y>0, z>0$ следува

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2, \qquad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2, \qquad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2. \tag{4}$$

Ако ги собереме неравенствата (4) го добиваме неравенството (4). Притоа во (4) важи знак за равенство ако и само ако знак за равенство важи во секое од равенствата (3), т.е. ако и само ако $x=y=z$ односно ако и само ако $a=b=c$.

348 А. Одредете ги сите подредени двојки (x,y), $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$ за коишто три од наведените тврдења се точни, а само едно е неточно:

(1) $y\,|\,(x+1)$ (2) $x=2y+5$ (3) $3\,|\,(x+y)$ (4) $x+7y$ е прост број

Решение. Тврдењата (2) и (3) не може истовремено да се точни. Од $x=2y+5$ и $3\,|\,(x+y)$, т.е. $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$ следува $2y+5+y=3k$, $5=3(k-y)$. Последното равенство не е можно, бидејќи десната страна е делива со 3 а левата не е.

Исто така, тврдењата (3) и (4) не можат истовремено да бидат точни. Од $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$, добиваме $x+7y=3k-y+7y=3(k+2y)$, па од $k+2y>1$ повлекува дека $k+2y$ не може да биде прост број за ниедни $k,y\in\mathbb{N}$.

Следствено, треба да се точни (1),(2) и (4). Од (1) следува $x+1=my$, $m\in\mathbb{N}$, па со замена во (2) добиваме:

$$my-1=2y+5\,, \qquad y=\frac{6}{m-2}\,.$$

За да биде y природен број, треба $(m-2)\,|\,6$, т.е.

$$(m-2)\in\{1,2,3,6\} \qquad \text{или} \qquad m\in\{3,4,5,8\}\,.$$

Тогаш добиваме: $(x,y)\in\{(17,6),(11,3),(9,2),(7,1)\}$. За да биде точно и тврдењето (4) треба за овие вредности на x и y изразот $x+7y$ да е прост број, а тоа е точно само за подредените парови $(17,6)$ и $(9,2)$.

349 Б. За кои вредности на природниот број n збирот

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$$

е делив со 10.

Решение. Дадениот збир е еднаков на $4n^2+12n+14=(2n+3)^2+5$ и очигледно е дека е делив со 2 за секој природен број n. Овој збир е делив со 5 ако и само ако $n=5k+1$, $k\in\{0,1,2,3,....\}$.

350 Б. Три уморни патници пристигнале во еден ан и побарале да јадат. Анџијата немал ништо друго да им понуди освен печени компири. Додека компирите се печеле патниците заспале. После некое време, откако компирите биле готови, првиот патник се разбудил, изел $\frac{1}{3}$ од компирите и продолжил да спие, без да ги разбуди останатите патници. Потоа вториот патник се разбудил, изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите компири и легнал да спие. На крајот и третиот патник се разбудил и изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите компири и се вратил да спие. Анџијата сето ова внимателно го набљудувал и кога ги преброил преостанатите компири видел дека се 8.

Колку компири испекол анџијата?

Решение I. Ако со x го означиме бројот на компирите што им ги испекол анџијата, тогаш после постапката на првиот патник останале $x-\frac{1}{3}x$ компири. Вториот патник изел $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)$ компири, после што останале $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)$ компири, од кои третиот патник изел $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)\right)$. Според тоа, анџијата изброил

$$x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)\right)$$

компири. Од досега изнесеното ја добиваме равенката

$$\left(x-\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)\right)=8\,,$$

чие решение е $x=27$ што не е тешко да се добие.

Значи, анџијата испекол 27 компири.

Решение II. Очигледно третиот патник затекнал 12 компири, бидејќи земал $\frac{1}{3}$ од нив, а останале $\frac{2}{3}$, т.е 8. На сличен начин заклучуваме дека вториот патник затекнал 18 компири, бидејќи зел $\frac{1}{3}$ од нив, а останале $\frac{2}{3}$, т.е. 12. Првиот патник оставил 18 компири што е $\frac{2}{3}$ од компирите што ги затекнал. Значи, тој затекнал 27 компири.

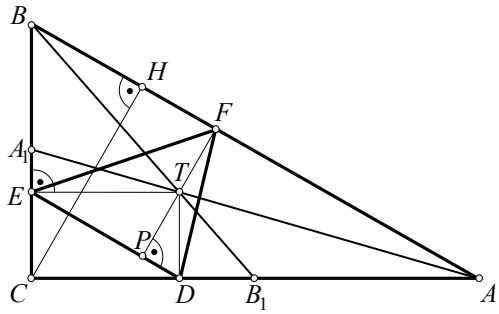
II година

351. Плоштината на еден правоаголен триаголник е $45\ \text{cm}^2$. Најдете ја плоштината на триаголникот, чии темиња се ортогонални проекции на тежиштето врз страните на триаголникот.

Решение. Нека D, E и F се ортогоналните проекции на тежиштето T на триаголникот ABC на страните AC, BC и AB, соодветно. Ќе докажеме дека $P_{\Delta DEF}=\frac{2}{3}P$, каде што P е плоштината на триаголникот ABC. Очигледно, четириаголникот $CDTE$ е правоаголник, па според Талсовата теорема добиваме:

$$\overline{CD}:\overline{CA}=\overline{A_1T}:\overline{AA_1}=1:3,$$

$$\overline{CE}:\overline{CB}=\overline{B_1T}:\overline{BB_1}=1:3.$$



Оттука следува дека $DE \parallel AB$ и $\overline{DE}=\frac{1}{3}\overline{AB}$. Ако $FP \perp DE$, т.е. $FP \perp AF$ тогаш $FP \parallel CH$ и $\overline{FP}=\frac{2}{3}\overline{CH}$.

За плоштината на триаголникот ΔDEF добиваме

$$P_{DEF}=\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{FP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\overline{AB}\cdot\frac{2}{3}\overline{CH}=\frac{2}{9}P.$$

Во нашиот случај добиваме $P_{DEF}=\frac{2}{9}\cdot 45=10$.

Значи, бараната плоштина е $10\ \text{cm}^2$.

352. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$\sqrt{\underbrace{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}_{1997-\text{корени}}}=y. \qquad (1)$$

Решение. Од (1) имаме $x\geq 0$, $y\geq 0$. Ако дадената равенка ја квадрираме, па од десната страна го префрлиме x и постапката ја повториме 1995 пати, тогаш добиваме равенка во облик

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=m\,,\qquad m\in\mathbb{N}_{\circ}\,. \tag{2}$$

Со квадрирање на последната равенка наоѓаме

$$x+\sqrt{x}=m^2\,.$$

Од $x,m\in\mathbb{N}_{\circ}$ од (2) ќе следува дека $x=k^2,k\in\mathbb{N}_{\circ}$.

Ќе разгледаме два случаи.

Ако $k=0$, тогаш од $x=0$ и од (1) добиваме $y=0$.

Нека $k>0$. Тогаш од (2) добиваме $k^2+k=m^2$. Но, за $k>0$ важи

$$k^2<k^2+k<(k+1)^2\,,$$

од што следува $k^2<m^2<(k+1)^2$, т.е. квадрат на природен број се наоѓа меѓу квадратите на два последователни природни броја што е противречност.

Значи, единствено решение на дадената равенка е $x=0,y=0$.

353 А. Нека p_1, p_2, q_1, q_2 се реални броеви такви што

$$p_1p_2=2(q_1+q_2)\,.$$

Докажи дека барем една од равенките

$$x^2+p_1x+q_1=0\,,\quad x^2+p_2x+q_2=0$$

има реални корени.

Решение. Нека претпоставиме дека ниту една од дадените равенки нема реален корен. Тогаш $p_1^2-4q_1<0$ и $p_2^2-4q_2<0$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме

$$p_1^2-4q_1+p_2^2-4q_2<0$$
$$p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)<0\,,$$
$$p_1^2+p_2^2-2p_1p_2<0$$
$$(p_1-p_2)^2<0\,,$$

што е противречност.

354 А. Нека во комплексната рамнина на точките A,B,C и D соодветствуваат комплексните броеви z_j, $j=1,2,3,4$ такви што $|z_j|=1$, $j=1,2,3,4$ и

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0\,. \tag{1}$$

Докажете дека четириаголникот $ABCD$ е правоаголник.

Решение. Квадратите на должините на страните на четириаголникот се еднакви на $|z_1-z_2|^2$, $|z_2-z_3|^2$, $|z_3-z_4|^2$ и $|z_4-z_1|^2$.

Бидејќи точките A и B лежат на единечната кружница добиваме

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\,.$$

Аналогно добиваме $|z_2-z_3|^2=2-(z_2\overline{z_3}+\overline{z_2}z_3)$, $|z_3-z_4|^2=2-(z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4)$, $|z_4-z_1|^2=2-(z_4\overline{z_1}+\overline{z_4}z_1)$.

Од условот (1) следува $z_1+z_2=-(z_3+z_4)$ и $\overline{z_1}+\overline{z_2}=-(\overline{z_3}+\overline{z_4})$. Ако ги помножиме овие равенства, добиваме $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4$. Според тоа,

$|z_1 - z_2|^2 = |z_3 - z_4|^2$, т.е. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_4|$.

Аналогно се докажува дека $|z_2 - z_3| = |z_4 - z_1|$.

Конечно, тетивниот четириаголник $ABCD$ е паралелограм, што значи дека тој е правоаголник.

355 Б. Нека p и q се реални броеви такви што за корените x_1 и x_2 на равенката $x^2 + px + q = 0$, важи $|x_1| = |x_2| = 1$. Докажи дека $\frac{p^2}{q} \geq 0$.

Решение. Од Виетовите правила за корените x_1 и x_2, добиваме

$$p = -(x_1 + x_2), \qquad q = x_1 x_2.$$

Од $|x_1| = |x_2| = 1$ следува $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = 1$, па затоа $-1 \leq \mathrm{Re}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \leq 1$. Според тоа,

$$\frac{p^2}{q} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{\overline{x_1}}{\overline{x_2}} = 2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \geq 0.$$

356 Б. Нека z е комплексен број таков што $z + \frac{1}{z} = 1$. Пресметајте ја вредноста на изразот

$$z^{1993} + z^{1994} + z^{1995} + z^{1996} + z^{1997}.$$

Решение. Од $z + \frac{1}{z} = 1$, добиваме

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = -1.$$

Од $z + \frac{1}{z} = 1$ добиваме $z^2 - z + 1 = 0$, од што следува $(z^2 - z + 1)(z + 1) = 0$, $z^3 + 1 = 0$, т.е. $z^3 = -1$.

Според тоа,

$$z^{1993} + z^{1994} + z^{1995} + z^{1996} + z^{1997} = z^{1995}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2\right) =$$

$$= z^{1995} = (z^3)^{665} = (-1)^{665} = -1.$$

III година

357. Во множеството на реалните броеви реши ја равенката

$$\sqrt{3x - a} = a - 2x. \qquad (1)$$

Решение. Ако ја квадрираме дадената равенка добиваме:

$$4x^2 - (4a + 3)x + a^2 + a = 0.$$

Значи, $x_{1/2} = \frac{4a + 3 \pm \sqrt{8a + 9}}{8}$. Да провериме дали најдените решенија ја задоволуваат почетната равенка. Десната страна има вредност

$$a - 2x = \frac{-3 \mp \sqrt{8a + 9}}{8}.$$

Бидејќи $a - 2x$ е ненегативен број, добиваме дека корен може да биде само

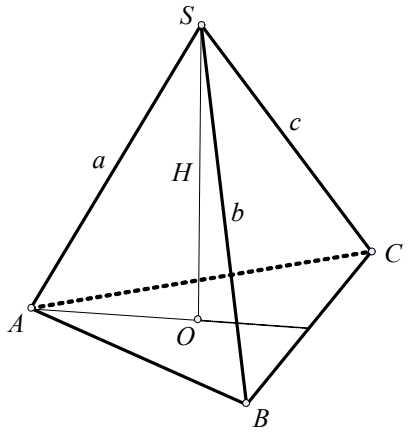
$$x_1 = \frac{4a+3-\sqrt{8a+9}}{8}. \qquad (2)$$

Освен тоа, од (1) очигледно е дека $a \geq 0$, па затоа:

$$a-2x = \frac{-3+\sqrt{8a+9}}{4} = \sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{8a+9}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+4a-6\sqrt{8a+9}}{8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12a+9-6\sqrt{8a+9}}{8} - a} = \sqrt{3x-a}$$

358. Бочните рабови на тетраедарот $SABC$ се меѓу себе нормални. Докажете дека $P_1+P_2+P_3 \geq \frac{9}{2}H^2$, каде P_1, P_2, P_3 се мерните броеви на плоштините на бочните страни на тетраедарот, а H е мерниот број на неговата висина.



Решение. Нека $\overline{SA}=a$, $\overline{SB}=b$, $\overline{SC}=c$. Тогаш

$$P_1 = \frac{1}{2}ab,\ P_2 = \frac{1}{2}bc,\ P_3 = \frac{1}{2}ac.$$

Од $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ добиваме

$$P_1+P_2+P_3 = \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \qquad (1)$$

Од друга страна правата SO на која лежи висината H образува агли α,β,γ за кои важи:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

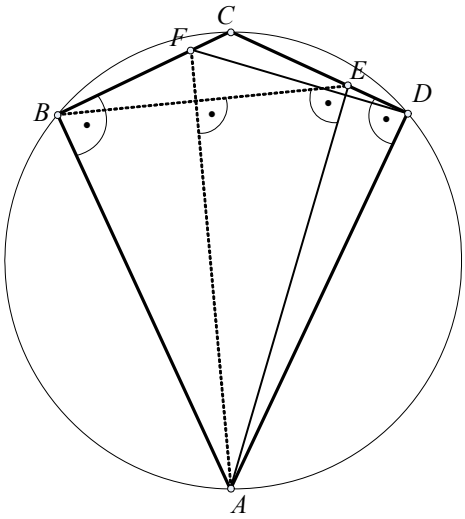
Во нашиот случај е $\frac{H^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{H^2}{c^2}=1$, или

$$H^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \leq \frac{a^2b^2c^2}{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

т.е.

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 3H^2. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) имаме $P_1+P_2+P_3 \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{9}{2}H^2$.



359 А. Даден е четириаголникот $ABCD$, во кој $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$. На страните BC и CD се избрани точки F и E, соодветно, такви што $DF \perp AE$. Докажи дека $AF \perp BE$.

Решение. Знаеме дека дијагоналите на еден четириаголник се заемно нормални ако и само ако збировите на квадратите на неговите спротивни страни се еднакви. Од

$DF \perp AE$, следува дека

$$\overline{AD}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{ED}^2 . \qquad (1)$$

Но, $\overline{AB} = \overline{AD}$, па затоа (1) е еквивалентно на

$$\overline{AB}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{ED}^2 . \qquad (2)$$

Од правоаголните триаголници FBA и EDA добиваме:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AF}^2 , \ \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 . \quad (3)$$

Од (2) и (3) имаме

$$\overline{BF}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2 =$$
$$= \overline{AF}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{FE}^2 ,$$

т.е. важи $\overline{BF}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{FE}^2$, што значи $AF \perp BE$.

360 А. Во множеството на целите броеви решете ја равенката

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = \operatorname{arctg}\frac{1}{10} .$$

Решение. Ако користиме дека $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha) = \alpha$, за секое $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 1$, добиваме дека дадената равенка е еквивалентна по ред со равенките

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{10}\right),$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{1}{10},$$

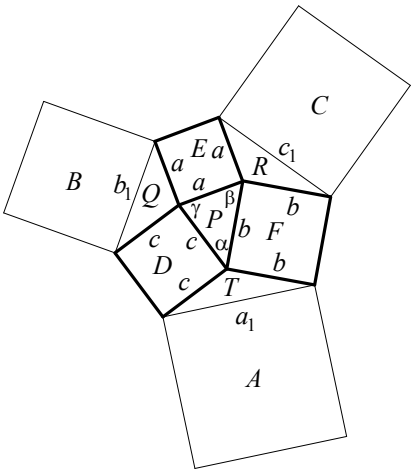
$$(x-10)(y-10) = 101 .$$

Бидејќи 101 е прост број од последната равенка ги добиваме системите

$$\begin{cases} x-10 = 1 \\ y-10 = 101 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-10 = -1 \\ y-10 = -101 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-10 = 101 \\ y-10 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-10 = -101 \\ y-10 = -1 \end{cases},$$

чии решенија се поредените парови $(11,111), (9,-91),$ $(111,11), (-91,9)$,соодветно. Конечно, решение е секој подреден пар

$$(x, y) \in \{(11,111), (9,-91), (111,11), (-91,9)\} .$$



361 Б. Шест квадрати се поставени како што е прикажано на цртежот. Најдете го односот на збирот плоштините на квадратите A, B и C и на збирот на плоштините на квадратите E, F и D .

Решение. Да означиме

$$P_1 = P_A + P_B + P_C$$

и

$$P_2 = P_E + P_F + P_D .$$

Очигледно:

$$P_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

и

$$P_2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

Од косинусната теорема, применета за триаголникот T, добиваме

$$a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha ,$$

односно

$$a_1^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha . \tag{1}$$

Слично, од триаголниците Q и R наоѓаме

$$b_1^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta , \tag{2}$$

$$c_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma . \tag{3}$$

Ако од (1), (2) и (3) замениме во релацијата за P_1 добиваме

$$P_1 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta . \tag{4}$$

Слично, од триаголникот P наоѓаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha , \tag{5}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta , \tag{6}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma . \tag{7}$$

Ако ги собереме (4), (5), (6) и (7) добиваме

$$P_1 = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3P_2 ,$$

па затоа $\frac{P_1}{P_2} = 3$.

362 Б. Нека a и b се позитивни реални броеви за кои што важи

$$a^{1997} + b^{1997} = a^{1995} + b^{1995} .$$

Докажи дека $a^2 + b^2 \le 2$.

Решение. Ако еден од броевите a или b е еднаков на 1, тогаш од (1) следува дека и другиот е еднаков на 1, па затоа $a^2 + b^2 \le 2$. Нека претпоставиме дека $a \ge b$ и $b \ne 1$. Ќе докажеме дека од

$$a^{n+2} + b^{n+2} = a^n + b^n$$

следува $a^2 + b^2 \le 2$.

Ќе разгледаме два случаи:

1. Ако $1 - b^2 > 0$, тогаш

$$a^{n+2} - a^n = b^n - b^{n+2}$$

$$a^n(a^2 - 1) = b^n(1 - b^2)$$

$$\frac{a^2-1}{1-b^2}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n\le 1$$

па затоа $a^2-1\le 1-b^2$, т.е. $a^2+b^2\le 2$.

2. Ако $1-b^2<0$, тогаш $1<b^2$ и $1<b^2<a^2$ па затоа $b^n<b^{n+2}$ и $a^n<a^{n+2}$, т.е.

$$a^{n+2}+b^{n+2}>a^n+b^n,$$

што е противречност.

IV година

363. Пополнете ги празните полиња во таблицата така што броевите во секоја редица и во секоја колона да формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека броевите од првата редица формираат аритметичка прогресија со разлика d, а броевите од втората колона формираат аритметичка прогресија со разлика d_1. Тогаш важат следните равенства: $21=k+4d$, $1=k+4d_1$, од каде што добиваме

k		n		21
l	16	m		
		27		
1				

$$d-d_1=5. \qquad (1)$$

За елементите k,l,m,n важат следните равенства

$$l=k+d_1 \qquad (2)$$

$$n=k+2d \qquad (3)$$

$$n=l+2(16-l) \qquad (4)$$

$$27=n+2(m-n). \qquad (5)$$

Ако од (2), (3) и (4) замениме во (5) и земеме предвид дека $k=l-4d_1$ добиваме

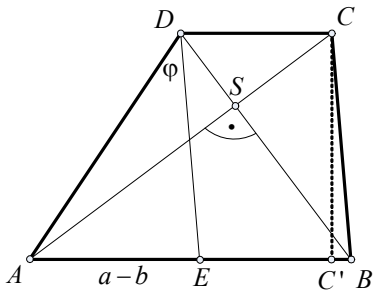
$$5d_1-d=-17 \qquad (6)$$

Од (1) и (6) наоѓаме $d=2$, $d_1=-3$. Сега можеме да ја пополниме таблицата.

13	15	17	19	21
10	16	22	28	34
7	17	27	37	47
4	18	32	46	60
1	19	37	55	73

364. Даден е трапез со основи a и b ($a>b$), висина h, заемно нормални дијагонали и агол меѓу краците еднаков на φ.

Докажи дека $\frac{1}{h}=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\mathrm{ctg}\varphi$.



Решение. Да го разгледаме триаголникот ΔAED. Од косинусната теорема добиваме

$$\overline{AE}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{DE}\cos\varphi,$$

т.е.

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2-\overline{AE}^2}{2\overline{AD}\cdot\overline{DE}}.$$

Од друга страна имаме

$$P_{\Delta AED}=\frac{1}{2}\overline{AE}\cdot h \quad \text{и} \quad P_{\Delta AED}=\overline{DE}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\varphi,$$

па затоа

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AE}\cdot h}{\overline{DE}\cdot\overline{AD}}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\mathrm{ctg}\varphi = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2}{2\overline{AE}\cdot h}\,.$$

Бидејќи дијагоналите на трапезот се заемно нормални, имаме $\overline{AD}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SD}^2$, $\overline{DE}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{SC}^2$, од каде следува

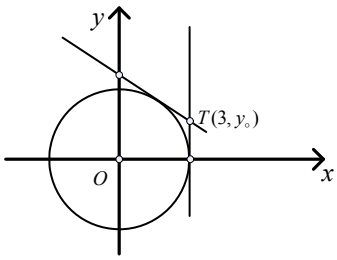
$$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2) + (\overline{SD}^2 + \overline{SC}^2) = a^2 + b^2\,.$$

Ако последното равенство го замениме во (3) и земеме во предвид дека $\overline{AE} = a - b$, го добиваме равенството: $ctg\varphi = \dfrac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2(a-b)h}$, кое е еквивалентно на равенството

$$\frac{1}{h} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\mathrm{ctg}\varphi\,.$$

365 А. На правата $x = 3$ најди точка T таква што трапезот формиран од двете тангенти повлечени од точката T кон кружницата $x^2 + y^2 = 9$ и координатните оски има најмала плоштина.

Решение. Едната тангента повлечена од T кон дадената кружница има равенка $x = 3$. Точката T има координати $(3, y_\circ)$. Нека равенката на втората тангента е $y = kx + l$. Тогаш важи



$$9(1 + k^2) = l^2\,. \qquad (1)$$

Бидејќи точката $T(3, y_\circ)$ лежи на $y = kx + l$, добиваме

$$y_\circ = 3k + l\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$k = \frac{y_\circ^2 - 9}{6y_\circ}\,,\quad l = \frac{y_\circ^2 + 9}{2y_\circ}\,.$$

Сега зап лоштината на трапезот добиваме

$$P = \frac{3(y_\circ + l)}{2} = \frac{9}{4}\left(y_\circ + \frac{3}{y_\circ}\right) \ge \frac{9}{4}\sqrt{y_\circ \cdot \frac{3}{y_\circ}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $y_\circ = \dfrac{3}{y_\circ}$, т.е. ако и само ако $y_\circ = \pm\sqrt{3}$.

Конечно, бараните точки се $T(3, \pm\sqrt{3})$, а максималната плоштина е $\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ квадратни единици.

366 А. Нека е $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ произволна пермутација на множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Ако n е непарен број, докажи дека производот

$$(p_1 - 1)(p_2 - 2)...(p_n - n)$$

е парен број.

Решение. Доволно е да се докаже дека за некој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ бројот $p_k - k$ е парен. Ќе претпоставиме спротивно, т.е. дека за секој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ бројот $p_k - k$ е непарен број. Бидејќи n е непарен број, бројот

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k - k) = \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} k = 0$$

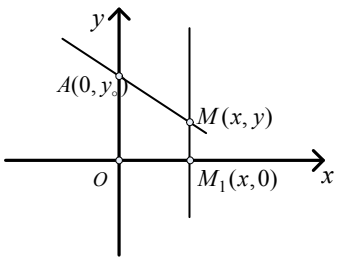
треба да е непарен, што е противречност.

367 Б. Најдете го геометриското место на точки во рамнината за кои што квадратите на растојанијата од дадена точка и од дадена права е константа.

Решение. Нека точката A не лежи на правата l. Во рамнината избираме координатен систем таков што x-оската се совпаѓа со правата l, а точката A лежи на y оската. Точката A има координати $(0, y_\circ)$, $y_\circ \neq 0$.

Нека $M(x,y)$ е произволна точка од бараното геометриско место на точки и нека $MM_1 \perp l$, $M_1(x,0)$. По услов е:

$$\overline{MA}^2 - \overline{MM_1}^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$



Оттука наоѓаме:

$$x^2 + (y - y_\circ)^2 - y^2 = c,$$

$$x^2 + y_\circ^2 - 2yy_\circ = c,$$

$$y = \frac{1}{2y_\circ}x^2 + \frac{y_\circ^2 - c}{2y_\circ}.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е параболата. Притоа:

1. Ако $y_\circ^2 = c$, параболата ја допира правата l.

2. Ако $A \in l$, тогаш $y_\circ = 0$, па бараното геометриско место при $c > 0$ се две прави, нормални на правата l и на растојание $\sqrt{c}$ од точката A. При $c = 0$ правите се совпаѓаат, а при $c < 0$ бараното множество точки е празно.

368 Б. Функцијата f ги задоволува условите

а) $f(0) = 1$

б) За секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$1 + f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) = f(n). \qquad (1)$$

Пресметајте го збирот

$$S = f(0)^2 + f(1)^2 + \ldots + f(n-1)^2 + f(n)^2.$$

Решение. Ако во равенството (1) наместо n ставиме $n-1$ добиваме

$$1 + f(0) + f(1) + \ldots + f(n-2) = f(n-1). \qquad (2)$$

Од (2) заменуваме во (1) и добиваме

$$f(n) = 2f(n-1). \qquad (3)$$

Од $f(0) = 1$ и од (3), за $n = 1,2,3$ наоѓаме

$$f(1) = 2f(0) = 2 \cdot 1,$$

$$f(2) = 2f(1) = 2 \cdot 2 = 2^2,$$

$$f(3) = 2f(2) = 2 \cdot 2^2 = 2^3.$$

Ќе докажеме дека $f(n) = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

За $n=1$ тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=k$, т.е. дека $f(k)=2^k$. Од претпоставката и од (3), за $n=k+1$ имаме

$$f(k+1)=2f(k)=2\cdot 2^k=2^{k+1},$$

т.е. тврдењето е точно и за $n=k+1$. Од принципот на математичка индукција следува дека

$$f(n)=2^n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Конечно, з абараниот збир добиваме

$$S=f(0)^2+f(1)^2+...+f(n-1)^2+f(n)^2=1^2+2^2+(2^2)^2+...+(2^n)^2=$$
$$=1+4+4^2+...+4^n=\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1).$$

XXI регионален натпревар - 1998 година

I година

369. Тројца патници седнале да јадат. Првиот извадил 3 сомуни, а вториот 4 сомуни. Ги поделиле седумте сомуни на три еднакви делови и ги изеле. Третиот патник извадил 7 гроша и им рекол: „Јас немав сомуни, но еве ви давам 7 гроша, а вие поделете си ги правилно”.

Колку гроша му припаѓаат на првиот, а колку на вториот патник?

Решение. Секој патник изел $\frac{7}{3}$ од сомуните. Третиот патник ги платил своите $\frac{7}{3}$ со 7 гроша-значи секоја третина сомун ја платил по 1 грош.

Првиот патник донел 3 сомуни, т.е. $\frac{9}{3}$, а изел $\frac{7}{3}$, што значи на третиот патник му дал $\frac{2}{3}$. Слично, вториот патник донел $\frac{12}{3}$, а изел $\frac{7}{3}$, што значи на третиот патник му дал $\frac{5}{3}$ од сомуните. Конечно, првиот патник треба да добие 2 гроша, а вториот патник 5 гроша.

370. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$. Ако

$$S_k=b_1+b_2+...+b_k,\ k=1,2,3...,n,$$

докажи дека

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+...+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n.$$

Решение. Од $S_1=b_1$, $S_2=b_1+b_2$, $S_3=b_1+b_2+b_3,\ldots$ следува:

$$b_1=S_1,\ b_2=S_2-S_1,\ b_3=S_3-S_2,\ldots,\ b_n=S_n-S_{n-1}.$$

Понатаму имаме

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+a_3(S_3-S_2)+...+a_n(S_n-S_{n-1})=$$
$$=a_1S_1+a_2S_2-a_2S_1+a_3S_3-a_3S_2+...+a_nS_n-a_nS_{n-1}=$$
$$=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+...+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n$$

371 А. Дадена е низата броеви $1,1,2,3,7,22,155,...$ во која секој член, почнувајќи од третиот, е еднаков на производот од претходните два члена зголемен за 1. Докажи дека ниеден член на низата не е делив со 4.

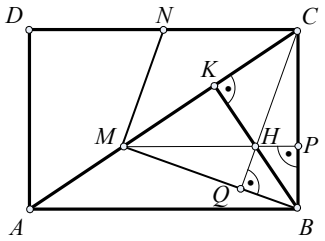
Решение. Лесно се воочува дека по секои два непарни членови на низата, следува парен член, по него два непарни, па пак парен, итн. Доволно е да докажеме дека ниту еден од парните членови не е делив со 4. За таа цел избираме пет последователни членови на низата: a, b, c, d, e од кои b, e се парни; a, c, d се непарни. Тогаш:

$$c = ab + 1,\ d = bc + 1, \qquad e = cd + 1 = (ab+1)(bc+1) + 1 = ab^2c + b(a+c) + 2 .$$

Бидејќи b е парен број, следува $4 \mid ab^2c$. Производот $b(a+c)$ е исто така делив со 4, бидејќи b е парен и збирот $a+c$ е парен број. Значи, првите два собироци се деливи со 4, а третиот не, па оттука заклучуваме дека e не е делив со 4.

372 А. Во правоаголникот $ABCD$ е повлечена нормалата BK на дијагоналата AC. Точките M и N се средини на отсечките AK и CD, соодветно. Докажи дека $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

Решение I. Нека $BK \perp AC$ (види цртеж). Тогаш BK е висина во триаголникот ΔMBC. Да ги повлечеме другите две висини MP и CQ и нека тие се сечат во точката H, која е ортоцентар на триаголниккот ΔMBC.



Бидејќи $MP \perp BC$ и M е средина на отсечката AK, следува дека MH е средна линија во триаголникот ABK, па имаме:

$$\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB}, \qquad MH \parallel NC .$$

Оттука следува дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN \parallel CH$. Но, $CH \perp MB$, па следува дека и $MN \perp MB$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

Решение II. Како и во решението 1 докажуваме дека четириаголникот $MHCN$ е паралелограм, т.е. $MN \parallel CH$. Но, тогаш четириаголникот $MQCN$ е трапез, па следува $\measuredangle QMN + \measuredangle MQC = 180^\circ$, од каде што, поради $\measuredangle MQC = 90^\circ$ следува $\measuredangle QMN = 90^\circ$, т.е. $\measuredangle BMN = 90^\circ$.

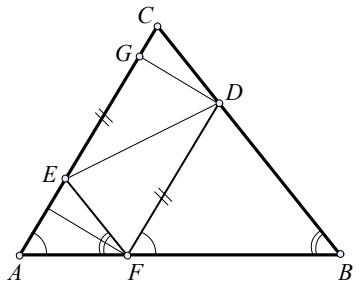
373 Б. Одреди го најмалиот природен број, на кој производот на цифрите е еднаков на 75600.

Решение. Го разложуваме бројот 75600 на прости множители и добиваме $75600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Бидејќи сите прости делители на 75600 се едноцифрени броеви, тоа значи дека постои број таков што производот на неговите цифри е еднаков на 75600.

Бараниот број ги содржи цифрите $5,5$ и 7, бидејќи со множење на кој било од броевите $2,3,5,7$ со 5 или 7 се добива број поголем од 9. Производот $2^4 3^3$ можеме да го запишеме со најмногу 7 цифри ($2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$), а со најмалку 3 цифри ($6\cdot8\cdot9$). Бидеји се бара најмалиот природен број, заклучуваме дека тој се запишува со цифрите $6,8,9,5,5,7$, а тоа е бројот 556789.

374 Б. На страната AB на триаголникот ABC е избрана произволна точка F, а точките D и E се на страните BC и AC, такви што $FD \parallel AC$ и $FE \parallel BC$. Изрази ја плоштината P на триаголникот CDE преку плоштините P_1 и P_2 на триаголниците AFE и BDF.

Решение. Од условот на задачата следува дека $FDCE$ е паралелограм, па важи $\overline{FD} = \overline{EC}$. Триаголниците AFE и FDB се слични, и заради $\overline{FD} = \overline{EC}$ добиваме



$$P_1 : P_2 = \overline{AE}^2 : \overline{FD}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{EC}^2 . \qquad (1)$$

Понатаму, триаголниците AFE и EDC имаат еднакви висини ($\overline{FH} = \overline{DG}$), па имаме

$$P_1 : P = \overline{AE} : \overline{EC} . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $P_1 : P_2 = P_1^2 : P^2$, т.е. $P = \sqrt{P_1 P_2}$.

II година

375. Ако z и w се комплексни броеви такви што $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} w > 0$, тогаш $\left|\frac{z-w}{\bar{z}+w}\right| < 1$. Докажи!

Решение I. Нека $z = x + iy$, $w = a + ib$. Тогаш

$$\left|\frac{z-w}{\bar{z}+w}\right| = \frac{|z-w|}{|\bar{z}+w|} = \frac{|(x-a)+(y-b)i|}{|(x+a)+(-y+b)i|} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x+a)^2+(b-y)^2}} .$$

Ако $x > 0$ и $a > 0$, тогаш $(x-a)^2 < (x+a)^2$, а $(y-b)^2 = (b-y)^2$, па затоа поткореновата величина на броителот е секогаш помала од онаа на именителот, т.е. дропката е помала од 1, со што тврдењето е докажано.

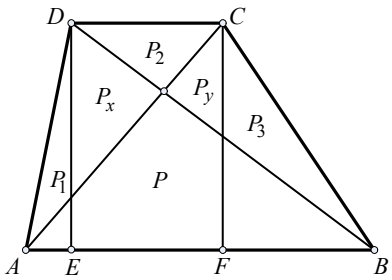
Решение II. Од $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$ и од својствата на комплексните броеви имаме

$$|z-w|^2 - |\bar{z}-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) - (\bar{z}+w)(z+\bar{w}) = z\bar{z} - \bar{z}w - z\bar{w} + w\bar{w} - z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} =$$
$$= -[z(w+\bar{w}) + \bar{z}(w+\bar{w})] = -(w+\bar{w})(z+\bar{z}) = -4\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w < 0 ,$$

т.е. $|z-w|^2 < |\bar{z}+w|^2$, од што следува $\left|\frac{z-w}{\bar{z}+w}\right| < 1$.

376. Низ крајните точки на помалата основа на трапезот $ABCD$ се повлечени две паралелни прави, коишто заедно со дијагоналите го делат трапезот на седум триаголника и еден петаголник. Докажи дека плоштината на тој петаголник е еднаква на збирот на плоштините на трите триаголници, чија што една страна е или крак или помалата основа на трапезот.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со помала основа CD. Повлекуваме две паралелни прави низ C и D кои ја сечат поголемата основа (за да имаме 7 триаголници, види цртеж). Нека со P ја означиме плоштината на петаголникот, а со P_1, P_2, P_3 плоштините на триаголниците чија една страна е кракот AD, помалата основа CD и кракот BC, соодветно.



Најпрво да забележиме дека $P_{ACD} = P_{BCD}$. Од друга страна четириаголникот $EFCD$ е параллелограм чија плоштина е двапати поголема од плоштината на секој од триаголниците ACD, односно BCD. Според тоа

$$P + P_x + P_2 + P_y = P_1 + P_x + P_2 + P_y + P_2 + P_3 ,$$

т.е.

$$P = P_1 + P_2 + P_3 .$$

377 А. Најди ги сите позитивни броеви a, за коишто и двата корена на равенката $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ се цели броеви.

Решение. Равенката ќе има реални решенија, ако $D\geq 0$, т.е.

$$0\leq a^2-4a^2(1-7a^2)=a^2(28a^2-3),$$

од каде што добиваме $a^2\geq\frac{3}{28}$, т.е. $\frac{1}{a}\leq\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Од Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-\frac{1}{a}$. Бидејќи x_1 и x_2 се цели броеви, следува дека и $-\frac{1}{a}$ е цел број, а од $a>0$ заклучуваме дека $\frac{1}{a}$ е природен број. Единствени природни броеви за кои важи $\frac{1}{a}\leq\sqrt{\frac{28}{3}}$ се броевите $1,2$ и 3. Значи, $a\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$. За овие вредности на a соодветните вредности на дискриминантите се $D_1=25$, $D_{\frac{1}{2}}=1$, $D_{\frac{1}{3}}=\frac{1}{81}$, а соодветните решенија на равенките се: -3 и 2; -3 и 1; -2 и -1.

378 А. Ако x,y,z и $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ се рационални броеви, тогаш и $\sqrt{x},\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ се исто така рационални броеви. Докажи!

Решение. Ако $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=r$, $r\in\mathbb{Q}$, тогаш $\sqrt{y}+\sqrt{z}=r-\sqrt{x}$. Последниот израз го квадрираме и го добиваме изразот

$$2\sqrt{zy}=(r^2+x-z-y)-2r\sqrt{x},$$

од кој со повторно квадрирање добиваме

$$4yz=(r^2+x-y-z)^2+4r^2x-4r(r^2+x-z-y)\sqrt{x}.$$

Бидејќи x,y,z и r се рационални броеви, заклучуваме дека и $\sqrt{x}$ е рационален број. На сличен начин заклучуваме дека и $\sqrt{y}$, односно $\sqrt{z}$ е рационален број.

379 Б. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{13}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3} \\ xyz=1 \end{cases}$$

Решение. Имаме: $y+z=\frac{13}{3}-x$, $x(y+z)=\frac{13}{3}-yz$, $zy=\frac{1}{x}$. Ако од првата и третата равенка замениме во втората ја добиваме равенката

$$x\left(\frac{13}{3}-x\right)=\frac{13}{3}-\frac{1}{x},$$

која е еквивалентна на равенката $13x^2-3x^3-13x+3=0$, т.е. на равенката

$$(x-1)(3x^2-10x+3)=0.$$

Решенија на последната равенка се

$$x_1=1,\qquad x_2=3,\qquad x_3=\frac{1}{3}.$$

Бидејќи равенките во системот се симетрични заклучуваме дека решенија на системот се следните шест подредени тројки

$\left(1,3,\frac{1}{3}\right)$, $\left(1,\frac{1}{3},3\right)$, $\left(\frac{1}{3},1,3\right)$, $\left(\frac{1}{3},3,1\right)$, $\left(3,1,\frac{1}{3}\right)$, $\left(3,\frac{1}{3},1\right)$.

380 Б. Ако за реалните броеви a,b,c важи: $a>0$ и $b>a+c$, тогаш равенката $ax^2+bx+c=0$ има две реални решенија. Докажи!

Решение. Треба да докажеме дека од $a>0$ и $b>a+c$ следува $D>0$.

1) Ако $c<0$, тогаш поради $a>0$ имаме $D=b^2-4ac\geq -4ac>0$.

2) Ако $c\geq 0$, тогаш од неравенствата $a>0$ и $b>a+c$ ги добиваме неравенствата $a+c>0$ и $b>a+c>0$. Од последното неравенство следува дека

$$D=b^2-4ac>(a+c)^2-4ac=(a-c)^2>0.$$

III година

381. Реши ја равенката $x^2+3+\log_2(x^2-4x+6)=4x$.

Решение. Ја запишуваме равенката во видот

$$\log((x-2)^2+2)=1-(x-2)^2.$$

Бидејќи

$$\log((x-2)^2+2)\geq \log_2 2=1$$

следува

$$\log((x-2)^2+2)\geq 1\geq 1-(x-2)^2.$$

Равенство е исполнето за $x-2=0$, т.е. $x=2$ кое е и единствено решение на равенката.

382. Рамнината Σ ги сече бочните рабови A_1S,B_1S,C_1S,D_1S на правилна четириаголна пирамида $A_1B_1C_1D_1S$ во точки чии растојанија до врвот на пирамидата се a,b,c,d соодветно. Докажи дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

Решение. Да го означиме со φ аголот што висината го зафаќа со бочните рабови на пирамидата и пресечните точки на рамнината со бочните рабови на пирамидата да ги означиме со A,B,C,D соодветно. Тогаш

$$\overline{SA}=a,\quad \overline{SB}=b,\quad \overline{SC}=c,\quad \overline{SD}=d.$$

Од триаголникот ACS имаме $P_{ASC}=P_{AOS}+P_{OSC}$, па затоа

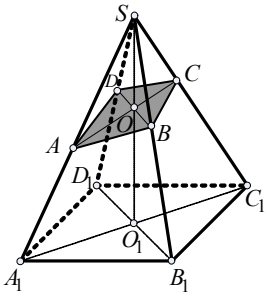
$$\frac{1}{2}ac\cos 2\varphi=\frac{1}{2}a\cdot\overline{SO}\sin\varphi+\frac{1}{2}c\cdot\overline{SO}\sin\varphi.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\frac{2\cos\varphi}{\overline{SO}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}. \qquad (1)$$

Аналогно, од триаголникот BDS добиваме:

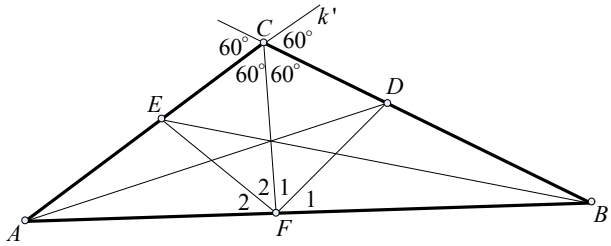
$$\frac{2\cos\varphi}{\overline{SO}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}. \qquad (2)$$



Од равенствата (1) и (2) следува $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

383 А. Нека во триаголникот ABC аголот при врвот на темето C е 120° и нека биектрисите на аглите во темињата A,B,C ги сечат спротивните страни во точките D,E,F, соодветно. Докажи дека $\measuredangle DEF=90^\circ$.

Решение. Нека AD, BE, CF се бисектриси на аглите α, β, γ во триаголникот ABC (види цртеж). Очигледно CD е бисектриса на $\measuredangle KCF$, а AD на $\measuredangle CAB$. Затоа FD е бисектриса на $\measuredangle CFB$ (на надворешниот агол кај темето F на триаголникот AFC -бисектрисите се сечат во една точка која е центар на припишаната кружница). Значи, $\measuredangle CFD = \measuredangle BFD = \measuredangle 1$.



Слично, FE е бисектриса на $\measuredangle AFC$, па следува

$$\measuredangle AFE = \measuredangle EFC = \measuredangle 2 .$$

Оттука следува дека

$$\measuredangle EFD = \measuredangle 1 + \measuredangle 2 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ .$$

384 А. Ако решенијата на равенката $x^3 + ax^2 + 3x - 1 = 0$ се позитивни реални броеви, тогаш тие се меѓусебно еднакви и притоа $a = -3$. Докажи!

Решение. Од Виетовите формули за равенката добиваме:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a , \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 , \qquad x_1x_2x_3 = 1 .$$

Ако второто равенство го поделиме со $x_1x_2x_3$ добиваме

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3 .$$

Од неравенството меѓу хармониска и геометриска средина за позитивните броеви x_1, x_2, x_3 добиваме

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} \le \sqrt[3]{x_1x_2x_3} = 1 , \text{ т.е. } \quad 3 \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} .$$

Но, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3$, што значи дека меѓу овие две средини важи знак за равенство , а тоа е можно ако и само ако $x_1 = x_2 = x_3$.

385 Б. Ако за реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ важи

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 = 1 ,$$

тогаш $| a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n | \le 1$. Докажи!

Решение I. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$| a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n | \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} = \sqrt{1}\sqrt{1} = 1$$

Решение II. Користејќи ги неравенствата $| x + y | \le | x | + | y |$, $| xy | \le \frac{x^2 + y^2}{2}$ добиваме

$$| a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n | \le | a_1b_1 | + | a_2b_2 | + ... + | a_nb_n | \le \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} + ... + \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} =$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

386 Б. Докажи дека $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$.

Решение. Нека $x=\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$. Равенството го множиме со $8\cos\frac{\pi}{14}$ и добиваме

$$8x\cdot\cos\frac{\pi}{14}=8\cos\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=4\sin\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=$$

$$=2\left(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}\right)\sin\frac{3\pi}{14}=2\cos\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}=\sin\frac{6\pi}{14}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{6\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{14}.$$

Следствено, $8x=1$, т.е. $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=x=\frac{1}{8}$.

IV година

387. Најди го коефициентот пред x^2 во развојот $(1+x+x^2)^9$.

Решение. Да ставиме $x+x^2=x(1+x)=y$. Тогаш дадениот израз го добива обликот $(1+y)^9$, а општиот член е: $T_{k+1}=\binom{9}{k}y^k$, $0\le k\le 9$. Но, $y^k=x^k(1+x)^k$, па ако општиот член на биномот $(1+x)^k$ го означиме со L_{m+1} добиваме $L_{m+1}=\binom{k}{m}x^m$, $0\le m\le k$. Сега, општиот член на развојот $(1+x+x^2)^9$ е:

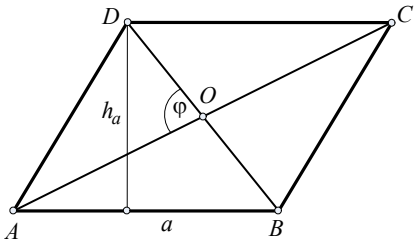
$$T_{k+1}=\binom{9}{k}x^k\binom{k}{m}x^m=\binom{9}{k}\binom{k}{m}x^{k+m},\ 0\le k\le 9,\ 0\le m\le k.$$

Бидејќи го бараме коефициентот пред x^2 следува дека $k+m=2$, па од $0\le m\le k$ добиваме $0\le 2-k\le k$, т.е. $k\ge 1$ и $k\ge 2$, што е можно за $k=1,2$. Соодветните вредности за m ги добиваме од условот $k+m=2$, т.е. $m=1,0$.

Според тоа, постојат два члена во развојот на изразот $(1+x+x^2)^9$ кои содржат x^2 и збирот на нивните коефициенти е:

$$\binom{9}{1}\binom{1}{1}+\binom{9}{2}\binom{2}{0}=45.$$

388. Докажи дека помалата висина во паралелограмот $ABCD$ е еднаква на $\frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$, каде што a и b се должините на страните, а φ е остриот агол меѓу дијагоналите на паралелограмот.



Решение. Од условот на задачата следува дека $a>b$, т.е. $h_a\le h_b$. Значи, треба да докажеме дека $h_a=\frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$. Плоштината P на паралелограмот $ABCD$ е:

$$P=2P_{AOD}+2P_{AOB}=2\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{2}\sin\varphi+2\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}\sin(\pi-\varphi)=2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\varphi=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

Од друга страна $P=ah_a$, па затоа $ah_a=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, т.е. $d_1d_2=\frac{2ah_a}{\sin\varphi}$.

Од косинусна теорема за триаголникот AOB добиваме

$$b^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2-2\frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\cos\varphi=\frac{1}{4}(d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi)=\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-2\frac{ah_a}{\sin\varphi}\cos\varphi\right).$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$h_a=\frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi,$$

кое и требаше да се докаже.

389 А. Броевите $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ се последователни членови на аритметичка прогресија, а и броевите $\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,...,\cos\alpha_n$ се исто така последователни членови на аритметичка прогресија. Одреди го n, ако $\cos\alpha_1=\frac{1}{2}$ а $\cos\alpha_n=-\frac{1}{2}$.

Решение. Нека d е разлката на првата прогресија. Тогаш:

$$\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=...=\alpha_n-\alpha_{n-1}=d$$

и за секој $1<k<n$ важи $\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}}{2}=\alpha_k$. Исто така за втората прогресија имаме

$$2\cos\alpha_k=\cos\alpha_{k-1}+\cos\alpha_{k+1}=2\cos\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}}{2}\cos\frac{\alpha_{k+1}-\alpha_{k-1}}{2}=2\cos\alpha_k\cos\frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_k)+(\alpha_k-\alpha_{k+1})}{2}=$$
$$=2\cos\alpha_k\cos d$$

Оттука $\cos\alpha_k(1-\cos d)=0$. Ако $1-\cos d=0$, тогаш $d=2m\pi, m\in\mathbb{Z}$, па од условот $\alpha_n=\alpha_1+(n-1)d$ следува $\cos\alpha_n=\cos\alpha_1$, што противречи на условите

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{2},\ \cos\alpha_n=-\frac{1}{2}.$$

Значи, $\cos\alpha_k=0$ за секој k, $1<k<n$, па прогресијата е:

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{2},\ \cos\alpha_2=0,\ \cos\alpha_3=0,\ldots,\cos\alpha_{n-1}=0,\ \cos\alpha_n=-\frac{1}{2},$$

а при аритметичка прогресија тоа е можно само ако низата има три члена. Значи, $n=3$ и во овој случај низите се $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\cos\frac{\pi}{2}=0,\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

390 А. Дадена кружница допира дадена парабола во точката A и ја сече во точките B и C. Докажи дека средината на тежишната линија AD на триаголникот ABC припаѓа на оската на параболата.

Решение. Воведуваме координатен систем, таков што темето на параболата е во координатниот почеток, оската на параболата е y-оската и е нормална на x-оската. Тогаш равенката на параболата е од видот $y=mx^2$, $m>0$.

Нека a,b,c се апсциси на точките A,B,C соодветно. Апсциса на точката D е $\frac{b+c}{2}$, а апсциса на средината на отсечката AD, на точката M е $\frac{2a+b+c}{4}$.

Равенката на кружницата е од видот $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Координатите на заедничките точки на параболата и кружницата го задоволуваат системот равенки

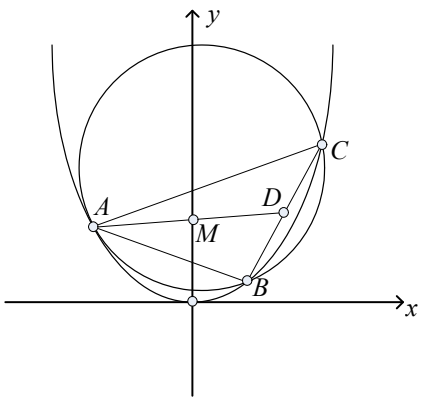
$$y = mx^2 \quad \wedge \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 ,$$

од каде што следува

$$(x-\alpha)^2 + (mx^2-\beta)^2 = r^2 ,$$

т.е.

$$m^2x^4 + (1-2m\beta)x^2 + (-2\alpha)x + (\alpha^2+\beta^2-r^2) = 0 .$$



Но, корените на ова равенка се апсцисите на точките A, B, C, т.е. $x = a, x = b$, $x = c$, при што $x = a$ е двоен корен. Од Виетовите формули следува $a + a + b + c = 0$. Значи $2a + b + c = 0$, т.е. апсцисата на точката M е 0, а тоа значи дека M лежи на y-оската, т.е. на оската на параболата.

391 Б. Нека $a_\circ, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$ е растечка аритметичка прогресија со позитивни членови. Докажи дека

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_\circ a_{2n}}$$

Решение. Бидејќи прогресијата е растечка, точни се неравенствата

$$\frac{1}{a_\circ a_1} < \frac{1}{a_1 a_2} < \frac{1}{a_2 a_3} < \ldots < \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-1}} < \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} .$$

Да ја означиме со d диференцијата на прогресијата и нека $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}$.

Тогаш за удвоената сума $2S$, имајќи ги предвид горните неравенства имаме:

$$2S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} <$$

$$< \frac{1}{a_\circ a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-2} a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_\circ} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}} \right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_\circ} - \frac{1}{a_{2n}} \right) = \frac{1}{d} \frac{a_\circ + 2nd - a_\circ}{a_\circ a_{2n}} = \frac{2n}{a_\circ a_{2n}}$$

Значи, $S < \frac{n}{a_\circ a_{2n}}$.

На сличен начин добиваме

$$2S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} >$$

$$> \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}} =$$

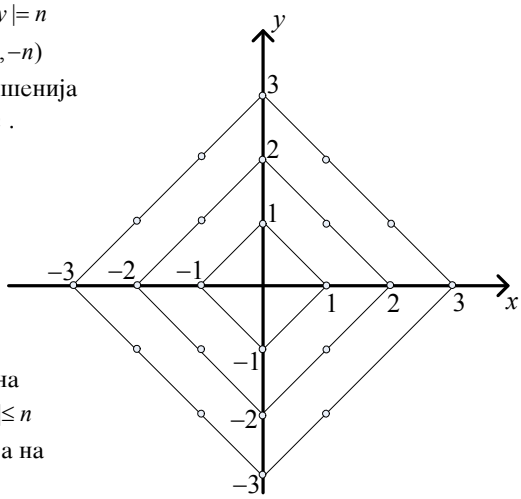
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2n+1}} \right) = \frac{1}{d} \frac{a_1 + 2nd - a_1}{a_\circ a_{2n+1}} = \frac{2n}{a_1 a_{2n+1}}$$

Значи, $S > \frac{n}{a_1 a_{2n+1}}$. Конечно

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < S < \frac{n}{a_\circ a_{2n}} .$$

392 Б. Нека n е природен број. Колку различни решенија $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ има неравенката $|x|+|y|\le n$.

Решение. Графикот на функцијата $|x|+|y|=n$ е квадрат со темиња $(n,0)$, $(-n,0)$, $(0,n)$ и $(0,-n)$ (види цртеж). Да видиме колку целобројни решенија има ова равенка за конкретни вредности на n.



За $n=0$, таа има едно решение.

За $n=1$ таа има 4 целобројни решенија.

За $n=2$ таа има 8 целобројни решенија.

За $n=3$ таа има 12 целобројни решенија итн. Очигледно, за $n=k$ равенката $|x|+|y|=k$ има $4k$ целобројни решенија.

Од досега изнесеното е јасно дека бројот на целобројни решенија на неравенката $|x|+|y|\le n$ е еднаков на збирот на целобројните решенија на равенките

$$|x|+|y|=k,\ k=1,2,3,\dots,n$$

и истиот изнесува

$$1+4+8+12+\dots+4n=1+4(1+2+3+\dots+n)=1+4\frac{n(n+1)}{2}=1+2n+n^2.$$

XXII регионален натпревар - 1999 година

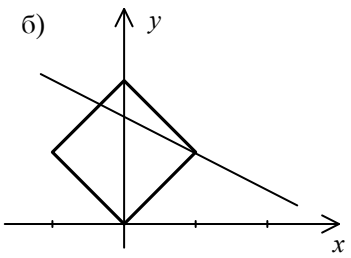
I година

393 АБ. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}|x|+|y-1|=1\\ x+2y=3\end{cases}$$

а) аналитички,

б) графички



Решение. а) Ако $x\ge 0,\ y\ge 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases}x+y-1=1\\ x+2y=3\end{cases}$$

чие решение е (1,1). Ако $x\ge 0,\ y<1$, го добиваме системот

$$\begin{cases}x-y+1=1\\ x+2y=3\end{cases},$$

а овој систем нема решение во оваа област. Ако $x<0,\ y\ge 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases}-x+y-1=1\\ x+2y=3\end{cases},$$

чие решение е $\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$. Ако $x<0,\ y<1$ го добиваме системот

$$\begin{cases}-x-y+1=1\\ x+2y=3\end{cases},$$

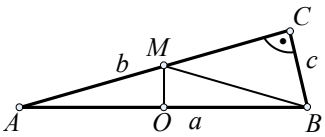
а овој систем нема решение во оваа област.

394. Ако m е цел број, докажи дека дропките $\frac{7m-1}{4}$ и $\frac{5m+3}{4}$ не можат истовремено да бидат цели броеви.

Решение. Да го претпоставиме спротивното т.е. нека $\frac{7m-1}{4}=a$, $\frac{5m+3}{4}=b$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Тогаш $7m=4a+1$, $5m=4b-3$. Оттука добиваме $\frac{4a+1}{7}=\frac{4b-3}{5}$, односно $2(7b-5a)=13$. Бидејќи левата страна во последното равенство е делива со 2, а десната не е, следува дека последната равенка нема решение во $\mathbb{Z}$, па дадените дропки не можат истовремено да бидат цели броеви.

395 А. Во правоаголен триаголник со остар агол 15°, радиусот на опишаната кружница е геометриска средина од катетите a и b, т. е. $R=\sqrt{ab}$. Докажи!

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C, аголот кај темето A е 15°, катетите BC и AC се a и b соодветно и хипотенузата е c. Нека M е точка на страната AC така што $\angle ABM=15^\circ$.



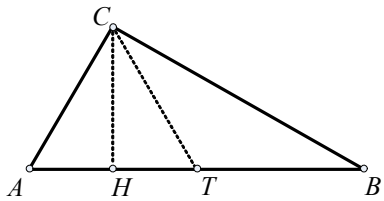
Центарот на опишаната кружница е во средината на хипотенузата, а бидејќи ΔABM е рамнокрак следува дека MO е висина во ΔABM. $\Delta MOB\sim\Delta BCA$, па следува $\overline{BO}:\overline{BM}=\overline{AC}:\overline{AB}$. Аголот кај темето M во правоаголниот триаголник ΔBCM е 30°, а бидејќи во правоаголен триаголник катетата спроти аголот од 30° е половина од хипотенузата, следува дека $\overline{BM}=2a$. Имајќи предвид дека $\overline{AB}=2R$, $\overline{BO}=R$, од горната пропорција следува $R=\sqrt{ab}$.

396 А. Одреди ги аглите во триаголникот, кај кој висината и тежишната линија повлечени од исто теме, го делат аголот при тоа теме на три еднакви дела.

Решение. Нека ABC е триаголник така што висината CH и тежишната линија CT го делат аголот кај темето C на три еднакви дела. $\Delta AHC\cong\Delta CHT$ бидејќи CH е заедничка, $\angle AHC=\angle CHT=90^\circ$ и од условот на задачата, $\angle ACH=\angle HCT$. Значи

$$\overline{AH}=\overline{HT}=\frac{1}{2}\overline{TB}=\frac{1}{4}\overline{AB}.$$

CT е симетрала на аголот кај темето C во ΔCHB, па од својството на симетралата, следува $\overline{CH}:\overline{CB}=\overline{HT}:\overline{TB}$. Оттука добиваме



$$\overline{CH}=\frac{\overline{CB}\cdot\overline{HT}}{\overline{TB}}=\overline{CB}\cdot\frac{\frac{1}{2}\overline{TB}}{\overline{TB}}=\frac{1}{2}\overline{CB}.$$

Триаголникот CHB е правоаголен, така што едната катета е два пати помала од хипотенузата. Следува дека $\angle HBC=30^\circ$ и $\angle BCH=60^\circ$. Според тоа, аглите во триаголникот ABC се 30°, 60° и 90°.

397 Б. Едно момче за да стигне до саканата цел треба да помине низ три врати. На секоја врата стои по еден чувар. Момчето во себе носи извесен број јаболка. На првиот чувар треба да му даде половина од тој број и уште половина јаболко. На вториот чувар треба да му даде половина од остатокот и уште половина јаболко и на третиот чувар треба да му даде половина од остатокот и уште половина јаболко. Да се најде најмалиот број на јаболка што треба да го носи со себе момчето, за да стигне до саканата цел, без да се пресече ниту едно јаболко.

Решение. Нека x е бројот на јаболката што момчето ги носи со себе. На првиот чувар треба да му даде $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ јаболка. Му останале $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$ јаболка. На вториот чувар трба да му даде $\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$ јаболка. Му останале $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$ јаболка. И на третиот чувар треба да му даде $\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ јаболка. Бидејќи не е дозволено сечење на јаболката, потребно е броевите $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x+1}{4}$ и $\frac{x+1}{8}$ да бидат природни. Значи бројот $x+1$ треба да биде деллив со 8. Најмалиот природен број x за кој што важи ова е $x=7$.

398 Б. Докажи дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на производот од должините на отсечките на кои е разделена хипотенузата со впишаната кружница.

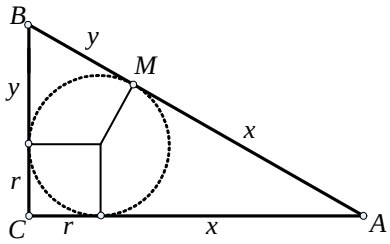
Решение. Нека впишаната кружница ја допира хипотенузата AB во точката M и нека $\overline{AM}=x,\ \overline{BM}=y$. Радиусот на впишаната кружница да го означиме со r, а со P ќе ја означиме плоштината на ΔABC. Тогаш

$$P=\frac{2xr}{2}+\frac{2xy}{2}+r^2=xr+yr+r^2$$

Од друга страна

$$P=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{(x+r)(y+r)}{2}=\frac{xy+xr+yr+r^2}{2}+\frac{xy+P}{2}$$

па оттука добиваме дека $P=xy$.



II година

399. Докажи дека $w=\frac{z-1}{z+1}$, каде што z е комплексен број таков што $z\neq -1$, е чисто имагинарен ако и само ако $|z|=1$.

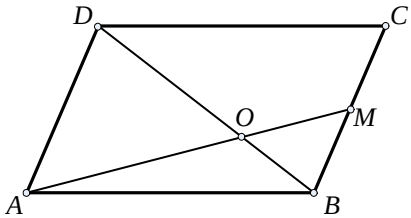
Решение. Нека $|z|=1$ и нека $z=a+ib$. Тогаш

$$w=\frac{a-1+ib}{a+1+ib}\cdot\frac{a+1-ib}{a+1-ib}=\frac{a^2-1+b^2+2ib}{(a+1)^2+b^2}=\frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}+i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}\ .$$

Бројот w е чисто имагинарен ако $a^2-1+b^2=0$, односно $|z|^2=1$, а оттука следува $|z|=1$. Ако $|z|=1$, тогаш $a^2-1+b^2=0$, па јасно е дека w е чисто имагинарен.

400. Нека M е средина на страната BC на паралелограмот $ABCD$ и нека AM ја сече дијагоналата BD во точката O. Одреди ја плоштината на четириаголникот $OMCD$, ако плоштината на паралелограмот $ABCD$ е P.

Решение. Очигледно е дека важи $P_{ABM}=\frac{1}{4}P$, $P_{BCD}=\frac{1}{2}P$ и $\Delta BMO\sim\Delta ADO$ со коефициент на сличност 2. Оттука следува дека $\overline{AO}:\overline{OM}=2:1$, односно $\overline{AM}:\overline{OM}=3:1$. Значи $P_{ABM}=3P_{BMO}$ (имаат исти висини). Бидејќи $P_{ABM}=\frac{1}{4}P$, следува дека $P_{BMO}=\frac{1}{12}P$. Конечно добиваме



$$P_{OMCD}=P_{BCD}-P_{BMO}=\frac{1}{2}P-\frac{1}{12}P=\frac{5}{12}P.$$

401 А. Најди релација меѓу корените на квадратната равенка

$$\left(x^2-6m+5\right)+m\left(x^2-5x+6\right)=0$$

што не зависи од m?

Решение. Ако $m\neq-1$, тогаш равенката е еквивалентна со равенката

$$x^2-\frac{5m+6}{m+1}x+\frac{6m+1}{m+1}=0,$$

и има корени x_1 и x_2 за кои важат равенствата

$$x_1+x_2=\frac{5m+6}{m+1}=5+\frac{1}{m+1},\quad x_1\cdot x_2=\frac{6m+5}{m+1}=6-\frac{1}{m+1}$$

Ако ги собереме овие две равенства, добиваме $x_1+x_2+x_1x_2=11$.

402 А. Докажи дека $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

Решение. I начин. Нека $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Ако ги степенуваме двете страни на ова равенство на трети степен добиваме:

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

односно $x^3=4-3x$, а од тука добиваме $(x-1)\left(x^2+x+4\right)=0$. Бидејќи равенката $x^2+x+4=0$ нема реални решенија, следува дека $x=1$.

II начин.

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1.$$

403 Б. Во равенката $x^2+px+q=0$ одреди ги реалните броеви p и q, ако разликата на корените на равенката е еднаква на 5, а разликата на нивните кубови е 35.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корени на дадената равенка. Од условот на задачата имаме $x_1-x_2=5,\ x_1^3-x_2^3=35$. Бидејќи

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),$$

добиваме $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=7$. Тогаш

$$q=x_1x_2=\frac{1}{3}\left[(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-(x_1-x_2)^2\right]=\frac{1}{3}(7-25)=-6$$

$$p^2=\left(x_1+x_2\right)^2=\left(x_1-x_2\right)^2-4x_1x_2=25-24=1$$

па оттука добиваме дека $p=-1$ или $p=1$.

404Б. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}.$$

Решение. За секој природен број n важи

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Тогаш збирот е еднаков на:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1998}}-\frac{1}{\sqrt{1999}}=1-\frac{1}{\sqrt{1999}}.$$

III година

405. Најди $\log_{35}28$, ако $\log_{14}7=a$ и $\log_{14}5=b$.

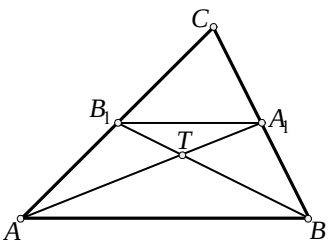
Решение. $\log_{35}28=\frac{\log_{14}28}{\log_{14}35}=\frac{\log_{14}14+\log_{14}2}{\log_{14}5+\log_{14}7}=\frac{1+\log_{14}\frac{14}{7}}{a+b}=\frac{1+\log_{14}14-\log_{14}7}{a+b}=\frac{2-a}{a+b}$.

406. Тежишните линии t_a и t_b во триаголникот ABC образуваат со страната AB агли чиј збир е 60°. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $t_at_b=\sqrt{3}$.

Решение. Бидејќи тежишните линии со страната AB формираат агли чиј збир е 60°, следува дека

$\angle ATB=120^\circ$, $\angle A_1TB_1=120^\circ$,

$\angle A_1TB=60^\circ$ и $\angle ATB_1=60^\circ$.



Нека $\overline{AT}=n$, $\overline{A_1T}=m$, $\overline{BT}=s$ и $\overline{B_1T}=t$. Сега

$$\sqrt{3}=t_at_b=(m+n)(s+t)=mt+ms+nt+ns$$

$$P_{ABA_1B_1}=\tfrac{1}{2}ns\sin120^\circ+\tfrac{1}{2}sm\sin60^\circ+\tfrac{1}{2}mt\sin120^\circ+\tfrac{1}{2}nt\sin60^\circ$$

$$=\tfrac{\sqrt{3}}{4}(ns+sm+mt+nt)=\tfrac{3}{4}.$$

Бидејќи A_1B_1 е средна линија во ΔABC, следува дека триаголниците ABC и A_1B_1C се слични со коефициент на сличност 2. Оттука следува дека $P_{ABC}=4P_{A_1B_1C}$, односно $P_{A_1B_1C}=\frac{1}{3}P_{ABA_1B_1}=\frac{1}{4}$. Значи $P_{ABC}=P_{ABA_1B_1}+P_{A_1B_1C}=1$.

407А. Пресметај ја најголемата вредност на изразот $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$, ако α,β и γ се агли во триаголник.

Решение. Барем два од аглите α,β и γ се остри. Нека се тоа аглите α и β. Бидејќи α и β се остри агли, следува дека $0\le\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le1$, а бидејќи $0<\gamma<\pi$, следува дека $0\le\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\le1$.

Добиваме:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma\le 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\gamma+\sin\tfrac{\pi}{3}-\sin\tfrac{\pi}{3}$$

$$=2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{3}+2\sin\left(\tfrac{\gamma}{2}+\tfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{6}\right)-\sin\tfrac{\pi}{3}\le$$

$$\le 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{3}+2\sin\left(\tfrac{\gamma}{2}+\tfrac{\pi}{6}\right)-\sin\tfrac{\pi}{3}=$$

$$=4\sin\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{6}\right)\right)-\sin\tfrac{\pi}{3}=$$

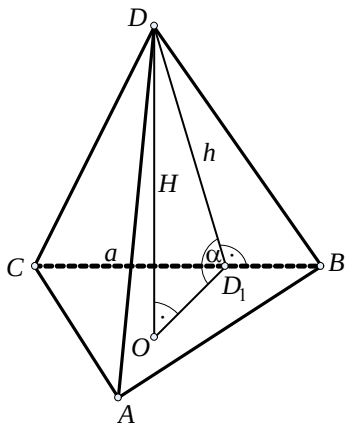
$$=4\sin\tfrac{\pi}{3}\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}-\tfrac{\pi}{6}\right)-\sin\tfrac{\pi}{3}\le 4\sin\tfrac{\pi}{3}-\sin\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ако $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$, тогаш $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Значи најголемата вредност што може да ја прими изразот $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

408А. Нека S и P се плоштините на два ѕида на една триаголна пирамида. Ако a е должината на нивниот заеднички раб, α аголот меѓу тие два ѕида, тогаш волуменот на пирамидата е $\frac{2SP\sin\alpha}{3a}$. Докажи!

Решение. Нека плоштината на ΔABC е S, а на ΔBCD е P. Понатаму, нека висината на пирамидата спуштена од D е H, а висината на ѕидот BCD е h и заедничкиот раб е $\overline{BC}=a$. Од ΔBCD следува $h=\frac{2P}{a}$, а од ΔOD_1D следува $H=h\sin\alpha=\frac{2P\sin\alpha}{a}$. Значи волуменот е

$$V=\frac{SH}{3}=\frac{2SP\sin\alpha}{3a}.$$



409Б. Ако $0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$tg\alpha<\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}<tg\gamma.$$

Решение. Функцијата $\sin x$ е растечка на интервалот $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, па следува $\sin\alpha<\sin\beta<\sin\gamma$.

Функцијата $\cos x$ е опаѓачка на интервалот $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, па следува $\cos\alpha>\cos\beta>\cos\gamma$.

Добиваме:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}>\frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha}=tg\alpha,\qquad \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}<\frac{3\sin\gamma}{3\cos\gamma}=tg\gamma$$

Значи

$$tg\alpha<\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}<tg\gamma.$$

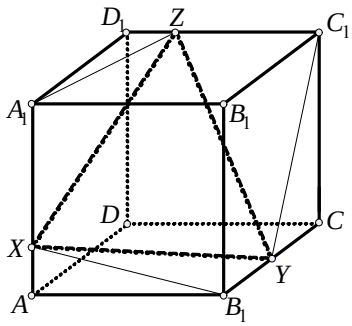
410Б. На три разминувачки рабови на коцка со раб a се избрани темиња на триаголник, различни од темињата на коцката, такви што збирот од квадратите на страните на тој триаголник да биде најмал. Колкав е тој збир?

Решение. На рабовите AA_1, BC и C_1D_1 ги избираме точките X, Y и Z соодветно. Означуваме $\overline{AX}=x$, $\overline{BY}=y$, $\overline{C_1Z}=z$, и $\overline{AB}=a$. Тогаш:

$\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{BY}^2 = \overline{XA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BY}^2 = x^2 + a^2 + y^2$

$\overline{YZ}^2 = \overline{YC_1}^2 + \overline{C_1Z}^2 = \overline{YC}^2 + \overline{CC_1}^2 + \overline{C_1Z}^2 = (a-y)^2 + a^2 + z^2$

$\overline{ZX}^2 = \overline{ZA_1}^2 + \overline{A_1X}^2 = \overline{ZD_1}^2 + \overline{D_1A_1}^2 + \overline{A_1X}^2 = (a-z)^2 + a^2 + (a-x)^2$



Со собирање на последните три равенства добиваме:

$$\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x + y + z) + 6a^2$$
$$= 2\left[(x - \tfrac{a}{2})^2 + (y - \tfrac{a}{2})^2 + (z - \tfrac{a}{2})^2 + \tfrac{9}{4}a^2 \right].$$

Овој збир ќе биде најмал ако $x = y = z = \frac{a}{2}$, односно ако точките X, Y И Z се средини на соодветните рабови. Значи, најмалиот збир е $\frac{9}{4}a^2$.

IV година

411. Нека точките $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$ се различни меѓу себе и припаѓаат на хиперболата $xy = 1$. Ако овие четири точки припаѓаат на една кружница, докажи дека $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

Решение. Нека точките $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$ припаѓаат на кружницата $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Тогаш (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4$ се решенија на системот

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Ако во втората равенка од системот ставиме $y = \frac{1}{x}$, добиваме

$$x^2 + \tfrac{1}{x^2} + Ax + \tfrac{B}{x} + C = 0$$

односно,

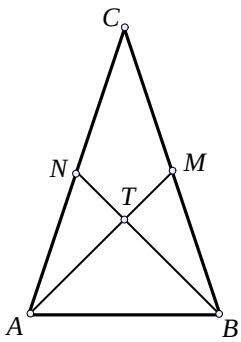
$$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = 0 \qquad (1)$$

Бидејќи x_1, x_2, x_3 и x_4 се решенија на равенката (1),следува дека

$$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Со изедначување на слободните членови добиваме $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

412. Ако тежишните линии AM и BN во триаголникот ABC се заемно нормални, докажи дека $\cos\gamma \geq \frac{4}{5}$. ($\gamma$ е аголот кај темето C)



Решение. ΔABT е правоаголен, па следува

$$c^2 = \left(\tfrac{2}{3}t_a\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}t_b\right)^2.$$

Бидејќи

$$t_a^2 = \tfrac{b^2+c^2}{2} - \tfrac{a^2}{4}, \quad t_b^2 = \tfrac{a^2+c^2}{2} - \tfrac{b^2}{4}$$

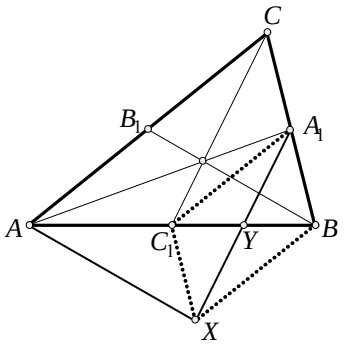
добиваме $5c^2 = a^2 + b^2$.

Од косинусната теорема добиваме

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4c^2}{2ab} \geq \frac{4c^2}{a^2+b^2} = \frac{4c^2}{5c^2} = \frac{4}{5}.$$

413А. Даден е триаголник ABC со плоштина P. Од неговите тежишни линии е конструиран друг триаголник, потоа од тежишни линии на вториот триаголник е конструиран трет триаголник и.т.н. Општо, $(n+1)$-от триаголник е конструиран од тежишните линии на n-тиот триаголник. Пресметај го збирот од плоштините на сите триаголници од така добиената низа.

Решение. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 се тежишните линии во ΔABC. Нека AXA_1 е триаголник така што $A_1X \parallel CC_1$, $BB_1 \parallel AX$. Страните на триаголникот AXA_1 имаат еднакви должини како и тежишните линии на триаголникот ABC. Од начинот на конструирањето на триаголникот AXA_1 јасно е дека секој триаголник што е констуиран од тежишните линии на ΔABC има еднаква плоштина како и ΔAXA_1. Четириаголникот XBA_1C_1 е паралелограм ($AXBB_1$ е паралелограм, бидејќи, од начинот на конструкција на ΔAXA_1 следува дека $\overline{AX}=\overline{BB_1}$, $AX \parallel BB_1$; оттука следува $BX \parallel A_1C_1$, $\overline{A_1C_1}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{BX}=\frac{1}{2}\overline{AC}$), па следува дека точката Y е средина на отсечките A_1X и C_1B (пресек на дијагоналите) и $\overline{AY}=\frac{3}{4}\overline{AB}$. Значи триаголниците AYA_1 и AXY имаат иста плоштина. Ако h е висината на триаголникот ABC спуштена од темето C, тогаш јасно е дека висината на триаголникот AYA_1 спуштена од темето A_1 е $\frac{1}{2}h$. Нека P_1 е плоштината на триаголникот AXA_1. Тогаш



$$P_1 = 2\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\overline{AB}\cdot\tfrac{1}{2}h = \tfrac{3}{4}P$$

Ако $P_2, P_3, ..., P_k, ...$ се плоштините на вториот, третиот,..., k-тиот триаголник итн, јасно е дека

$$P_2 = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 P,\ P_3 = \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 P\ , ...\ ,\ P_k = \left(\tfrac{3}{4}\right)^k P\ , ...$$

$$P + P_1 + P_2 + ... + P_k + ... = P\left(1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3^2}{4^2} + ... + \tfrac{3^k}{4^k} + ...\right) = P\tfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4P\ .$$

414А. На колку начини може кралот на шаховската табла 8×8 да стигне од долниот лев агол до горниот десен агол движејќи се само десно и напред?

Решение. За да стигне кралот од долниот лев агол до горниот десен агол треба да се движи седум пати десно и седум пати напред. Движењето десно да го означиме со Д, а движењето напред со П. Задачата се сведува на следното: на колку начини може да се распоредат седум букви Д и седум букви П. Значи се работи за пермутации од 14 елементи од кои 7 се повторуваат и другите седум се повторуваат. Тој број изнесува $\frac{14!}{7!7!}=3432$.

415Б. Дали можат броевите 2, $\sqrt{6}$ и $\frac{9}{2}$ да бидат членови на една аритметичка или на една геометриска прогресија?

Решение. Нека дадените броеви се членови на една аритметичка прогресија. Тогаш постои реалнен број d и природни броеви k и l така што $\sqrt{6}-2=kd$, $\frac{9}{2}-\sqrt{6}=ld$. Но, $\frac{k}{l}=\frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-\sqrt{6}}=\frac{2(11\sqrt{6}-30)}{57}$, а овој број не е рационален. Значи, не може дадените броеви да бидат

членови на една аритметичка прогресија.

Дадените броеви се членови на некоја геометриска прогресија бидејќи

$$\frac{\sqrt{6}}{2}=q^k,\ \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{6}}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=q^{3k}$$

за некој природен број k.

416Б. Ако $n\geq 2$ и $|x|<1$, докажи дека $(1-x)^n+(1+x)^n<2^n$.

Решение.

$$(1+x)^n+(1-x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n+$$

$$+1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}x^n=$$

$$=2\left(1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\ldots+a(x)\right)$$

каде што $a(x)=\binom{n}{n}x^n$ ако n е парен и $a(x)=\binom{n}{n-1}x^{n-1}$ ако n е непарен. Да означиме $A(x)=2\left(1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\ldots+a(x)\right)$. Бидејќи $|x|<1$, следува дека $\binom{n}{2k}x^{2k}<\binom{n}{2k}$ за секој природен број k. Значи изразот $A(x)$ ќе биде најголем ако $x=\pm 1$ и во тој случај неговата вредност е 2^n. Според тоа

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

XXIII регионален натпревар - 2000 година

I година

417. Од 37 монети наредени во еден ред, 9 се свртени со „петка”, а 28 со „глава” нагоре. Во еден чекор се превртуваат кои било 20 монети. Дали е можно по неколку чекори сите монети да бидат „петки”? А „глави”? Во колку најмалку чекори е можно тоа?

Решение. Нека со првиот чекор x “петки” свртиме во “глава”. Тогаш $20-x$ “глави” ќе свртиме во “петки”. По овој чекор имаме $9-x+(20-x)=29-2x$ “петки” и $x+(28-(20-x))=8+2x$ “глави”. По првиот чекор ќе имаме непарен број “петки” и парен број “глави”. Очигледно, оваа законитост ќе остане и во секој нареден чекор. Значи, секогаш ќе имаме непарен број “петки”, т.е. никогаш нема да добиеме сите монети да бидат “глави”. Бидејќи по првиот чекор бројот на глави останува парен, тогаш е можно да се избере x таков што $2x+8=20$, односно $x=6$. Па, по првиот чекор ќе имаме 17 “петки” и 20 “глави”. Во вториот чекор 20 “глави” ги превртуваме во “петки” и сите монети се превртени со “петка” нагоре. Значи, сите монети ќе бидат свртени нагоре со “петка ” во најмалку 2 чекора.

418. Нека x, y и z се природни броеви такви што $x^3+y^3+z^3$ е делив со 7. Докажи дека производот xyz е делив со 7.

Решение. Нека n е произволен природен број. Тогаш n може да се запише во облик $n = 7k + r$, каде што $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Бројот $n^3 = (7k + r)^3$ при делење со 7 дава ист остаток како и бројот r^3 при делење со 7. Броевите $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$ при делење со 7 даваат остатоци $0, 1, 1, 6, 1, 6, 6$ соодветно. Оттука добиваме дека бројот $x^3 + y^3 + z^3$ при делење со 7 дава остаток кој е остаток при делење на збирот на три броја кои припаѓаат на множеството $\{0, 1, 6\}$ со 7. Но, за да биде збирот на три броеви од множеството $\{0, 1, 6\}$ делив со 7, мора барем еден од нив да е 0, а тоа значи дека барем еден од броевите x, y, z да биде делив со 7. Следствено, производот xyz е делив со 7.

419 А. Одреди го најмалиот природен број n така што да важи пропорцијата

$$h_a : h_b : h_c = n : (n+1) : (n+2)$$

ако h_a, h_b, h_c се должини на висините во триаголникот ABC.

Решение. Од $2P = ah_a = bh_b = ch_c$ добиваме

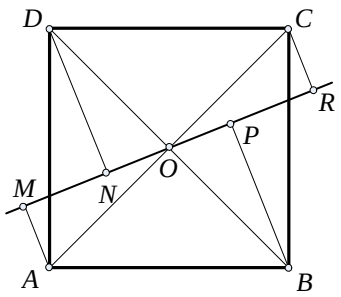
$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2},$$

односно

$$a : b : c = (n+1)(n+2) : n(n+2) : n(n+1) = (n^2 + 3n + 2) : (n^2 + 2n) : (n^2 + n).$$

Бидејќи $h_a < h_b < h_c$, следува $a > b > c$, па доволно е да најдеме природен број n за кој важи неравенството $a < b + c$. Добиваме $n^2 + 3n + 2 < n^2 + 2n + n^2 + n$, а оттука $n^2 > 2$. Бараниот најмал природен број е 2.

420 А. Низ пресекот O на дијагоналите на квадратот $ABCD$ е повлечена произволна права p, која не минува низ темињата на квадратот. Најди го збирот од квадратите на растојанијата од секое теме до правата p, ако должината на страната на квадратот е $1\,m$.



Решение. Од складноста на триаголниците AOM и COR следува $\overline{AM} = \overline{CR} = x$, а од складноста на триаголниците BPO и DNO следува $\overline{BP} = \overline{DN} = y$. Од складноста пак, на правоаголните триаголници AMO и BPO ($\overline{AO} = \overline{BO}$, $\angle AOM = \angle OBP$ агли со заемно нормални краци) следува $\overline{OP} = \overline{AM} = x$. Од правоаголниот триаголник OPB добиваме $\overline{OP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{BO}^2$ односно $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Оттука имаме

$$\overline{AM}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CR}^2 + \overline{DN}^2 = 2x^2 + 2y^2 = 1.$$

421 Б. Дали постојат реални броеви x и y за кои во исто време се исполнети равенствата

$x+y=1$, $x^2+y^2=2$ и $x^3+y^3=3$?

Решение. Да претпоставиме дека такви броеви x и y постојат. Ако го квадрираме изразот $x+y=1$ добиваме $x^2+2xy+y^2=1$ па, имајќи го во предвид изрзот $x^2+y^2=2$ добиваме $xy=-\frac{1}{2}$. Ако го кубираме првото равенство добиваме

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=1$$

и бидејќи $x+y=1$, $xy=-\frac{1}{2}$, $x^3+y^3=3$, добиваме

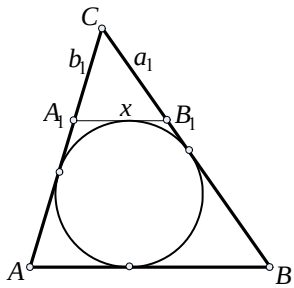
$$3+3\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot 1=1$$

што не е можно. Значи, не постојат реални броеви x и y за кои се исполнети во исто време дадените равенства.

422 Б. Тангентата на впишаната кружница во триаголникот ABC, паралелна на страната AB, ги сече страните AC и BC во точките A_1 и B_1, соодветно. Пресметај ја должината на отсечката A_1B_1, ако должините на страните на триаголникот ABC се a, b и c.

Решение. Нека $\overline{A_1C}=b_1$, $\overline{B_1C}=a_1$, $\overline{A_1B_1}=x$. Од сличноста на триаголниците ABC и A_1B_1C следува $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C}$ односно

$$a_1=\tfrac{a}{c}x \qquad (1)$$



Од истата сличност следува $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{A_1B_1}:\overline{A_1C}$, односно

$$b_1=\tfrac{b}{c}x \qquad (2)$$

Бидејќи четириаголникот ABA_1B_1 е тангентен, следува:

$$\overline{AB}+\overline{A_1B_1}=\overline{AA_1}+\overline{BB_1}$$

односно,

$$c+x=b-b_1+a-a_1.$$

Од последното равенство и равенствата (1) и (2) следува $x=\frac{a+b-c}{a+b+c}c$.

II година

423. Ако $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Решение. Да ставиме $A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$. Имајќи ги предвид дадените равенства, добиваме:

$$A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})}=x\sqrt[3]{a}.$$

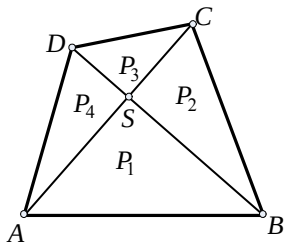
Аналогно, $A=y\sqrt[3]{b}$ и $A=z\sqrt[3]{c}$. Понатаму, $\sqrt[3]{a}=\frac{A}{x}$, $\sqrt[3]{b}=\frac{A}{y}$, $\sqrt[3]{c}=\frac{A}{z}$, а оттука следува

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z}=A(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}\ .$$

424. Во конвексниот четириаголник $ABCD$ со S е означен пресекот на дијагоналите. Нека $P_1=P_{ABS}$, $P_2=P_{BCS}$, $P_3=P_{CDS}$, $P_4=P_{DAS}$. Ако $P^2=P_1P_3$ и $2P_4=P_1+P_3$, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

Решение. Нека h_1 е висината во триаголниците ABS и BCS спуштена од темето B, а h_2 е висината спуштена во триаголниците ASD и CDS спуштена од темето D. Тогаш $P_1=\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot h_1$, $P_2=\frac{1}{2}\overline{CS}\cdot h_1$, $P_3=\frac{1}{2}\overline{CS}\cdot h_2$ и $P_4=\frac{1}{2}\overline{CS}\cdot h_2$, а оттука добиваме $P_1P_3=P_2P_4$.

Од ова равенство и од условот $P_2^2=P_1P_3$ следува $P_2=P_4$. Оттука добиваме дека $P_2=\sqrt{P_1P_3}$ и $2P_2=P_1+P_3$. Значи $2\sqrt{P_1P_3}=P_1+P_3$, а оттука со елементарни трансформации, следува дека $P_1=P_3$. Бидејќи $P_1+P_4=P_3+P_4$, добиваме дека триаголниците ABD и ACD имаат иста плоштина.



Бидејќи имаат заедничка страна (AD), следува дека висините спуштени од темињата B и C кон страната AD се еднакви, односно, темињата B и C се на еднакво растојание од правата AD. Ова значи дека $AD \parallel BC$. Бидејќи $P_1+P_2=P_1+P_4$, следува дека триаголниците ABD и ABC имаат еднаква плоштина, па аналогно како во претходниот случај, заклучуваме дека $AB \parallel CD$. Со тоа докажавме дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

425 А. Најди ја најмалата и најголемата вредност на изразот $|z-\frac{1}{z}|$, ако z е комплексен број таков што $|z|=2$.

I решение. $|z-\frac{1}{z}|=|\frac{z^2-1}{z}|=\frac{|z^2-1|}{|z|}=\frac{|z^2-1|}{2}$. Бидејќи $|z^2-1|\geq|z^2|-1=4-1=3$ и $|z^2-1|\leq|z^2|+1=5$, добиваме $\frac{3}{2}\leq|z-\frac{1}{z}|\leq\frac{5}{2}$. Ако $z=\pm2$, тогаш $|z-\frac{1}{z}|=\frac{3}{2}$, па најмалата вредност на $|z-\frac{1}{z}|$ е $\frac{3}{2}$ а ако $z=\pm2i$, тогаш $|z-\frac{1}{z}|=\frac{5}{2}$, па најголемата вредност на $|z-\frac{1}{z}|$ е $\frac{5}{2}$.

II решение. Нека $z=a+ib$. Од $|z|=2$ следува $a^2+b^2=4$, па имаме:

$$|z-\frac{1}{z}|^2=|\frac{z^2-1}{z}|^2=\frac{|z^2-1|^2}{|z|^2}=\frac{|z^2-1|^2}{4}=\frac{1}{4}|z-1|^2|z+1|^2=\frac{1}{4}(a^2-2a+1+b^2)(a^2+2a+1+b^2)=$$

$$=\frac{1}{4}(5-2a)(5+2a)=\frac{1}{4}(25-4a^2)=\frac{1}{4}(25-4(4-b^2))=b^2+\frac{9}{4}.$$

Од $a^2+b^2=4$ следува дека $0\leq b^2\leq4$, па $\frac{3}{2}\leq|z-\frac{1}{z}|\leq\frac{5}{2}$. Најмалата вредност е за $z=\pm2$ и изнесува $\frac{3}{2}$, а најголемата вредност е за $z=\pm2i$ и изнасува $\frac{5}{2}$.

426 А. Нека p и q се реални броеви такви што равенката

$$x^2+4(p-\frac{6q}{p})x+4q=0$$

нема реални решенија.

Докажи дека равенката

$$x^2+px+q=0$$

има две различни реални решенија.

Решение. Бидејќи дадената равенка нема реални решенија, следува $16(p-\frac{6q}{p})^2-16q<0$, односно $(p-\frac{6q}{p})^2-q<0$. Множејќи го даденото неравенство со p^2 добиваме

$$p^4-12p^2q-p^2q+36q^2<0 .$$

Оттука добиваме

$$(p^2-4q)(p^2-9q)<0 .$$

Имаме две можности:

$$1^\circ \begin{cases} p^2-4q<0 \\ p^2-9q>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2^\circ \begin{cases} p^2-4q>0 \\ p^2-9q<0 \end{cases}$$

Ако важи 1°, тогаш множејќи го второто неравенство со -1 добиваме $\begin{cases} p^2-4q<0 \\ -p^2+9q<0 \end{cases}$, па собирајќи ги двете неравенства добиваме $5q<0$, што не е можно, бидејќи од условот $(p-\frac{6q}{p})^2-q<0$ следува $0<(p-\frac{6q}{p})^2<q$. Значи $p^2-4q>0$ и $p^2-9q<0$. Со тоа докажавме дека равенката $x^2+px+q=0$ има две различни реални решенија.

427 Б. Нека z и w се комплексни броеви такви што $|z|=|w|=|z-w|$. Пресметај ја вредноста на $\left(\frac{z}{w}\right)^{300}$.

Решение. Ако $x=\frac{z}{w}$, тогаш $|x|=|\frac{z}{w}|=\frac{|z|}{|w|}=1$, $|x-1|=|\frac{z}{w}-1|=\frac{|z-w|}{|w|}=1$. Од $1=|x-1|^2=(x-1)(\overline{x-1})$, добиваме $x\overline{x}-x-\overline{x}+1=1$. Но бидејќи $1=|x|^2=x\overline{x}$, следува $x-1+\overline{x}=0$. Ако помножиме со x $(x\neq 0)$, ќе добиеме $x^2-x+1=0$, а од тука, множејќи со $x+1$, $(x\neq -1)$, ќе добиеме $x^3+1=0$, односно $x^3=-1$. Конечно, $(\frac{z}{w})^{300}=(x^3)^{100}=1$.

428 Б. Реши го, во множеството на реалните броеви, системот равенки

$$\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+xy+y^2=19 . \end{cases}$$

Решение. Ако ги собереме двете равенки, добиваме $x^2+2xy+y^2+x+y=30$, односно $(x+y)^2+(x+y)=30$. Со воведување на смената $t=x+y$, ја добиваме квадратната равенка $t^2+t-30=0$, чии решенија се $t_1=5$ и $t_2=-6$. Од $x+y=5$, добиваме $y=5-x$, па заменувајќи во една од дадените равенки, добиваме $x_1=3$, $x_2=2$ и $y_1=2$, $y_2=3$. Од $x+y=-6$ добиваме $y=-6-x$, па заменувајќи во една од равенките добиваме комплексни решенија. Значи дадениот систем има два пара реални решенија $(3,2)$ и $(2,3)$.

III година

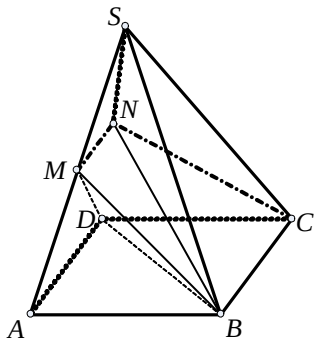
429. Докажи го неравенството $\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>4,4$.

Решение. Преминувајќи во логаритам со основа 2 и користејќи го неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме:

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8=\frac{\log_2 5}{\log_2 4}+\frac{\log_2 6}{\log_2 5}+\frac{\log_2 7}{\log_2 6}+\frac{\log_2 8}{\log_2 7}\geq 4\sqrt[4]{\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\frac{\log_2 6}{\log_2 5}\frac{\log_2 7}{\log_2 6}\frac{\log_2 8}{\log_2 7}}=$$

$$=4\sqrt[4]{\frac{\log_2 8}{\log_2 4}}=4\sqrt[4]{\frac{3}{2}}=4\cdot 1{,}1=4{,}4.$$

430. Дадена е правилна четириаголна пирамида $SABCD$ со основа $ABCD$. Низ темињата B, C и низ средината M на работ SA е повлечена рамнина. Најди го соодносот на волумените на деловите од пирамидата, на кои е поделена со дадената рамнина.



Решение. Нека волуменот на дадената пирамида е V, а должината на висината на пирамидата $ABCDS$ е H. Рамнината низ точките B, C и M го сече работ SD во точката N која е негова средина. Со V_1 ќе го означиме волуменот на $ABCDMN$, а со V_2 волуменот $BCMNS$. Забележуваме дека

$$V_1=V_{ABDM}+V_{DMNB}+V_{BCDN}$$

$$V_{ABDM}=\tfrac{1}{3}P_{ABD}\tfrac{H}{2}=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}P_{ABCD}\tfrac{H}{2}=\tfrac{1}{4}V$$

$$V_{BCDN}=\tfrac{1}{3}P_{BCD}\tfrac{H}{2}=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}P_{ABCD}\tfrac{H}{2}=\tfrac{1}{4}V\ .$$

Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ADS, следува дека $P_{DNM}=\frac{1}{4}P_{ADS}$. Ако со H_1 ја означиме висината на пирамидата $ABDS$ спуштена од темето B кон ѕидот ADS, тогаш за волуменот на пирамидата имаме $V_{ADSB}=\frac{1}{3}P_{ADS}\cdot H_1$. Но, $V_{ADSB}=\frac{1}{2}V$, па за волуменот на пирамидата $DNMB$ добиваме

$$V_{DNMB}=\tfrac{1}{3}P_{DNM}\cdot H_1=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}P_{ADS}\cdot H_1=\tfrac{1}{4}V_{ABDS}=\tfrac{1}{8}V$$

Конечно,

$$V_1=\tfrac{1}{4}V+\tfrac{1}{8}V+\tfrac{1}{4}V=\tfrac{5}{8}V\text{, а } V_2=V-V_1=\tfrac{3}{8}V\ .$$

Следува $V_1:V_2=5:3$.

431 А. Нека $0<x<\frac{\pi}{2}$. Докажи го неравенството

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\geq 3+2\sqrt{2}\ .$$

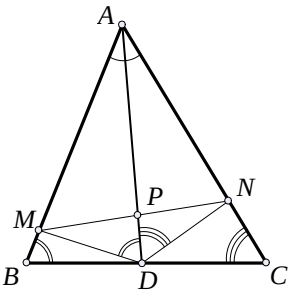
Решение. $(1+\frac{1}{\sin x})(1+\frac{1}{\cos x})=1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}=1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin 2x}$. За кои било ненегативни реални броеви a и b важи $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, па ставајќи $a=\frac{1}{\sin x}$, $b=\frac{1}{\cos x}$, (бидејќи $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ и $\cos x$ се позитивни) добиваме

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}=2\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}\ .$$

Бидејќи $0<x<\frac{\pi}{2}$, следува $0<2x<\pi$, па $\sin 2x>0$ и $\frac{1}{\sin 2x}\geq 1$. Конечно добиваме

$$(1+\frac{1}{\sin x})(1+\frac{1}{\cos x})=1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin 2x}\geq 1+2\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}+\frac{2}{\sin 2x}\geq 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}\ .$$

432 А. Нека AD е симетрала аголот BAC во триаголникот ABC. Нека M и N се точки од правите AB и AC соодветно такви што $\angle MDA = \angle ABC$ и $\angle NDA = \angle ACB$ и AD и MN се сечат во точката P. Докажи дека $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$.



Решение. Бидејќи триаголниците AND и ADC се слични ($\angle CAD$ е заеднички, $\angle ADN = \angle DCA$ по услов) следува

$$\overline{AD}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AC} \qquad (1)$$

Бидејќи триаголниците AMD и ABD се слични ($\angle BAD$ е заеднички, $\angle ABD = \angle ADM$ по услов) следува

$$\overline{AD}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\overline{AD}^4 = \overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$. За да важи $\overline{AD}^3 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP}$ доволно е да докажеме дека $\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$. Четириаголникот $AMDN$ е тетивен бидејќи

$$\angle MDN + \angle MAN = \angle MDA + \angle ADN + \angle MAN = \angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ .$$

Значи, $\angle ADN = \angle AMN$ (периферни агли над ист кружен лак), па триаголниците AMP и AND се слични. Оттука следува дека $\overline{AD} \cdot \overline{AP} = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$.

433 Б. Најди ги сите вредности на реалниот број k за кои изразот

$$\sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

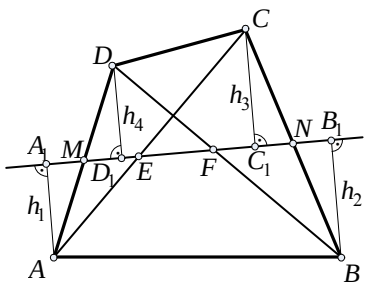
не зависи од x.

Решение.

$$\begin{aligned}
&\sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x) = \\
&\quad = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + k((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\
&\quad = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x + k(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) \\
&\quad = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2x + k(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2x) = k + 1 - \tfrac{3+2k}{4}\sin^2 2x.
\end{aligned}$$

Изразот не зависи од x ако $3 + 2k = 0$, односно за $k = -\frac{3}{2}$.

434 Б. Докажи дека отсечката чии крајни точки се средините на спротивните страни на конвексен четириаголник, ги дели неговите дијагонали во ист однос.



Решение. Нека M е средина на отсечката AD, N е средина на BC, E и F се пресечните точки на MN со AC и BD соодветно, A_1, B_1, C_1, D_1 се подножјата на нормалите спуштени на правата MN од темињата A, B, C, D соодветно, и нека h_1, h_2, h_3, h_4 се растојанијата на темињата A, B, C и D од правата MN.

Од складноста на правоаголните триаголници AA_1M и DD_1M ($\angle AMA_1 = \angle DMD_1$ како накрсни агли и $\overline{AM} = \overline{MD}$) следува $h_1 = h_4$, а од складноста на правоаголните триаголници BB_1N и CC_1N ($\angle BNB_1 = \angle CNC_1$

како накрсни агли и $\overline{BN}=\overline{CN}$) следува $h_2=h_3$. Од сличноста на триаголниците AA_1E и CC_1E следува $\overline{AE}:\overline{EC}=h_1:h_3$, а од сличноста на триаголниците BB_1F и DD_1F следува $\overline{BF}:\overline{FD}=h_2:h_4$. Бидејќи $h_1=h_4$ и $h_2=h_3$, следува дека $\overline{AE}:\overline{EC}=\overline{BF}:\overline{FD}$.

IV година

435. Краците на произволен прав агол со теме во координатниот почеток ја сечат параболата $y^2=2x$ во точките X и Y. Најди го геометриското место од средините на отсечките XY.

Решение. Едниот крак, на пример правата OX, има равенка $y=tx$, $t>0$. Тогаш равенката на другиот крак, правата OY, е $y=-\frac{1}{t}x$. За координатите на точките X и Y добиваме $X(\frac{2}{t^2},\frac{2}{t})$ и $Y(2t^2,-2t)$. Средината на отсечката XY да ја означиме со M и нејзините координати се $X(t^2+\frac{1}{t^2},\frac{1}{t}-t)$. Да означиме $x=t^2+\frac{1}{t^2}, y=\frac{1}{t}-t$. Забележуваме дека $y^2=\frac{1}{t^2}-2+t^2=x-2$. Значи бараното геометриско место е параболата $y^2=x-2$.

436. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни последователни членови на геометриска прогресија. Ако се познати збировите

$$S=a_1+a_2+...+a_n \quad \text{и} \quad T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$$

изрази го производот $a_1\ a_2...a_n$ само преку S,T и n.

Решение. Нека $q\neq 1$ е количникот на прогресијата тогаш од $S=a_1+a_2+...+a_n$ добиваме

$$a_1\frac{q^n-1}{q-1}=S \tag{1}$$

Од $T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$ добиваме

$$\frac{1}{a_1}\frac{q^n-1}{q-1}\frac{1}{q^{n-1}}=T \tag{2}$$

Од (1) добиваме $\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{S}{a_1}$, па заменувајќи во (2) добиваме $q^{n-1}=\frac{S}{a_1^2T}$. Сега

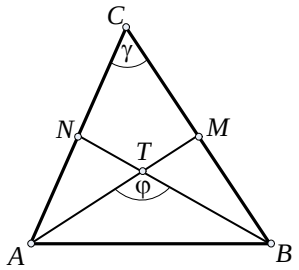
$$a_1\ a_2...a_n=a_1^nq^{1+2+3+...+n}=a_1^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}=a_1^n(q^{n-1})^{\frac{n}{2}}=a_1^n\left(\frac{S}{a_1^2T}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{S^n}{T^n}}$$

Ако $q=1$, тогаш $na_1=S$, $\frac{n}{a_1}=T$, па $a_1=\sqrt{\frac{S}{T}}$. Оттука следува $a_1\ a_2...a_n=a_1^n=\sqrt{\frac{S^n}{T^n}}$.

437. Нека AM и BN се тежишните линии во триаголникот ABC и T е нивната пресечна точка. Ако $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$ и точките M,T,N,C лежат на иста кружница, најди ја должината на отсечката AB.

Решение. Нека $\overline{AB}=c$. Ја применуваме косинусната теорема за триаголниците ABC и ABT:

$$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\gamma \tag{1}$$



$$c^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 - 2\overline{AT}\cdot\overline{BT}\cdot\cos\varphi \qquad (2)$$

Бидејќи четириаголникот $NTMC$ е тетивен, следува дека $\gamma+\varphi=\pi$, а оттука $\cos\varphi = -\cos\gamma$, па од (2) добиваме

$$c^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + 2\overline{AT}\cdot\overline{BT}\cdot\cos\gamma \qquad (3)$$

Триаголниците ATN и AMC се слични (аголот кај темето A им е заеднички и $\angle ATN = \gamma = \angle ACM$), па добиваме:

$$\overline{AN} : \overline{AT} = \overline{AM} : \overline{AC}$$

Бидејќи $\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, $\overline{AN} = \frac{b}{2}$, $\overline{AC} = b$, добиваме $\overline{AT} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Аналогно, $\overline{BT} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Заменувајќи ги овие вредности во (3) добиваме

$$c^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2\frac{ab}{3}\cos\gamma \qquad (4)$$

Од (1) и (4) добиваме $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2}{4ab}$, па повторно заменувајќи во (1), $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

438. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\frac{\cos\angle BAC}{\cos\angle ABC} = \frac{7}{15}$. Пресметај $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}$.

Решение. Нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $b = c$. Од косинусната теорема следува

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a}{2b}.$$

Од условот $\frac{\cos\angle BAC}{\cos\angle ABC} = \frac{7}{15}$ следува

$$0 = 15\cos\alpha - 7\cos\beta = 15(1-\frac{a^2}{2b^2}) - 7\frac{a}{2b} = -\frac{15}{2}(\frac{a}{b})^2 - \frac{7}{2}\frac{a}{b} + 15 = (-\frac{5}{2}\frac{a}{b}+3)(3\frac{a}{b}+5)$$

Бидејќи $a, b > 0$, следува $-\frac{5}{2}\frac{a}{b} + 3 = 0$, односно $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$. Од синусната теорема следува дека $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{6}{5}$.

439 Б. Најди го членот со најголем коефициент во развојот на биномот $(\sqrt{2}+x)^{50}$.

Решение. Да разгледаме два последователни члена на развојот

$$T_{k+1} = \binom{50}{k}\sqrt{2^k}\,x^{50-k} = A_{k+1}x^{50-k},\ T_k = \binom{50}{k-1}\sqrt{2^{k-1}}\,x^{50-k+1} = A_k x^{50-k+1}.$$

Да видиме за кои вредности на k односот меѓу коефициентите A_{k+1} и A_k е помал од 1. Од $\frac{\binom{50}{k}\sqrt{2^k}}{\binom{50}{k-1}\sqrt{2^{k-1}}} < 1$ следува $\frac{51-k}{k}\sqrt{2} < 1$, а оттука $k > 51(2-\sqrt{2}) \approx 29{,}875$. Почнувајќи од $30-$тиот член односот $A_{k+1} : A_k$ е помал од 1, па значи $A_{31} < A_{30}$. Ако $k < 30$ односот $A_{k+1} : A_k$ е поголем од 1, па $A_{30} > A_{29} > A_{28} > \ldots$. Значи триесеттиот член има најголем коефициент.

440 Б. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот ABC, s е неговиот полупериметар, а R е радиусот на опишаната кружница. Ако важи

$$3R^2\left(3-\cos 2\alpha-\cos 2\beta-\cos 2\gamma\right) = 2s^2$$

докажи дека триаголникот е рамностран.

Решение. Следните равенства се еквивалентни:

$$3R^2\left(3-\cos 2\alpha-\cos 2\beta-\cos 2\gamma\right)=2s^2 \Leftrightarrow 3R^2\left(1-\cos 2\alpha+1-\cos 2\beta+1-\cos 2\gamma\right)=2s^2$$

$$3R^2\left(2\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)=2s^2 \Leftrightarrow 3R^2\left(2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta+2\sin^2\gamma\right)=\tfrac{(a+b+c)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$3R^2\left(4\sin^2\alpha+4\sin^2\beta+4\sin^2\gamma\right)=(a+b+c)^2$$

Од синусната теорема имаме

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

а оттука добиваме

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$$

т.е.

$$a=b=c$$

Значи триаголникот е рамностран.

XXIV регионален натпревар - 2001 година

I година

441. Да се докаже дека производот на четири последователни природни броеви е:

а) делив со 24

б) не е перфектен број (т.е. не квадрат на природен број)

Решение. а) Нека $n,n+1,n+2,n+3$ се четири последователни природни броеви. Тогаш нивниот производ е $n(n+1)(n+2)(n+3)$, во кој два од броевите се парни, при што еден од нив е делив со четири, а најмалку еден е делив со 3. Според тоа тој е делив со производот $2\cdot 3\cdot 4$ т.е. со 24.

б) Производот $n(n+1)(n+2)(n+3)$ го запишуваме во видот

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=[n(n+3)][(n+2)(n+1)]=(n^2+3n)(n^2+3n+2)$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1-1=(n^2+3n+1)^2-1$$

од каде заклучуваме дека не е квадрат на природен број за секој природен број n.

442 А. Ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ и $ac>0$, тогаш $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4$. Докажи!

Решение. Имаме, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\Rightarrow\frac{a+c}{ac}=\frac{2}{b}\Rightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$. Според тоа

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a^2+3ac}{2a^2}+\frac{c^2+3ac}{2c^2}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{c}{a}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{a}{c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 1+\frac{3}{2}\cdot 2=1+3=4.$$

Притоа го користевме неравенството $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$, кое важи за $ac>0$. Знакот за еднаквост важи за $a=c$.

443Б. Миле и Златко пишувале домашна работа. Кога кај нив дошол Горан и ги запрашал по кои предмети пишуваат домашна работа тие одговориле:

Миле „Ако јас пишувам по математика, тогаш Златко пишува по македонски"

Златко: „Јас пишувам по македонски или Миле не пишува по математика''

Горан се подзамислил и рекол: „Вие или двајцата ја зборувате вистината или двајцата не ја зборувате вистината''

Дали Горан ја зборува вистината?

Решение. Со p и q да ги означиме следниве искази:

p : „Миле пишува домашна работа по математика''

q : „Златко пишува домашна работа по македонски''

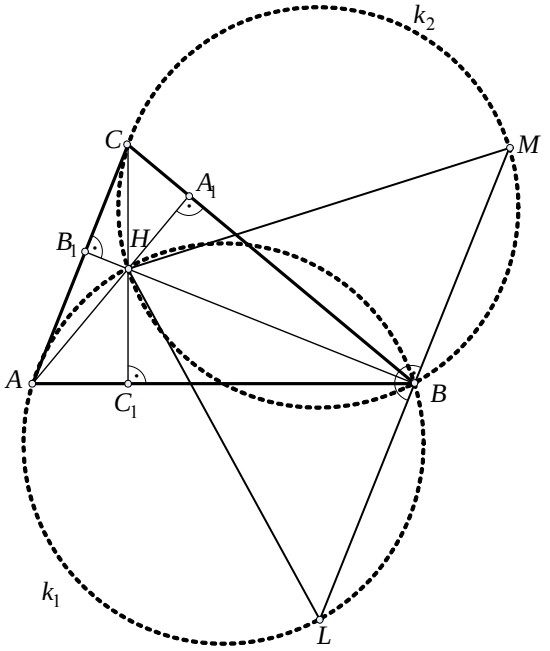
Тогаш речениците на Миле и Златко се:

Миле: $p \Rightarrow q$

Златко: $q \vee \neg p$

Бидејќи исказната формула $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$ е тавтологија добиваме дека Миле и Златко или истовремено ја зборуваат вистината или истовремено не ја зборуваат вистината. Значи Горан ја зборува вистината.

444 А. Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC, тогаш кружниците опишани околу триаголниците ABH, BCH и CAH имаат еднакви радиуси. Докажи!



Решение. Нека H е ортоцентарот на ΔABC, нека k_1 и k_2 се кружници опишани околу триаголниците ABH и BCH и нека HL и HM се дијаметри на k_1 и k_2 (види цртеж). Доволно е да докажеме дека $\overline{HL} = \overline{HM}$. Бидејќи $\angle HBL = 90^\circ = \angle HBM$, следува дека точките L, B и M се колинеарни. Ќе докажеме дека $\angle HLM = \angle HML$.

(1) $\angle HLB = \angle HAB$, како периферни агли над лакот HB од кружницата k_1.

(2) $\angle HMB = \angle HCB$, како периферни агли над лакот HB од кружницата k_2.

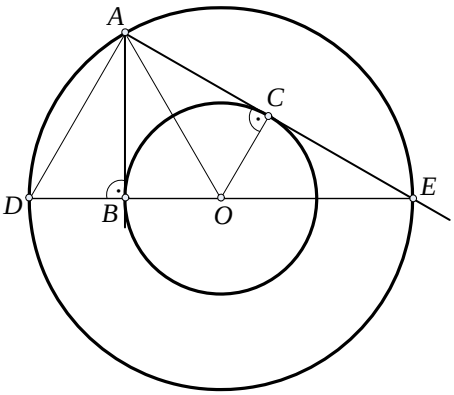
Од сличноста на правоаголните триаголници HAC_1 и HCA_1 следува

(3) $\angle HAC_1 = \angle HCA_1$, т.е. $\angle HAB = \angle HCB$.

Од (1), (2) и (3) следува дека $\angle HLB = \angle HMB$, т.е. $\angle HLM = \angle HML$.

Значи ΔLMH е рамнокрак, па $\overline{HL} = \overline{HM}$, т.е. дијаметрите на кружниците k_1 и k_2 се еднакви.

445 Б. Ако две кружници се концентрични и притоа дијаметарот на едната е двапати поголем од дијаметарот на другата, тогаш аголот што го зафаќаат тангентите повлечени од која било точка на поголемата кружница кон помалата кружница е 60°.



Решение. Нека AB и AC се тангентите повлечени од точката A на малата кружница. Во правоаголниот триаголник OAB е: $\overline{OB}=r$, $\overline{OA}=2r$, т.е. $\overline{OA}=2\overline{OB}$, значи катетата OB е двапати помала од хипотенузата OA, па следува дека $\angle OAB=30^\circ$. Аналогно наоѓаме $\angle OAC=30^\circ$, па следува $\angle BAC=60^\circ$.

446 АБ. Одреди го најголемиот природен број помал од вредноста на изразот

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}}_{2001\ \text{корени}}+\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots\sqrt[3]{6}}}}_{2001\ \text{корени}},$$ ако се знае дека $\sqrt[3]{6}>1{,}8$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{6}>2{,}4$ и $\sqrt[3]{6}>1{,}8$ добиваме

$$4{,}2<\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}\ .$$

Од друга страна е:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+3}}}=3 \text{ и } \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+2}}}=2$$

па затоа $\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<5$.

Значи бараниот број е 4.

II година

447 А. **Нека a и b се корени на равенката $x^2-3cx-8d=0$, а c и d се корени на равенката $x^2-3ax-8b=0$. Пресметај го збирот $a+b+c+d$, ако a,b, c,d се различни реални броеви.**

Решение. Од Виетовите формули имаме $a+b=3c$, $c+d=3a$, $ab=-8d$, $cd=-8b$. Ако ги собереме првите две равенки добиваме $a+b+c+d=3(a+c)$. Од нив наоѓаме: $b=3c-a$, $d=3a-c$ и со замена во другите две равенки добиваме: $a(3c-a)=-8(3a-c)$, $c(3a-c)=-8(3c-a)$.

Ако овие две равенки ги одземеме добиваме: $c^2-a^2=32(c-a)$.

Бидејќи $a\neq c$, следува $a+c=32$. Тогаш $a+b+c+d=3(a+c)=32\cdot 3=96$.

448 Б. Со формулата $y=(k+1)x^2-2kx+k-1$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ е определено множество параболи.

а) Одреди го геометриското место на темињата на овие параболи;

б) Реши ја равенката $(k+1)x^2-2kx+k-1=0$.

Решение. а) Нека $T(x,y)$ е темето на параболата $y=(k+1)x^2-2kx+k-1$, тогаш

$$x=\frac{k}{k+1}=1-\frac{1}{k+1},\quad y=-\frac{1}{k+1}.$$

Со елиминирање на k од горните равенки го добиваме бараното геометриско место: $y=x-1$. Според тоа геометриското место на темињата на параболите е права.

б) Бидејќи $D=4k^2-4(k^2-1)=4$, добиваме $x_1=1,\ x_2=\frac{k-1}{k+1}$.

449 А. Реши го во $\mathbb{R}$ системот равенки $x+\sqrt{y}=3$, $y+\sqrt{z}=3$, $z+\sqrt{x}=3$.

Решение. $x-y=\sqrt{z}-\sqrt{y}$, $y-z=\sqrt{x}-\sqrt{z}$, $z-x=\sqrt{y}-\sqrt{x}$. Да претпоставиме дека $x\le y$. Тогаш $\sqrt{z}-\sqrt{y}\le 0$ т.е. $z\le y$. Понатаму следува $\sqrt{x}-\sqrt{z}\ge 0$, т.е. $x\ge z$, а оттука $y\le x$. Значи $x=y$. Аналогно добиваме $x=z$. Според тоа $x=y=z$. Затоа е доволно да ја решиме равенката $x+\sqrt{x}=3$, т.е. $\sqrt{x}=3-x$, каде што $x\in[0,3]$.

Нејзино решение е $\frac{7-\sqrt{13}}{2}$, па следува дека решение на системот е

$$\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2},\frac{7-\sqrt{13}}{2},\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right).$$

450 Б. Реши го во $\mathbb{R}$ системот равенки $x+y=z$, $x^2+y^2=z$, $x^3+y^3=z$.

Решение. Со квадрирање и кубирање на првата равенка добиваме:

$x^2+y^2+2xy=z^2$, $z+2xy=z^2$, $xy=\frac{1}{2}(z^2-z)$ и

$x^3+y^3+3xy(x+y)=z^3$, $z+\frac{3}{2}(z^2-z)z=z^3$, $z(z-1)(z-2)=0$.

Ако $z=0$, тогаш $x+y=0$, $xy=0$, па решение е $(0,0,0)$.

Ако $z=1$, тогаш $x+y=1$, $xy=0$, па решенија се $(0,1,1)$ и $(1,0,1)$.

Ако $z=2$, тогаш $x+y=2$, $xy=1$, па решение е $(1,1,2)$

Следствено решенија на системот се : $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ и $(1,1,2)$.

451. Даден е комплексниот број u. Одреди ги сите комплексни броеви z така што $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}$ е реален број.

Решение. Комплексниот број a е реален број ако и само ако $a=\bar{a}$.

Нека $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\overline{\left(\frac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)}$, т.е. $\frac{u-\bar{u}z}{1-z}=\frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}$

$$u-\bar{u}z-u\bar{z}+\bar{u}z\bar{z}=\bar{u}-u\bar{z}-\bar{u}z+uz\bar{z},\quad (\bar{u}-u)(1-z\bar{z})=0.$$

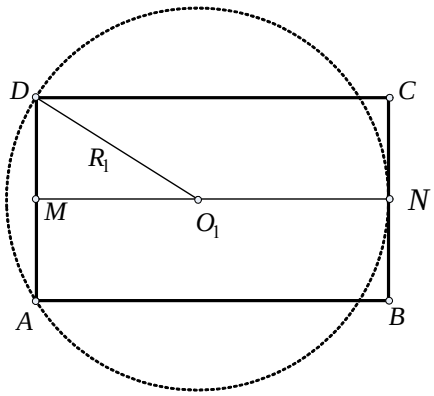
Ако u е реален број, тогаш $u=\bar{u}$, па решение е секој $z\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$.

Ако u е комплексен број, тогаш решение е секој $z\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$ така што $|z|=1$.

452. **Даден е правоаголникот $ABCD$. Ако $k_1(O_1,R_1)$ е кружницата која минува низ A и D и ја допира BC, а $k_2(O_2,R_2)$ е кружницата која минува низ A и B и ја допира CD, тогаш**

$$R_1 + R_2 \geq \frac{5}{8}(a+b),$$

каде што $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$. Докажи!



Решение. Нека кружницата k_1 минува низ A и D и ја допира страната BC во точката N. Очигледно е дека N е средина на BC. Нека M е средина на страната AD, тогаш од правоаголниот триаголник MO_1D добиваме:

$$R_1^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MO_1}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (a - R_1)^2.$$

Оттука следува дека $R_1 = \dfrac{b^2 + 4a^2}{8a}$ и аналогно $R_2 = \dfrac{a^2 + 4b^2}{8b}$. Конечно,

$$R_1 + R_2 = \frac{b^3 + 4a^2b + a^3 + 4ab^2}{8ab} = \frac{(a+b)(a^2+b^2+3ab)}{8ab} \geq \frac{(a+b)(2ab+3ab)}{8ab} = \frac{5(a+b)}{8}.$$

III година

453. Реши ја неравенката $\lg(5^x + x - 20) > x - x\lg 2$.

Решение. Бидејќи $x - x\lg 2 = x(\lg 10 - \lg 2) = x\lg 5 = \lg 5^x$. Неравенката го добива видот $\lg(5^x + x - 20) > \lg 5^x$. Оттука $5^x + x - 20 > 0$, $5^x + x - 20 > 5^x$, па $x > 20$.

454 А. За произволни α, β и γ барем еден од броевите $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ не е поголем од $\frac{1}{2}$. Докажи!

Решение. Да го претпоставиме спротивно, т.е. дека секој од овие производи е поголем од $\frac{1}{2}$. Тогаш

$$\sin\alpha\cos\beta \cdot \sin\beta\cos\gamma \cdot \sin\gamma\cos\alpha > \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8},$$

$$2\sin\alpha\cos\beta \cdot 2\sin\beta\cos\gamma \cdot 2\sin\gamma\cos\alpha > \tfrac{1}{8}\cdot 8,$$

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma > 1,$$

што не е можно, бидејќи $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma \leq 1$.

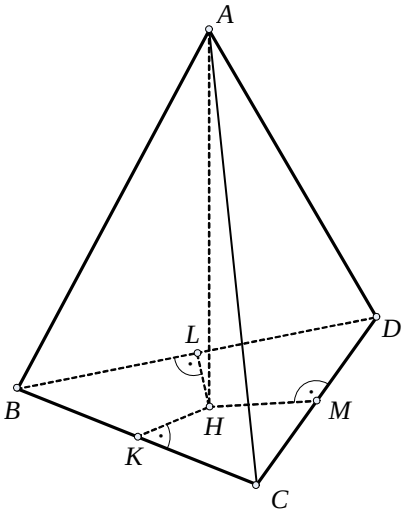
455 Б. Реши ја равенката $\sin 2x = \sqrt{2}\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos^2 x$.

Решение. Ако $\cos x = 0$, тогаш $\sin^2 x = 1, \sin 2x = 2\sin x\cos x = 0$, па равенката нема решение. Дадената равенка ја делиме со $\cos^2 x$ и добиваме

$$\sqrt{2}tg^2x - 2tgx + 2 - \sqrt{2} = 0, \ (tg\,x - 1)(\sqrt{2}tg\,x + \sqrt{2} - 2) = 0$$

Значи $tgx = 1$ или $tgx = \sqrt{2} - 1$. Решенија на овие две равенки се: $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{8} + m\pi$, $(k, m \in \mathbb{Z})$.

456 А. Рабовите AB, AC и AD од тетраедарот $ABCD$ се дијаметри на топките T_{AB}, T_{AC} и T_{AD}. Докажи дека овие три топки го препокриваат тетраедарот.

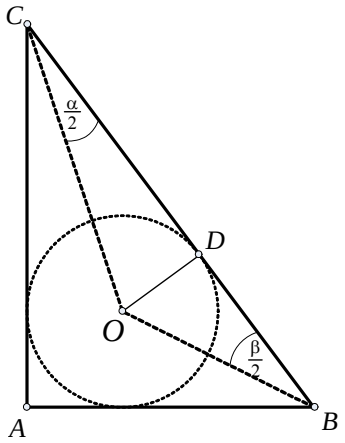


Решение. Од темето A спуштаме нормала AH на ѕидот BCD на тетраедарот. Од точката H спуштаме нормали HL, HM и HK на страните BD, DC и CB на триаголникот BCD. Ќе докажеме дека секоја од пирамидидте $ABKL$, $ACKM$ и $ADML$ е препокриена со топките T_{AB}, T_{AC} и T_{AD} соодветно.

Да ја разгледаме пирамидата $ABKL$. Од конструкцијата е јасно дека

$$\angle AKB = \angle ALB = \angle AHB = 90^\circ,$$

па според тоа точките K, H, L припаѓаат на сферата S_{AB}. Според тоа отсечките BL, BH и BK припаѓаат на топката, а исто така и AL, AH и AK. Следствено, триаголниците AKB, AHK и ALB како и четириаголникот $BLHK$ припаѓаат на топката T_{AB}. Значи, пирамидата $ABHKL$ е препокриена со топката T_{AB}.



457Б. Радиусите на опишаната и впишаната кружница на на еден правоаголен триаголник се однесуваат како $5:2$, соодветно. Одреди ги острите агли во триаголникот.

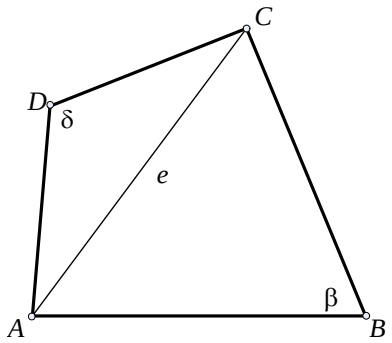
Решение. Нека R е радиус на опишаната кружница, а r радиус на впишаната кружница во правоаголниот триаголник $ctg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}-1}{ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}}=1$. Важи

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{OD}\,ctg\frac{\alpha}{2}+\overline{OD}\,ctg\frac{\beta}{2}=r\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}\right).$$

Бидејќи $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=45^o$ се добиваме: $2R=r\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}\right)$.

Оттука $ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}=2\frac{R}{r}=2\cdot\frac{5}{2}=5$. Триаголникот ABC е правоаголен па $\alpha+\beta=90^\circ$. Значи $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=45^\circ$. Од равенството $ctg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{ctg\frac{\alpha}{2}\cdot ctg\frac{\beta}{2}-1}{ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}}=1$, следува дека $ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}=6$. Земајќи $\alpha<\beta$ и решавајќи го системот равенки $ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}=5$, $ctg\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\beta}{2}=6$, добиваме дека $ctg\frac{\alpha}{2}=3$ и $ctg\frac{\beta}{2}=2$. Оттука $\alpha=2\,arcctg\,3=36^\circ52'12''$, $\beta=2\,arcctg\,2=53^\circ07'48''$.

458АБ. Ако a,b,c,d се страни на конвексен четириаголник, s - полупериметар, а 2ϕ збирот на два негови спротивни агли, тогаш неговата плоштина е $P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\phi}$. Докажи!



Решение. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Да означиме: $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{AD}=d$ $\overline{AD}=d$ и $\beta+\delta=2\phi$. Со дијагоналата AC тој е поделен на два триаголника. Тогаш неговата плоштина е

$$P=P_{ABC}+P_{ACD}=\frac{ab}{2}\sin\beta+\frac{cd}{2}\sin\delta .$$

Оттука $2P=ab\sin\beta+cd\sin\delta$. Со квадрирање на последното равенство се добива

$$4P^2=a^2b^2\sin^2\beta+c^2d^2\sin^2\delta+2abcd\sin\beta\sin\delta .$$

Ако во последната равенка замениме $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$, $\sin^2\delta=1-\cos^2\delta$ и ја дополниме до полн квадрат се добива

$$4P^2=(ab+cd)^2-(ab\cos\beta-cd\cos\delta)^2-2abcd(1+\cos\beta\cos\delta-\sin\beta\sin\delta).$$

Бидејќи $1+\cos 2\phi=2\cos^2\phi$, со замена во последното равенство се добива

$$4P^2=(ab+cd)^2-(ab\cos\beta-cd\cos\delta)^2-4abcd\cos^2\phi . \qquad (1)$$

Нека $\overline{AC}=e$. Од триаголниците ABC и ACD со примена на косинусната теорема се добива:

$$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta ,\ e^2=c^2+d^2-2cd\cos\delta .$$

Со одземање на овие две равенки се добива:

$$ab\cos\beta-cd\cos\delta=\frac{1}{2}\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right).$$

Со замена на последното равенство во (1) се добива

$$4P^2=(ab+cd)^2-\frac{1}{4}\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)^2-4abcd\cos^2\phi ,$$

а оттука

$$4P^2=\frac{1}{4}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)-4abcd\cos^2\phi$$

$$P^2=\frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}-abcd\cos^2\phi \qquad (2)$$

Од условот на задачата $\frac{a+b+c+d}{2}=s$, па со замена во (2) добиваме

$$P=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\phi} .$$

IV година

459 А. Во бесконечна аритметичка прогресија, чии членови се цели броеви, еден член на прогресијата е квадрат на природен број. Докажи дека прогресијата има бесконечно многу членови кои се квадрати на природни броеви.

Решение. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија чии членови се цели броеви со разлика d. Ако членот $a = m^2$, каде $m \in \mathbb{N}$, тогаш

$$(m + kd)^2 = m^2 + d(2mk + k^2 d)$$

е исто така член на прогресијата.

460 Б. Биномните коефициенти на вториот, третиот и четвртиот член во развојот на биномот $(1+x)^n$ образуваат аритметичка прогресија. Пресметај го n.

Решение. Имаме $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$. Со средување се добива $n^2 - 9n + 14 = 0$. Решенија се $n_1 = 7$ и $n_2 = 2$, но за $n_2 = 2$ задачата нема смисла. Значи $n = 7$.

461А. Реши ја неравенката $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{|x|-1}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{x}{6}}$.

Решение. Бидејќи важи $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$, неравенството го добива обликот $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{|x|-1}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{6}}$. Оттука $\frac{|x|-1}{x+1} \le \frac{x}{6}$, т.е. $\frac{6|x| - 6 - x^2 - x}{6(x+1)} \le 0$.

Ако $x \ge 0$, тогаш $\frac{5x - 6 - x^2}{6(x+1)} \le 0$, односно $\frac{(x-2)(x-3)}{6(x+1)} \ge 0$. Значи $x \in [0, 2] \cup [3, \infty)$.

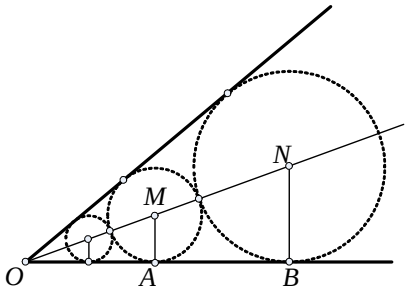
Ако $x < 0$, тогаш $\frac{-7x - 6 - x^2}{6(x+1)} \le 0$, односно $\frac{(x+1)(x+6)}{6(x+1)} \ge 0$. Значи $x \in [-6, -1) \cup (-1, 0)$.

Конечно $x \in [-6, -1) \cup (-1, 2] \cup [3, \infty)$.

462Б. Кружница со радиус r ги допира краците на аголот $\alpha = 60^\circ$, втората помала кружница ги допира краците на аголот α и првата кружница, третата кружница ги допира краците на аголот α и втората кружница и т.н. Пресметај го збирот од:

а) периметрите

б) плоштините на сите кругови.



Решение. Нека $\overline{AM} = r_1$, $\overline{BN} = r$, $\overline{OM} = a$, $\overline{MN} = b$. Од сличноста на триаголниците OBN и OAM се добива $\frac{r}{r_1} = \frac{a+b}{a}$. Од друга страна $\sin 30^\circ = \frac{r_1}{a}$, па $a = 2r_1$. Значи

$$r = r_1\left(1 + \frac{b}{a}\right) = r_1\left(1 + \frac{b}{2r_1}\right) = r_1\left(1 + \frac{r + r_1}{2r_1}\right).$$

Добиваме дека $r_1 = \frac{r}{3}$. Аналогно $r_2 = \frac{r_1}{3} = \frac{r}{9}$, и т.н.

а) Збирот од периметрите е

$$2\pi\left(r+r_1+r_2+...\right)=2\pi\left(r+\frac{r}{3}+\frac{r}{9}+...\right)=2\pi r\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3\pi r$$

б) Збирот од плоштините е

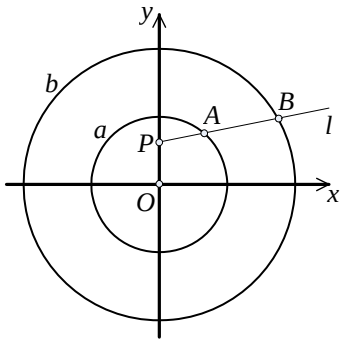
$$\pi\left(r^2+r_1^2+r_2^2+\ldots\right)=\pi\left(r^2+\frac{r^2}{3^2}+\frac{r^4}{3^4}+...\right)=\pi r^2\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}\pi r^2 .$$

463. Дадени се концентричните кружници a и b со центар O и точката $P\neq O$ во внатрешноста на помалата кружница. Полуправата l со почетна точка P ги сече кружниците a и b во точки A и B, содветно. Докажи дека должината $\overline{AB}$ е најголема ако полуправата l е нормална на правата OP.

Решение. Воведуваме правоаголен координатен систем со координатен почеток во O. Не се губи од општоста ако претпоставиме дека точката P лежи на y-оската. Нека $d=\overline{OP}$, а r и R се радиуси на помалата и поголемата кружница, соодветно. Тогаш равенката на полуправата l е $y=kx+d,\ x\geq 0$ (не се губи од општоста ако се претпостави дека $x\geq 0$). Ако l е дел од y-оската, ќе сметаме дека $k=\infty$. Нека $A\left(x_A,y_A\right),B\left(x_B,y_B\right)$. Тогаш важи $x_A{}^2+y_A{}^2=r^2$ и $y_A=kx_A+d$, $x_A\geq 0$. Од овие две равенки добиваме

$$\left(1+k^2\right)x_A{}^2+2kdx_A+d^2-r^2=0 .$$

Од $r>d$ следува дека $\left(1+k^2\right)r^2-d^2>0$, па равенката има две реални решенија. Но, од $r>d$ добиваме $\left(kd\right)^2<r^2-d^2+\left(kr\right)^2$, т.е. $\left(kd\right)^2<\left(1+k^2\right)r^2-d^2$. Бидејќи $x_A\geq 0$, го земаме само решението:



$$x_A=\frac{-kd+\sqrt{\left(1+k^2\right)r^2-d^2}}{1+k^2}.$$

Аналогно

$$x_B=\frac{-kd+\sqrt{\left(1+k^2\right)R^2-d^2}}{1+k^2}.$$

Според тоа $y_A=kx_A+d$, $y_B=kx_B+d$, па растојанието меѓу точките $A\left(x_A,y_A\right)$, $B\left(x_B,y_B\right)$ е:

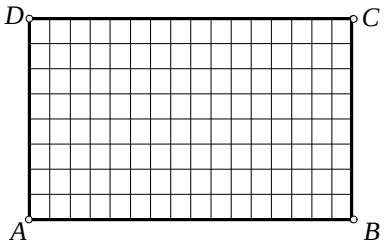
$$D\left(k\right)=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\frac{R^2-r^2}{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{1+k^2}}+\sqrt{r^2-\frac{d^2}{1+k^2}}}.$$

Последниот израз има најголема вредност ако именителот е најмал, т.е. ако $\frac{d^2}{1+k^2}$ има најголема вредност, а таа се достигнува за $k=0$. Оттука следува дека полуправата l е нормална на правата OP.

464. Правоаголник $ABCD$ е пресечен со m прави паралелни со страната AB и m прави паралелни со страната BC. Најди го бројот на добиените правоаголници.

Решение. Хоризонтални прави заедно со AB и CD има $m+2$, исто колку и вертикални прави. Секои две хоризонтални прави определуваат еден правоаголник, па бројот на така добиените правоаголници е

$$C_2^{m+2} = \binom{m+2}{2}.$$



Бројот на правоаголниците определени од вертикалните прави е исто така

$$C_2^{m+2} = \binom{m+2}{2}.$$

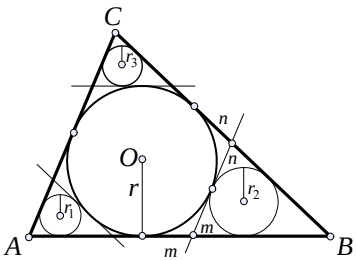
Значи вкупниот број на правоаголници е

$$\binom{m+2}{2}^2 = \frac{(m+2)^2(m+1)^2}{4}.$$

XXV регионален натпревар - 2002 година

I година

465 АБ. Паралелно со страните на триаголникот ABC повлечени се тангенти на неговата впишана кружница. Секоја од тангентите од триаголникот отсекува триаголник. Ако r е радиусот на впишаната кружница во ΔABC а r_1, r_2, r_3 се радиуси на впишаните кружници во отсечените триаголници, тогаш $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Докажи!



Решение. Секој од малите триаголници е сличен со триаголникот ABC. Ако L е периметар на триаголникот ABC а L_1, L_2 и L_3 се периметри на малите триаголници со по едно теме A, B, C соодветно, тогаш

$$\frac{L_1}{L} = \frac{r_1}{r},\ \frac{L_2}{L} = \frac{r_2}{r} \text{ и } \frac{L_3}{L} = \frac{r_3}{r}.$$

Нека допирните точки на отсечките AB, BC, CA со впишаната кружница се C_1, A_1, B_1 соодветно. Јасно е дека $L_1 = \overline{AB_1} + \overline{AC_1}$, $L_2 = \overline{BA_1} + \overline{BC_1}$ и $L_3 = \overline{CA_1} + \overline{CB_1}$. Од добиените равенства, јасно е дека $L_1 + L_2 + L_3 = L$.

Според тоа $\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = \frac{L_1}{L} + \frac{L_2}{L} + \frac{L_3}{L} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L} = \frac{L}{L} = 1$, т.е. $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

466 А. За позитивните реални броеви x и y исполнето е равенството $x^2 + y^2 = 6xy$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{x-y}$.

Решение. Ако на двете страни од равенството $x^2 + y^2 = 6xy$ додадеме $2xy$ добиваме

$x^2 + 2xy + y^2 = 8xy$ т.е. $(x+y)^2 = 8xy$.

Ако на двете страни на истото равенство додадеме $-2xy$ добиваме

$x^2 - 2xy + y^2 = 4xy$, т.е. $(x-y)^2 = 4xy$.

Според тоа $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\frac{8xy}{4xy}=2$. Конечно, $\frac{x+y}{x-y}=\pm\sqrt{2}$.

467 Б. Упрости го изразот $\dfrac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^x\left(y+\frac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^y\left(x-\frac{1}{y}\right)^{x-y}}$.

Решение. Ќе направиме трансформација и на броителот и на именителот на зададениот израз:

$$\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^x\left(y+\frac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^y\left(x-\frac{1}{y}\right)^{x-y}}=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^x\left(\frac{xy+1}{x}\right)^{y-x}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^y\left(\frac{xy-1}{x}\right)^{x-y}}=\frac{\frac{(x^2y^2-1)^x}{y^{2x}}\cdot\frac{(xy+1)^{y-x}}{x^{y-x}}}{\frac{(x^2y^2-1)^y}{x^{2y}}\cdot\frac{(xy-1)^{x-y}}{y^{x-y}}}=$$

$$=\frac{\frac{(xy-1)^x\cdot(xy+1)^x}{y^{2x}}\cdot\frac{(xy+1)^y\cdot(xy+1)^{-x}}{x^y\cdot x^{-x}}}{\frac{(xy-1)^y\cdot(xy+1)^y}{x^{2y}}\cdot\frac{(xy-1)^x\cdot(xy-1)^{-y}}{y^x\cdot y^{-y}}}=\frac{x^{x+y}}{y^{x+y}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{x+y}$$

468. Збирот на 20 природни броеви е 2002. Најди ја најголемата вредност што може да ја прими нивниот НЗД.

Решение. Нека $a_1,a_2,...,a_{20}$ се природни броеви за кои $a_1+a_2+...+a_{20}=2002$. Ако $d=\text{НЗД}(a_1,a_2,...,a_{20})$, тогаш $a_i=d\cdot k_i$, $i=1,2,...,20$ каде $k_1,k_2,...,k_{20}\in\mathbb{N}$.

Значи $d(k_1+k_2+...+k_{20})=2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$.

Бидејќи $s=k_1+k_2+\ldots+k_{20}$ (збир на дваесет природни броеви) и d се природни броеви за кои $s\cdot d=2\cdot7\cdot11\cdot13$ и $s\geq20$, најмала вредност која може да ја прими бројот $s=k_1+k_2+\ldots+k_{20}$ е $2\cdot11=20$. Според тоа најголема вредност на d е 91.

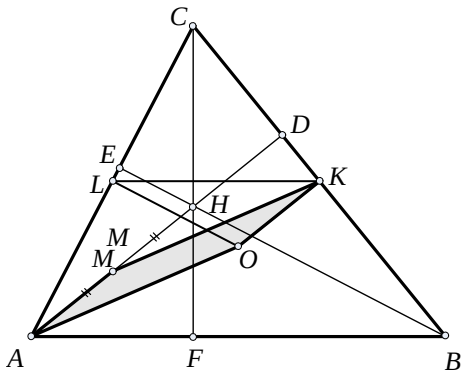
Низата броеви

$$a_1=91,a_2=91,a_3=91,...,a_{19}=91,a_{20}=273$$

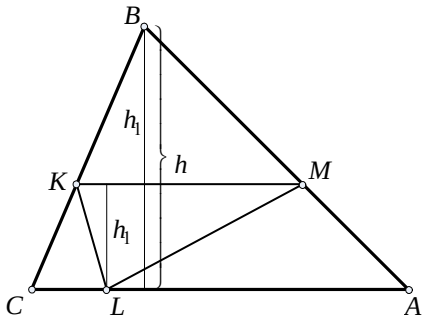
ги има бараните својства.

469 А. Точката H е ортоцентар, а точката O е центар на опишаната кружница во триаголникот ABC. Ако M е среднина на отсечката AH, а K е средина на страната BC, докажи дека $\overline{AO}=\overline{KM}$.

Решение. Нека L е средина на страната AC. Бидејќи O е центар на опишаната кружница $OK\parallel AH$ и $OL\parallel BH$, а бидејќи L и K се средини на страните AC и BC соодветно, $LK\parallel AB$. Според тоа $c-b>0$. Бидејќи $\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, коефициентот на сличност е $\frac{1}{2}$. Според тоа $\overline{OK}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\overline{AM}$. Значи, четириаголникот $OKMA$ е паралелограм и $\overline{AO}=\overline{KM}$.



470 Б. Даден е ΔABC и $M \in AB$, $K \in BC$ се такви што $MK \parallel AC$. Ако L е произволна точка од страната AC на триаголникот, $P_{\Delta ABC} = P$, $P_{\Delta MBK} = S$, определи ја P_{LMBK}.



Решение. Плоштината на ΔKLM ја означуваме со Q, т.е. $P_{\Delta KLM} = Q$. Бидејќи триаголниците KLM и KMB имаат иста страна KM имаме

$$\frac{Q}{S} = \frac{\frac{1}{2}\overline{KM} \cdot h_2}{\frac{1}{2}\overline{KM} \cdot h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h - h_1}{h_1} = \frac{h}{h_1} - 1 = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S}} - 1.$$

Оттука добиваме $Q = \sqrt{P \cdot S} - S$, т.е.

$$Q + S = \sqrt{P \cdot S}.$$

Значи, $P_{LMBK} = \sqrt{P \cdot S}$.

II година

471. Ако a, b, c се непарни броеви, тогаш равенката $ax^2 + bx + c = 0$ нема рационални решенија. Докажи!

Решение. Ако $a = 2k+1$, $b = 2m+1$, $c = 2n+1$, тогаш дискриминантата на равенката е:

$$D = (2m+1)^2 - 4(2k+1)(2n+1) = 4m(m+1) - 8(2kn + k + n) - 3 = 4m(m+1) - 8(2kn + k + n + 1) + 5$$

Бројот $m(m+1)$ е парен, па затоа бројот $4m(m+1)$ е делив со 8. Значи, $D = 8p + 5$. За корените на равенката да бидат рационални броеви D треба да биде потполн квадрат. Од претходната дискусија D е непарен, па заради тоа $D = (2q+1)^2 = 4q(q+1) + 1 = 8r + 1$. Значи D не може да биде полн квадрат, т.е. равенката нема рационални корени.

472 АБ. Нека a, b, c се комплексни броеви за кои што $|a| = |b| = |c| = 1$. Докажи дека $\left|\frac{ab + bc + ac}{a + b + c}\right| = 1$.

Решение. Ако z е комплексен број, тогаш $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. За произволни комплексни броеви z и w е исполнето равенството $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$ и $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Користејќи ги овие особини добиваме

$$|ab + bc + ac|^2 = (ab + bc + ac)\overline{(ab + bc + ac)} = (ab + bc + ac)(\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{c} \cdot \overline{a}) =$$
$$= 3 + a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + b \cdot \overline{c} + c \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c$$

$$|a + b + c|^2 = (a + b + c)\overline{(a + b + c)} = (a + b + c)(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = 3 + a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + b \cdot \overline{c} + c \cdot \overline{b} + a \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot c$$

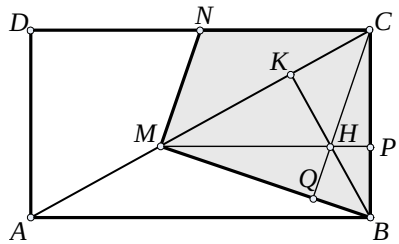
Според тоа, $\left|\frac{ab + bc + ac}{a + b + c}\right| = 1$.

473А. Во правоаголникот $ABCD$ повлечена е нормала BK на дијагоналата AC ($K \in AC$). Точките M и N се средини на AK и CD соодветно. Докажи дека $BMNC$ е тетивен четириаголник.

Решение. Ако $P \in BC$, таква што $MP \parallel AB$, тогаш MP е висина на ΔBMC. Ако $\{H\} = KB \cap MP$, тогаш H е ортоцентар на ΔBMC и $CH \perp MB$. Нека $\{Q\} = CH \cap MB$.

Бидејќи M е средина на AK и $MH \parallel AB$, MH е средна линија на ΔABK па затоа

$$\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{DC} = \overline{NC}.$$



Значи $MHCN$ е паралелограм, па според тоа $MN \parallel QC$. Конечно,

$$\angle NMB = \angle CQB = 90^\circ, \quad \text{т.е.}$$

$$\angle NMB = \angle NCB = 90^\circ,$$

од каде што следува дека $MBCN$ е тетивен (збирот на спротивните агли е 180°).

474Б . Ако $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$, тогаш $(a+b+c)^3 = 27abc$. Докажи!

Решение. Од дадената равенство, непосредно добиваме

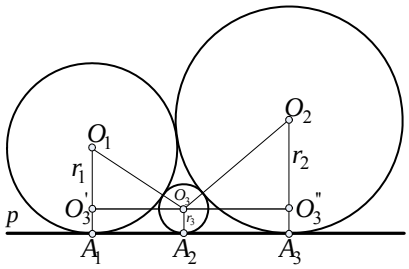
$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{c} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = (-\sqrt[3]{c})^3 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{b^2a} = -c \quad \Leftrightarrow$$

$$a + b + c = -3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b+c)^3 = (3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c})^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)^3 = 27abc$$

475 А. Три кружници со центри O_1, O_2 и O_3 и радиуси r_1, r_2 и r_3 соодветно, се допираат попарно меѓу себе од надворешна страна и сите три ја допираат правата p. Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$ (r_3 е радиус на најмалата кружница).

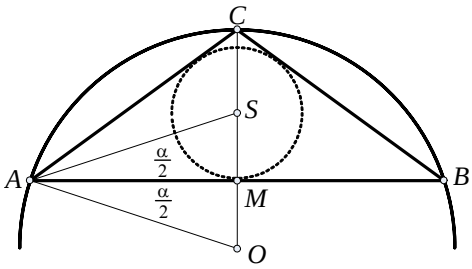
Решение. Со A_1, A_2, A_3 ги означуваме проекциите на точките O_1, O_2, O_3 на правата p. Нека O_3' е проекцијата на точката O_3 на правата O_1A_1 (кружницата со радиус O_3 има најмал радиус). Од питагоровата теорема за $\Delta O_3O_3'O_1$ имаме $\overline{O_3O_3'}^2 = 4r_1r_3 = \overline{A_1A_3}^2$. Со слична постапка се добива дека $\overline{A_2A_3}^2 = 4r_2r_3$ и $\overline{A_1A_2}^2 = 4r_1r_2$, од каде го добиваме бараното равенство.



Значи $\overline{A_1A_3} = 2\sqrt{r_1r_3}$, $\overline{A_1A_2} = 2\sqrt{r_1r_2}$ и $\overline{A_2A_3} = 2\sqrt{r_2r_3}$.

Бидејќи $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A_3} + \overline{A_2A_3}$, имаме $\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$ што требаше да се докаже.

476 Б. Во ΔABC центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB. Најди ги аглите на триаголникот.



Решение. Нека S е центар на впишаната кружница, а O е центар на опишаната кружница. Триаголникот ABC е рамнокрак триаголник (правата OS е симетрала на AB). Спо-

ред тоа $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$. Ако $\{M\} = SO \cap AB$ тогаш $\overline{SM} = \overline{OM}$ и $\Delta AMO \cong \Delta AMS$, па затоа $\angle MAO = \frac{\alpha}{2}$. Периферниот агол $\angle ABC$ над тетивата AC е еднаков на половина од централниот $\angle AOC$ над истата тетива. Според тоа

$$\alpha = \angle ABC = \tfrac{1}{2}\angle AOC = \tfrac{1}{2}(90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}) \text{ т.е. } 4\alpha = 180^\circ - \alpha .$$

Според тоа, аглите на триаголникот се $\alpha = \beta = 36^\circ$ и $\gamma = 108^\circ$.

III година

477 А. Докажи дека

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Решение. Користејќи ги особините на логаритамската функција имаме

$$\begin{aligned}
&\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \\
&= \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} c} = \\
&= \frac{\log^2_{abc} N \cdot (\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c)}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} b} = \frac{\log^2_{abc} N \cdot 1}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} b} = \\
&= \frac{\log^2_{abc} N}{\frac{\log_{abc} N}{\log_a N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_b N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_c N}} = \frac{\log_a N \cdot \log_a N \cdot \log_a N}{\log_{abc} N}.
\end{aligned}$$

478 Б. Реши ја равенката $\log_2(4^x + 4) = x + \frac{1}{\log_{(2^{x+1}-3)} 2}$.

Решение. Користејќи ги особините на логаритамската функција $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a = \log_b b^a$ и $\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$, дадената равенка ќе ја запишеме во облик:

$$\log_2(2^{2x} + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(2^{2x} + 4) = \log_2[2^x(2^{x+1} - 3)].$$

Воведуваме смена $2^x = y$ и равенката го добива обликот

$$\log_2(y^2 + 4) = \log_2[y(2y - 3)] \Rightarrow y^2 + 4 = y(2y - 3).$$

Квадратната равенка $y^2 - 3y - 4 = 0$ има решенија $y_1 = -1$ и $y_2 = 4$. Равенката $2^x = -1$ нема решенија а равенката $2^x = 4$ има решение $x = 2$.

Со замена на $x = 2$ во почетната равенка добиваме дека $x = 2$ е решение на почетната равенка.

479 А. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin 6x}{\sin 2x} + \ldots + \frac{\sin 3nx}{\sin nx} - \frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \ldots \frac{\cos 3nx}{\cos nx}.$$

Решение. Користејќи ја адициона теорема $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$ и тригонометриската формула за двоен агол $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, добиваме

$$A=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}-\ldots\frac{\cos 3nx}{\cos nx}=\left[\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}\right]+\left[\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3nx}{\cos nx}\right]=\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}+\frac{\sin 6x\cos 2x-\cos 6x\sin 2x}{\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx\cos nx-\cos 3nx\sin nx}{\sin nx\cos nx}=$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}+\frac{\sin(6x-2x)}{\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin(3nx-nx)}{\sin nx\cos nx}=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}2\sin x\cos x}+\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}2\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}2\sin nx\cos nx}=$$

$$=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}+\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 4x}+\ldots+\frac{\sin 2nx}{\frac{1}{2}\sin 2nx}=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n}=2n$$

480 Б. Докажи го неравенството $|\sin x|+|\cos x|\geq 1$.

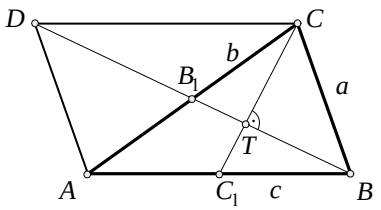
Решение. Ако на основната тригонометриска релација додадеме од двете стани $2|\sin x|\cdot|\cos x|$ добиваме

$$\sin^2 x+2|\sin x|\cdot|\cos x|+\cos^2 x=1+2|\sin x|\cdot|\cos x|$$

$$(|\sin x|+|\cos x|)^2=1+2|\sin x|\cdot|\cos x|\geq 1$$

Бидејќи $|\sin x|+|\cos x|\geq 0$, од неравенството $(|\sin x|+|\cos x|)^2\geq 1$, кое е исполнето за секој реален број x, добиваме $|\sin x|+|\cos x|\geq 1$.

481 А. За страните a,b,c на триаголникот ABC исполнето е равенството $b^2+c^2=5a^2$. Докажи дека $t_b\perp t_c$.



Решение. За дадениот триаголник, според косинусна теорема имаме $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$, т.е. $5a^2=5(b^2+c^2)-10bc\cdot\cos\alpha$. Од равенството од условите на задачата имаме

$$2a^2=bc\cdot\cos\alpha. \qquad (*)$$

Ако ја примениме косинусна теорема на триаголниците BB_1A и CC_1A ги добиваме равенствата

$$t_b=c^2+\frac{b^2}{4}-bc\cdot\cos\alpha\overset{(*)}{=}\frac{4c^2+b^2-8a^2}{4}=\frac{3c^2-3a^2}{4}$$

$$t_c=b^2+\frac{c^2}{4}-bc\cdot\cos\alpha\overset{(*)}{=}\frac{4b^2+c^2-8a^2}{4}=\frac{3b^2-3a^2}{4}$$

Со примена на овие две равенства за триаголникот CTB_1, бидејќи $\overline{CT}=\frac{2}{3}t_c$ и $TB_1=\frac{1}{3}t_b$, добиваме

$$\left(\frac{2}{3}t_c\right)^2+\left(\frac{1}{3}t_b\right)^2=\frac{4}{9}\frac{3b^2-3a^2}{4}+\frac{1}{9}\frac{3c^2-3a^2}{4}=\frac{12b^2-3c^2-15a^2}{36}=\frac{9b^2}{36}=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

т.е.

$$\left(\frac{2}{3}t_c\right)^2+\left(\frac{1}{3}t_b\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Значи, ΔCTB_1 е правоаголен, т.е. $CT\perp BT$.

482 БА. Во правоаголен триаголник ΔABC ($\angle C = 90^\circ$), правата што минува низ средината на хипотенузата и центарот на впишаната кружница ја сече катетата AC во точка N под агол од 75°. Одреди ги острите агли во ΔABC.

Решение. Ако O е центар на впишаната кружница, тогаш $\frac{\alpha+\beta}{2}=45^\circ$ и $\angle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 135^\circ$.

Заради претходното

$$\angle AON = 180^\circ - (75^\circ + \frac{\alpha}{2}),\ \angle AOM = 180^\circ - \angle AON = 75^\circ + \frac{\alpha}{2},\ \angle BOM = 135^\circ - \angle AOM = 60^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

За ΔAOM, според синусна теорема

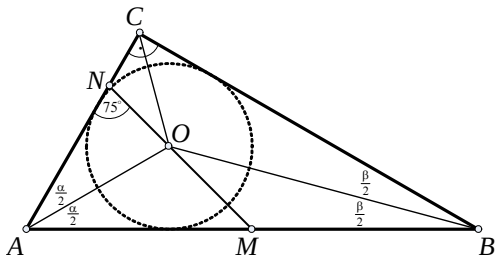
$$\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{AM}}{\sin\left(75^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{т.е.} \quad \overline{AM} = \overline{OM}\,\frac{\sin\left(75^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

За ΔBOM според синусна теорема

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\overline{BM}}{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{т.е.} \quad \overline{BM} = \overline{OM}\,\frac{\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Точката M е средина на отсечката AB, па затоа $\overline{AM} = \overline{BM}$, т.е.

$$\overline{OM}\,\frac{\sin\left(75^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \overline{OM}\,\frac{\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$



Ако во последново равенство замениме $\frac{\beta}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\sin\left(75^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Користејќи адициони теореми добиваме

$$\cos 120^\circ - \cos(30^\circ + \alpha) = \cos 60^\circ - \cos(60^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

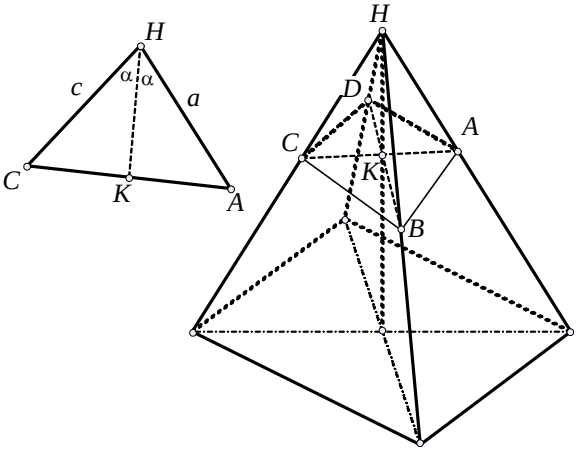
$$\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \cos 60^\circ - \cos 120^\circ = 1 \Rightarrow$$

$$-2\sin 45^\circ \sin(15^\circ - \alpha) = 1 \Rightarrow 2\sin 45^\circ \sin(\alpha - 15^\circ) = 1 \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha - 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha - 15^\circ = 45^\circ$$

Значи, аглите на триаголникот се $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

483 Б. Рамнина ги сече бочните рабови на правилна четиристрана пирамида во точките A, B, C и D кои се на растојание a, b, c и d од врвот на пирамидата ($ABCD$ е четираголникот што се добива). Докажи дека $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.



Решение. Воведуваме ознаки $\overline{AM}=a$, $\overline{BH}=b$, $\overline{CM}=c$, $\overline{DH}=d$ и $\overline{HK}=l$, каде што K е пресек на дијагоналите во четириаголникот $ABCD$. Нека α е аголот што го зафаќа висината HP со бочните рабови на пирамидата. Тогаш

$P_{\Delta AHC}=P_{\Delta AHK}+P_{\Delta HKC}$ т.е.

$\frac{ac}{2}\sin 2\alpha=\frac{al}{2}\sin\alpha+\frac{cl}{2}\sin\alpha$ т.е.

$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$.

Аналогно $\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$, од каде се добива бараното равенство.

IV година

484 А. Броевите $a_1,a_2,...,a_n$ образуваат аритметичка прогресија.

Докажи дека $\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}a_k^2=\frac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2)$.

Решение. Ќе ја користиме формулата за општиот член на аритметичката прогресија и формулата за збирот S_k на првите k членови на аритметичка прогресија, при што добиваме

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k^2=(a_1^2-a_2^2)+(a_3^2-a_4^2)+...+(a_{2n-1}^2-a_{2n}^2)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}^2-a_{2k}^2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}-a_{2k})(a_{2k-1}+a_{2k})=-d\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=-d\sum_{k=1}^{n}(2a_{2k-1}+d)=$$

$$=-d\left(nd+2\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(2k-2)d\right]\right)=-nd\left[2a_1+(2n-1)d\right]$$

Од друга страна $\frac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2)=\frac{n}{2n-1}(a_1-a_{2n})(a_1+a_{2n})=-nd\left[2a_1+(2n-1)d\right]$.

485 Б. Дадена е аритметичка прогресија $a_1,a_2,...,a_n$. Докажи дека

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

Решение. За $i=1,2,...,n$ точно е равенството

$$\frac{1}{a_ia_{n-i}}=\frac{a_i+a_{n-i}}{a_ia_{n-i}(a_i+a_{n-i})}=\frac{a_i}{a_ia_{n-i}(a_i+a_{n-i})}+\frac{a_{n-i}}{a_ia_{n-i}(a_i+a_{n-i})}=\frac{1}{a_{n-i}(a_i+a_{n-i})}+\frac{1}{a_i(a_i+a_{n-i})}=\frac{1}{a_i+a_{n-i}}\left(\frac{1}{a_{n-i}}+\frac{1}{a_i}\right)$$

Според тоа

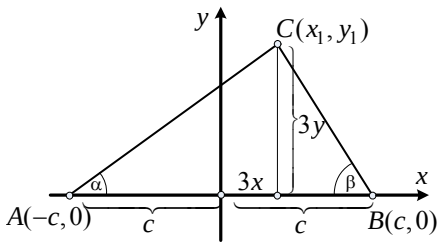
$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_na_1}=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{1}{a_2+a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+...+\frac{1}{a_n+a_1}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right)=(*)$$

Бидејќи $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...=a_n+a_1$, добиваме

$$(*)=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+...+\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right)=$$

$$=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_1}\right).$$



486 АБ. Точките $A(-c,0)$ и $B(c,0)$ се темиња на триаголникот ABC. Аглите $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$ го исполнуваат равенството $tg\alpha \cdot tg\beta = -k^2$. Најди го геометриското место на тежиштата на ΔABC.

Решение. Ако $T(x,y)$ е тежиште на триаголникот ABC, каде $C(x_1,y_1)$, тогаш

$x=\frac{-c+c+x_1}{3}=\frac{x_1}{3}$ т.е. $x_1=3x$ и $y=\frac{0+0+y_1}{3}=\frac{y_1}{3}$ т.е. $y_1=3y$. Значи, $C(3x,3y)$.

Проекцијата на точката C врз $x-$оската ќе ја означиме со $C'(3x,0)$.

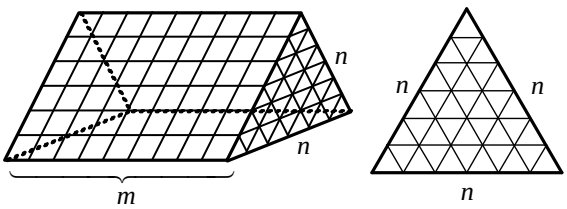
Ако точката C припаѓа на првиот или третиот квадрант, од правоаголниот триаголник $BC'C$ имаме $tg\beta=\frac{3y}{c-3x}$, а од правоаголниот триаголник $AC'C$ имаме $tg\alpha=\frac{3y}{c+3x}$.

Според тоа, од равенството $tg\alpha \cdot tg\beta=-k^2$ добиваме $\frac{3y}{c+3x}\cdot\frac{3y}{c-3x}=-k^2$ т.е. $\frac{x^2}{\left(\frac{c}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{ck}{3}\right)^2}=1$.

Аналогно се разгледува и случајот кога точката C припаѓа на втор или четврт квадрант.

487. Правилна тристрана призма со основен раб n и бочен раб m (m и n се природни броеви) прво е обоена а потоа разделена на слични призми со основен раб и бочен раб со должини 1 (како на цртежот). Пресметај колку призми ќе останат на кои сите ѕидови им се необоени.

Решение. Во триаголникот со страна n има n^2 мали триаголници. Навистина, тргнувајќи од основата кон врвот има $n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$ триаголници свртени со врвот кон внатрешноста и $(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ триаголници свртени



со врвот на надвор. Според тоа, призмата е разделена на

$$p_{vk}=m\cdot\left[\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=m\cdot n^2$$

мали призми.

Од сите мали призми, барем еден обоен ѕид ќе имаат оние што се наоѓаат на двете основи и на на бочните страни на призмата т.е.

$$p_{ob}=2n^2+(m-2)\cdot n+(m-2)(n-1)+(m-2)(n-2)=2n^2+(m-2)(3n-3)$$

Според тоа, бројот p на необоените призми е

$$p=p_{vk}-p_{ob}=(m-2)(n^2-3n+3).$$

488 А. Пресметај го коефициентот пред $x^n y^n$ ако изразот

$$(1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n$$

се развие според Биномната формула.

Решение. Според биномната формула

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\ (1+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}\ \text{ и }\ (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Собироци во производот $(1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n$ во кои се јавува $x^n y^n$ се

$$\binom{n}{k}x^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}y^{n-k}\ ,\ k=0,1,2,...,n\ .$$

Заради тоа, бараниот коефициент е $\binom{n}{0}^3+\binom{n}{1}^3+...+\binom{n}{n}^3$.

489 Б. Разложи го на прости множители полиномот

$$P(x)=x^4+x^3-8x^2+3x+5\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на обликот на полиномот

$$P(x)=x^4+2x^3-5x^2-(x^3+2x^2-5x)-(x^2+2x-5)=x^2(x^2+2x-5)-x(x^2+2x-5)-(x^2+2x-5)=$$
$$=(x^2-x-1)(x^2+2x-5)$$

Нули на полиномот се $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_{3/4}=-1\pm\sqrt{6}$.

Според тоа ,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ .$$

XXVI регионален натпревар - 2003 година

I година

490. За реалните броеви a,b,c и d важи равенството $a^2+b^2=c^2+d^2$ и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$. Докажи дека $ad+bc>0$.

Решение. Заради равенството $a^2+b^2=c^2+d^2>0$ и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$ добиваме:

$$(ad+bc)(ac+bd)=a^2dc+c^2ab+d^2ab+b^2dc=(a^2+b^2)dc+(c^2+d^2)ab=$$
$$=(a^2+b^2)dc+(a^2+b^2)ab=(a^2+b^2)(dc+ab)>0$$

т.е. $(ad+bc)(ac+bd)>0$. Бидејќи $ac+bd>0$, па според тоа $ad+bc>0$, што и требаше да се докаже.

491. Петар имал 40 крави од кои првата давала $1l$ млеко, втората $2l$ млеко, третата $3l$ млеко, и т.н. четириесеттата крава давала $40l$ млеко. Петар сакал на неговите 4 синови да им ги подели кравите така што секој да добие десет крави и синовите од добиените крави да добиваат по ист број литри млеко. Дали Петар може да ги подели кравите? Доколку може најди една таква поделба.

Решение. Сите крави заедно ќе даваат

$$2+3+...+39+40=(1+40)+(2+39)+(3+38)+...+(20+21)=20\cdot 41=820\ .$$

Значи секој син треба да добие десет крави кои ќе даваат по 205 литри млеко. Ќе ги искористиме равенствата $1+40=2+39=3+38=...=20+21$. Заради претходните равенства можеме кравите да ги поделиме по парови. Кравите кои даваат заедно четириесет и еден литар млеко ќе ги сметаме за пар, и ќе ги нарекуваме крави придружнички. Петар може да постапи на следниот начин: ако на некој син му ја додели кравата која дава n литри млеко, ќе му ја додели и кравата придружничка. Значи на секој од синовите нема да му дели по една

крава, туку ќе им дели парови крави кои се придружнички. Сега е лесно, На секој од синовите ќе му даде по пет крави кои даваат не повеќе од дваесет литри млеко а потоа на секој од синовите на доделените крави ќе му ги додели и кравите придружнички.

Еден таков начин е:

1 син: $1,2,3,4,5,40,39,38,37,36$ 2 син: $6,7,8,9,10,35,34,33,32,31$

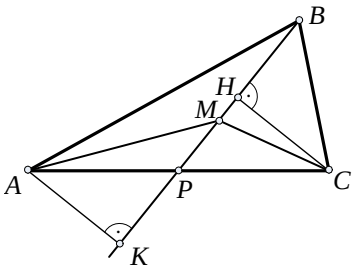
3 син: $11,12,13,14,15,30,29,28,27,26$ 4 син: $16,17,18,19,20,25,24,23,22,21$

Секако дека постојат и многу други поделби.

492 А. Точката M од внатрешноста на триаголникот ABC е таква што триаголниците ABM, BCM и ACM имаат еднакви плоштини. Докажи дека M е тежиште на триаголникот.

Решение. Ќе покажеме дека ако триаголниците ABM и BCM имаат еднакви плоштини, тогаш точката M припаѓа на тежишната линија повлечена од темето B. Нека K и H се ортогоналните проекции од точките A и C на правата BM, и нека правата BM ја сече отсечката AC во точката P (види цртеж). Тогаш

$$\frac{\overline{BM}\cdot\overline{AK}}{2}=P_{\Delta ABM}=P_{\Delta BCM}=\frac{\overline{BM}\cdot\overline{CH}}{2},$$



па според тоа $\overline{AK}=\overline{CH}$.

Ако $AC\perp BM$, тогаш $K=H=P$, па $\overline{AP}=\overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.

Ако AC не е нормално на BP, тогаш јасно е дека триаголниците AKP и CHP се складни. Навистина, тие имаат еднакви агли и една иста страна. Според тоа $\overline{AP}=\overline{CP}$, т.е. $\overline{BP}$ е медијана.

493 А. За кои цифри a и b ($a\neq 0$) бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ е полн квадрат.

Решение. За било кои цифри a и b ($a\neq 0$) бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ можеме да го запишеме во облик

$$9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4=9(10\cdot\overline{ab}+5-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4=9(9\cdot\overline{ab}+5)(\overline{ab}+1)+4=$$
$$=81\cdot\overline{ab}^2+126\cdot\overline{ab}+49=(9\cdot\overline{ab}+7)^2$$

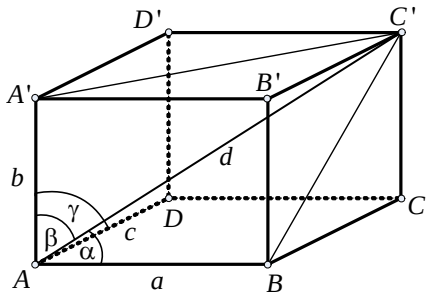
Значи, за било кои цифри a и b ($a\neq 0$), бројот $9(\overline{ab5}-\overline{ab})(\overline{ab}+1)+4$ е полн квадрат.

494 Б. Аглите на еден четириаголник редоследно се $x, x+20, x+30, x+50$. Определи ги неговите агли, а потоа докажи дека тој е трапез.

Решение. Бидејќи збирот на аглите во било кој четириаголник е 360°, добиваме дека $x+x+20+x+30+x+50=360^\circ$, т.е. $x=65^\circ$. Според тоа аглите на четириаголникот се $65^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 115^\circ$. Бидејќи $85^\circ+95^\circ=115^\circ+65^\circ=180^\circ$, паровите агли $85^\circ, 95^\circ$ и $115^\circ, 65^\circ$ се агли на трансферзала. Бидејќи тие се агли во четириаголник, тој е трапез.

495 Б. Најди ги сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$, такви што $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ и $\overline{de}$ се полни квадрати.

Решение. Единствени двоцифрени броеви што се полни квадрати се $16, 25, 36, 49, 64$ и 81. Тие почнуваат со цифрите $1,2,3,4,6,8$, а завршуваат со цифрите $1,4,5,6$. Значи цифрите b,c,d може да бидат само цифрите $1,4,6$. Броевите $\overline{bc}$ и $\overline{cd}$ се полни квадрати, а тоа е можно само ако $\overline{bc}=16$ и $\overline{cd}=64$. Според тоа $\overline{ab}=\overline{a1}$ од каде добиваме $a=8$, и $\overline{de}=\overline{4e}$ од каде пак добиваме $e=9$. Конечно, бараниот број е 81649, и тој е единствен со бараното својство.



II година

496. Во даден квадар α, β, γ се аглите кои просторната дијагонала ги зафаќа со неговите рабови. Докажи дека

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Решение. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е дадениот квадар и AC' е една негова просторна дијагонала која со страните AB, AA', AD зафаќа агли α,β,γ соодветно. Тогаш од триаголниците $ABC', AC'A', ADC'$ кои се правоаголни имаме $\cos\alpha=\frac{a}{d}$, $\cos\beta=\frac{b}{d}$ и $\cos\gamma=\frac{c}{d}$, од каде, заради условот $a^2+b^2+c^2=d^2$ го добиваме бараното равенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 .$$

497. Дадена е неравенката $x^2+ax-1<0$. Определи ги вредностите на параметарот a, така што множеството од нејзините решенија е интервал со должина 5.

Решение. Дискриминантата на неравенката е $D=a^2+4\geq 0$, па според тоа таа има реални решенија. Од условот множеството решенија на неравенката да е интервал со должина 5 добиваме:

$$5=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4} .$$

Решенија на равенката $\sqrt{a^2+4}=5$ се $a=\pm\sqrt{21}$. Лесно се проверува дека добиените вредности ги задоволуваат условите од задачата.

498 А. Нека ax^2+bx+c е трином кој нема реални корени и $a+b+c>0$. Докажи дека $c>0$.

Решение. Бидејќи триномот ax^2+bx+c нема реални корени, за било кое $x\in\mathbb{R}$, $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$. Од условот $a+b+c>0$, добиваме дека

$$f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c>0 .$$

Значи, $ax^2+bx+c>0$, за секој реален број x. Според тоа $c=f(0)>0$.

499 А. Дадени се комплексните броеви a, b, c при што $1+c+c^2=0$. Докажи дека $(ac^2+bc)(bc^2+ac)=a^2-ab+b^2$.

Решение. Од $1+c+c^2=0$, имаме $c+c^2+c^3=0$, т.е. $c^3=-(c+c^2)=-(-1)=1$. Тогаш

$$(ac^2+bc)(bc^2+ac)=c^2(ac+b)(bc+a)=c^2(abc^2+a^2c+b^2c+ab)=c^2\Big(ab(c^2+1)+c(a^2+b^2)\Big)=$$
$$=c^2\Big(ab(-c)+c(a^2+b^2)\Big)=c^3(a^2-ab+b^2)=a^2-ab+b^2$$

500 Б. Одреди ги вредностите на параметарот m така што за решенијата x_1 и x_2 на равенката $x^2+(m+3)x+m+21=0$ е исполнето: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<1$.

Решение. Ако неравенката ја трансформираме и ги искористиме Виетовите правила, добиваме

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_2x_1}-1<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_1^2+x_2^2-x_2x_1}{x_2x_1}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x_2+x_1)^2-3x_2x_1}{x_2x_1}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(m+3)^2-3(m+21)}{m+21}<0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{m^2+3m-54}{m+21}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(m+9)(m-6)}{m+21}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(m+9)(m-6)>0\\ m+21<0\end{cases}\vee\begin{cases}(m+9)(m-6)<0\\ m+21>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad m\in(-\infty,-21)\cup(-9,-6)$$

501 Б. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=1}^{n} i^k = i+i^2+\ldots+i^n,$$

каде i е имагинарната единица.

Решение. Имаме $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Ќе разгледаме четири случаи, и тоа

а) $n=4p$. Во овој случај, $i^{4s+1}+i^{4s+2}+i^{4s+3}+i^{4s+4}=i-1-i+1=0$, за $s=0,1,\ldots,p-1$, па според тоа

$$\sum_{k=1}^{4p} i^k = i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4p-3}+i^{4p-2}+{}^{4p-1}+i^{4p}=0.$$

б) $n=4p+1$. Во овој случај, слично како и во претходниот имаме

$$\sum_{k=1}^{4p+1} i^k = i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4p-3}+i^{4p-2}+{}^{4p-1}+i^{4p}+i^{4p+1}=0+i^{4p+1}=0+i=i$$

в) $n=4p+2$. Во овој случај, со разгледувањата како и во првиот случај имаме

$$\sum_{k=1}^{4p+2} i^k = i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4p-3}+i^{4p-2}+{}^{4p-1}+i^{4p}+i^{4p+1}+i^{4p+2}=$$
$$=0+i^{4p+1}+i^{4p+2}=0+i-1=i-1$$

г) $n=4p+3$. Во овој случај, со разгледувања исти како во првите три случаи, добиваме:

$$\sum_{k=1}^{4p+2} i^k = i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{4p-3}+i^{4p-2}+{}^{4p-1}+i^{4p}+i^{4p+1}+i^{4p+2}+i^{4p+3}=$$
$$=0+i^{4p+1}+i^{4p+2}+i^{4p+3}=0+i-1-i=-1$$

III година

502. Реши ја равенката

$$\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ax}+\log_x\sqrt[4]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[4]{\frac{a}{x}}}=a,$$

каде a е позитивен реален број различен од 1.

Решение. Да забележиме дека $x\neq 1$ и $x>0$ (за да постои $\log_x\sqrt[4]{ax}$). Со преоѓање на логаритми со основа a равенката ќе се трансформира во

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}(1+\tfrac{1}{\log_a x})}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\tfrac{x}{a}}(1-\tfrac{1}{\log_a x})}=a\ ,$$

и со понатамошни трансформации го добива обликот:

$$\sqrt{\frac{(\log_a x+1)^2}{4\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}}=a\ .$$

Оттука $\log_a x>0$ (заради ненегативноста на подкореновите изрази). Последната равенка е еквивалентна (заради $x\neq 1$, односно $\log_a x\neq 0$) со

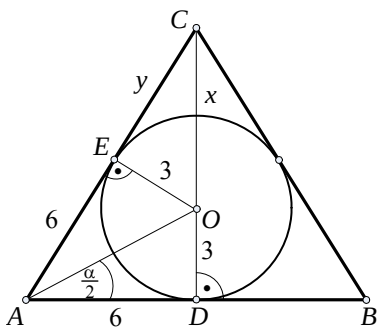
$$|\log_a x+1|+|\log_a x-1|=2a\sqrt{\log_a x} \qquad (1)$$

За да ја решиме равенката (1) ќе разгледаме два случаи:

i) Нека $\log_a x>1$, тогаш равенката преминува во следната равенка: $\log_a x=a\sqrt{\log_a x}$. Одовде добиваме решение, $x_1=a^{a^2}$. Натаму, заради $\log_a x>1$ добиваме дека $a>1$.

ii) Нека сега $0<\log_a x\leq 1$. Тогаш равенката (1) преминува во следната равенка: $2=2a\sqrt{\log_a x}$. Тогаш нејзино единствено решение е $x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$. Овде да забележиме дека условот $0<\log_a x\leq 1$ ќе биде исполнет само ако $a\geq 1$. Но за $a=1$ добиваме $x_2=1$, па тоа не е решение на дадената равенка, затоа за решението на равенката x_2 важи истото како и за x_1, т.е. е решение за почетната равенка само ако $a>1$. На овој начин ги исцрпевме сите можности (бидејќи $\log_a x\leq 0$). Останува дека почетната равенка при $a>1$ има две решенија $x_1=a^{a^2}, x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$, додека за $0<a<1$ равенката нема решение.

503. Околу прав кружен цилиндар со радиус на основата 3 cm и плоштина $78\pi\ cm^2$ е опишана права триаголна призма (основите на цилиндарот се впишани кругови во основите на призмата, а обвивката на цилиндарот ги допира трите бочни страни на призмата). Основите на призмата се рамнокраки триаголници со основа 12 cm. Пресметај го волуменот на призмата.



Решение. Основата на цилиндарот е круг со центар во точката O, а основата на призмата е рамнокрак триаголник ABC со основа $\overline{AB}=12cm$. Нека D е подножјето на висината спушена од темето C, а E е допирната точка на кружницата со страната AC. Имаме $\overline{AD}=6, \overline{AE}=\overline{AD}=6$ (тангентни отсечки на кружницата повлечени од A) и $\overline{OE}=\overline{OD}=r=3$. Да означиме $x=\overline{OC}$ и $y=\overline{EC}$. Тогаш $\Delta OEC\sim\Delta ADC$ (правоаголни со еднаков агол кај темето C), па $(6+y):x=6:3$. Оттука $x=\frac{6+y}{2}$. Натаму, ΔOEC е правоаголен со хипотенуза x, па $x^2=y^2+3^2$. Решавајќи го системот $\begin{cases} x=\frac{6+y}{2} \\ x^2=y^2+3^2 \end{cases}$ добиваме $x=5$, $y=4$. Според тоа $\overline{CD}=8$, па плоштината на основата на призмата е $B=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=48cm^2$.

Нека висината на цилиндарот е H. Тогаш плоштината на цилиндарот е $P = 2r^2\pi + 2r\pi H = 18\pi + 6\pi H$ т.е. $H = \frac{P-18\pi}{6\pi} = 10cm$. Според тоа $V = B \cdot H = 480cm^3$.

504 А. Нека за аглите α, β и γ во триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1.$$

Пресметај го аголот α.

Решение. Применувајќи ги синусната и косинусната теорема даденото равенство го трансформираме на следниов начин

$$1 = \frac{\frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}}{\frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{bc} = \frac{2bc\cos\alpha}{bc} = 2\cos\alpha.$$

Според тоа $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Бидејќи α е агол во триаголник добиваме $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

505 А. Докажи дека за позитивните броеви a, b и c такви што $a^2 + b^2 = c^2$, $c - b \neq 1$ и $c + b \neq 1$ важи

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Решение. Заради $c^2 = a^2 + b^2 > b^2$ и позитивноста на броевите a, b и c добиваме $c > b$. Значи $c - b > 0$, $c - b \neq 1$ и $c + b \neq 1$, па постојат $\log_{c-b} a$ и $\log_{c+b} a$. Со логаритмирање со основа a на равенството $a^2 = c^2 - b^2$ добиваме

$$\log_a a^2 = \log_a(c^2 - b^2),$$

односно

$$2 = \log_a(c-b) + \log_a(c+b) \qquad (1)$$

Тогаш

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a(b+c)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} = \frac{\log_a(c+b) + \log_a(c-b)}{\log_a(b+c) \cdot \log_a(c-b)} =$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{2}{\log_a(b+c) \cdot \log_a(c-b)} = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$

506 Б. Ако $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\gamma = 1.$$

Решение. Од равенствата

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \mathrm{ctg}\gamma = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma}$$

добиваме $\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma}$. Оттука добиваме $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma = 1$.

507 Б. Пресметај: $-\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{2003 \text{ пати}}$.

Решение.

$$-\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ пати}} = -\log_3(\log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3^{\frac{1}{3}}}}}}_{n-1 \text{ пати}}) = -\log_3(\log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3^{\frac{1}{3^2}}}}}}_{n-2 \text{ пати}}) = \ldots =$$

$$= -\log_3(\log_3 \sqrt[3]{3^{\frac{1}{3^{n-1}}}}) = -\log_3(\log_3(3^{\frac{1}{3^{n-1}}})^{\frac{1}{3}}) - \log_3(\log_3 3^{\frac{1}{3^n}}) = -\log_3 \frac{1}{3^n} = -\log_3 3^{-n} =$$
$$= -(-n)\log_3 3 = n$$

IV година

508. Најди го членот што не содржи x во развојот на $(\frac{1}{x}+3x)^n$, ако коефициентот пред степенот на x во десеттиот по ред собирок е најголем.

Решение. За $k+1$-от член во развојот добиваме

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k}(3x)^k = \binom{n}{k}3^k x^{2k-n},$$

па коефициентот пред x е $A_{k+1} = \binom{n}{k}3^k$. Според условот на задачата имаме $A_{10} > A_9$ и $A_{10} > A_{11}$. Од $A_{10} > A_9$ имаме $\binom{n}{9}3^9 > \binom{n}{8}3^8$, па $\frac{n!}{(n-9)!9!}3^9 > \frac{n!}{(n-8)!8!}3^8$, односно $\frac{3}{9} > \frac{1}{n-8}$. Оттука $3n-24>9$, т.е. $n>11$. Од $A_{10} > A_{11}$ добиваме $\binom{n}{9}3^9 > \binom{n}{10}3^{10}$ и постапувајќи на сличен начин како претходно $n < 12\frac{1}{3}$.

Според тоа $n=12$.

Сега $x^{2k-12} = x^0$, па $2k-12=0$, односно $k=6$. Значи бараниот член е седмиот и тој изнесува $T_6 = \binom{12}{6}3^6 = 673596$.

509. Најди ги сите природни броеви n така што некои три последователни биномни коефициенти во развојот $(a+b)^n$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Прво да забележиме дека $n \geq 2$ за да има барем три члена во развојот. Нека за $n,k \in \mathbb{N}$, $k<n$ важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$, односно

$$2\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}.$$

Оттука

$$2\frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)(k-1)!k} = \frac{n!}{(n-k-1)!(n-k)(n-k+1)(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k-1)!k(k+1)},$$

па со средување на изразите се добива еквивалентното равенство $(n-2k)^2 = n+2$. Според тоа n е од облик m^2-2 за некој $m \in \mathbb{N}$. Заради $n \geq 2$ добиваме $m \geq 2$. Ако $m=2$ следува $n=2$ и $k=1$. Но тогаш $2\binom{2}{1} \neq \binom{2}{0} + \binom{2}{2}$, па овој случај го отфрламе. Значи ако некои три члена од развојот формираат аритметичка прогресија тогаш n е од обликот m^2-2, каде $m = 3,4,\ldots$.

Сега да докажеме дека ако $n = m^2-2$, за $m>2$, тогаш постои $k, k<n$ така што важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$. Бројот k ќе го избереме од системот $\begin{cases} n = m^2-2 \\ (n-2k)^2 = n+2 \end{cases}$. Равенството

$n = m^2 - 2$ го заменуваме во $(n-2k)^2 = n+2$ и оттука добиваме $\left(m^2-2-2k\right)^2 = m^2$, односно $m^2-2-2k = m$ или $m^2-2-2k = -m$. Имаме две можности $k_1 = \frac{m(m-1)}{2} - 1$ и $k_2 = \frac{m(m+1)}{2} - 1$.

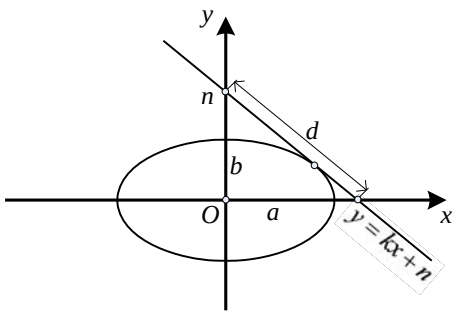
Доволно е да го докажеме тврдењето само за едната, на пример за k_1. Имаме $k_1 = \frac{m^2-m-2}{2} < \frac{m^2-2}{2} < m^2-2 < n$. Значи за k_1 важи $k_1 < n$ и $(n-2k)^2 = n+2$.

Последново равенство е еквивалентно со равенството

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}.$$

Конечно, сите барани броеви се од обликот m^2-2, $m = 3,4,\ldots$.

510 А. Одреди ја онаа тангента на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ која со координатните оски формира триаголник со најмала хипотенуза.



Решение. Нека правата $y = kx + n$ е тангента на дадената елипса. Според тоа системот

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + n \end{cases}$$

има единствено решение. Заменувајќи го y од втората во првата равенка добиваме квадратна равенка по y и користејќи дека нејзината дискриминанта е еднаква на 0 го добиваме условот за допир на правата и елипсата $a^2k^2 + b^2 = n^2$. Ако $k = 0$ или $n = 0$ тангентата е паралелна со една од координатните оски, па не формира триаголник. Значи можеме да претпоставиме дека $k \neq 0$ и $n \neq 0$. Натаму, ако ја запишеме равенката на тангентата во сегментен облик добиваме $\frac{x}{-\frac{n}{k}} + \frac{y}{n} = 1$, па нејзиниот отсечок меѓу координатните оски има должина $d = \sqrt{\frac{n^2}{k^2} + n^2}$. Според тоа

$$d^2 = \frac{n^2}{k^2} + n^2 = \frac{a^2k^2+b^2}{k^2} + a^2k^2 + b^2 = a^2k^2 + \frac{b^2}{k^2} + a^2 + b^2 = (ak - \tfrac{b}{k})^2 + (a+b)^2.$$

Должината на отсечокот ќе биде најмала ако $ak - \frac{b}{k} = 0$. Оттука $k = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $n = \pm\sqrt{ab+b^2}$ ($a,b > 0$). Значи постојат четири прави со бараната особина и тие се

$$y = \sqrt{\tfrac{b}{a}}\, x + \sqrt{ab+b^2}, \quad y = \sqrt{\tfrac{b}{a}}\, x - \sqrt{ab+b^2},$$

$$y = -\sqrt{\tfrac{b}{a}}\, x + \sqrt{ab+b^2}, \quad y = -\sqrt{\tfrac{b}{a}}\, x - \sqrt{ab+b^2}.$$

511 А. Определи ги сите реални функции f кои се дефинирани за секој реален број x, такви што $f(x) + xf(1-x) = x^2 - 1$.

Решение. Нека f е функција која ја задоволува равенката. Ако воведеме смена $1 - x = t$, добиваме $f(1-t) + (1-t)f(t) = t^2 - 2t$.

Последната равенка ќе ја помножиме со t и го формираме системот

$$\begin{cases} tf(1-t)+(t-t^2)f(t)=t^3-2t^2 \\ f(t)+tf(1-t)=t^2-1 \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$f(t)(t^2-t+1)=-t^3+3t^2-1,$$

од каде добиваме $f(t)=\frac{-t^3+3t^2-1}{t^2-t+1}$.

Не е тешко да се провери и обратното, т.е. дека фунцкијата $f(x)=\frac{-x^3+3x^2-1}{x^2-x+1}$ ја задоволува дадената равенка.

512 Б. Докажи дека $\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4$ за секој природен број n таков што $n\geq 2$.

Решение А. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција. За $n=2$ имаме $\frac{2}{2^{2-1}1}=2<4$, па тврдењето е точно. Ако $n=3$ добиваме $\frac{3}{2^1\cdot 2}+\frac{3}{2^2\cdot 1}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}<4$, па неравенството важи и за $n=3$. Сега да претпоставиме дека неравенството е точно за природноит број n, $n\geq 3$. За $n+1$ имаме:

$$\frac{n+1}{2^1 n}+\frac{n+1}{2^2(n-1)}+\frac{n+1}{2^3(n-2)}+\ldots+\frac{n+1}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n+1}{2^n\cdot 1}=$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{2^1 n}+\frac{n}{2^2(n-1)}+\frac{n}{2^3(n-2)}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n}{2^n\cdot 1}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}\left[\frac{n}{2^1 n}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\ldots+\frac{n}{2^{n-2}\cdot 2}+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}\right)}_{\text{инд.претп.}}\right]\leq\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{5}{2}\overset{n\geq 3}{\leq}\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}=\frac{20}{6}<4.$$

Според тоа тврдењето важи за секој $n\geq 2$.

Решение Б. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Воведуваме ознака $\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}$. За $n=2$ и $n=3$ неравенството е точно.

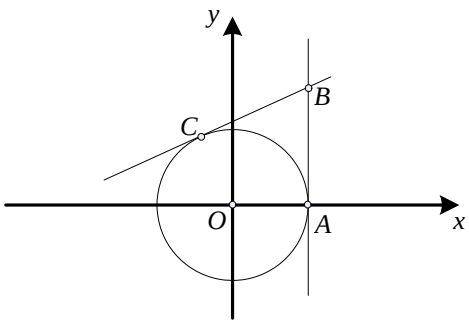
Нека претпоставиме дека $\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4$. Тогаш

$$\sigma_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{2^i(n+1-i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n+1}{2^{i+1}(n-i)}=\frac{n+1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{2^i(n-i)}=(1+\frac{1}{n})\frac{1+\sigma_n}{2}<(1+\frac{1}{n})\frac{1+4}{2}<4$$

Последното неравенство е исполнето за секој природен број $n>3$

Според принципот на математичка индукција $\sigma_n<4$, за секој n.

513 Б. Во точката $A(4,0)$ повлечена е тангентата на кружницата $x^2+y^2=16$. Одреди точка B на таа тангента таква што плоштината на трапезот образуван од координатните оски и тангентите на кружницата повлечени од точката B има плоштина 26.



Решение. Нека t е тангентата на кружницата повлечена во точката A и $B(4,b)\in t$. Со $C(0,c)$ да ја означиме пресечната точка на правата BC и y-оската. Тогаш за плоштината на трапезот $OABC$ добиваме $\frac{b+c}{2}\cdot 4=26$, односно $b+c=13$. Натаму, равенката на правата BC гласи $y=\frac{b-c}{4}x+c$. Условот правата $y=kx+n$ да биде тангента на кружницата $x^2+y^2=r^2$ е $r^2(1+k^2)=n^2$, па добиваме $16(1+(\frac{b-c}{4})^2)=c^2$ и оттука $c=\frac{16+b^2}{2b}$. Заменувајќи $b+c=13$ во последното равенство добиваме $3b^2-26b+16=0$. Решенијата на оваа равенка се $b_1=\frac{2}{3}$ и $b_2=8$. Точката B може да биде од двете страни на x-оската (кружницата е симетрична во однос на $x-$оската) па затоа добиваме 4 точки кои го исполнуваат условот на задачата. Тие се $B_1(4,8), B_2(4,-8), B_3(4,\frac{2}{3})$ и $B_4(4,-\frac{2}{3})$.

XXVII регионален натпревар - 2004 година

I година

514. Ако x е природен број, тогаш еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека за x природен број, $m=\frac{2x-5}{9}$ и $n=\frac{x-2}{15}$ се цели броеви. Тогаш, од првото равенство имаме дека $2x=9m+5$, а од второто равенство $x=15n+2$, односно $2x=30n+4$. Со изедначување на десните страни се добива $9m+5=30n+4 \Rightarrow 1=30n-9m \Rightarrow 1=3\cdot(10n-3m)$. Последното равенство не е можно за ниедни цели броеви m и n, затоа што десната страна е делива со 3, а левата не. Значи, барем еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број.

515 А. Една продавница треба да добие 1100 бомбониери. Во складот за снабдување постојат пакети од по 70, 40 и 25 бомбониери. Цената на превозот за еден пакет е еднаква на 20, 10 и 7 денари соодветно. Какви пакети и во колкави количества продавницата треба да порача, за да превозните трошоци бидат најмали? (Пакетите не смеат да се отвараат во складот.)

Решение. ***I начин***. Цената на превозот на една бомбониера од првиот вид пакети е $\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$ ден., од вториот вид е $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ ден., а од третиот вид е $\frac{7}{25}$ ден. Најефтин е превозот на бомбониерите од вториот вид, потоа од третиот, а најскап е од првиот. Бидејќи, $1100:40=27,5$ следи дека може да се порачаат најмногу 27 пакети од по 40 бонбониери. Но, тогаш остануваат $1100-27\cdot 40=20$ бомбониери, што не прават цел пакет од ниеден вид. Значи, треба да се порачаат помалку од 27 пакети од вториот вид. Ако се порачаат 26 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште $1100-26\cdot 40=60$ бомбониери, што пак не прави цел пакет или цел број пакети од ниеден вид. Ако се порачаат 25 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште $1100-25\cdot 40=100$ бомбониери кои прават 4 пакети од по 25

бомбониери. Значи, за да биде најефтин превозот треба да се порачаат 25 пакети од вториот вид и 4 пакети од третиот вид.

II начин. Нека x е бројот на пакети што треба да се порачаат од првиот вид, y бројот на пакети од вториот вид и z бројот на пакети од третиот вид. Тогаш, $70x+40y+25z=1100$ и вредноста на изразот $A=20x+10y+7z$ треба да е најмала. При тоа x, y и z се цели броеви такви што $0\le x\le 15$, $0\le y\le 27$ и $0\le z\le 44$. Со замена на $z=\frac{1100-70x-40y}{25}$ во изразот A, се добива $A=308+\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}y$. Бидејќи, вредноста на изразот A е цел број, следи дека треба $5\,|\,x$ и $5\,|\,y$. Значи, вредноста на A е најмала, ако за x се земе најмалата дозволена вредност делива со 5, а за y се земе најголемата дозволена вредност делива со 5, односно вредноста на A е најмала ако $x=0$ и $y=25$. Тогаш, $z=\frac{1100-70\cdot 0-40\cdot 25}{25}=4$. Значи, за да биде најефтин превозот треба да се порачаат 25 пакети од вториот вид и 4 пакети од третиот вид.

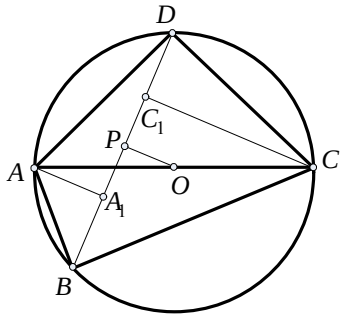
516 Б. Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелие во вториот, потоа една третина од водата во вториот сад се прелие во третиот сад и најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелие во првиот, тогаш во секој сад ке има по 6 литри вода. По колку литри вода имало во секој сад на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во првиот сад имало x литри вода, во вториот y литри, а во третиот z литри.

По првото преливање, во првиот сад останале $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ литри, во вториот $y+\frac{x}{2}$ литри, а во третиот z литри. По второто прелевање, во првиот сад има $\frac{x}{2}$ литри, во вториот $y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{3}(2y+x)$ литри, а во третиот $z+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{6}(6z+2y+x)$ литри.

По третото прелевање, во првиот сад има $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x)$ литри, во вториот $\frac{1}{3}(2y+x)$ литри, а во третиот $\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x)$ литри. Од условот на задачата, го добиваме системот $\frac{1}{24}(6z+2y+13x)=6$, $\frac{1}{3}(2y+x)=6$, $\frac{1}{8}(6z+2y+x)=6$. Решение на системот е $x=8$, $y=5$, $z=5$.

517. Дијагоналата AC на четириаголникот $ABCD$ впишан во кружница е дијаметар на кружницата. Докажи дека проекциите на страните AB и CD на дијагоналата BD се еднакви.



Решение. ***I начин***. Нека P е подножјето на нормалата од центарот O на опишаната кружница кон дијагоналата BD, и нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, од $AA_1\parallel OP\parallel CC_1$ и $\overline{AO}=\overline{CO}$, како радиуси на опишаната кружница,следува дека $\overline{A_1P}=\overline{PC_1}$. Користејќи дека $\overline{BP}=\overline{PD}$, (затоа што $OP\perp BD$ и O е центар на кружницата, па затоа P е средина на тетивата BD), се добива $\overline{BA_1}=\overline{BP}-\overline{A_1P}=\overline{DP}-\overline{PC_1}=\overline{C_1D}$, што требаше да се докаже.

II начин. Нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, $\Delta ABA_1 \sim \Delta ACD$ ($\angle AA_1B = \angle ADC = 90°$ и $\angle ABA_1 = \angle ACD$, како периферни агли над ист кружен лак), од каде $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Од $\Delta CDC_1 \sim \Delta CAB$ ($\angle CC_1D = \angle CBA = 90°$ и $\angle CDC_1 = \angle CAB$, како периферни агли над ист кружен лак), следува дека $\frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Со изедначување на левите страни од равенствата се добива $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}}$, од каде $\overline{BA_1} = \overline{DC_1}$, што требаше да се докаже.

518 А. Ако за позитивните реални броеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}, b_1, b_2, \ldots, b_{2004}, p, q$ важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2004}^2 = p^2,$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{2004}^2 = q^2,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{2004}b_{2004} = pq,$$

тогаш $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_{2004}}{b_{2004}} = \frac{p}{q}$. Докажи!

Решение. Ако првото равенство го помножиме со q^2, второто со p^2 и третото со $-2pq$, се добиваат равенствата

$$q^2a_1^2 + q^2a_2^2 + \ldots + q^2a_{2004}^2 = q^2p^2,$$

$$p^2b_1^2 + p^2b_2^2 + \ldots + p^2b_{2004}^2 = q^2p^2,$$

$$-2pqa_1b_1 - 2pqa_2b_2 - \ldots - 2pqa_{2004}b_{2004} = -2p^2q^2$$

Со собирање на последните три равенства добиваме

$$(qa_1 - pb_1)^2 + (qa_2 - pb_2)^2 + \ldots + (qa_{2004} - pb_{2004})^2 = 0,$$

од каде заклучуваме дека

односно дека

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_{2004}}{b_{2004}} = \frac{p}{q},$$

што требаше и да се докаже.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_{2004}}{b_{2004}} = \frac{p}{q},$$

што требаше и да се докаже.

519 Б. Ако за реалните броеви a, b и c важи $a^2 + b^2 = (a+b-c)^2$, $a+b \neq c$ и $b \neq c$, докажи дека $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$a^2 = (a+b-c)^2 - b^2 = (a-c)(a+2b-c),$$

$$b^2 = (a+b-c)^2 - a^2 = (b-c)(2a+b-c).$$

Ако последните равенства ги замениме во левата страна на равенството што треба да се добие, имаме

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c+a-c)}{(b-c)(2a+b-c+b-c)}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

II година

520. Дадени се равенките $x^2-ax+b-4=0$ и $y^2-by+a-\frac{1}{4}=0$, $a,b\in\mathbb{R}$. За кои вредности на a и b, корените не втората равенка се реципрочни вредности од корените на првата равенка?

Решение. Нека α и β се корени на првата равенка. Според условите на задачата $\alpha,\ \beta\neq 0$. Од Виетовите равенства, за првата равенка имаме: $\alpha+\beta=a$ и $\alpha\beta=b-4$, а за втората: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=b$ и $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=a-\frac{1}{4}$. Тогаш, со замена на првите две равенки во вторите две се добива: $a=b(b-4)$ и $1=(b-4)\left(a-\frac{1}{4}\right)$. Од последните две равенки добиваме $(b-4)\left(b(b-4)-\frac{1}{4}\right)=1$, односно ја добиваме равенката $b^3-8b^2+\frac{63}{4}b=0$. Нејзини решенија се: $b_1=0$, $b_2=\frac{7}{2}$, $b_3=\frac{9}{2}$ а соодветните вредности за a се $a_1=0$, $a_2=-\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{9}{4}$.

521. Реши го во $\mathbb{R}$ системот равенки $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases}\frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2)=12\\ \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{3}\end{cases}$, од каде што $x^2-xy+y^2=36$, односно $(x+y)^2-3xy=36$. Нека $z=x+y$. Тогаш, $xy=3z$ односно последната равенка е еквивалентна со $z^2-9z-36=0$. Нејзини решенија се $z_1=12$ и $z_2=-3$. Значи ги добиваме системите: $\begin{cases}x+y=12\\ xy=36\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y=-3\\ xy=-9\end{cases}$ кои се еквивалентни со квадратните равенки $t^2-12t+36=0$ и $t^2+3t-9=0$, соодветно. Значи множеството решенија на дадениот систем е

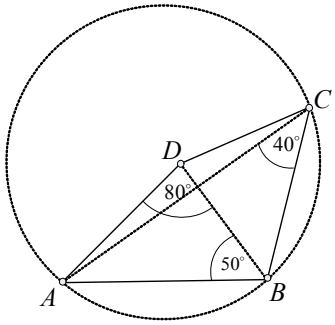
$$M=\left\{(6,6),\left(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2},\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{-3-3\sqrt{3}}{2},\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

522 А. За комплексниот ненулти број z, важи $z^3=\overline{z}$. Пресметај го z^{2004}.

Решение. Од $z^3=\overline{z}$ следува $\overline{z}^3=z$. Со множење на двете равенства добиваме $z^3\overline{z}^3=\overline{z}z$, односно $|z|^6=|z|^2$. Бидејќи $z\neq 0$, имаме $|z|^4=1$ од каде што $|z|=1$. Тогаш $z^4=\overline{z}$ $z=|z|^2=1$ па $z^{2004}=(z^4)^{501}=1$.

523 А. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој важи: $\sphericalangle ABD=50^\circ$, $\sphericalangle ADB=80^\circ$, $\sphericalangle ACB=40^\circ$ и $\sphericalangle DBC=\sphericalangle BDC+30^\circ$.

Најди го $\sphericalangle DBC$.



Решение. Според условите на задачата добиваме дека $\sphericalangle BAD = 50^\circ$, односно триаголникот ABD е рамнокрак. Нека k е кружницата со центар D и радиус $\overline{DA}$. Јасно е дека $B \in k$. Бидејќи $\sphericalangle ADB = 80^\circ$, $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ и притоа $\sphericalangle ADB$ е централен агол над лакот AB, следува дека $C \in k$. Значи и триаголникот BCD е рамнокрак. Од условите на задачата имаме:

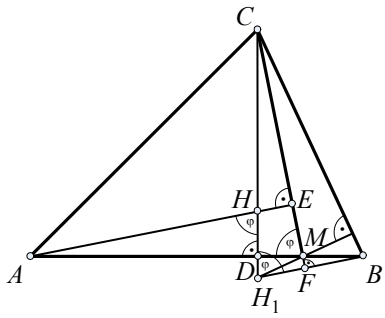
$$180^\circ = \measuredangle DBC + \measuredangle DCB + \measuredangle BDC = \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC,$$

од каде што $\measuredangle BDC = 40^\circ$, односно $\measuredangle DBC = 70^\circ$.

524 Б. Пресметај $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, ако $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{2}{5}$.

Решение. Нека $A = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. Тогаш $A^2 = (\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x})^2 = \dfrac{1 + 2\sin x \cdot \cos x}{1 - 2\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{1 + 2 \cdot \frac{2}{5}}{1 - 2 \cdot \frac{2}{5}} = 9$, од каде $A = \pm 3$.

525 Б. Нека M е точка од страната AB на триаголникот ABC. Изрази го растојанието меѓу ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC преку $\overline{AB} = c$ и $\measuredangle CMA = \varphi$.



Решение. Нека H и H_1 се ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC, соодветно (цртеж). Од сличноста на правоаголните триаголници ADH и AEM, следува дека $\measuredangle AHD = \measuredangle AME = \varphi$. Затоа $\overline{HD} = \overline{AD} \cdot \operatorname{ctg}\varphi$. Од сличноста на правоаголните триаголници BFM и BDH_1, следува дека $\measuredangle BH_1D = \varphi$, односно $\overline{DH_1} = \overline{DB} \cdot \operatorname{ctg}\varphi$. Значи:

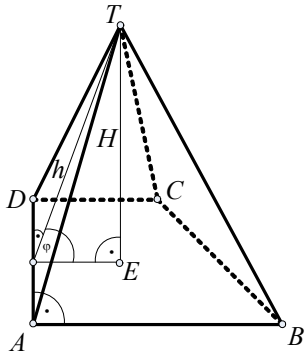
$$\overline{HH_1} = \overline{HD} + \overline{DH_1} = (\overline{AD} + \overline{DB})\operatorname{ctg}\varphi = c \cdot \operatorname{ctg}\varphi.$$

III година

526 А. Нека α и β се остри агли во триаголник. Третиот агол γ е тап ако и само ако $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta < 1$.

Решение. Нека $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta < 1$. $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, па $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta > 0$. Тогаш $\operatorname{tg}\alpha < \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta)$. Функцијата $f(x) = \operatorname{tg} x$ е растечка функција на интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$, од каде мора $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$, односно $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Конечно, $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) > \frac{\pi}{2}$ е тап агол. Обратно, нека γ е тап агол. Тогаш $\operatorname{tg}\gamma < 0$. Имаме $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma > 0$. Односно $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta > 0$, од каде мора $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta > 0$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta < 1$.

527. Основата на една пирамида е правоаголен трапез со агол 30° и подолг крак со должина 12. Бочните ѕидови на пирамидата зафаќаат еднакви агли со основата. Определи ја висината на пирамидата, ако збирот на плоштините на бочните ѕидови е 90.



Решение. Нека $ABCD$ е основата на пирамидата со врв T, при што

$$AB \parallel CD,\ \overline{BC}=12,\ \measuredangle BAD=90^\circ,\ \measuredangle ABC=30^\circ.$$

Веднаш се добива дека $\overline{AD}=\overline{BC}\sin 30^\circ=6$. Нека H е висината на пирамидата спуштена од темето T, а E нејзината подножна точка. Ако аголот што секој од ѕидовите го зафаќа со основата е φ, тогаш $\Delta ABT, \Delta BCT, \Delta CDT, \Delta DAT$ имаат еднакви висини спуштени од темето T, $h=\dfrac{H}{\sin\varphi}$. Од условот на задачата

$$P_{ABT}+P_{BCT}+P_{CDT}+P_{DAT}=90,$$

следува $\dfrac{h}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})=90$. Од друга страна, растојанието на точката E до секоја од страните на $ABCD$ изнесува $r=H\operatorname{ctg}\varphi$, па $ABCD$ е тангентен трапез со центар на впишана кружница E. Тогаш $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}=18$. Со замена во горното равенство се добива $h=5$ и уште заклучуваме дека $r=\dfrac{\overline{AD}}{2}=3$. Конечно, $H=\sqrt{h^2-r^2}=4$.

528 А. Реши ја неравенката $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

Решение. Прво да забележиме дека мора $x\neq 0$ и $3-2x>0$. Неравенката е еквивалентна со $\log_{x^2}(3-2x)>\log_{x^2}x^2$. Ќе разгледаме два случаи:

1) $0<x^2<1$ т.е. $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$

Неравенката се сведува на системот $\begin{cases}3-2x>0\\ x^2>3-2x\end{cases}$ кој на горниот интервал нема решение.

2) $x^2>1$ т.е. $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Неравенката се сведува на системот $\begin{cases}3-2x>0\\ x^2<3-2x\end{cases}$ кој земајќи го предвид горниот интервал го има за решение интервалот $(-3,-1)$. Конечно, решението на почетната неравенка е интервалот $(-3,-1)$.

529 Б. Реши ја равенката $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0$.

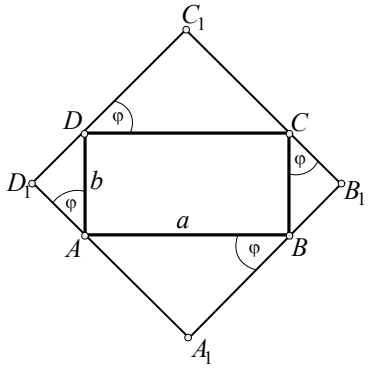
Решение. Дефиниционата област D на равенката е определена со $x>0$, $x\neq 1$.

Дадената равенка е еквивалентна со $\log_x 2-\dfrac{1}{\log_x 2^2}+\dfrac{7}{6}=0$, односно со $\log_x 2-\dfrac{1}{2\log_x 2}+\dfrac{7}{6}=0$.

Воведуваме смена $\log_x 2=t$, со што последната равенка се трансформира во $6t^2+7t-3=0$, со решенија $t_1=\dfrac{1}{3}$ и $t_2=-\dfrac{3}{2}$.

Конечно, враќајќи се во смената, добиваме $x=8$ и $x=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$, вредности кои припаѓаат на дефиниционата област на појдовната равенка, па се и нејзини решенија.

530 А. Околу даден правоаголник со страни a и b, опишан е друг правоаголник чија плоштина е m^2. За какви вредности на параметарот m задачата има решение?



Решение. Нека φ е аголот меѓу страните на правоаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. За должините на страните на опишаниот правоаголник $A_1B_1C_1D_1$ имаме:

$$\overline{A_1D_1} = \overline{AA_1} + \overline{AD_1} = a\sin\varphi + b\cos\varphi,$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{BA_1} + \overline{BB_1} = a\cos\varphi + b\sin\varphi.$$

Од условот за плоштината имаме:

$$m^2 = (a\sin\varphi + b\cos\varphi)(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

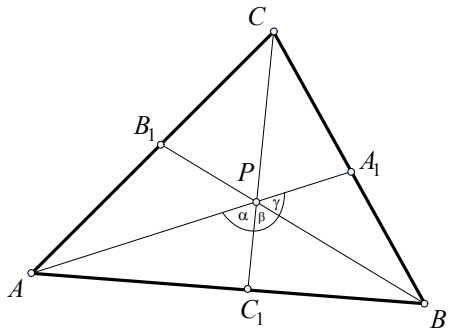
а со средување на изразот се добива $\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{m^2 - ab}{a^2 + b^2}$,

односно $\sin 2\varphi = \dfrac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}$. Тогаш услов задачата да има решение ќе биде $0 \le \sin 2\varphi \le 1$, односно решавајќи ја неравенката, го добиваме бараниот услов $\sqrt{ab} \le m \le \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

531 Б. Даден е триаголник ΔABC и точка P во внатрешноста. Нека $AP \cap BC = \{A_1\}$, $BP \cap AC = \{B_1\}$, $CP \cap AB = \{C_1\}$. Докажи дека

$$P_{\Delta AC_1P} \cdot P_{\Delta BA_1P} \cdot P_{\Delta CB_1P} = P_{\Delta BC_1P} \cdot P_{\Delta CA_1P} \cdot P_{\Delta AB_1P}.$$

Решение. Нека е даден триаголникот како на сликата. Тогаш



$$P_{\Delta AC_1P} = PA \cdot PC_1 \cdot \sin\alpha, \quad P_{\Delta BA_1P} = PB \cdot PA_1 \cdot \sin\gamma,$$

$$P_{\Delta CB_1P} = PC \cdot PB_1 \cdot \sin\beta.$$

Уште и

$$P_{\Delta BC_1P} = PB \cdot PC_1 \cdot \sin\beta, \quad P_{\Delta CA_1P} = PC \cdot PA_1 \cdot \sin\alpha,$$

$$P_{\Delta AB_1P} = PA \cdot PB_1 \cdot \sin\gamma,$$

па равенството што требаше да се докаже е еквивалентно на

$$PA \cdot PC_1 \cdot \sin\alpha \cdot PB \cdot PA_1 \cdot \sin\gamma \cdot PC \cdot PB_1 \cdot \sin\beta =$$
$$= PB \cdot PC_1 \cdot \sin\beta \cdot PC \cdot PA_1 \cdot \sin\alpha \cdot PA \cdot PB_1 \cdot \sin\gamma$$

што е точно.

IV година

532. Најди го членот кој не го содржи x во развојот (според биномната формула) на $\left(2x + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right)^n$ ако збирот на сите биномни коефициенти во тој развој е 256.

Решение. Збирот на сите биномни коефициенти е $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$, па $2^n = 256 = 2^8$.

Според тоа $n = 8$. Натаму, $k+1-$ от член во развојот е $\binom{8}{k}(2x)^{8-k}\left(x^{\frac{2}{3}-1}\right)^k = \binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k-\frac{k}{3}}$, па не го

содржи x ако и само ако $8-k-\frac{k}{3}=0$. Оттука добиваме дека $k=6$. Значи бараниот член е седмиот и е еднаков на $\binom{8}{6}2^{8-2}=112$.

533. Во низите (a_n) и (b_n) секој член почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два. Најди го пресекот на множествата $A=\{a_n | n\in\mathbb{N}\}$ и $B=\{b_n | n\in\mathbb{N}\}$, ако $a_1=1, a_2=2, b_1=2$ и $b_2=1$.

Решение. Прво $a_3=b_3=3$, па $\{1,2,3\}\subseteq A\cap B$.

Ќе докажеме, со помош на принципот на математичка индукција, дека

$$a_{n-1}<b_n<a_n, \text{ за } n\geq 4 \qquad (1)$$

За $n=4$ и $n=5$ важи $a_3=3<4=b_4<5=a_4$ и $a_4=5<7=b_5<8=a_5$, па (1) е точно. Да претпоставиме дека (1) е точно за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. $a_{k-1}<b_k<a_k$ и $a_k<b_{k+1}<a_{k+1}$. Ако ги собереме последниве две неравества добиваме $a_{k-1}+a_k<b_k+b_{k+1}<a_k+a_{k+1}$, т.е. $a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}$. Значи (1) важи и за $n=k+2$. Од принципот на математичка индукција заклучуваме дека (1) важи за секој $n\geq 4$.

Сега, да претпоставиме дека $a_k=b_s$ за некои $k,s\geq 4$

1) Ако $k<s$, тогаш од (1) имаме $a_k<a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}<b_{k+3}<...<a_{s-1}<b_s$, па добиваме контрадикција;

2) За $k>s$ добиваме $b_s<b_{s+1}<a_{s+1}<a_{s+2}<b_{s+3}<a_{s+3}<...<b_{k-1}<a_{k-1}<b_k$, па повторно добиваме контрадикција;

3) За $k=s$ од (1) следува $b_k<a_k$, па повторно не е можно $a_k=b_k$.

Според тоа освен првите три никои други броеви не се сретнуваат во двете низи истовремено, па $\{1,2,3\}=A\cap B$.

534 А. Нека $k,n\in\mathbb{N}$. Најди ги сите аритметички прогресии такви што односот на збирот на првите n членови и збирот на следните kn членови не зависи од n.

Решение. Нека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=c \qquad (1)$$

и нека d е разликата на прогресијата.

Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви, па

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=\frac{na_1}{kna_{n+1}}=\frac{1}{k}.$$

Значи бараниот однос не зависи од n за секој $k\in\mathbb{N}$.

Затоа нека $d\neq 0$. Применувајќи ја формулата за сума на n и kn членови на аритметичката прогресија, од (1) добиваме: $\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}(a_1+a_n)=k\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}(a_{n+1}+a_{n+kn})c$, т.е.

$$a_1+a_1+(n-1)d=ck(a_1+nd+a_1+(n+kn-1)d).$$

Оттука

$$2a_1-2a_1kc-d+ckd+n(d-cdk^2-2cdk)=0.$$

Последново равенство е еквивалентно со (1) и од условот на задачата следува дека е исполнето за секој $n \in \mathbb{N}$. Тоа е можно ако и само ако

$$2a_1 - 2a_1kc - d + ckd = 0 \text{ и } d - cdk^2 - 2cdk = 0 . \qquad (2)$$

Првото равенство од (2) е еквивалентно со $(2a_1 - d)(1 - ck) = 0$. Делејќи го второто равенство со $d \neq 0$ добиваме $c = \frac{1}{k(k+2)}$, па заменувајќи во $(2a_1 - d)(1 - ck) = 0$ имаме

$$1 - ck = 1 - k\frac{1}{k(k+2)} = \frac{2k}{k(k+2)} \neq 0 ,$$

па $d = 2a_1$. Според тоа (1) е исполнето само за прогресијата $a, 3a, 5a, \ldots$.

Обратно, за прогресијата $a, 3a, 5a, \ldots$ имаме

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+kn}} = \frac{\frac{n}{2}(2a + (n-1)2a)}{k\frac{n}{2}(a + 2an + a + (n + kn - 1)2a)} = \frac{\cancel{2a} + 2an - \cancel{2a}}{k(\cancel{2a} + 2an + 2an + 2akn - \cancel{2a})} = \frac{\cancel{2an}}{\cancel{2an}k(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)},$$

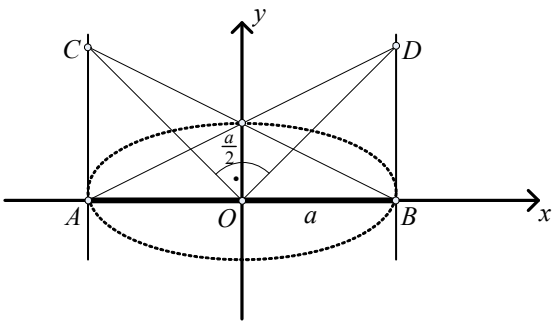
па бараниот однос не зависи од n .

Значи бараните прогресии се $a, a, a, \ldots$ и $a, 3a, 5a, \ldots$.

535 А. Нека AB е дадена отсечка со должина $2a$ и средина O. Точките C и D се движат по нормалите на AB повлечени во точките A и B така што аголот COD е прав. Одреди го геометриското место на пресечните точки на правите AD и BC .

Решение. Да воведеме координатен систем со центар во O и $x-$оска правата AB. Тогаш $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. Нека $C(-a, r)$ и $D(a, s)$. Тогаш правата AD има равенка $y = \frac{s}{2a}(x + a)$, а правата BC има равенка $y = -\frac{r}{2a}(x - a)$. Оттука

$$y^2 = -\frac{rs}{4a^2}(x^2 - a^2) \qquad (1)$$



Правите CO и DO имаат равенки $y = -\frac{r}{a}x$ и $y = \frac{s}{a}x$, соодветно. Уште тие се нормални, па $rs = a^2$. Заменувајќи $rs = a^2$ во (1) добиваме $y^2 = -\frac{1}{4}(x^2 - a^2)$, па бараното геометриско место на точки е елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1 .$$

536 Б. Во геометриската прогресија $a_1, a_2, \ldots$ дадени се членовите $A = a_{m+n}$ и $B = a_{m-n}$. Најди ги a_m и a_n .

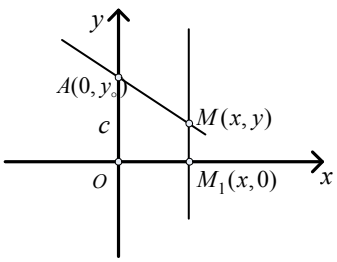
Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Тогаш $A = a_{m+n} = a_1q^{m+n-1}$ и $B = a_{m-n} = a_1q^{m-n-1}$. Оттука $q^{2n} = \frac{A}{B}$, па $q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$. Според тоа

$$a_m = a_1 q^{m-1} = a_1 q^{m-n-1} q^n = a_{m-n} q^n = B\left(\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}\right)^n = \sqrt{AB} \text{ и}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_1 q^{m+n-1} q^{-m} = a_{m+n} q^{-m} = A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}} = A^{1-\frac{m}{2n}} B^{\frac{m}{2n}}.$$

537 Б. Најди го геометриското место на точки во рамнина за кои што разликата од квадратите на растојанијата од дадена точка и од дадена права е постојано и еднакво на c.

Решение. Нека A е дадената точка и нека таа не лежи на дадената права l. Избираме координатен систем со x – оска дадената права, а y – оска нормалата на дадената права што минува низ A. Тогаш $A(0, y_0)$.



Нека $M(x, y)$ е произволна точка од бараното геометриско место и $M_1(x, 0)$ е проекцијата на M на x – оската. Тогаш $\overline{AM}^2 + \overline{M_1M}^2 = c$, т.е.

$x^2 + (y - y_0)^2 - y^2 = c$. Оттука $2yy_0 = x^2 + y_0^2 - c$.

1) Ако $y_0 \neq 0$, т.е. A не лежи на l, бараното геометриско место е параболата $y = \frac{1}{2y_0}x^2 + \frac{y_0^2 - c}{2y_0}$.

2) Ако $y_0 = 0$, т.е. A лежи на l, добиваме $x^2 = c$, па бараното геометриско место се правите $x = \sqrt{c}$ и $x = -\sqrt{c}$ за $c \geq 0$, а празно множество за $c < 0$.

XXVII регионален натпревар - 2005 година

I година

538 А. Од 7 листови хартија одреден број листови се исечени на по 10 делови. Од добиените листови, одреден број листови повторно е исечен на по 10 делови. Ако оваа постапка се повтори неколку пати, дали е можно на крајот да се добијат 2005 листови?

Решение. Нека во првиот чекор се исечени n_1 листови. Тогаш после сечењето ќе има вкупно $10n_1 + (7 - n_1) = 7 + 9n_1$ листови (при тоа $1 \leq n_1 \leq 7$). Ако во вториот чекор се исечени n_2 листови ќе се добијат вкупно $10n_2 + (7 + 9n_1 - n_2) = 7 + 9n_1 + 9n_2$ листови. Продолжувајќи на сличен начин заклучуваме дека при секое ново сечење, бројот на листовите се зголемува за некој број помножен со 9. Според тоа, на крајот, ќе има вкупно 7+9 n листови. Значи треба да важи равенството $2005 = 7 + 9n$, т.е. $9n = 1998$. Бројот 1998 се дели со 9 значи одговорот е потврден.

539 Б. Во златарска работилница треба да се направи 9 kg смеса во која златото и среброто ќе бидат во однос 7:11. На залиха има две смеси. Во

првата количествата злато и сребро се наоѓаат во однос 4 : 5, а во втората во однос 2 : 5. По колку треба да се земе од секоја смеса, за да се добие новата смеса во зададениот однос?

Решение. Нека во новата смеса има a kg злато и b kg сребро. Од системот $\begin{cases} a:b=7:11 \\ a+b=9 \end{cases}$ се добива дека $a=3{,}5$ и $b=5{,}5$. Нека од првата смеса се земени x kg, а до втората y kg. Тогаш во новата смеса ќе има $\left(\frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y\right)$kg злато и $\left(\frac{5}{9}x+\frac{5}{7}y\right)$kg сребро, т.е.

$$\begin{cases} \frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y=3{,}5 \\ \frac{5}{9}x+\frac{5}{7}y=5{,}5 \end{cases},$$

од каде се добива дека $x=5{,}85$ и $y=3{,}15$.

540. Ако за реалните броеви x, y и z важи $xyz=1$, докажи дека:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4.$$

Решение.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=$$

$$=x^2+2+\frac{1}{x^2}+y+2+\frac{1}{y^2}+z+2+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{xyz}\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)$$

$$=6+x^2+y^2+z^2+\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}-\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)$$

$$=6+x^2+y^2+z^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2-\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)\left(z^2+1\right)$$

$$=6+x^2+y^2+z^2+y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2-x^2y^2z^2-x^2y^2-x^2z^2-x^2-y^2z^2-y^2-z^2-1$$

$$=6-x^2y^2z^2-1$$

$$=6-1-1$$

$$=4,$$

што требаше да се докаже.

541. Три отсечки ги сврзуваат средината на висината на тетраедар со темињата на основата. Докажи тие се попарно нормални меѓу себе.

Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=a$, SO-висина во тетраедарот $ABCS$, и O_1 -средина на SO. Тогаш, $\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$, каде D е подножје на висината на ABC, кој е рамностран. Тогаш

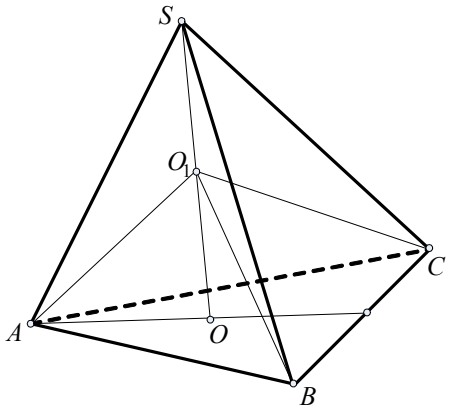
$$\overline{SO}=\sqrt{\overline{SA}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{a^2-(\frac{a}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\overline{OO_1}=\frac{1}{2}\overline{SO}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Конечно,

$$\overline{AO_1}=\sqrt{\overline{AO}^2+\overline{OO_1}^2}=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2+(\frac{a\sqrt{6}}{6})^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{6}}=a\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Слично се добива и

$$\overline{BO_1}=\overline{CO_1}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Бидејќи,

$$\overline{AO_1}^2+\overline{BO_1}^2=(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$$
$$=a^2=\overline{AB}^2$$

следува дека ΔABO_1 е правоаголен со $\measuredangle AO_1B=90^\circ$ од каде $AO_1\perp BO_1$. Слично, се докажува дека $AO_1\perp CO_1$ и $BO_1\perp CO_1$, што требаше да се докаже.

542 А. Може ли бројот $a+b+c+d$ да биде прост, ако $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ и важи $ab=cd$?

Решение. Од $ab=cd$ имаме

$$d=\frac{ab}{c}\Rightarrow c=m\cdot n\,,\ a=ma_1\,,\ b=nb_1\,,\ m,n,a_1,b_1\in\mathbb{N}\,.$$

Сега: $d=\frac{ab}{c}=\frac{ma_1nb_1}{mn}=a_1b_1$, па

$$\begin{aligned}a+b+c+d&=ma_1+mb_1+mn+a_1b_1\\&=(ma_1+mn)+(nb_1+ab_1)\\&=m(a_1+n)+b_1(a_1+n)\\&=(a_1+n)(m+b_1).\end{aligned}$$

Бидејќи $a_1,b_1,m,n\geq 1\ \Rightarrow\ a_1+n\geq 2$, $m+b_1\geq 2$, па $(a_1+n)(m+b_1)$ е сложен број т.е. $a+b+c+d$ не може да биде прост.

543 Б. Од првите 10 000 природни броеви колку се такви што завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот 5^m+8^n ?

Решение. Бидејќи 5^m завршува на 5, треба 8^n да завршува на 6. Имаме

$$8^1=8,\quad 8^2=64,\quad 8^3=512,\quad 8^4=4096,\quad 8^5>10000\,.$$

Значи $n=4$ па од

$$5^m+8^n\leq 10000\ \Rightarrow\ 5^m\leq 5904\,.$$

Бидејќи

$$5^1=5,5^2=25,5^3=125,5^4=625,$$
$$5^5=3125,5^6=15625,15625>5904\ \Rightarrow m\in\{1,2,3,4,5\}\,.$$

Следува дека постојат 5 броја помали од 10 000, кои завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот 5^m+8^n . Тоа се:

$4101 = 5^1 + 8^4,\quad 4121 = 5^2 + 8^4,\quad 4221 = 5^3 + 8^4,\quad 4721 = 5^4 + 8^4$ и $7211 = 5^5 + 8^4$.

II година

544. Реши го системот: $\begin{cases} \quad x_2 + x_3 + \dots x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + \quad x_3 + \dots x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + \quad \dots x_{n-1} + x_n = 3 \\ \dots \quad \dots \ \dots \ \dots \quad \dots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots \quad + x_n = n-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_{n-1} \quad = n \end{cases}$

каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ако ги собереме сите равенки од системот добиваме

$$(n-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) = 1 + 2 + \dots + n,$$

т.е. $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n) = \dfrac{n(n+1)}{2(n-1)}$. Ако од последната равенка ја одземеме i-тата равенка на системот се добива

$$x_i = \frac{n(n+1)}{2(n-1)} - i\,;\ i = 1, 2, \dots, n\ .$$

545 А. Ако z е комплексен број таков што $|z| = 1$, докажи дека

$$\left|\frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_\circ}{\overline{a_\circ} z^2 + \overline{a_1} z + \overline{a_2}}\right| = 1, \text{ каде } a_\circ, a_1, a_2 \in \mathbb{C}\ .$$

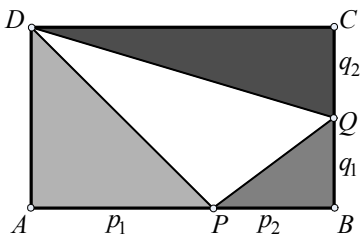
Решение. Нека $|z| = 1$. Тогаш

$$\left|\frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_\circ}{\overline{a_\circ} z^2 + \overline{a_1} z + \overline{a_2}}\right| = \left|\frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_\circ}{\overline{a_\circ} z^2 + \overline{a_1} z + \overline{a_2}} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{a_2 z |z|^2 + a_1 |z|^2 + a_\circ \overline{z}}{\overline{a_\circ} z |z|^2 + \overline{a_1} |z|^2 + \overline{a_2}\,\overline{z}}\right| = \left|\frac{a_2 z + a_1 + a_\circ \overline{z}}{\overline{a_2 z + a_1 + a_\circ \overline{z}}}\right| = \frac{|a_2 z + a_1 + a_\circ \overline{z}|}{\left|\overline{a_2 z + a_1 + a_\circ \overline{z}}\right|} \overset{|u| = |\overline{u}|}{=} 1$$

546 Б. Најди ги сите броеви $n \in \mathbb{N}$, такви што бројот $z = \left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^n$ е реален, каде i е имагинарна единица.

Решение. $\dfrac{3+i}{2-i} = \dfrac{3+i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{6+5i+i^2}{4-i^2} = 1+i$. Разгледувајќи ги степените на $(1+i)$ заклучуваме дека само за $n=4k$, k е природен број, z е реален број.

547. Во правоаголникот $ABCD$, точките P и Q се точки од страните AB и BC соодветно, така што триаголниците APD, PBQ и QCD имаат иста плоштина.



Најди го количникот $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

Решение. Воведуваме ознаки $\overline{AP}=p_1$, $\overline{PB}=p_2$, $\overline{QB}=q_2$ и $\overline{QC}=q_1$.

Од равенството $\frac{1}{2}(p_1+p_2)\cdot q_1=\frac{1}{2}(q_1+q_2)p_1$ добиваме $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}$, а од $\frac{1}{2}(q_1+q_2)p_1=\frac{1}{2}q_2p_2$, добиваме $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_2}{q_1+q_2}$.

Според тоа $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_2}{q_1+q_2}=\frac{1}{\frac{q_1}{q_2}+1}=\frac{1}{\frac{p_1}{p_2}+1}$. Значи, $\frac{p_1}{p_2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

548 А. Производот на еден корен на квадратната равенка $ax^2+bx+b=0$, со еден корен на квадратната равенка $ax^2+ax+b=0$, е 1.

Најди ги корените на равенките.

Решение. Нека y и z се корени на равенките $ax^2+ax+b=0$ и $ax^2+bx+b=0$, соодветно, за кои $yz=1$. Тогаш $z=\frac{1}{y}$ и $a\frac{1}{y^2}+b\frac{1}{y}+b=0$, т.е. $by^2+by+a=0$. Ако ги собереме равенките $ay^2+ay+b=0$ и $by^2+by+a=0$ добиваме $(a+b)y^2+(a+b)y+a+b=0$, т.е. $(a+b)(y^2+y+1)=0$.

Изразот y^2+y+1 е позитивен, за секој $y\in\mathbb{R}$. Според тоа $a+b=0$, т.е. $b=-a$. Значи, равенките се $ax^2+ax-a=0$ и $ax^2-ax-a=0$. Равенките се квадратни па $a\neq 0$. Според тоа дадените равенки се $x^2+x-1=0$ и $x^2-x-1=0$.

Нивни решенија се $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, соодветно.

549 Б. Две цевки полнат еден базен. Втората цевка, сама, ќе го наполни базенот за 5 часа подолго отколку првата цевка. Ако се пуштат истовремено двете цевки базенот ќе се наполни за 6 часа. Пресметај за колку време втората цевка може сама да го наполни базенот.

Решение. Нека првата цевка сама го полни базенот за t часа. Тогаш за 6 часа ќе наполни $\frac{6}{t}$ делови од базенот. Според условот втората цевка го полни базенот за t + 5 часа. За еден час полни $\frac{1}{t+5}$ делови од базенот, а за 6 часа $\frac{6}{t+5}$ делови од базенот. Бидејќи за 6 часа со истовремена работа на двете цевки базенот ќе се наполни, равенката е:

$$\frac{6}{t}+\frac{6}{t+5}=1 \quad \Leftrightarrow \frac{6(t+5)+6t}{t(t+5)}=1 \Leftrightarrow t^2-7t-30=0,(t\neq 0;t\neq -5)$$

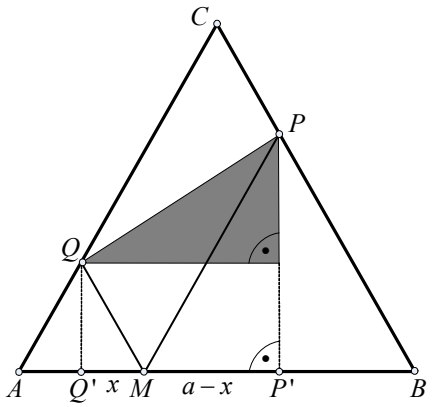
чии решенија се $t_1=10;\ t_2=-3$.

Бидејќи времето не може да биде негативно единствено решение е t =10. Значи времето потребно втората цевка да го наполни базенот е $t=t+5$, т.е. 15 часа.

III година

550 АБ. На страната AB на рамностраниот триаголник ABC избрана е точка M. Низ точката M повлечени се прави паралелни со страните BC и AC, при што се добиени точките $P \in BC$ и $Q \in AC$. Одреди ја положбата на точката M така што отсечката PQ да има најмала должина.

Решение. Со повлекувањето на паралелните прави се добиваат триаголниците $\Delta MBP, \Delta AMQ$ кои се слични со ΔABC, па оттука се и рамностранi. Нека P', Q' се подножјата на нормалите спуштени од точките P, Q соодветно на страната AB. Нека $\overline{AM} = x$. Тогаш $\overline{MB} = a - x$. Од правоаголниот ΔQRP, $\overline{QP}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2$. Од рамностраните триаголници важи $\overline{QQ'} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $\overline{PP'} = \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2}$. Од друга страна $\overline{PR} = \overline{PP'} - \overline{QQ'}$ па со замена добиваме $\overline{PR} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$. Исто така и $\overline{QR} = \overline{Q'P'} = \overline{Q'M} + \overline{MP'} = \frac{x}{2} + \frac{a-x}{2} = \frac{a}{2}$. Конечно, $\overline{QP}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}\right)^2$, т.е. $\overline{QP}^2 = 3x^2 - 3ax + a^2$.



Отсечката PQ има најмала должина ако $\overline{QP}^2$ има најмала вредност. Бидејќи $\overline{QP}^2$ е квадратна функција по променливата x, нејзиниот график е парабола која има минимум, и тоа во темето $x = -\frac{-3a}{6} = \frac{a}{2}$. Значи, бараната положба на точката M е на растојание $\frac{a}{2}$ од точката A.

551 А. Докажи дека $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$, каде a, b, c се должини на страните на триаголник, а α и β се неговите агли.

Решение. Ќе ја трансформираме левата страна на равенството

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}{\sin^2(\pi-\gamma)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) - \sin^2\beta\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\sin^2\gamma} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}.$$

Ако ја искористиме синусната теорема, имаме $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$ и $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$, од каде со замена се добива бараното равенство.

552 Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката $3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е $x>0$ и $x\neq 1$. Логаритмираме со основа 3 и се добиваат еквивалентните равенства

$$\log_3(3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x})=\log_3 9 \Leftrightarrow \log_x 3+(\log_3 x)^2=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x}+(\log_3 x)^2=2.$$

Воведуваме смена $\log_3 x=u$, односно $x=3^u$, со што равенката го добива обликот $\frac{1}{u}+u^2-2=0 \Leftrightarrow u^3-2u+1=0 \Leftrightarrow (u-1)(u^2+u-1)=0$. Решенијата на оваа равенка се $u_1=1, u_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, па решенијата на почетната равенка се $x_1=3$ и $x_{2,3}=3^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$. Притоа x_1,x_2,x_3 припаѓаат на дефиниционата област.

553 А. Докажи дека за секои $a,b\in(0,1)$ важи неравенството

$$\log_a\frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 1.$$

Решение. Ако $a,b\in(0,1)$, тогаш и $ab\in(0,1)$, па $\sqrt{ab}>ab$. Користејќи го ова, и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}>ab$, односно $\frac{2ab}{a+b}<1$. Да означиме $c=\frac{2ab}{a+b}$. Притоа $0<c<1$. Да претпоставиме спротивно, нека $\log_a\frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}<1$, односно $\log_a c\cdot\log_b c<1$. Тогаш користејќи ги својствата на логаритмите се добива $\frac{1}{\log_c a}\cdot\frac{1}{\log_c b}<1 \Leftrightarrow \log_c a\cdot\log_c b>1$ (логаритмите се добро дефинирани затоа што $a,b,c\in(0,1)$). Повторно од неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{\log_c a+\log_c b}{2}\geq\sqrt{\log_c a\cdot\log_c b}$. Според тоа

$$1<\sqrt{\log_c a\cdot\log_c b}\leq\frac{\log_c a+\log_c b}{2}=\frac{1}{2}\log_c ab=\log_c\sqrt{ab}.$$

Значи $\log_c\sqrt{ab}>1=\log_c c$. Бидејќи $0<c<1$, функцијата $\log_c x$ е опаѓачка, па за аргументите важи неравенството $\sqrt{ab}<c=\frac{2ab}{a+b}$. Со квадрирање, последното неравенство го добива обликот $(a+b)^2<4ab$, односно $(a-b)^2<0$, што е невозможно. Според тоа, $\log_a\frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}\geq 1$.

554 Б. Докажи дека во секој остроаголен триаголник важи

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=\frac{2sr}{R},$$

каде a, b, c се страните, α, β, γ се аглите на триаголникот, r,R се радиусите на впишаната и опишаната кружница, соодветно, а s е полузбирот на страните.

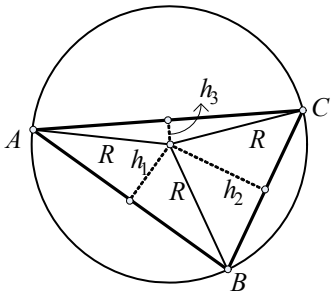
Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот. Важи

$$P_{\Delta ABC}=P_{\Delta AOB}+P_{\Delta BOC}+P_{\Delta AOC}\cdots \qquad (1)$$

Од триаголникот ABC имаме дека $P_{\Delta AOB}=\frac{ch_1}{2}$, каде $\frac{h_1}{R}=\cos\gamma$, при тоа користејќи дека

$\measuredangle AOB = 2\gamma$ како централен агол за аголот γ над ист кружен лак. Значи $P_{\Delta AOB} = \dfrac{cR\cos\gamma}{2}$.

Аналогно се добива дека $P_{\Delta BOC} = \dfrac{aR\cos\alpha}{2}$ и $P_{\Delta AOC} = \dfrac{bR\cos\beta}{2}$.



Ако уште земеме предвид дека $P_{\Delta ABC} = sr$ и замениме во (1) се добива

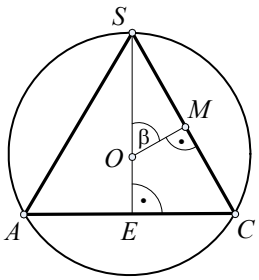
$$sr = \frac{cR\cos\gamma}{2} + \frac{aR\cos\alpha}{2} + \frac{bR\cos\beta}{2} = \frac{R}{2}(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma),$$

односно

$$\frac{2sr}{R} = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma,$$

што требаше да се докаже.

555 АБ. Во сфера е впишана пирамида чија основа е правоаголник со дијагонала d. Бочните рабови на пирамидата се наклонети кон рамнината на основата под агол β. Најди го радиусот на сферата.

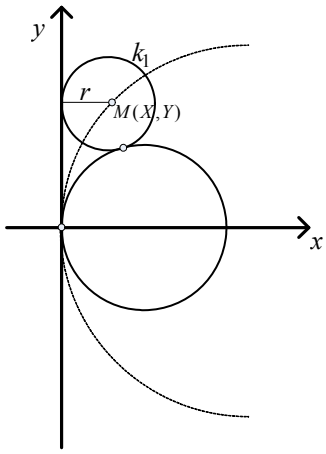


Решение. Нека O е центарот на сферата опишана околу пирамидата $SABCD$ со основа правоаголникот $ABCD$, нека R е радиусот на сферата, нека E е пресекот на дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ и нека M е средината на работ CS. Тогаш, триаголникот SEC е правоаголен со остар агол $\beta = \angle SCE$, а точката O лежи на правата SE и е еднакво оддалечена од точките S и C, па затоа $OM \perp CS$. Бидејќи $\angle SOM = \angle SCE = \beta$, како агли со заемно нормални краци, имаме

$$R = \overline{OS} = \frac{\overline{SM}}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\frac{\overline{CE}}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{d}{2\sin 2\beta}.$$

IV година

556 АБ. Нека a е позитивен реален број. Најди го геометриското место на центрите на кружниците кои ги допираат кружницата $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ и y - оската.



Решение. Нека $k_1: (x-X)^2 + (y-Y)^2 = r^2$ е кружница чиј центар $M(X,Y)$ припаѓа на бараното геометриско место. Бидејќи y-оската е тангента на k_1, следува дека $X = r$ или $X = -r$.

1) Ако $X = r$, добиваме дека

$$k_1: x^2 - 2xX + y^2 - 2yY + Y^2 = 0.$$

Сега, од системот

$$\begin{cases} x^2 - 2xX + y^2 - 2yY + Y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0 \end{cases},$$

добиваме

$$-2xX - 2yY + 2ax + Y^2 = 0.$$

Оттука, ако $Y \neq 0$, имаме

$$y=\frac{1}{2Y}\left(-2xX+2ax+Y^2\right)=\frac{a-X}{Y}x+\frac{Y}{2}.$$

Со замена во втората равенка од системот, добиваме

$$x^2+\frac{(a-X)^2}{Y^2}x^2+(a-X)x+\frac{Y^2}{4}-2ax=0.$$

Бидејќи двете кружници имаат единствена пресечна точка, следува дека мора дискриминантата на последната равенка да е нула. Значи, $(X+a)^2-Y^2\left(1+\frac{(a-X)^2}{Y^2}\right)=0$. Со средување на последново равенство добиваме $Y^2=4aX$. Значи бараното геометриско место во овој случај е параболата $y^2=4ax$.

Ако $Y=0$, се добива $\begin{cases}x^2-2xX+y^2=0\\x^2+y^2-2ax=0\end{cases}$. Оттука $2(a-X)x=0$. Уште и $a\neq X$ (во спротивно кружниците би се совпаѓале), па $x=0$ и $y=0$. Според тоа двете кружници се допираат. Во овој случај бараното геометриско место на точки е позитивниот дел од $x-$оската.

2) Ако $X=-r$ и $Y=0$, работејќи слично како во 1) го добиваме системот $\begin{cases}x^2+2xr+y^2-2yY+Y^2=0\\x^2+y^2-2ax=0\end{cases}$ а потоа и равенката $\left(1+\left(\frac{a+r}{Y}\right)^2\right)x^2+(r-a)x+\frac{Y^2}{4}=0$, чија дискриминанта е $-Y^2-4ar$ и е негативна. Значи кружниците немаат пресечни точки. Ако $Y=0$ се добива негативниот дел од x-оската.

Конечно, бараното геометриско место на точки е x-оската и параболата $y^2=4ax$.

557 А. Во една аритметичка прогресија збирот на првите m члена е еднаков на збирот на првите n члена ($m\neq n$).

Докажи дека збирот на првите $m+n$ члена не зависи од a_1 (првиот член) и d (разликата на прогресијата).

Решение. Имаме $S_m=ma_1+\frac{dm(m-1)}{2}$ и $S_n=na_1+\frac{dn(n-1)}{2}$. Од $S_m=S_n$ добиваме

$$a_1(m-n)+\frac{d}{2}\left(m^2-m-n^2+n\right)=0, \qquad \text{т.е.} \qquad a_1(m-n)+\frac{d}{2}(m-n)(m+n-1)=0.$$

Од последново равенство, заради $m\neq n$, добиваме

$$a_1+\frac{d}{2}(m+n-1)=0, \qquad \text{т.е.} \qquad 2a_1+d(m+n-1)=0. \text{ Сега,}$$

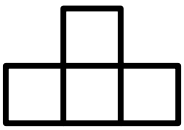
$$S_{m+n}=(m+n)a_1+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}d=\frac{1}{2}(m+n)\left(2a_1+(m+n-1)d\right)=0,$$

па S_{m+n} не зависи од a_1 и од d.

558 Б. Реши ја равенката $x^3+(k-1)x^2-kx=0$, ако нејзините решенија се последователни членови на една аритметичка прогресија.

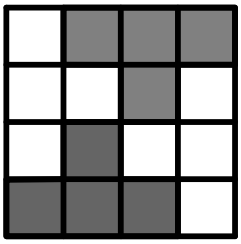
Решение. Решенијата на равенката се $0,1,-k$. Од тоа што тие се последователни членови на една аритметичка прогресија следува дека $k\neq 0,-1$. Значи равенката има три различни реални решенија кои ги исполнуваат условите на задачата. Ако $k\in(-\infty,-1)$, тогаш $-k>1$, па редоследот на корените е $0,1,-k$. Разликата на аритметичката прогресија ќе биде $1-0=1$, па $-k=2$, т.е.

$k=-2$. Ако $k\in(-1,0)$, тогаш $-k\in(0,1)$, па редоследот на корените е $0,-k,1$. Од $-k-0=1-(-k)$ добиваме $k=-\frac{1}{2}$, т.е. $-k=\frac{1}{2}$.Ако $k\in(0,\infty)$, тогаш $-k\in(-\infty,0)$, па редоследот е $-k,0,1$. Во овој случај прогресијата има разлика 1, па $-k=-1$.



559 АБ. За кои $n\in\mathbb{N}$, квадрат со страна n може целосно да се пополни со фигури како на цртежот (без поклопување), ако квадратчињата од кои е составена фигурата имаат страна 1.

Решение. Очигледно бројот на квадратчиња мора да е делив со 4 за да се пополни целосно со вакви фигури. Значи n мора да е парен. Ако n е делив со 4 квадратот може да се подели на квадрати со страна 4, а тие може да се пополнат како на сликата. Ќе докажеме дека ако n не е делив со 4 квадратот не може да се пополни со вакви фигури. Да претпоставиме дека квадратот може да се пополни со вакви фигури. Ако го обоиме квадратот како шаховска табла црно – бело, тогаш секоја фигура ќе има 3 црни и 1 бело или 3 бели и 1 црно квадратче. Нека $n=2(2k+1)$ тогаш има $(2k+1)^2$ фигури нека m од нив имаат 3 црни и 1 бело квадратче. Тогаш $(2k+1)^2-m$ фигури се со 3 бели и 1 црно квадратче. Се добива дека има вкупно $3m+(2k+1)^2-m=2m+(2k+1)^2$ црни и $m+3((2k+1)^2-m)=3(2k+1)^2-2m$ бели квадратчиња. Од друга страна знаеме дека има по $\frac{n^2}{2}=2(2k+1)^2$ црни и бели квадратчиња. Значи $2m+(2k+1)^2=3(2k+1)^2-2m=2(2k+1)^2$, од каде добиваме дека $2m=(2k+1)^2$, т.е. дека парен број е еднаков на непарен што не е можно. Значи квадрат со страна n, таква што n не е делив со 4 не може целосно да се покрие со дадените фигури.



560 А. Определи ги сите строго растечки функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x+f(y))=f(x+y)+1.$$

Решение. Од равенката, добиваме $f(y+f(x))=f(x+y)+1$. Значи, $f(x+f(y))=f(y+f(x))$. Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме $x+f(y)=y+f(x)$, за секои x и y од множеството реални броеви. Ако во последната добиена равенка замениме $y=0$, добиваме $f(x)=x+f(0)$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме $x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1$, т.е. $f(y)=y+1$. Значи, ако f го исполнува условот на задачата, тогаш $f(x)=x+1$. Непосредно се проверува дека функцијата $f(x)=x+1$ ги исполнува условите на задачата.

561 Б. Нека $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$ за сите $n\geq 2$. Докажи дека

$$s_n=a_1+a_2+...+a_n<1,$$

за секој природен број n.

Решение. Имаме

$$a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}\Rightarrow 2na_n=2na_{n-1}-3a_{n-1}\Rightarrow 3a_{n-1}=2n\left(a_{n-1}-a_n\right).$$

Оттука

$$3a_n+3a_{n-1}-3a_n=2n\left(a_{n-1}-a_n\right),\ 3a_{n-2}=2\left(n-1\right)\left(a_{n-2}-a_{n-1}\right),\ ...,3a_1=2\cdot 2\cdot\left(a_1-a_2\right).$$

Ако ги собереме последниве равенства добиваме

$$3s_n - 3a_n = -2na_n + 2\left(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1\right) + 2a_1 \Rightarrow 3s_n - 3a_n = -2na_n + 2s_n - 2a_n + 2a_1 \Rightarrow$$

$$s_n = 2a_1 - \left(2n-1\right)a_n \Rightarrow s_n = 1 - \left(2n-1\right)a_n.$$

Бидејќи $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$ следува дека $a_n > 0$, за $\forall n \in \mathbb{N}$. Па $s_n = 1 - \left(2n-1\right)a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

XXIX регионален натпревар_2006 година

I година

562. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот НЗС и НЗД е 15.

Решение. Нека x и y е парот природни броеви за кои разликата меѓу нивниот НЗС и НЗД е 15. Нека $d = \text{НЗД}(x, y)$ и $s = \text{НЗС}(x, y)$. Тогаш, постојат природни броеви a и b така што $x = da$, $y = db$, $\text{НЗД}(a,b) = 1$ и $s = dab$. Од условот на задачата имаме дека $s - d = 15$, каде ако замениме $s = dab$ се добива $dab - d = 15 \Rightarrow d(ab-1) = 15 \Rightarrow d \in \{1, 3, 5, 15\}$.

1) За $d = 1$, имаме
$ab - 1 = 15 \Rightarrow ab = 16 \Rightarrow a = 1, b = 16 \Rightarrow x = 1, y = 16$,

2) За $d = 3$, имаме
$ab - 1 = 5 \Rightarrow ab = 6 \Rightarrow a = 1, b = 6$ или $a = 2, b = 3 \Rightarrow x = 3, y = 18$ или $x = 6, y = 9$,

3) За $d = 5$, имаме
$ab - 1 = 3 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow x = 5, y = 20$,

4) За $d = 15$, имаме
$ab - 1 = 1 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow x = 15, y = 30$.

Значи, бараните парови природни броеви се: 1 и 16, 3 и 18, 6 и 9, 5 и 20, 15 и 30.

563. Нека a,b,c и x,y,z се дадени реални броеви, $abc \neq 0$, $xyz \neq 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Докажи дека $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Ако воведеме смени $\frac{x}{a} = u$, $\frac{y}{b} = v$, $\frac{z}{c} = w$, тогаш точни се равенствата $u + v + w = 1$ и $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$. Од второто равенство $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$, добиваме дека $\frac{vw + uw + uv}{uvw} = 0$, од каде имаме $uv + vw + wu = 0$. Ако равенството $u + v + w = 1$ го квадрираме, добиваме $(u + v + w)^2 = 1^2$, т.е. $u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + 2uw = 1$.

Ако го искористиме условот $uv + vw + wu = 0$, добиваме

$$u^2 + v^2 + w^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + uw) = 1.$$

т.е. $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Ако се вратиме на старите променливи, ја добиваме точноста на бараното равенство

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

564 А. Секое од темињата на една коцка нумерирано е со еден од броевите -1 и 1, а на секој ѕид е запишан производот на броевите со кои се означени темињата на тој ѕид. Дали збирот на така добиените 14 броеви може да биде еднаков на

а) 7, б) 0?

Решение. Ако сите темиња на коцката се нумерирани со единици, тогаш вкупнот збир е $14\cdot 1=14$. Ако се смени еден број на некое теме од коцката, тогаш се менуваат и производите запишани на ѕидовите на коцката, а вкупниот збир се менува за $+8, +4, 0, -4$, или -8. Следува дека вкупниот збир е секогаш од облик $4n+2,\ n\in\mathbb{Z}$.

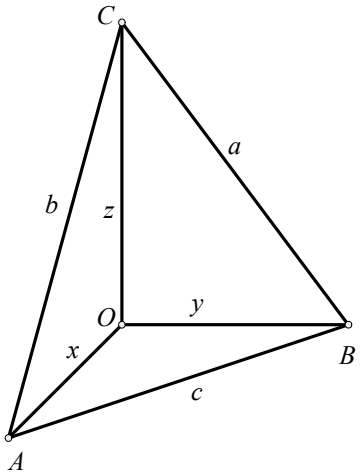
а) Вкупниот збир не може да биде 7, бидејќи $7=4\cdot 1+3$.

б) Вкупниот збир не може да биде 0, бидејќи $0=4\cdot 0$.

565 АБ. Меѓу 9 златници се наоѓа еден неисправен златник кој има помала тежина од останатите златници. Како со помош на две мерења на вага без тегови ќе го издвоиме неисправниот златник?

Решение. **<u>I мерење</u>:** Прво 9-те златници ги делиме на три групи од по три златници (по случаен избор). Избираме било кои две од трите групи и по една група ставаме на секоја страна на вагата. Ако тежините се исти во овие две групи, тогаш бараниот златник се наоѓа во третата група. Ако пак, едната страна на вагата е полесна од другата, тогаш во полесната група се наоѓа бараниот златник .

<u>II мерење</u>: Од групата со три златници во која се наоѓа полесниот златник, избираме по случаен избор два и по еден од нив ставаме на секоја страна од вагата. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш бараниот златник е оној што останал. Ако пак, вагата покаже дека едната страна е полесна, тогаш златникот на полесната стана е бараниот златник.



566 А. Нека OA, OB, OC се три заемно нормални отсечки. Дали може да се изберат должини за отсечките OA, OB, OC, за да страните на триаголникот ABC се однесуваат како $3:4:6$?

Решение. Нека $\overline{OA}=x$, $\overline{OB}=y$, $\overline{OC}=z$, $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ (цртеж). Нека $c:a:b=3:4:6$, значи постои $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ така да $c=3k,\ a=4k,\ b=6k$. Триаголниците AOB, BOC, AOC се правоаголни, од каде се добива дека

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ y^2+z^2=a^2 \\ x^2+z^2=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9k^2 \\ y^2+z^2=16k^2 \\ x^2+z^2=36k^2 \end{cases}$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и од тој збир ја одземеме третата равенка ќе добиеме

$$(x^2+y^2)+(y^2+z^2)-(x^2+z^2)=9k^2+16k^2-36k^2 \Rightarrow 2y^2=-11k^2 \Rightarrow y^2=-\frac{11}{2}k^2,$$

што не е можно.

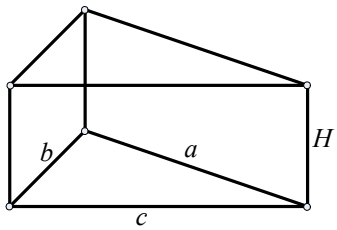
Заради добиената контрадикција, заклучуваме дека не може да се изберат должини за отсечките OA, OB, OC на тој начин, за да односот на страните на триаголникот ABC биде $3:4:6$.

567 Б. Основата на права призма е правоаголен триаголник, со катети кои се однесуваат како $24:7$, хипотенузата на основата се однесува кон висината на призмата како $5:2$, а бочната површина на призмата е $140m^2$. Најди го волуменот на призмата.

Решение. Од $a:b=24:7$ и $c:H=5:2$ имаме дека $b=\frac{7}{24}a$ и $c=\frac{5}{2}H$. Од Питагоровата теорема за правоаголен триаголник имаме

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+\tfrac{49}{576}a^2=\tfrac{25}{4}H^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tfrac{625}{576}a^2=\tfrac{25}{4}H^2 \Rightarrow a^2=\tfrac{144}{25}H^2 \Rightarrow a=\tfrac{12}{5}H$$



Со замена во $b=\frac{7}{24}a$, добиваме

$$b=\tfrac{7}{24}\cdot\tfrac{12}{5}H=\tfrac{7}{10}H\ .$$

Имаме дека $M=140m^2$, а од друга страна

$$M=(a+b+c)\cdot H\ ,$$

значи

$$140m^2=(a+b+c)\cdot H=(\tfrac{12}{5}H+\tfrac{7}{10}H+\tfrac{5}{2}H)\cdot H=\tfrac{56}{10}H^2 \Rightarrow H^2=140\cdot\tfrac{10}{56}m^2=25m^2.$$

Значи $H=5m$, од каде се добива дека $a=\frac{12}{5}H=12m$ и $b=\frac{7}{10}H=3{,}5m$. Тогаш, за волуменот на призмата имаме

$$V=B\cdot H=\tfrac{a\cdot b}{2}\cdot H=\tfrac{12\cdot 3{,}5}{2}\cdot 5=105m^3\ .$$

II година

568. а) За кои вредности на m и n изразот

$$\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$$

има најголема вредност?

б) Нацртај го графикот на функцијата

$$y=(4m+6n-2)|x|+2m+3n$$

за сите вредности на m и n за кои изразот $\dfrac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$ има најголема вредност.

Решение. а) Изразот

$$\frac{1}{4m^2+12mn+9n^2+1}$$

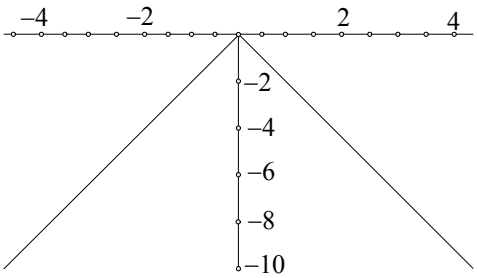
има најголема вредност ако

$$4m^2+12mn+9n^2+1$$

има најмала вредност.

Бидејќи

$$4m^2+12mn+9n^2+1=(2m+3n)^2+1\geq 1,$$



најмалата вредност на $4m^2+12mn+9n^2+1$ се добива ако $2m+3n=0$.

б) Бидејќи $2m+3n=0$ добиваме дека функцијата е $y=-2|x|$ а нејзиниот график е:

569 А. Ако за комплексниот број $z\neq -3+2i$ важи $\left|\frac{z-2+3i}{z+3-2i}\right|=1$, тогаш $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$. Докажи!

Прво решение. Од $\left|\frac{z-2+3i}{z+3-2i}\right|=1$, имаме

$$(z-2+3i)(\overline{z}-2-3i)=(z+3-2i)(\overline{z}+3+2i).$$

Последното равенство е еквивалентно со $(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})=0$. Бидејќи $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ и $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$, добиваме $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=0$, т.е $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$.

Второ решение: Ако $z=a+bi$ тогаш од условот во задачата добиваме

$$\left|(a-2)+(b+3)i\right|=\left|(a+3)+(b-2)i\right|,$$

а оттука

$$(a-2)^2+(b+3)^2=(a+3)^2+(b-2)^2.$$

Од последното равенство имаме $10a-10b=0$ па $\mathrm{Re}(z)=a=b=\mathrm{Im}(z)$.

570 Б. Докажи дека корените на равенката $x^2-(m^2+1)x+m^2=0$ се позитивни реални броеви за секој $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

б) За кои вредности на параметарот m, корените x_1 и x_2 на дадената равенката ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$?

Решение. а) Дискриминантата на равенката е

$$D=(m^2+1)^2-4m^2=(m^2-2m+1)(m^2+2m+1)=(m-1)^2(m+1)^2\geq 0.$$

Затоа равенката има реални корени. Корените се $x_1=m^2$ и $x_2=1$ и бидејќи $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ тие се позитивни.

б) Ако $x_1=m^2$ и $x_2=1$ ја задоволуваат релацијата $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=3$, добиваме $|m|+1=3$ од каде што следува дека $m=\pm 2$.

571 А. За $x\neq 1$ и $x\geq 0$, докажи дека вредноста на изразот

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$$

не зависи од x.

Решение. Изразот е дефиниран за $x\geq 0,\ x\neq 1$. За $x\geq 0,\ x\neq 1$ важи

$$\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^3-3\left(\sqrt{x}\right)^2 2+3\left(\sqrt{x}\right)2^2-2^3}=\sqrt{x}-2 \quad \text{и} \quad \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}.$$

Користејќи и дека $3\pm 2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^2$ имаме:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=1.$$

572 Б. Ако m, n, p, a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $m:a=n:b=p:c$ тогаш

$$(ma)^{1/2}+(nb)^{1/2}+(pc)^{1/2}=\left[(m+n+p)(a+b+c)\right]^{1/2}.$$

Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt{ma}+\sqrt{nb}+\sqrt{pc}&=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot a+\sqrt{\frac{n}{b}}\cdot b+\sqrt{\frac{p}{c}}\cdot c=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot(a+b+c)=\\&=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b+c}=\\&=\sqrt{m+\frac{m}{a}b+\frac{m}{a}c}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{m+\frac{n}{b}b+\frac{p}{c}c}\cdot\sqrt{a+b+c}=\\&=\sqrt{m+n+p}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{(m+n+p)(a+b+c)}\end{aligned}$$

573. Нека a, b, c се должини на страните на триаголник, при што a е најдолгата. Докажи дека триаголникот е правоаголен ако и само ако важи

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right)=\sqrt{2}(a+b+c).$$

Решение. Даденото равенство ќе го квадрираме и го добиваме равенството

$$2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)=(a+b+c)^2. \qquad (1)$$

Поради позитивноста на левата и десната страна на равенството двете равенства се еквивалентни. Нека триаголникот е правоаголен. Бидејќи a е најдолгата страна важи $a^2=b^2+c^2$. Тогаш

$$\begin{aligned}2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)&=2(a+c)(a+b)=2a^2+2ab+2ac+2bc=\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2\end{aligned},$$

односно важи даденото равенство.

Обратно, нека е исполнето равенството (1) и нека $a^2>b^2+c^2$. Тогаш важи

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-c^2}\right)>2(a+c)(a+b)=2a^2+2ab+2ac+2bc>\\&>a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc=(a+b+c)^2\end{aligned},$$

што е невозможно.

Слично, добиваме контрадикција ако претпоставиме дека $a^2<b^2+c^2$. Значи важи $a^2=b^2+c^2$ па триаголникот е правоаголен .

III година

574. Докажи дека

$$\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=\frac{n-1}{n}\log_a{}^2 x.$$

Решение. За секој од собироците ќе го примениме својството $\log_x a^k = k\log_x a$, со што за збирот имаме

$$\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=$$

$$=\frac{1}{\log_x a\cdot 2\log_x a}+\frac{1}{2\log_x a\cdot 3\log_x a}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\log_x a\cdot n\log_x a}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\log_x{}^2 a}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\log_x{}^2 a}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot\log_x{}^2 a}=$$

$$=\frac{1}{\log_x{}^2 a}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)=(*)$$

Во општ случај секоја од дропките $\frac{1}{(k-1)k}$ може да се запише во облик $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, па ако ова се замени во изразот погоре се добива

$$(*)=\frac{1}{\log_x{}^2 a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\log_x{}^2 a}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{\log_x{}^2 a}.$$

На крај со користење на својството $\frac{1}{\log_x a}=\log_a x$, збирот го доведуваме до облик $\frac{1}{\log_x a\cdot\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^2\cdot\log_x a^3}+\ldots+\frac{1}{\log_x a^{n-1}\cdot\log_x a^n}=\frac{n-1}{n}\log_a{}^2 x$ што требаше да докажеме.

575. Реши ја равенката $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1$, или $(2\cos x)(2\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=1$.

Ако последната равенка ја помножиме со $\sin x$, добиваме

$(2\cos x\sin x)(2\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x$,

и ако го искористиме идентитетот $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, добиваме

$(2\sin 2x\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x$, $(2\sin 4x\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x$,

$2\sin 8x\cos 8x=\sin x$, $\sin 16x=\sin x$.

Ако го искористиме идентитетот $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, за равенката $\sin 16x-\sin x=0$, добиваме $2\sin\frac{16x-x}{2}\cos\frac{16x+x}{2}=0$, т.е. $\sin\frac{15x}{2}\cos\frac{17x}{2}=0$. Равенката $\sin\frac{15x}{2}=0$ има решенија $\frac{15x}{2}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\frac{2k\pi}{15}, k\in\mathbb{Z}$. Равенката $\cos\frac{17x}{2}=0$ има решенија $\frac{17x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, т.е. $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решенија на равенката се $x=\frac{2k\pi}{15}, k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$, каде $k\neq 15s$ и $2k+1\neq 17s$, $s\in\mathbb{Z}$.

576 А. Многуаголник, опишан околу кружница со радиус *r*, е разбиен на произволен начин на триаголници. Докажи дека збирот на радиусите на впишаните кружници во тие триаголници е поголем од *r*.

Решение. Да ги означиме радиусите на впишаните кружници во триаголниците со $r_1, r_2, ..., r_n$, периметрите на триаголниците со $L_1, L_2, ..., L_n$, а нивните плоштини со $P_1, P_2, ..., P_n$ соодветно. Нека плоштината и периметарот на многуаголникот се означени со P и L соодветно.

За плоштината на секој од триаголниците важи $P_k = r_k s_k$, каде s_k е полузбирот од страните на триаголникот, односно $s_k = \frac{L_k}{2}$. Тогаш $P_k = \frac{r_k L_k}{2}$, од каде $r_k = \frac{2P_k}{L_k}$. Од друга страна периметарот на секој триаголник е помал од периметарот на многуаголникот, односно $L_k < L$ или уште повеќе $\frac{1}{L_k} > \frac{1}{L}$. Сега за збирот на радиусите на впишаните кружници важи

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = \frac{2P_1}{L_1} + \frac{2P_2}{L_2} + ... + \frac{2P_n}{L_n} > \frac{2P_1}{L} + \frac{2P_2}{L} + ... + \frac{2P_n}{L} = \frac{2}{L}\left(P_1 + P_2 + ... + P_n\right)$$

Да забележиме дека плоштината на многуаголникот претставува збир од плоштините на триаголниците на кои е разбиен, односно $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$. Уште повеќе, плоштината на многуаголникот се пресметува и како $P = \frac{Lr}{2}$. Тогаш имаме

$$r_1 + r_2 + ... + r_n > \frac{2}{L}\left(P_1 + ... + P_n\right) = \frac{2}{L}P = \frac{2}{L} \cdot \frac{Lr}{2} = r .$$

Со тоа покажавме дека навистина $r_1 + r_2 + ... + r_n > r$.

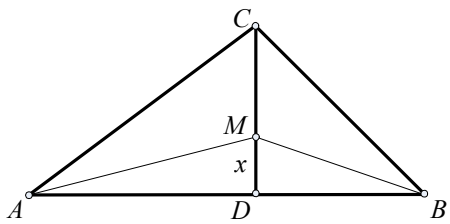
577 В. Даден е триаголникот ABC со страни $\overline{AC} = b, \overline{BC} = a$ и висината спуштена од темето C, $\overline{CD} = h$. Одреди точка M на висината таква што збирот $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$ е најмал.

Решение. Нека $\overline{MD} = x$. Тогаш $\overline{CM} = h - x$, односно $\overline{CM}^2 = (h-x)^2$. Користејќи Питагорова теорема можеме да ги изведеме и следниве релации:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + x^2 = b^2 - h^2 + x^2$$

и

$$\overline{BM}^2 = \overline{BD}^2 + x^2 = a^2 - h^2 + x^2 .$$



Со замена за збирот добиваме

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 =$$
$$= b^2 - h^2 + x^2 + a^2 - h^2 + x^2 + (h-x)^2,$$

односно

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2 .$$

Јасно, збирот ќе биде минимален во точката во која квадратната функција

$$f(x) = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2$$

достигнува свој минимум, односно во темето на параболата. Темето на параболата е во точката $\left(\frac{h}{3}, a^2 + b^2 - \frac{4}{3}h^2\right)$, од каде заклучуваме дека точката M е определена со растојанието $\overline{MD} = \frac{h}{3}$.

578 А. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$. Одреди го аголот помеѓу дијагоналите на четириаголникот, ако е познато дека

$\measuredangle SAB = \measuredangle SBC = 30^\circ$ и $\measuredangle SCD = \measuredangle SDA = 45^\circ$.

Решение. Од синусната теорема применета на секој од триаголниците *ACD, ABC* и *ABD* дадени на цртежот, ги добиваме следниве равенства

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\sin\left(180^\circ - x\right)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin x}{\sin 45^\circ},\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sin\left(x - 30^\circ\right)}{\sin\left(180^\circ - x\right)} = \frac{\sin\left(x - 30^\circ\right)}{\sin x},\ \text{и}\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin\left(150^\circ - x\right)}.$$

Со замена во равенството $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$, го добиваме равенството

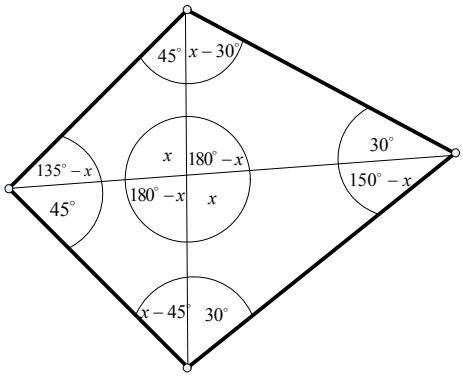
$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\left(150^\circ - x\right)} = \frac{\sin\left(x - 30^\circ\right)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 45^\circ},$$

еквивалентно со

$$\sin^2 45^\circ = \sin\left(150^\circ - x\right)\sin\left(x - 30^\circ\right),$$

односно со равенството

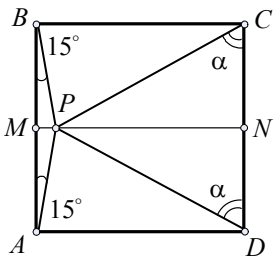
$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\cos 120^\circ - \cos\left(180^\circ - 2x\right)\right).$$



Последната равенка се сведува на $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, чии решенија се $x = 60^\circ$ или $x = 120^\circ$. Значи помалиот агол помеѓу дијагоналите изнесува $x = 60^\circ$.

579 Б. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка P така што $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA = 15^\circ$. Докажи дека триаголникот PCD е рамностран.

Решение. Триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа неговото теме P припаѓа на симетралата MN на страните AB и CD на квадратот (цртеж). Според тоа, триаголникот DCP е рамнокрак, $\overline{PC} = \overline{PD}$. Нека $\angle PCD = \angle PDC = \alpha$. Ако должината на страната на триаголникот е a, тогаш $\overline{MP} + \overline{PN} = a$. Од правоаголниот триаголник PMB имаме $\overline{MP} = \frac{a}{2}\operatorname{tg} 15^\circ$, а од правоаголниот триаголник PNC имаме $\overline{MN} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Ако замениме во



равенството $\overline{MP} + \overline{PN} = a$, добиваме $\frac{a}{2}\operatorname{tg} 15^\circ + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = a$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = 2 - \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= 2 - \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3}.$$

Јасно е дека $\alpha = 60^\circ$ и триаголникот PCD е рамностран.

IV година

580 А. Дадена е низата со позитивни членови

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_n^2 + a_{n+1}^2}{\left(n-1\right)^2 a_n + 2a_{n+1}} \qquad (1)$$

Докажи дека

$$a_n \le \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}. \qquad (2)$$

Решение. Равенството (1) се доведува во обликот

$$\left(a_{n+1} - na_n\right)\left(\left(2-n\right)a_n - a_{n+1}\right) = 0.$$

Неравенството (2) ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

За n=1 неравенството (2) е задоволено. Нека (2) важи за $k \le n$.

За $k = n+1$ можни се два случаи:

1) $a_{n+1} = na_n$

Со помош на неравенството на Бернули добиваме

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n^2}n = 1-\frac{1}{n} \quad \text{т.е.} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n},$$

што е пак еквивалентно со

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Добиваме дека низата $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е растечка и за сите $n \ge 2$ важи $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 2$ што е пак еквивалентно со неравенството $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$, односно со $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$, од каде поради индуктивната претпоставка следува дека

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \ge na_n \ge a_{n+1}.$$

2) $a_{n+1} = \left(2-n\right)a_n$

Во овој случај, за $n \ge 2$ добиваме дека $a_{n+1} \le 0$ што не е возможно бидејќи низата се состои од позитивни членови ($a_n > 0$). Значи a_{n+1} мора да е од обликот разгледан претходно во случајот 1), за кој веќе го докажавме неравенството (2).

581. Колку рационални членови има во развојот на биномот $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^{100}$?

Решение. Општиот член во развојот на биномот е $T_{k+1} = \binom{100}{k} 3^{\frac{100-k}{2}} 2^{\frac{k}{3}}$, $k \in \{0,1,...,100\}$. За да биде членот рационален треба $\frac{100-k}{2}$ и $\frac{k}{3}$ да се цели броеви. Бидејќи $\frac{100-k}{2}$ е цел број ако 2 е делител на k, а $\frac{k}{3}$ е цел број ако 3 е делител на k добиваме дека k треба да е цел број делив со 6. Значи рационални членови има колку што има цели броеви деливи со 6 од 0 до 100, а нив ги има вкупно $\left[\frac{100}{6}\right]+1 = 17$.

582. Најди ги сите функции $f : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ за кои

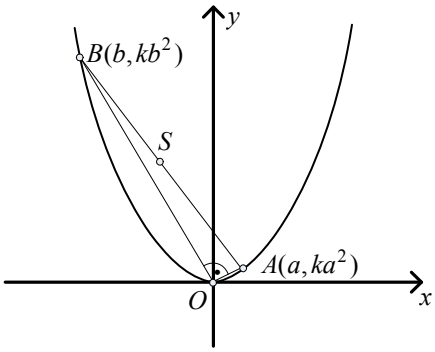
$$f\left(n+m\right) + f\left(n-m\right) = f\left(3n\right), \quad \forall n,m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, n \ge m.$$

Решение. Ако во равенството ставиме $m = 0$, добиваме $2f(n) = f(3n)$, за секој $n \in \mathbb{Z}^+$. За $n = m = 0$ добиваме $f(0) = 0$. Понатаму, ако ставиме $m = n$, добиваме $f(2n) + f(0) = f(3n)$

односно $f(2n)=f(3n)$. Значи, од една страна, за секое $m\in\mathbb{Z}^+$ важи $f(4m)=f(6m)=f(9m)$, а од друга страна, ако ставиме $n=3m$ во равенството, добиваме $f(4m)+f(2m)=f(9m)$, што е возможно ако и само ако $f(2m)=0$. Следствено, за произволен $n\in\mathbb{Z}^+$ имаме $f(n)=\frac{1}{2}f(3n)=\frac{1}{2}f(2n)=0$, односно единствена функција што го задоволува равенството е $f(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+$.

583 А. Докажи дека центрите на опишана кружница околу правоаголен триаголник, чии темиња лежат на дадена парабола, и темето каде што е правиот агол се совпаѓа со темето на параболата, лежат исто така на парабола.

Решение. Нека темињата на правоаголниот триаголник AOB со прав агол кај темето $O(0,0)$ лежат на параболата $y=kx^2$ (јасно $O(0,0)$ е теме на параболата). Тогаш координатите на темето A се (a,ka^2) а на B се (b,kb^2) каде што $a,b\neq 0$. Равенката на правата низ O и A е $y=kax$ а низ O и B е $y=kbx$. Бидејќи OA и OB се заемно нормални прави следува дека $b=-\frac{1}{k^2a}$. Значи темето B има координати $\left(-\frac{1}{k^2a},\frac{1}{k^3a^2}\right)$. Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш S е средина на $\overline{AB}$ па има координати



$$S\left(\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{k^2a}\right),\frac{1}{2}\left(ka^2+\frac{1}{k^3a^2}\right)\right).$$

Нека $x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{k^2a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(ka^2+\frac{1}{k^3a^2}\right)$. Тогаш

$$y=\frac{1}{2}\left(ka^2+\frac{1}{k^3a^2}\right)=\frac{1}{2}k\left(\left(a-\frac{1}{k^2a}\right)^2+\frac{2}{k^2}\right)=\frac{1}{2}k\left((2x)^2+\frac{2}{k^2}\right)=2kx^2+\frac{1}{k}.$$

584 Б. Нека A е збирот на членовите на една конечна геометриска прогресија (членовите се позитивни) и B е збирот на нивните реципрочни вредности. Најди го производот на членовите на прогресијата.

Решение. Нека членовите на геометриската прогресија се $a_1,a_2,...,a_n$. Ако со q го означиме количникот на прогресијата тогаш

$$P=a_1a_2...a_n=a_1^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}=\left(a_1^2q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(a_1a_n\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Од друга страна важи $a_ia_{n+1-i}=a_1q^{i-1}a_1q^{n-i}=a_1a_1q^{n-1}=a_1a_n$, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш

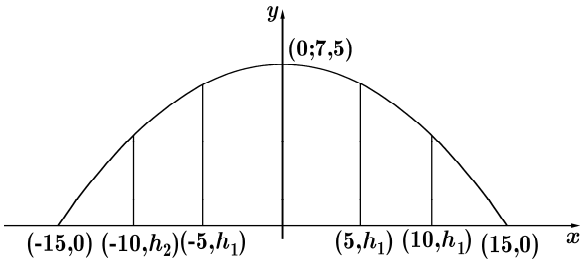
$$A=a_1+a_2+...+a_n=\frac{a_1a_n}{a_n}+\frac{a_2a_{n-1}}{a_{n-1}}+...+\frac{a_na_1}{a_1}=a_1a_n\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_1}\right)=a_1a_nB$$

Значи $a_1a_n=\frac{A}{B}$, а оттука $P=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{n}{2}}$.

585 Б. На река широка $30m$ треба да се изгради параболичен мост со столбови на растојание $5m$. Висината на средниот столб е $7,5m$.

Колкави се висините на другите столбови?

Решение. Мостот го поставуваме во координатен систем како на цртежот. Тогаш равенката на параболата е $y = ax^2 + b$ а бидејќи таа минува низ точките $(0;7,5)$ и $(15,0)$ добиваме $b = 7,5$ и $a = -\frac{1}{30}$. Висините на другите столбови се $h_1 = -\frac{1}{30}5^2 + 7,5 = \frac{20}{3}$ и $h_2 = -\frac{1}{30}10^2 + 7,5 = \frac{25}{6}$.



XXX регионален натпревар - 2007 година

I година

586. Докажи дека ако $ac - a - c = b^2 - 2b$, $bd - b - d = c^2 - 2c$ и $b \neq 1$, $c \neq 1$, тогаш $ad + b + c = bc + a + d$.

Решение. Ако додадеме 1 на двете страни од првото равенство, добиваме

$$ac - a - c + 1 = b^2 - 2b + 1,$$

од каде со разложување се добива $(a-1)(c-1) = (b-1)^2$. Слично, со додавање 1 на двете страни и од второто равенство, а потоа и со разложување се добива $(b-1)(d-1) = (c-1)^2$. Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = (b-1)^2(c-1)^2$, од каде

$$(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1),$$

па со множење се добива $ad - a - d + 1 = bc - b - c + 1$, од каде со средување се добива

$$ad + b + c = bc + a + d,$$

што требаше да се докаже.

587 А. Равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, каде $p > 1$ е даден прост број, да се реши во множеството природни броеви.

Решение. Равенката може да ја запишеме во облик $px + py = xy \Rightarrow xy - px - py + p^2 = p^2 \Rightarrow x(y-p) - p(y-p) = p^2 \Rightarrow (x-p)(y-p) = p^2$. Бидејќи p е прост број, од последната равенка можни се следните случаи:

1) $x - p = 1, y - p = p^2$, 2) $x - p = p, y - p = p$ и 3) $x - p = p^2, y - p = 1$.

Од 1) $x = p + 1, y = p^2 + p$, од 2) $x = 2p, y = 2p$, и од 3) $x = p^2 + p, y = p + 1$. Не е тешко да се провери дека добиените решенија се решенија и на почетната равенка.

588 Б. Четирицифрен број е полн квадрат, при што ако од неговите цифри се одземе иста цифра, се добива број кој е пак полн квадрат. Определи ги сите такви природни броеви.

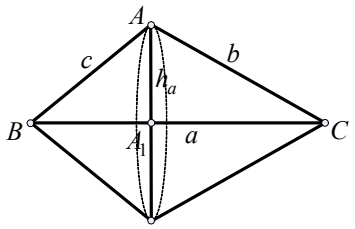
Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcd} = A^2$, па од условот имаме $\overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)} = B^2$. Ако ги одземеме последните две равенства, добиваме

$$1000a + 100b + 10c + d - 1000a + 1000k - 100b + 100k - 10c + 10k - d + k = A^2 - B^2,$$

односно $1111k = A^2 - B^2$, ако разложиме, имаме $11 \cdot 101 \cdot k = (A-B)(A+B)$. Бидејќи, A^2 и B^2 се четирицифрени броеви, заклучуваме дека $32 \le A \le 99$ и $32 \le B \le 99$, од каде $64 \le A + B \le 198$ и $0 \le A - B \le 67$. Како $A + B$ и $A - B$ се со иста парност, заклучуваме дека $A + B = 101$ и $A - B = 11 \cdot k$, при што $k = 1,3,5$. За $k = 1$, $\overline{abcd} = 3136 = 56^2$ и за $k = 3$, $\overline{abcd} = 4489 = 67^2$.

589. Најди го односот на волумените на телата што се добиваат со ротација на триаголникот околу неговите страни a, b и c.

Решение. Ако триаголникот ABC ротира околу страната $\overline{BC} = a$, се добива тело со волумен $V_a = \frac{1}{3}h_a^2\pi \cdot \overline{BA_1} + \frac{1}{3}h_a^2\pi \cdot \overline{A_1C} = \frac{1}{3}h_a^2\pi \cdot a$. Слично, $V_b = \frac{1}{3}h_b^2\pi \cdot b$ и $V_c = \frac{1}{3}h_c^2\pi \cdot c$ се волумените на телата добиени со ротирање на триаголникот околу страните $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$ соодветно. Тогаш, за бараниот однос имаме,



$$V_a : V_b : V_c = \tfrac{1}{3}h_a^2\pi a : \tfrac{1}{3}h_b^2\pi b : \tfrac{1}{3}h_c^2\pi c = h_a^2 a : h_b^2 b : h_c^2 c.$$

Нека P е плоштината на триаголникот ABC, па имаме $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, од каде $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$ и со замена во односот добиваме

$$V_a : V_b : V_c = \frac{4P^2}{a^2}a : \frac{4P^2}{b^2}b : \frac{4P^2}{c^2}c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

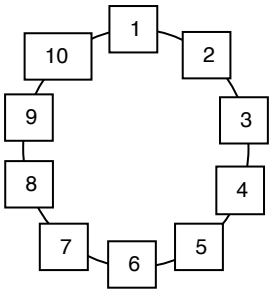
590 А. Во една кошница се наоѓаат црвени, бели и жолти цветови. Бројот на жолтите цветови не е помал од бројот на белите цветови и не е поголем од третината на црвените цветови. Вкупниот број на бели и жолти цветови не е помал од 55. Најди го најмалиот број на црвени цветови.

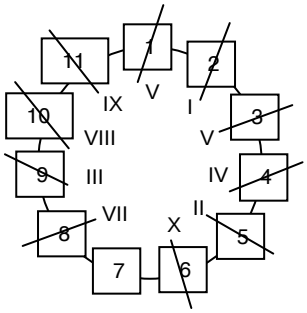
Решение. Нека во кошницата има a-жолти, b-бели и c-црвени цветови. Од условот на задачата следува дека $a \ge b$ (1), $a \le \frac{1}{3}c$ (2) и $a + b \ge 55$ (3). Од (1) и (3) добиваме дека $2a \ge 55$, од каде $a \ge 28$, затоа што $a \in \mathbb{N}$. Тогаш, од (2) се добива $c \ge 3a \ge 3 \cdot 28 = 84$. Значи, најмалиот број на црвени цветови е 84.

591 Б. Во круг се разместени 10 деца. Треба да им се приклучи уште Ивица. Сите ќе ја играат играта на испаѓање на следниот начин: почнуваат да бројат кај бројот 1 во насока на движење на стрелките на часовникот, а кај оној кај кој што ќе падне бројот 13 испаѓа од играта. се продолжува со броење со останатите таму каде што е прекинато и тринаесеттиот пак испаѓа од играта итн. На кое место (меѓу кои два од десетте означени броеви, види слика) треба да застане Ивица, за да остане последен во играта?

Решение. Кога Ивица ќе влезе во кругот, во него ќе има 11 деца. Со прецртување на секој 13-ти број (не ги броиме веќе прецртаните) и ги означиме со римски броеви според тоа кој по ред ис-паднал, ќе ја добиеме следната слика.

Значи остана бројот 7. Според тоа за да победи, т.е за да остане последен при броењето Ивица





треба да застане помеѓу броевите 6 и 7.

II година

592. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот m, така што решенијата на системот $\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 3x + my = 4 \end{cases}$, да ги задоволуваат условите $x > 0,\ y < 0$.

Решение. Можеме да искористиме било кој од методите за определување на решенија на систем од две равенки со две непознати. На пример, ако ги определиме детерминантите на системот и на променливите, добиваме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & -2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 6,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & m \end{vmatrix} = 3m + 8,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4m - 9.$$

Бидејќи $m^2 + 6 \neq 0$, решенија на системот се $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3m+8}{m^2+6}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4m-9}{m^2+6}$. Од условите $x > 0, y < 0$, го добиваме системот неравенки $\begin{cases} \frac{3m+8}{m^2+6} > 0 \\ \frac{4m-9}{m^2+6} < 0 \end{cases}$. Бидејќи $m^2 + 6 > 0$, последниот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} 3m + 8 > 0 \\ 4m - 9 < 0. \end{cases}$ Од првата равенка на системот добиваме $m > -\frac{8}{3}$, а од втората равенка на системот добиваме $m < \frac{9}{4}$. Целобројни вредности на m кои ги задоволуваат неравенките $-\frac{8}{3} < m < \frac{9}{4}$ се $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

593. Дадени се реалните броеви $a, b, c \geq 0$ за кои важи $b \neq c$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}$ и $a + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2$. Докажи дека $\frac{a + \left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)^2}{b + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$.

Решение. Ќе направиме две трансформации на равенството $a + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2$:

$$a = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 - b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)$$

и

$$b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 - a = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right).$$

Ако ги искористиме овие две трансформации, добиваме:

$$a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right)$$

и

$$b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right).$$

Од последните две равенства, бидејќи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$, имаме

$$\frac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

594. Дадени се реалните броеви $a,b,c,d\geq 0$ за кои важи

$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}.$$

Докажи дека $ad=bc$.

Решение. Ако $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}$ со квадрирање, добиваме

$$2\sqrt{ac}\sqrt{bd}=ad+bc.$$

Со негово квадрирање добиваме $4acbd=(ad)^2+2adbc+(bc)^2$, односно $(ad)^2-2adbc+(bc)^2=0$. Тогаш, од $(ad-bc)^2=0$ следува $ad=bc$, што требаше да се докаже.

595. Нека x_0 и x_1 се реални корени на равенката $x^2+a_1x+b_1=0$, x_0 и x_2 се реални корени на равенката $x^2+a_2x+b_2=0$ и x_0 и x_3 се реални корени на равенката $x^2+a_3x+b_3=0$. Најди ги корените на равенката

$$x^2+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}x+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0.$$

Решение. Од $x_0^2+a_1x_0+b_1=0$, $x_0^2+a_2x_0+b_2=0$ и $x_0^2+a_3x_0+b_3=0$ добиваме

$$3x_0^2+(a_1+a_2+a_3)x_0+b_1+b_2+b_3=0,$$

односно $x_0^2+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}x_0+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0$ па x_0 е реален корен на дадената равенка. Тогаш, равенката има уште еден реален корен . Од $x_0+x_1=-a_1$, $x_0+x_2=-a_2$ и $x_0+x_3=-a_3$ добиваме $3x_0+x_1+x_2+x_3=-(a_1+a_2+a_3)$, односно $x_0+\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$. Бидејќи и

$$x_0\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{x_0x_1+x_0x_2+x_0x_3}{3}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3},$$

следува дека x_0 и $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ се корени на дадената равенка.

596. Најди ги сите вредности на реалниот параметар $a\neq 0,1$ за кои равенките $x^2-(2a+1)x+a=0$ и $x^2+(a-4)x+a-1=0$ имаат реални корени x_1,x_2 и x_3,x_4, соодветно, за кои е исполнето равенството

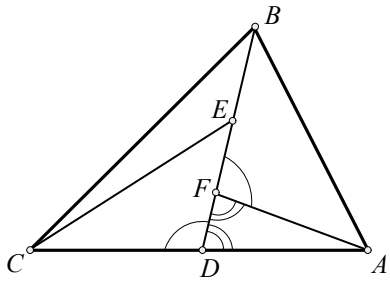
$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_4}{x_2}=\frac{x_1x_4\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)}{a}.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со

$$a\left(x_1x_2+x_3x_4\right)=x_1x_2x_3x_4\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right).$$

Од Виетовите формули ја добиваме равенката $a\left(2a-1\right)=a\left(a-1\right)\left(a+5\right)$. Бидејќи $a\neq 0$, ја добиваме квадратната равенка $a^2+2a-4=0$, чиишто решенија се $-1-\sqrt{5}$ и $-1+\sqrt{5}$.

597. Во триаголникот ABC е повлечена тежишна линија BD. Точките E и F ја делат тежишната линија на три еднакви дела $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FD}$. Ако $\overline{AB}=1$ и $\overline{AF}=\overline{AD}$, определи ја должината на отсечката CE.



Решение. Бидејќи $\overline{AF}=\overline{AD}$, триаголникот DAF е рамнокрак, па според тоа $\measuredangle ADF=\measuredangle AFD$, а оттука имаме $\measuredangle BFA=\measuredangle CDE$. Отсечката BD е тежишна линија, па затоа $\overline{CD}=\overline{AF}$, а од условот на задачата $\overline{BF}=\overline{DE}$.

Заради тоа, од признакот CAC, триаголниците CDE и AFB се складни , па според тоа $\overline{CE}=\overline{AB}=1$.

III година

598. Докажи дека $\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0$, каде α,β,γ се агли во триаголник, а a,b и c се соодветните страни.

Решение. Собироците од левата страна на равенството ќе ги помножиме и поделиме редоследно со $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ и ќе ги искористиме равенствата $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=k$, (синусна теорема) при што добиваме

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=$$

$$=\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\left(\frac{b}{\sin\beta}\right)^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\left(\frac{c}{\sin\gamma}\right)^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=$$

$$=k^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+k^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+k^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=$$

$$=k^2[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)]=(*)$$

Ако ја искористиме адиционата формула $\sin(\theta-\varphi)=\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi$, добиваме:

$$(*)=k^2[\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+\sin\beta(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)+\sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)]=$$
$$=k^2[\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-\sin\beta\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\sin\gamma\cos\alpha\sin\beta=$$
$$=k^2\cdot 0=0$$

599. Да се реши системот равенки $\begin{cases} xy=1 \\ x+y+\cos^2 z=2 \end{cases}$.

Решение. Од првата равенка добиваме дека реалните броеви x и y се со ист знак. Бидејќи $0 \le \cos^2 z \le 1$ за било кој реален број z, добиваме дека $x + y = 2 - \cos^2 z \ge 1$. Бидејќи x и y се со ист знак, добиваме дека тие се позитивни.

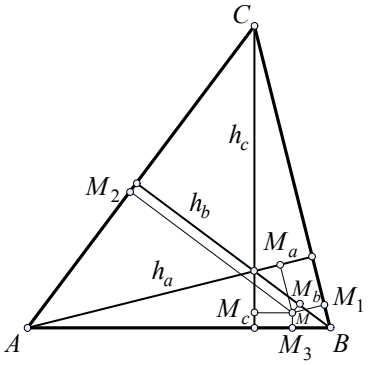
Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивни реални броеви x и y за кои е исполнето $xy = 1$, имаме $x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2$.

Од друга страна $x + y = 2 - \cos^2 z \le 2$, па според тоа $x + y = 2$. Сега го добиваме системот $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Не е тешко да се провери дека единствено решение на системот кое е позитивно е $x = y = 1$.

Тогаш од втората равенка на почетниот систем добиваме $\cos^2 z = 0$, чии решенија се $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Конечно решенија на системот се $\left\{\left(1, 1, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

600 А. Во внатрешноста на триаголникот ABC избрана е произволна точка M. Нека M_1, M_2, M_3 се проекциите на M врз страните a, b, c на триаголникот, соодветно, а M_a, M_b, M_c се проекциите на M врз висините h_a, h_b, h_c на триаголникот, соодветно. Докажи дека $\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}} + \frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} + \frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}} \ge 6$.



Решение. Од $\frac{P_{ABC}}{P_{MBC}} = \frac{h_a}{\overline{MM_1}}$ следува

$$\frac{P_{ABC} - P_{MBC}}{P_{MBC}} = \frac{h_a - \overline{MM_1}}{\overline{MM_1}},$$

односно

$$\frac{P_{ABM} + P_{AMC}}{P_{MBC}} = \frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}}.$$

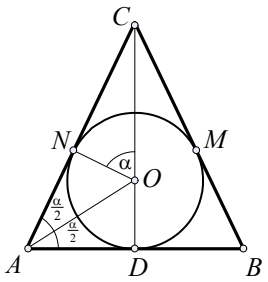
Аналогно

$$\frac{P_{ABM} + P_{BMC}}{P_{AMC}} = \frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} \text{ и } \frac{P_{BCM} + P_{AMC}}{P_{ABM}} = \frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}}.$$

Тогаш

$$\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}} + \frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} + \frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}} = \left(\frac{P_{ABM}}{P_{MBC}} + \frac{P_{BCM}}{P_{ABM}}\right) + \left(\frac{P_{AMC}}{P_{MBC}} + \frac{P_{BCM}}{P_{AMC}}\right) + \left(\frac{P_{ABM}}{P_{AMC}} + \frac{P_{CMA}}{P_{ABM}}\right) \ge 2 + 2 + 2 = 6.$$

601 Б. Во рамнокрак триаголник аголот при основата е еднаков на α. Пресметај ја должината на основата на триаголникот ако висината спуштена врз основата е за m поголема од радиусот на впишаната кружница.



Решение. Нека ABC е триаголник со основа AB во кој $\measuredangle BAC = \alpha$. Од темето C спуштаме нормала CD, $\overline{CD} = h$, која во исто време е и симетрала на $\measuredangle BCA$. Нека симетралата на аголот BAC и симетралата CD се сечат во точката O која е центар на впишаната кружница. Допираните точки на впишаната кружница

k со страните AB, BC и CA ќе ги означиме со D, M, N соодветно. Должината на радиусот на кружницата е $\overline{ON} = r = \overline{OD}$ и $\measuredangle OAN = \measuredangle OAB = \frac{\alpha}{2}$. Триаголниците CON и CAD се слични (имаат по еден прав агол и агли со взаемно нормални краци). Во триаголникот ONC имаме, $\sphericalangle NOC = \alpha$, $\overline{CO} = h - r = m$ и $\overline{ON} = r$, па според тоа $r = \overline{ON} = \overline{OC}\cos\alpha = m\cos\alpha$.

Триаголникот ADO е правоаголен и еден негов остар агол е $\frac{\alpha}{2}$, а една негова страна е $\overline{OD} = m\cos\alpha$. Бидејќи $\frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, добиваме $\frac{a}{2} = \overline{AD} = \overline{OD}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Конечно, должината на основата е $a = 2m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

602 А. Реши ја равенката $2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y$.

За произволни $x, y \in \mathbb{R}$, имаме $|x| \geq 0$ и $1 + x^2 + |y| \geq 1$, од каде добиваме дека неравенствата $2^{|x|} \geq 1$, $\lg(1 + x^2 + |y|) \geq 0$, $\cos y \leq 1$ се точни. Според тоа

$$\cos y \leq 1 \leq 2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) \quad . \tag{1}$$

Равенство е можно ако и само ако почениот и крајниот израз во (1) се еднакви на единица, т.е. $\cos y = 1$ и $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = 1$. Од равенката $\cos y = 1$, добиваме дека решенија се $y = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Од точното неравенство $2^{|x|} \geq 1$ во множеството реални броеви, за равенката $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = 1$ добиваме

$$2^{|x|} = 1, \tag{2}$$

$$\lg(1 + x^2 + |y|) = 0. \tag{3}$$

Решение на (2) е $|x| = 0$, односно $x = 0$, а решение на (3) кога $x = 0$ е $1 + |y| = 1$, односно $y = 0$.

Конечно добиваме дека единствено решение на почетната равенка е $x = y = 0$.

603 Б. Реши ја равенката $\log_6\left(3 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x} = \log_6 5$.

Решение. Јасно е дека за $x = 0$ равенката не е дефинирана. За $x \neq 0$ воведуваме смена $-\frac{1}{x} = y$, при што равенката го добива обликот

$$\log_6\left(3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y\right) = y + \log_6 5,$$

$$\log_6\left(3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y\right) = \log_6 6^y + \log_6 5,$$

$$\log_6\left(3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y\right) = \log_6 5 \cdot 6^y.$$

Ако антилогартимираме, добиваме $3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y = 5 \cdot 6^y$, $/ : 9^y$, $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} + 2 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^y = 0$.

Воведуваме смена $\left(\frac{2}{3}\right)^y = t$, при што добиваме $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Решенијата на последната квадратна равенка се $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$.

- За $t_1 = 1$, ја добиваме равенката $\left(\frac{2}{3}\right)^y = 1$,од каде имаме $y = 0$. Равенката $-\frac{1}{x} = 0$ нема решенија.

- За $t_2 = \frac{2}{3}$ ја добиваме равенката $\left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{2}{3}$ која има единствено решение $y = 1$. Решение на равенката $-\frac{1}{x} = 1$ е $x = -1$.

Значи, единствено решение на равенката е $x = -1$.

IV година

604. Определи ја кривата на која се наоѓаат темињата на параболите $y = -x^2 + bx + c$, кои ја допираат параболата $y = x^2$.

Решение. Нека параболите $y = -x^2 + bx + c$ и $y = x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2 + bx + c = x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2 - bx - c = 0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2 + 8c = 0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c = -\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y = -x^2 + bx + c$ го има обликот $y = -x^2 + bx - \frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{8}\right)$. Бидејќи $\frac{b^2}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2$, т.е. $y = \frac{1}{2}x^2$.

605. Пресметај го збирот $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2$.

Решение. Нека $n = 2k + 1$.Тогаш

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2k)^2 + (2k+1)^2 = 1^2 + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(5^2 - 4^2\right) + \ldots + \left((2k+1)^2 - (2k)^2\right) =$$
$$= 1 + 5 + 9 + \ldots + (4k+1) = \frac{(4k+2)(k+1)}{2} =$$
$$= (2k+1)(k+1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Нека, сега, $n = 2k$. Тогаш

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2k-1)^2 - (2k)^2 = -\left(\left(2^2 - 1^2\right) + \left(4^2 - 3^2\right) + \ldots + \left((2k)^2 - (2k-1)^2\right)\right) =$$
$$= -\left(3 + 7 + 11 + \ldots + (4k-1)\right) = -\frac{(4k+2)k}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

Значи бараниот збир е $(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

606 А. Нека a и b се позитивни реални броеви и n е цел број. Докажи дека важи неравенството

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n+1}.$$

Решение. За $n=0$ важи равенство. Да претпоставиме дека $n>0$. Тогаш

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n}=2\sqrt{\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n}\geq 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}.$$

Нека $n<0$. Ставаме $m=-n>0$. Тогаш

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\left(\frac{b}{a+b}\right)^m+\left(\frac{a}{a+b}\right)^m=\frac{1}{2^m}\left(\left(\frac{2b}{a+b}\right)^m+\left(\frac{2a}{a+b}\right)^m\right)=$$

$$=\frac{1}{2^m}\left(\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^m+\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^m\right)\geq\frac{1}{2^m}\cdot 2=2^{1-m}=2^{n+1},$$

бидејќи $\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^m+\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^m\geq 2$. Последново неравенство следува од Биномната формула.

607 Б. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2...a_n=1$. Докажи дека $(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме:

$4+a_1=1+1+1+1+a_1\geq 5\sqrt[5]{a_1}$, $4+a_2=1+1+1+1+a_2\geq 5\sqrt[5]{a_2}$,..., $4+a_n=1+1+1+1+a_n\geq 5\sqrt[5]{a_n}$.

Ако ги поможиме овие неравенства добиваме

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n\underbrace{\sqrt[5]{a_1a_2...a_n}}_{=1}=5^n.$$

608 А. Дадени се три позитивни броеви a,b,c такви што за секој $k\in\mathbb{N}$ од должините a^k,b^k,c^k може да се формира триаголник. Докажи дека меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

Решение. Нека $a\neq b\neq c\neq a$ и нека $a<b<c$ (не се губи од општоста ако се претпостави тоа). Од условот a^k,b^k,c^k се должини на страните на триаголник следува

$$c^k<a^k+b^k,\ k=1,2,3. \qquad (1)$$

Но

$$c^k=\left(b+(c-b)\right)^k=b^k+kb^{k-1}(c-b)+\underbrace{\binom{k}{2}b^{k-2}(c-b)^2+...+(c-b)^k}_{\geq 0}\geq b^k+kb^{k-1}(c-b).$$

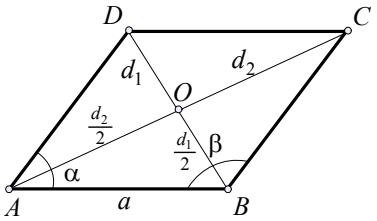
Последново неравенство важи за секој $k\in\mathbb{N}$. Постои $k_0\in\mathbb{N}$ така што $k_0(c-b)>b$. За k_0 важи $c^{k_0}\geq b^{k_0}+k_0b^{k_0-1}(c-b)>b^{k_0}+b^{k_0-1}\left(k_0(c-b)\right)>b^{k_0}+b^{k_0}>b^{k_0}+a^{k_0}$, што е во контрадикција со (1). Значи меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

609 Б. Должините на помалата дијагонала, страната и поголемата дијагонала во ромбот формираат геометриска прогресија. Определи ги аглите на ромбот!

Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој дијагоналата $d_1=\overline{BD}$, страната $a=\overline{AB}$ и дијагоналата $d_2=\overline{AC}$ се последователни членови на геометриска прогресија. Значи,

постојат броеви b и q такви што $d_1 = b$, $a = bq$, $d_2 = bq^2$. Од правоаголниот триаголник AOB, според теоремата на Питагора имаме

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2,\ \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}q^4 = b^2q^2,\ q^4 - 4q^2 + 1 = 0.$$



Ако воведеме смена $q^2 = t$, ја добиваме квадратната равенка $t^2 - 4t + 1 = 0$ чии решенија се $t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

За решението $t = 2 + \sqrt{3}$, добиваме $q = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, и $d_1 = b$, $a = b\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $d_2 = b(2+\sqrt{3})$. Од правоаголниот триаголник AOB, добиваме

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{d_1}{2}}{\frac{d_2}{2}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{b(2+\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}.$$

Конечно, аглите на ромбот $ABCD$ се $\alpha = 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$ и $\beta = \pi - 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$. Аналогно се постапува и за решението $t = 2 - \sqrt{3}$.

XXXI регионален натпревар - 2008 година

I година

610 АБ. Пресметај ја вредноста на изразот $(x+y)^2$, ако $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$ и $y - x = 1$.

Решение. Од $1 = \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 2\frac{y-x}{xy} = 2\frac{1}{xy}$ следува дека $xy = 2$. Сега,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy = (x-y)^2 + 4xy = 1^2 + 4\cdot 2 = 9$$

611 АБ. Докажи дека разликата на броевите $\underbrace{111...111}_{2000\text{ пати }1}$ и $\underbrace{222...222}_{1000\text{ пати }2}$ е полн квадрат.

Решение. Бројот $\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати }2}$ можеме да го запишеме во облик $\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати }2} = \underbrace{1...111}_{1000-\text{пати }1} + \underbrace{1...111}_{1000-\text{пати }1}$, а бројот $\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати }1}$ можеме да го запишеме во облик $\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати }1} = \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1}\underbrace{000...000}_{1000-\text{пати }0} + \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1}$.

Сега разликата ќе го добие обликот

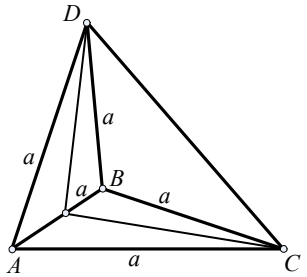
$$-\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати }2} + \underbrace{111...111}_{2000-\text{пати }1} = \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1}\underbrace{000...000}_{1000-\text{пати }0} - \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1} = \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1}\cdot 10^{1000} - \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1} =$$

$$= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати }1}\cdot(10^{1000}-1) = \frac{1}{9}\underbrace{999...999}_{1000-\text{пати }9}\cdot(10^{1000}-1) = \frac{1}{9}(10^{1000}-1)(10^{1000}-1) =$$

$$= \left(\frac{10^{1000}-1}{3}\right)^2 = \left(\underbrace{333...333}_{1000-\text{пати }3}\right)^2$$

612 А. Две страни на тристрана пирамида се рамностранни триаголници со страна $a\,\text{cm}$. Рамнините на овие триаголници се нормални меѓу себе. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Нека е дадена тристраната пирамида $ABCD$, каде страните ABC и ABD се рамностранi триаголници со страна $a\,cm$, т.е. $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=a\,\text{cm}$. Нека CN и DN се висини во триаголниците ABC и ABD соодветно, кон заедничката страна AB, значи и $DN\perp AB$. Од условот на задачата имаме дека и $CN\perp DN$ (цртеж). Ако земеме еден од рамностраните триаголници за база на пирамидата, на пример триаголникот ABC, тогаш висина на пирамидата ќе биде DN, па волуменот на пирамидата е



$$V=\frac{1}{3}\cdot P_{\Delta ABC}\cdot\overline{DN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}\text{cm}^3.$$

Триаголникот CND е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол кај темето N и $\overline{CN}=\overline{DN}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. Тогаш,

$$\overline{CD}=\sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\text{cm}.$$

Триаголниците CDA и CDB се складни рамнокраки триаголници со основа $\frac{a\sqrt{6}}{2}\text{cm}$ и крак $a\,cm$. Тогаш, нивната плоштина е

$$P_{\Delta CDA}=P_{\Delta CDB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{a^2-(\frac{a\sqrt{6}}{4})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{4}=\frac{a^2\sqrt{15}}{8}\text{cm}^2.$$

и конечно, плоштината на пирамидата е

$$P=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{a^2\sqrt{15}}{8}=\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}\text{cm}^2.$$

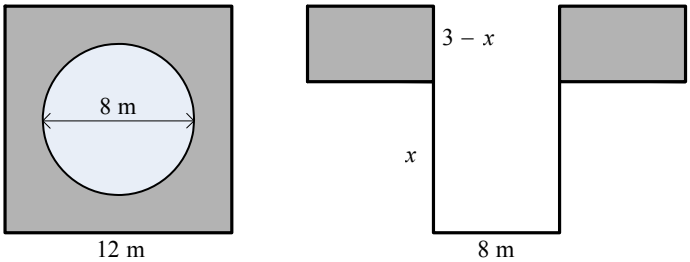
613 Б. На едно земјиште во облик на квадрат со страна $12m$ се копа цилиндрична јама со пречник (дијаметар на основата) од $8m$. Ископаната земја рамномерно се распоредува по преостанатиот дел од земјиштето и се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата. Колку длабоко треба да се копа, за да јамата биде длабока $3m$?

Решение. Површината на земјиштето по кое се распоредува ископаната земја од јамата е

$$(12^2-4^2\pi)\,\text{m}^2=(144-16\pi)\,\text{m}^2.$$

Нека x е длабочината на копањето, тогаш дебелината на слојот натисната земја треба да биде $(3-x)\,\text{m}$. Бидејќи ископаната земја се натиснува толку колку што била натисната кога била во јамата, тоа значи дека волуменот на ископаната земја е еднаков на волуменот на рамномерно нанесената и натисната земја на преостанатиот дел од земјиштето, односно

$$4^2\pi\cdot x=(144-16\pi)\cdot(3-x).$$



Со решавање на последната равенка по x се добива дека $x=(3-\frac{\pi}{3})\,\text{m}$. Бидејќи $\pi\approx 3{,}14$, следи дека треба да се копа $x\approx 1{,}95\,\text{m}$ во длабочина.

614 А. Нека a,b,c се страни на еден триаголник. Докажи дека

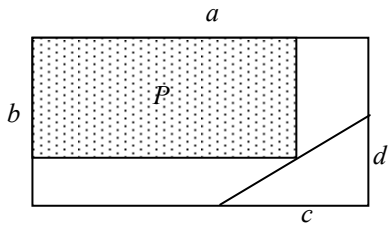
$$a^3+b^3+3abc>c^3.$$

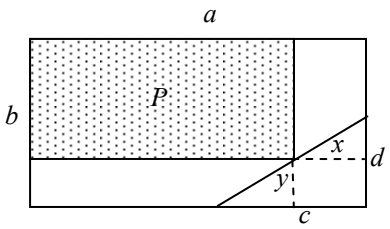
Решение. Од тоа што a,b,c се страни на триаголник, го користиме неравенството $a+b>c$, и добиваме

$$\begin{aligned}a^3+b^3+3abc&=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc>c\cdot(a^2-ab+b^2)+3abc=\\&=c\cdot(a^2-ab+b^2+3ab)=c\cdot(a^2+2ab+b^2)=c\cdot(a+b)^2>c\cdot c^2=c^3\end{aligned},$$

што требаше да се докаже.

615 Б. Од правоаголна плоча со страни a и b исечено е триаголно ќоше со две страни c и d (види цртеж). Од преостанатиот дел треба да се исече нова правоаголна плоча, така што нејзината плоштина P да биде најголема. Пресметај ја плоштината на исечената нова правоаголна плоча.





Решение. Нека x и y се нормалните растојанија од допирната точка на новата плоча со исеченото ќоше, соодветно до страните на првобитната плоча (види цртеж). Тогаш, плоштината на новата плоча ќе биде $P=(a-x)(b-y)$. Од сличноста на триаголниците добиени со повлекувањето на растојанието y паралелно со страната d кај триаголното ќоше, се добива пропорцијата $y:d=(c-x):c$, од каде $y=d-\frac{d}{c}x$. Со замена во плоштината на новата плоча добиваме,

$$P=(a-x)(b-d+\tfrac{d}{c}x)=ab-ad+\tfrac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2-\tfrac{d}{c}(x-\tfrac{1}{2d}(ad+cd-bc))^2.$$

Членот $\frac{d}{c}(x-\frac{1}{2d}(ad+cd-bc))^2$ во изразот за плоштината P е секогаш ненегативен, значи достигнува најмала вредност 0 кога $x=\frac{1}{2d}(ad+cd-bc)$, и тогаш P достигнува најголема вредност

$$P_{\max}=ab-ad+\tfrac{1}{4cd}(ad+cd-bc)^2=\tfrac{1}{4cd}(ad+bc-cd)^2$$

II година

616 АБ. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2+2ab+2b^2=13.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $(a+b)^2+b^2=13$. Бидејќи a и b се цели броеви, добиваме дека $-3\le a+b\le 3$. Навистина, ако $a+b\ge 4$ или $a+b\le -4$, тогаш $(a+b)^2+b^2\ge 16+b^2\ge 16>13$. Значи, треба да ги разгледаме седумте случаи:

$a+b=\pm 3$, $a+b=\pm 2$, $a+b=\pm 1$ и $a+b=0$.

Ако $a+b=\pm 1$ или $a+b=0$, тогаш равенката го добива обликот $b^2=12$ или $b^2=13$. Последните две равенки немаат решение во множеството на цели броеви .

Ќе ги разгледаме четирите преостанати случаи.

а) $a+b=-3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$. За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=-5, b=2$. За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=-1, b=-2$.

б) $a+b=3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$. За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=1, b=2$. За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=5, b=-2$.

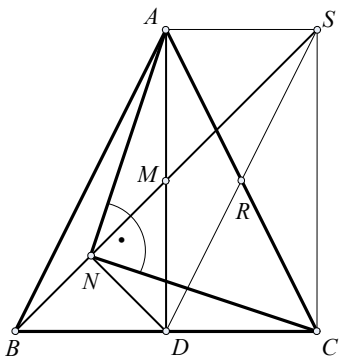
в) $a+b=-2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$. За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=1$, $b=-3$. За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-5$, $b=3$.

г) $a+b=2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$. За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=5$, $b=-3$. За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-1$, $b=3$.

Конечно, решенија на равенката се

$$(a,b)\in\{(-5,2),(-1,-2),(1,2),(5,-2),(1,-3),(-5,3),(5,-3),(-1,3)\}.$$

617 АБ. Нека ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека D е средина на страната BC, M е средина на отсечката AD и N е проекцијата на точката D на BM. Докажи дека $\measuredangle ANC=90^\circ$.



Решение. Нека S е точка таква што четириаголникот $ABDS$ е паралелограм (цртеж). Тогаш, четириаголникот $ADCS$ е правоаголник и нека R е пресечната точка на неговите дијагонали AC и DS. Бидејќи N лежи на дијагоналата BS на паралелограмот $ABDS$ следува дека триаголникот SND е правоаголен. Тогаш R е центарот на опишаната кружница околу триаголникот SND и оттука $\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{DS}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Значи, важи $\overline{RA}=\overline{RC}=\overline{RN}$ и затоа триаголникот ANC е правоаголен, односно $\measuredangle ANC=90^\circ$.

618А. Познато е дека корените на равенката $x^2+px+q=0$ се цели броеви. Ако $p+q=198$, определи ги корените на равенката и броевите p и q.

Решение. Ако x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+px+q=0$, тогаш според Виетовите формули имаме $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q \end{cases}$. Од последните равенства и даденото равенство (зависноста меѓу p и q), добиваме

$$198=p+q=-(x_1+x_2)+x_1x_2=(x_1-1)(x_2-1)-1.$$

Според тоа $(x_1-1)(x_2-1)=199$. Бидејќи x_1,x_2 се цели броеви и x_1-1,x_2-1 се цели броеви, а 199 е прост број, добиваме

$$\begin{cases} x_1-1=1 \\ x_2-1=199 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-199 \end{cases}.$$

Решенијата (x_1,x_2) на последните системи се $(2,200)$ и $(0,198)$. За решението $(2,200)$, според Виетовите формули добиваме, $p=-2-200=-202$, $q=2\cdot 200=400$, а за решението $(0,198)$, $p=-198, q=0$.

619 Б. Ако n е непарен природен број тогаш 48 е делител на бројот n^3+3n^2-n-3. Докажи!

Доказ. I начин. $n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=(n-1)(n+1)(n+3).$

Бидејќи броевите $n-1,n+1,n+3$ се парни (n е непарен според условот) и еден од броевите $n-1,n+1$ е делив со 4, заклучуваме дека дадениот број се дели со 16. Ако n е делив со 3, тогаш и $n+3$ е делив со 3. Ако n не е делив со 3, тогаш при делење со 3 дава остаток 1 или -1 па еден од броевите $n-1$ и $n+1$ е делив со 3. Оттука, заклучуваме дека дадениот број се дели со $3\cdot 16=48$.

II начин. Бројот n е непарен, па може да се запише во облик $n=2k-1$, за некој природен број k. Ако го вметнеме ова во дадениот израз добиваме:

$$(2k-1)^3+3(2k-1)^2-(2k-1)-3=8k^3-8k=8k(k^2-1)=8k(k-1)(k+1).$$

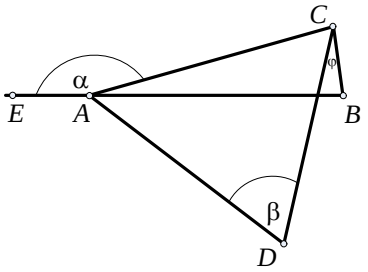
Еден од факторите $k-1,k,k+1$ е делив со 3 и барем еден од $k-1,k,k+1$ е парен. Затоа производот $8k(k-1)(k+1)$. е делив со $8\cdot 3\cdot 2=48$.

620 А. Докажи дека ако $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ тогаш $x+y=0$.

Решение. Го множиме равенството $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ со $x-\sqrt{x^2+1}\neq 0$ и добиваме $\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$, односно $-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$ (1). Слично, ако го помножиме даденото равенство со $y-\sqrt{y^2+1}$ добиваме $-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$ (2). Со собирање на (1) и (2) добиваме $-y-x-\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}+y-\sqrt{y^2+1}$, а оттука следува дека $2(x+y)=0$, односно $x+y=0$.

621 Б. Дадени се четири точки A, B, C и D во рамнината такви што $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\overline{AD}=\overline{BD}$. Нека E е точка од правата AC, така што A е меѓу E

и C. Ако за аглите $\alpha = \measuredangle BAE$ и $\beta = \measuredangle ADC$ важи $\alpha + \beta = 200°$, определете го аголот $\varphi = \measuredangle BCD$.



Решение: Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак со основа BC, а $\alpha = \angle BAE$ следува дека

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CBA = \frac{180° - \measuredangle BAC}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Бидејќи и триаголникот ABD е рамнокрак со основа AB, имаме $\measuredangle DBA = \measuredangle BAD = \frac{180° - \beta}{2}$. Оттука, следува

$$\varphi = \angle CBD = \measuredangle CBA - \measuredangle DBA = \frac{\alpha}{2} - \frac{180° - \beta}{2} =$$
$$= \frac{\alpha + \beta}{2} - 90° = 10°.$$

III година

622 АБ. Докажи дека во било кој триаголник ABC е точно равенството $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$. ($a, b, c$ и α, β се стандардните ознаки за должините на страните и големините на аглите на триаголникот).

Решение. Од косинусната теорема имаме

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

од каде што имаме $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos\beta$, $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$.

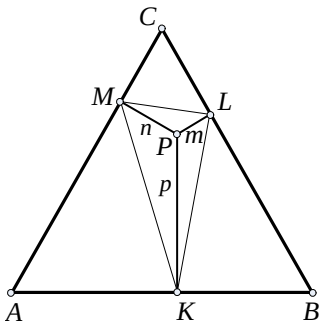
Според тоа $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{2ac\cos\beta}{2bc\cos\alpha} = \frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = (*)$.

Според синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, односно $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Според тоа $(*) = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, што и требаше да се докаже.

623 АБ. Од точка во внатрешноста на рамностраниот триаголникот ABC се спуштени нормали кон страните AB, BC и CA. Должините на спуштените нормали се еднакви на m, n, p а должината на страната на триаголникот ABC е еднаква на a.

Да се пресмета односот на плоштините на триаголникот ABC и триаголникот чии темиња се подножјата на нормалите.



Решение. Нека P е произволна точка во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Точките K, L и M се подножја на нормалите спуштени од точката P кон страните AB, BC и CA соодветно. (цртеж) Бидејќи

$$\measuredangle PKB = \measuredangle PLB = \measuredangle PLC = \measuredangle PMC = \measuredangle PMA = \measuredangle AKP = 90^\circ,$$

четириаголниците $AKPM, BLPK$ и $CLPM$ се тетивни. Затоа $\sphericalangle KPL = \sphericalangle LPM = \sphericalangle MPK = 120^\circ$ (бидејќи аглите на триаголникот ABC се еднакви на 60° и тетивноста на погорните четириаголници). Од равенствата $\overline{PK} = p$, $\overline{PL} = m$ и $\overline{PM} = n$ добиваме дека

$$P_{\Delta LPK} = \frac{1}{2} mp \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mp,$$

$$P_{\Delta LPM} = \frac{1}{2} mn \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mn,$$

$$P_{\Delta MPK} = \frac{1}{2} np \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} np.$$

Плоштината на триаголникот KLM е еднаква на

$$P_{\Delta KLM} = P_{\Delta KPL} + P_{\Delta LPM} + P_{\Delta MPK} = \frac{\sqrt{3}}{4}(pm + mn + np).$$

Бидејќи плоштината на триаголникот ABC е $P_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, добиваме

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KLM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(pm + mn + np)} = \frac{a^2}{pm + mn + np}.$$

624 А. Реши ја равенката $\sqrt{1 + 3\sin^3 x} = 3 - \sqrt{1 - \cos^4 x}$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $\sqrt{1 + 3\sin^3 x} + \sqrt{1 - \cos^4 x} = 3$. Може да ги направиме следниве оценки: $\sin x \le 1$, односно $\sin^3 x \le 1$, од каде $1 + 3\sin^3 x \le 4$ и $\cos x \ge 0$, односно $-\cos^4 x \le 0$, од каде $1 - \cos^4 x \le 1$. Тогаш за левата страна на равенката важи $\sqrt{1 + 3\sin^3 x} + \sqrt{1 - \cos^4 x} \le \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$. Равенството важи ако и само ако истовремено $1 + 3\sin^3 x = 4$ и $1 - \cos^4 x = 1$, односно $\sin x = 1$ и што е точно за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$.

625 Б. Реши го системот $\begin{cases} x(y+z) = 35 \\ y(z+x) = 32 \\ z(x+y) = 27 \end{cases}$.

Решение. Ако го развиеме системот до облик $\begin{cases} xy + xz = 35 \\ yz + yx = 32 \\ zx + zy = 27 \end{cases}$ очигледно е дека може да се воведат смени $a = xy, b = xz, c = yz$ со што системот добива облик $\begin{cases} a + b = 35 \ ...(1) \\ c + a = 32 \ ...(2) \\ b + c = 27 \ ...(3) \end{cases}$. Со собирање и одземање на равенките добиваме: $(1) + (2) - (3)$: $2a = 40$, $(2) + (3) - (1)$: $2c = 12$ и $(1) + (3) - (2)$: $2b = 30$. Од овде соодветниот систем станува $\begin{cases} a = 20 \\ b = 15 \\ c = 12 \end{cases}$, односно $\begin{cases} xy = 20 \\ xz = 15 \\ yz = 12 \end{cases}$, а притоа $x, y, z \ne 0$. Систем еквивалентен на дадениот е $\begin{cases} y = \frac{20}{x} \\ z = \frac{15}{x} \\ yz = 12 \end{cases}$. Заменувајќи ги првата и втората равенка во третата се добива $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Тогаш решенија на почетниот систем се $(x, y, z) \in \{(5,4,3), (-5,-4,-3)\}$.

626 А. Реши го системот $\begin{cases} x^{\log y} + \sqrt{y^{\log x}} = 110 \\ xy = 1000 \end{cases}$.

Решение. Да забележиме дека мора $x, y > 0$. Ако воведеме ознаки $A = x^{\log y}$, $B = y^{\log x}$ тогаш $\log A = \log x \cdot \log y = \log B$, оттука мора и $A = B$, па може да воведеме смена $x^{\log y} = y^{\log x} = t$. Првата равенка од системот добива облик $t + \sqrt{t} = 110$, а со смена $\sqrt{t} = z$, каде $t, z \geq 0$ добиваме обична квадратна равенка $z^2 + z - 110 = 0$ со решенија $z_1 = -11$ и $z_2 = 10$. Заради позитивноста останува само $z = 10$, односно $t = 100$. Почетниот систем сега може да се запише во облик $\begin{cases} x^{\log y} = 100 \\ xy = 1000 \end{cases}$. Ги логаритмираме двете равенки и добиваме $\begin{cases} \log x \cdot \log y = 2 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$. Може да забележиме дека $\log x$ и $\log y$, согласно Виетовите правила, се корени на квадратна равенка $p^2 - 3p + 2 = 0$ чии решенија се $p_1 = 1, p_2 = 2$. На крај од $\begin{cases} \log x = 1 \\ \log y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \log x = 2 \\ \log y = 1 \end{cases}$ ги добиваме решенијата на системот $(x, y) \in \{(10,100), (100,10)\}$.

627 Б. Реши ја равенката $\log_{3x+4}(2x+1)^2 + \log_{2x+1}(6x^2 + 11x + 4) = 4$.

Решение. За дефиниционата област на која ги бараме решенијата на равенката мора да важи $2x+1 > 0, 3x+4 > 0, 6x^2 + 11x + 4 > 0$ и $2x+1, 3x+4 \neq 1$. Се добива интервалот $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Треба да забележиме дека $6x^2 + 11x + 4 = (2x+1)(3x+4)$ и тогаш равенката добива облик

$$2\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(2x+1)(3x+4) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(2x+1) + \log_{2x+1}(3x+4) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+4}(2x+1) + \log_{2x+1}(3x+4) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+4}(2x+1) + \frac{1}{\log_{3x+4}(2x+1)} = 3.$$

Воведуваме смена $u = \log_{3x+4}(2x+1)$, односно $(3x+4)^u = 2x+1$. Ја добиваме равенката $2u + \frac{1}{u} = 3$ и е еквивалентна со квадратна равенка $2u^2 - 3u + 1 = 0$ чии решенија се $u_1 = 1$ и $u_2 = \frac{1}{2}$. За првото решение од смената добиваме $3x + 4 = 2x + 1$, односно $x = -3$. Но $x = -3 \notin \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, па не е решение. За $u = \frac{1}{2}$ се добива квадратна равенка $3x + 4 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0$. Нејзините решенија се $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{3}{4}$ од кои само второто е во дефиниционата област. Значи единствено решение е $x = \frac{3}{4}$.

IV година

628 А. Дадена е низата броеви , 4489, 444889, ... (секој нареден член на низата се добива од претходниот со допишување на бројот 48 во неговата средина). Да се докаже дека секој член на низата е полн квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот $A = 444...488...89$, има n-четворки и $(n-1)$-на осумки, т. е. $A = \underbrace{444...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9$. Според тоа, бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A = 4 \cdot \underbrace{111...1}_{n} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111...1}_{n} + 1. \qquad (1)$$

Бројот $\underbrace{111...1}_{n}$ можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{111...1}_{n} = 10^{n-1} + 10^{n-1} + ... + 10^2 + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

па според тоа, бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A = \frac{4}{9}(10^n - 1)10^n + \frac{8}{9}(10^n - 1) + 1 = \frac{4}{9}10^{2n} + \frac{4}{9}10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Јасно е дека бројот $2 \cdot 10^n + 1$ е делив со 3, бидејќи збирот на неговите цифри е еднаков на 3.

629 Б. Дали постои реален број y така што броевите $\sqrt{y^2 + 2y + 1}$, $\frac{y^2 + 3y - 1}{3}$, $y - 1$ во дадениот редослед, се три последователни членови на аритметичка прогресија? Образложи го одговорот.

Решение. Ако p, q, r се три последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш збирот на првиот и третиот по ред член е двојна вредност од вториот член, т. е. $p + r = 2q$. Овој услов во нашиот случај, го добива обликот

$$\sqrt{y^2 + 2y + 1} + y - 1 = 2\frac{y^2 + 3y - 1}{3} \text{ или } 3(\sqrt{(y+1)^2} + y - 1) = 2(y^2 + 3y - 1).$$

Бидејќи $\sqrt{(y+1)^2} = |y+1|$, добиваме $3(|y+1| + y - 1) = 2(y^2 + 3y1 - 1)$. Ако последната равенка ја средиме, добиваме

$$2y^2 + 3y - 3|y+1| + 1 = 0. \qquad (1)$$

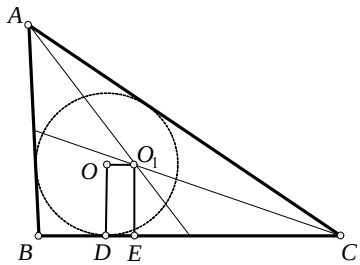
Равенката (1) е еквивалентна со вкупноста на системите $\begin{cases} y + 1 \geq 0 \\ y^2 + 3y - 3(y+1) + 1 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y + 1 < 0 \\ y^2 + 3y + 3(y+1) + 1 = 0 \end{cases}$, од каде по средувањето истите може да се запишат во облик

$$\begin{cases} y \geq -1 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < -1 \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \end{cases}.$$

Решение на првиот систем е $y = 1$ или $y = -1$, а решение на вториот систем е $y = -2$.

Според тоа бараните броеви y за кои што $\sqrt{y^2 + 2y + 1}$, $\frac{y^2 + 3y - 1}{3}$, $y - 1$ се последователни членови на аритметичка прогресија се $y \in \{-2, -1, 1\}$.

630 А. Страните на триаголникот образуваат аритметичка прогресија. Докажи дека отсечката што ги сврзува тежиштето на триаголникот и центарот на впишаната кружница е паралелна со средната по должина страна на триаголникот.



Решение. Нека претпоставиме дека ABC е триаголник за кој $\overline{AB}=c$, $a=\overline{BC}=c+d$ и $b=\overline{AC}=c+2d$. Нека точката O е центар на впишаната кружница, точката O_1 е пресек на тежнишните линии, а D и E се нивни ортогонални проекции на страната BC (цртеж). Бидејќи r е радиус на впишаната кружница имаме $\overline{OD}=r$. Плоштината на ΔABC е еднаква на $P=rs$, каде s е полупериметарот на триаголникот, т.е. $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Бидејќи $s=\frac{c+d+c+c+2d}{2}=\frac{3}{2}(c+d)$, добиваме $r=\frac{P}{s}=\frac{2P}{3(c+d)}$. Бидејќи O_1 е тежиштето на триаголникот ABC, добиваме $P_{O_1BC}=\frac{1}{3}P_{ABC}=\overline{O_1E}\cdot\frac{1}{2}(c+d)$, па според тоа $\overline{O_1E}=\frac{2P}{3(c+d)}=r$. Конечно, четириаголникот DOO_1E е паралелограм, па според тоа $OO_1 \parallel DE$, т.е. $OO_1 \parallel BC$.

631 Б. Равенката $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{1}{x}=\frac{3x-20}{4}$, реши ја во множеството природни броеви.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{x}\left[1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1)\right]=\frac{3x-20}{4}.$$

Бидејќи решение бараме во множеството природни броеви, збирот

$$1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1),$$

можеме да го запишеме во облик $1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1)=\frac{(x-1)x}{2}$, па според тоа равенката ќе ја запишеме во облик $\frac{1}{x}\frac{(x-1)x}{2}=\frac{3x-20}{4}$.

Според тоа, $4x-4=6x-40$, $2x=36$, $x=18$.

632 АБ. Реалните броеви a, b и c го исполнуваат неравенството

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c.$$

Докажи дека $|a|<c$ и $|b|<c$.

Решение. Од особините на апсолутни вредности, имаме

$$|a|=\left|2\frac{a}{2}\right|=\left|\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right|=\left|\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\right|\le\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c.$$

Значи, $|a|<c$.

Потполно аналогно се добива $|b|<c$.

633 АБ. Нека $a_n=1+2+...+n$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако за a_m и a_n важи $2a_m=a_n$, тогаш a_{2m-n} е полн квадрат. Докажи!

Решение. Секој a_n е збир на првите n членови на аритметичката прогресија со прв член 1 и разлика $d=1$. Според тоа $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, равенството $2a_m=a_n$ го добива обликот $2\frac{m(m+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$, $2m(m+1)=n(n+1)$. Значи,

$$\begin{aligned}a_{2m-n}&=\frac{1}{2}(2m-n)(2m-n+1)=\frac{1}{2}(4m^2-4mn+n^2+2m-n)=\\&=\frac{1}{2}(\underbrace{2m^2+2m}_{n^2+n}+2m^2-4mn+2n^2-n^2-n)=\\&=\frac{1}{2}(2m^2-4mn+2n^2)=\frac{1}{2}2(m^2-2mn+n^2)=(m-n)^2\end{aligned}$$

XXXII Регионален натпревар - 2009

I година

634 А. Броевите m и n се заемно прости. Дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати со некој природен број.

Определи го бројот со кој може да се скрати.

Решение. Нека претпоставиме дека k, $k>1$ е бројот со кој може да се скрати дропката . Според тоа, постојат природни броеви p и s, такви што $(p,s)=1$ и $3n-m=kp$, $5n+2m=ks$. Ако го решиме системот

$$\begin{cases}3n-\ m\ =kp\\5n+2m=ks\end{cases},$$

по n и m ќе добиеме $n=\frac{k(2p+s)}{11}$ и $m=\frac{k(3s-5p)}{11}$. Броевите m и n се заемно прости, па според тоа $k=11$. Навистина, ако претпоставиме дека $k\neq 11$, тогаш за било кој делител d на k поголем од 1 и различен од 11 имаме

$$(m,n)\geq d>1.$$

Но тоа е во спротивност со претпоставката $(m,n)=1$.

Значи, $k=11$.

635 Б. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека a^2+ab+b^2 е делител на бројот $(a+b)^6-a^6$.

Решение. Ќе ги искористиме идентитетите

$$A^6-B^6=(A^3-B^3)(A^3+B^3)\ \text{ и }\ A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

Навистина , добиваме

$$\begin{aligned}(a+b)^6-a^6&=[(a+b)^3-a^3][(a+b)^3+a^3]=[(a+b)-a][(a+b)^2+a(a+b)+a^2][(a+b)+a]=\\&=[(a+b)^2-(a+b)a+a^2]=b(2a+b)(a^2+ab+b^2)(3a^2+3ab+b^2).\end{aligned}$$

Според дефинцијата за деливост, $(a^2+ab+b^2)\,|\,(a+b)^6-a^6$ и количникот од делењето е $[(a+b)^3-a^3](2a+b)$.

636. За бројот a, е исполнето равенството $a+\frac{1}{a}=1$. Пресметај ја вредноста на

$a^5+\frac{1}{a^5}$.

Решение I. Ке воведеме ознака $b=\frac{1}{a}$. Тогаш $a+b=1$ и $ab=1$, па според тоа

$$a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab=(a+b)^2-2ab=1^2-2\cdot 1=-1;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2+b^2-ab)=1\cdot(-1-1)=-2;$$

$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)=(-1)(-2)-1^2\cdot 1=1;$$

Значи, $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

Решение II. Користејќи ја формулата

$$A^5+B^5=(A+B)(A^4=A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4),$$

за $A=a$ и $B=\frac{1}{a}$, имаме

$$a^5+\frac{1}{a^5}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^4-a^3\frac{1}{a}+a^2\frac{1}{a^2}-a\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\right)=a^4+\frac{1}{a^4}+1-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=$$

$$=a^4+2+\frac{1}{a^4}-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-1=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-1=(*)$$

Од друга страна,

$$a^2+\frac{1}{a^2}=a^2+2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=1^2-2=-1,$$

па заради тоа

$$(*)=(-1)^2-(-1)-1=1.$$

Значи, $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

637 А. Дадени се 21 плочка во облик на квадратче, со иста димензија. На четири плочки е запишан бројот 1; на две плочки е запишан бројот 2; на седум плочки е запишан бројот 3; на 8 плочки е запишан бројот 4. Користејќи 20 од тие плочки, Димитар формирал правоаголник со димензии 4 на 5. За формираниот правоаголник збирот на броевите во секоја редица е иста, и збирот на броевите во секоја колона е иста. Кој број стои на неискористената плочка?

Решение. Да го означиме со S збирот на сите броеви запишани на плочките кои го формираат правоаголникот. Од условот на задачата, имаме дека 4 е делител на S и дека 5 е делител на S. Значи 20 е делител на S. Збирот на сите броеви запишани на 21-та плочка е точно 61. Заклучуваме дека на неискористената плочка мора да стои бројот 1.

638 Б. Во равенството $25!=15\ 511\ x10\ 043\ 330\ y85\ 984\ z00\ 000$ определи ги цифрите x, y и z за да тоа е точно.

Решение. По дефиниција $25!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 25$. Ако овој број го разложиме на прости множители (направиме негова канонична факторизација), се добива:

$$25!=2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 23=10^6\cdot 2^{16}\cdot 3^{10}\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 23$$

значи 25! завршува на 6 нули, па следува дека $z = 0$.

Бројот 25! е делив со 9, следува дека 61+x+y е делив со 9. Значи

$\underline{x + y = 2}$ или $\underline{x + y = 11}$ (1)

(бидејќи x и y се едноцифрени броеви).

Бројот 25! е делив со 11. Критериумот за деливост со 11 гласи: бројот $a_n \ldots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ е делив со 11 ако бројот $(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)$ е делив со 11. Па, следува дека $(34 + x) - (27 + y) = 7 + x - y$ е делив со 11. Значи

- $x + y = 7$ или $x - y = 4$ (2)

(бидејќи x и y се едноцифрени броеви).

Од (1) и (2) ги формираме следниве системи равенки:

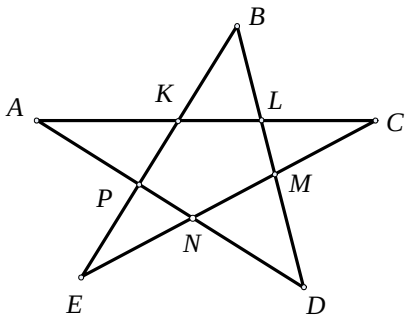
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 11 \\ -x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Целобројни решенија се добиваат само кај вториот и третиот систем, т.е. $x = 2$, $y = 9$.

639. Во петокраката на цртежот важат следниве равенства:

$$|AK| = |LC|, |BL| = |MD|,$$
$$|CM| = |NE|, |DN| = |PA|.$$

Докажи дека важи и $|EP| = |KB|$.



Решение. Да ги повлечеме отсечките AB, BC, CD, DE, EA. Од дадените равенства во условот следува дека триаголниците

AKB, LCB, MCD, NED, PEA

се еднакво-плоштни користејќи дека имаат по еден пар еднакви страни и заедничка соодветна висина. Но тогаш $\Delta EPA, \Delta KBA$ се еднакво-плоштни, и имаат заедничка висина од темето A, па затоа точно е равенството

$|EP| = |KB|$.

II година

640 A. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$ е реален. (i е имагинарна единица)

Решение. Комплексниот број $\frac{3+i}{2-i}$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{3+i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{6+5i+i^2}{4-i^2} = \frac{5+5i}{5} = 1+i .$$

Значи, $z = (1+i)^n$. Ако n е парен број, односно $n = 2k$ за некој $k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$z = (1+i)^n = (1+i)^{2k} = [(1+i)^2]^k = (2i)^k .$$

Ако пак k е парен број, односно $k = 2m$ за некој $m \in \mathbb{N}$, тогаш

$$z = (2i)^{2m} = (4i^2)^m = 4^m(-1)^m .$$

Значи, ако $n = 4m$, т.е. $4 \mid n$ тогаш $z \in \mathbb{R}$.

Ако $4 \nmid n$, тогаш n има еден од облиците $4m+1, 4m+2$ или $4m+3$. Во секој од тие случаи имаме

$$z = (1+i)^{4m+1} = 4^m(-1)^m(1+i) \notin \mathbb{R},$$

$$z = (1+i)^{4m+2} = 4^m(-1)^m(1+i)^2 = 4^m \cdot (-1)^m \cdot 2i \notin \mathbb{R},$$

$$z = (1+i)^{4m+3} = 4^m(-1)^m(1+i)^3 = 4^m(-1)^m \cdot 2i(1+i) = 4^m \cdot (-1)^m \cdot 2(-1+i) \notin \mathbb{R}.$$

Значи, z е реален број ако и само ако $4 \mid n$.

641 Б. Определи ги комплексните броеви z за кои

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |z-1|.$$

Решение. Јасно е дека равенките се определени за $z \neq 0$. Од равенката $|z| = \frac{1}{|z|}$, добиваме $|z|^2 = 1$, односно

$$|z| = 1. \tag{1}$$

Од претходната равенка и равенката $|z| = |z-1|$ ја добиваме равенката

$$|z-1| = 1. \tag{2}$$

Ако комплексниот број z го запишеме во алгебарски облик $z = x+iy$, од (1) и (2) добиваме

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \tag{3}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка, ја добиваме равенката $2x - 1 = 0$. од каде $x = \frac{1}{2}$. Ако замениме во било која од равенките од системот (3), ја добиваме равенката $y^2 = \frac{3}{4}$. Нејзини решенија се $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, множеството броеви

$$\left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\},$$

е решение на равенките.

642. Темињата на еден квадрат лежат на страните на друг квадрат (на една страна едно теме). Да се најде односот на кој се разделени страните на вториот квадрат со темињата на првиот квадрат, ако односот на нивните плоштини е еднаков на p, ($p < 1$).

Решение. Нека $ABCD$ и $KLMN$ се дадените квадрати, така што K, L, M и N припаѓаат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{BL} = y$, $\overline{KB} = x$, $\overline{KL} = b$ и $\overline{AB} = a$, при што можеме да претпоставиме $x > y$. Тогаш

$$P_1 = P_{ABCD} = a^2 = (x+y)^2,$$

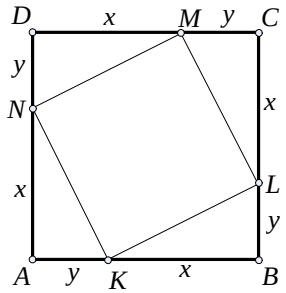
а според Питагоровата теорема $b^2 = x^2 + y^2$, па затоа

$$P_2 = P_{KLMN} = b^2 = x^2 + y^2.$$

Од условот на задачата $\frac{P_2}{P_1}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=p$, каде $0<p<1$. Равенството $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=p$ можеме да го запишеме во обликот

$$(1-p)x^2-2pxy+(1-p)y^2=0 \qquad /:y^2$$

$$(1-p)\left(\frac{x}{y}\right)^2-2p\frac{x}{y}+(1-p)=0,$$



Ако воведеме ознака $\frac{x}{y}=t$ добиваме

$$(1-p)t^2-2pt+(1-p)=0. \qquad (1)$$

Решенија на равенката (1) се

$$t_1=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}, \qquad t_1=\frac{p-\sqrt{2p-1}}{1-p}.$$

Јасно е дека $\frac{x}{y}=\frac{p+\sqrt{2p-1}}{1-p}$ е бараното решение.

643 А. Реши ја равенката $\left(\frac{x^3+x}{3}\right)^3+\frac{x^3+x}{3}=3x$.

Решение. Ако воведеме смена $\frac{x^3+x}{3}=y$, тогаш $y^3+y=3x$ и $x^3+x=3y$. Според тоа, ако $x_\circ$ е решение на равенката и $\frac{x_\circ^3+x_\circ}{3}=y_\circ$, тогаш $(x_\circ,y_\circ)$ е решение на системот равенки $\begin{cases}x^3+x=3y\\ y^3+y=3x\end{cases}$. Точно е и обратното кое што не е тешко да се докаже. Заради тоа, доволно е да се реши системот равенки

$$\begin{cases}x^3+x=3y\\ y^3+y=3x\end{cases}.$$

Ако од првата равенка на системот ја одземеме втората равенка на системот добиваме

$$(x^3-y^3)+(x-y)=3(y-x);$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+1)=3(y-x);$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2+4)=0; \qquad (1)$$

Бидејќи $x^2+xy+y^2+4=x^2+2x\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{3}{4}y^2+4=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+4\ge 4$, за било кои $x,y\in\mathbb{R}$, од равенката (1) имаме $x-y=0$ односно $x=y$. Според тоа $\frac{x^3+x}{3}=x$, од каде добиваме дека $x(x^2-2)=0$. Решенија на последната равенка се $x_1=0, x_2=\sqrt{2}, x_3=-\sqrt{2}$. Не е тешко да се провери дека истите се решенија и на почетната равенка.

644 Б. Реши го системот равенки $\begin{cases}x+y=z\\ x^2+y^2=z\\ x^3+y^3=z\end{cases}$.

Решение. Третата равенка на системот ќе ја трансформираме во обликот $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, односно $z=z^3-3xyz$. Притоа од формулата за бином на квадрат имаме $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]$ и конечно третата равенка на системот добива облик $z=z^3-\frac{3}{2}z(z^2-z)$. Со средување истата станува $z^3-3z^2+2z=0 \Leftrightarrow z(z-1)(z-2)=0$, од каде решенија за променливата z се $z\in\{0,1,2\}$. За секоја од поединечните вредности на z решаваме системи од две равенки со две непознати $\begin{cases} x+y=z \\ x^2+y^2=z \end{cases}$.

Така за првиот систем, за $z=0$ имаме: $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$ со решение $x=y=0$.

За $z=1$, системот добива облик $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ кој со замена од првата во втората равенка и решавајќи квадратна равенка ни дава решенија $x=0, y=1$ и $x=1, y=0$.

За $z=2$, системот добива облик $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ кој слично како во претходниот случај, решавајќи квадратна равенка ни дава решенија $x=y=1$.

Конечно, решенија на почетниот систем се подредените тројки

$$(x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,2)\}.$$

645 А. Висината го дели правоаголнот триаголник на два триаголници кои имаат периметри m и n. Определи го периметарот на почетниот триаголник.

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник (со теме на правиот агол во точката C) и нека CH е негова висина. Од условот на задачата имаме

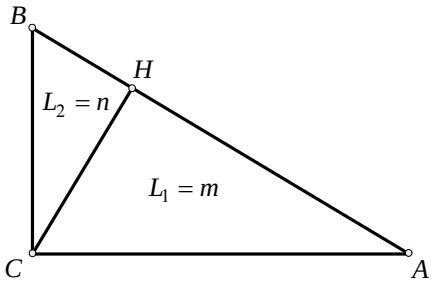
$$L_1=L_{AHC}=m \quad \text{и} \quad L_2=L_{CHB}=n.$$

Триаголниците AHC, BHC и ABC се слични, при што коефициентите на сличност се

$$k_1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ и } k_2=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \qquad (1)$$

При тоа, исто така

$$\frac{L_1}{L}=k_1 \text{ и } \frac{L_2}{L}=k_2. \qquad (2)$$



Од равенствата (1) имаме $\overline{AC}=k_1\overline{AB}$ и $\overline{BC}=k_2\overline{AB}$. Според Питагоровата теорема

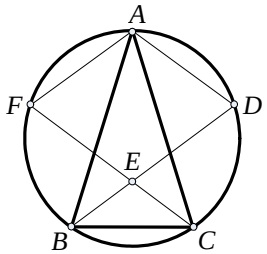
$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2,$$

од каде го добиваме равенството $k_1^2+k_2^2=1$. Ако (2) замениме во претходното равенство, имаме

$$\left(\frac{L_1}{L}\right)^2+\left(\frac{L_2}{L}\right)^2=1,$$

$$L=\sqrt{L_1^2+L_2^2}=\sqrt{m^2+n^2}.$$

646 Б. Нека k е опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник ΔABC со основа BC. Нека E е пресечната точка на симетралите на внатрешните агли во темињата B и C. Нека D и F се пресечните точки на симетралите на аглите во темињата B и C со k соодветно. Докажи дека $EDAF$ е ромб.



Решение. Нека $\alpha = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ и нека $\gamma = \measuredangle CAB$. Тогаш, бидејќи BD е симетрала на $\measuredangle CBA$ и CF е симетрала на $\measuredangle BCA$ следува дека:

$$\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle BCE = \measuredangle ACE .$$

Па $\measuredangle CED = \alpha$. Па оттука и $\measuredangle BEF = \alpha$. $\measuredangle CFA = \measuredangle CBA = \alpha$ како агли над ист кружен лак, па $\measuredangle CFA = \alpha = \measuredangle CED$. Од каде $FA \parallel ED$. Аналогно $EF \parallel AD$.

Сега $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BCF = \measuredangle BAF = \frac{\alpha}{2}$ од каде добиваме $\measuredangle FAC = \measuredangle FAB + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \gamma$ и $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Значи $\measuredangle FAC = \measuredangle DAB$. Сега бидејќи и $\measuredangle ABD = \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ACF$, $\overline{AC} = \overline{AB}$ следува дека $\Delta ACF \cong \Delta ABD$ па $\overline{AF} = \overline{AD}$. Според тоа $EDAF$ е ромб.

III година

647А. Определи ги сите цели броеви x, за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е исто така цел број.

Решение. Цели броеви x за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е определен се

$$x \in (-\infty, 2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}, +\infty) \cap \mathbb{Z} .$$

Нека n е цел број за кој постои $x \in \mathbb{Z}$ така што

$$\log_2(x^2 - 4x - 1) = n .$$

Тогаш

$$x^2 - 4x - (1 + 2^n) = 0 \qquad (1)$$

од каде добиваме $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5 + 2^n}$, односно

$$x = 2 + \sqrt{5 + 2^n} \quad \text{или} \quad x = 2 - \sqrt{5 + 2^n} .$$

Бидејќи $x \in \mathbb{Z}$, постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $5 + 2^n = k^2$. Значи, доволно е да ги определиме сите n за кои $5 + 2^n$ е полн квадрат. Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $n < 0$, тогаш $2^n = k^2 - 5$, односно $1 = 2^{-n}(k^2 - 5)$. Бројот $2^{-n}(k^2 - 5)$ е парен, па според тоа последното равенство не е можно.

б) Ако $n = 0$, тогаш $k^2 = 6$, т.е. $5 + 2^n$ не е полн квадрат. Значи и овој случај не е можен.

в) Ако $n > 0$, тогаш $5 + 2^n$ е непарен, па затоа $k = 2m - 1$ за некој $m \in \mathbb{Z}$. Со алгебарски трансформации добиваме

$$m(m-1) = 2^{n-2} + 1 . \qquad (2)$$

Ако $n = 1$, тогаш $2^{n-2} + 1$ е рационален број и равенството (2) не е можно за ниту еден $m \in \mathbb{Z}$.

Ако $n>2$, тогаш $2^{n-2}+1$ е непарен број а $m(m-1)$ е парен, па равенство меѓу нив не е можно.

Ако $n=2$, тогаш $5+2^2=9=3^2$. Со замена во (2) ја добиваме квадратната равенка

$$x^2-4x+5=0$$

чии решенија се $x=-1$ и $x=5$. Не е тешко да се провери дека за најдените вредности за x, $\log_2(x^2-4x-1)$ е цел број и во двата случаи е еднаков на 2.

648 Б. Реши ја равенката

$$4^{\log_{10} x}-32+x^{\log_{10} 4}=0.$$

Решение. Јасно е дека равенката е определена за $x>0$. За $x>0$, $\log_{10} x$ можеме да го запишеме во облик

$$\log_{10} x=\frac{\log_4 x}{\log_4 10}=(\log_4 x)(\log_{10} 4),$$

од каде добиваме $4^{\log_{10} x}=4^{(\log_4 x)(\log_{10} 4)}=(4^{\log_4 x})^{\log_{10} 4}=x^{\log_{10} 4}$. Сега, равенката можеме да ја запишеме во обликот

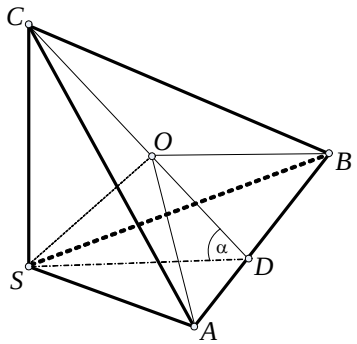
$$4^{\log_{10} x}-32+4^{\log_{10} x}=0,$$

$$2\cdot 4^{\log_{10} x}-32=0,$$

$$4^{\log_{10} x}=4^2,$$

$$\log_{10} x=2.$$

Значи, решение на равенката е $x=100$.



649. Во триаголна пирамида $SABC$ аглите меѓу рабовите при врвот S се прави, а точката O е проекција на врвот S врз рамнината на основата ABC. Докажи дека плоштината на триаголникот ASB е геометриска средина на плоштините на триаголниците ABC и OAB.

Решение. Од условот на задачата $CS\perp AS$, $CS\perp BS$ и $AS\perp BS$ а точката O е подножје на нормалата спуштена од врвот S на рамнината на основата ABC. Нека α е аголот меѓу рамнините на триаголниците SAB и ABC (види цртеж). Триаголниците OAB, SAB и CAB имаат една заедничка страна AB и имаат различни висини спуштени врз таа страна.

При тоа за висините OD, SD и CD имаме, $\overline{OD}=\overline{SD}\cos\alpha$, $\overline{SD}=\overline{CD}\cos\alpha$, од каде што ги добиваме следните равенства $P_{OAB}=P_{SAB}\cos\alpha$ и $P_{SAB}=P_{ABC}\cos\alpha$.

Од првото равенство добиваме $\cos\alpha=\frac{P_{OAB}}{P_{SAB}}$, и ако замениме во второто равенство,

$$P_{SAB}=P_{ABC}\frac{P_{OAB}}{P_{SAB}}$$

односно $P_{SAB}^2=P_{ABC}\cdot P_{OAB}$.

Значи, $P_{SAB}=\sqrt{P_{ABC}\cdot P_{OAB}}$, што и требаше да се докаже.

650 А. Нека a,b,c се страните а α,β,γ соодветните агли во триаголникот ABC со плоштина P. Докажи дека важи равенството

$$a^2(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)+b^2(\sin 2\gamma+\sin 2\alpha)+c^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=12P\ .$$

Решение. Ќе ги прегрупираме собироците на левата страна од равенството во облик

$$(a^2\sin 2\beta+b^2\sin 2\alpha)+(b^2\sin 2\gamma+c^2\sin 2\beta)+(c^2\sin 2\alpha+a^2\sin 2\gamma)\ .$$

Со примена на синусната теорема и формула за синус од двоен агол, ќе трансформираме збировите во заградите. Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, односно од $a\sin\beta=b\sin\alpha$, со замена, првиот збир добива облик

$$\begin{aligned}a^2\sin 2\beta+b^2\sin 2\alpha&=2a^2\sin\beta\cos\beta+2b^2\sin\alpha\cos\alpha=2ab\sin\alpha\cos\beta+2ab\sin\beta\cos\alpha=\\&=2ab(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=2ab\sin(\alpha+\beta)=\\&=2ab\sin(\pi-\gamma)=2ab\sin\gamma=4P\end{aligned}$$

Аналогно, $b^2\sin 2\gamma+c^2\sin 2\beta=4P$ и $c^2\sin 2\alpha+a^2\sin 2\gamma=4P$. Собирајќи ги изразите се добива

$$(a^2\sin 2\beta+b^2\sin 2\alpha)+(b^2\sin 2\gamma+c^2\sin 2\beta)+(c^2\sin 2\alpha+a^2\sin 2\gamma)=12P$$

што требаше да се докаже.

651 Б. Провери ја точноста на равенството

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+2^2\operatorname{tg}2^2\alpha+\ldots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha\ .$$

Решение. Не е тешко да се провери точноста на следното равенство

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha\ . \qquad (1)$$

Навистина

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}=2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=2\operatorname{ctg}2\alpha\ .$$

Равенството (1) може да се трансформира во облик

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha\ . \qquad (2)$$

Сега

$$2\operatorname{tg}2\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha$$

$$2^2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha-2^3\operatorname{ctg}2^3\alpha$$

$$2^3\operatorname{tg}2\alpha=2^3\operatorname{ctg}4\alpha-2^4\operatorname{ctg}2^4\alpha$$

.....

$$2^n\operatorname{tg}2\alpha=2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$$

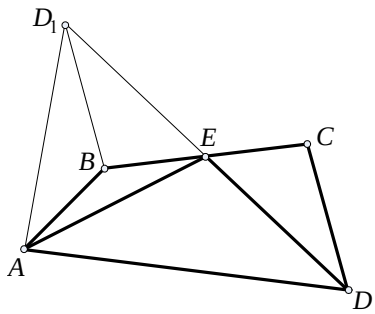
Ако ги собереме претходните равенство (2) го добиваме бараното равенство

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+2^2\operatorname{tg}2^2\alpha+\ldots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha\ .$$

652. Во четириаголникот $ABCD$, E е средина на страната BC, и плоштината на триаголникот AED е двпати помала од плоштината на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека AB е паралелна со CD.

Решение. Нека $ABCD$ е четириаголникот во кој E е средина на BC, при што $P_{ABCD}=2P_{AED}$. Точката D ќе ја пресликаме централно симетрично со центар на симетрија E. Нека D_1 е нејзината слика. Бидејќи $ECD\cong EBC$ имаме $P_{ECD}=P_{EBC}$, од каде добиваме

$$P_{ABCD} = 2(P_{ABE} + P_{ECD}) = 2(P_{ABE} + P_{EBD_1}) . \qquad (1)$$



Од друга страна $P_{AED} = P_{AED_1}$ (имаат иста должина на основа и висината спуштена врз неа). Значи

$$P_{ABCD} = 2P_{AED_1} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$P_{ABE} + P_{EBD_1} = P_{AED_1} .$$

Ако A, B и D_1 не се колинеарни, последното равенство не е точно. Значи A, B и D_1 се колинеарни.

Од колинеарноста на A, B и D_1 и од тоа што $DC \parallel BD_1$, добиваме дека $AB \parallel CD$.

IV година

653. Аритметичката прогресија се состои од цели броеви. Збирот на првите n членови на прогресијата е степен на бројот 2. Докажи дека и n е степен на бројот 2.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија е a, n-тиот член е b а разликата е d. Нека S е збирот на првите n членови на прогресијата. Тогаш

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + ... + (a+(n-1)d) = na + d(1+2+...+n-1) = na + \frac{(n-1)n}{2}d =$$
$$= \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a+b).$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$2S = (a+b)n . \qquad (1)$$

Бидејќи S е степен на бројот 2, постои $k \in \mathbb{N}$ така што $S = 2^k$. Од равенството (1) добиваме

$$2^{k+1} = (a+b)n .$$

Значи, каноничната репрезентација на $(a+b)n$ е еднаква на 2^{k+1}, па затоа $a+b$ и n немаат делители различни од 2. Според тоа, постојат броеви p и q такви што

$$a + b = 2^p ,$$
$$n = 2^q ,$$

при што $p + q = k + 1$.

654. Провери ја точноста на равенството:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},$$

каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Равенството ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

Ќе воведеме ознака $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$. Јасно е дека

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}.$$

Тврдењето е точно за $n = 1$. Навистина

$$x_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k}=(-1)^{1+1}\binom{1}{1}=1\ .$$

Нека тврдењето е точно за $n-1$, т.е. нека е точно равенството

$$x_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}\ .$$

Од равенството $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, за $k=1,2,...,n-1$, за природниот број n, заради индуктивната претпоставка имаме

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}=x_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}=$$

$$=x_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k}=x_{n-1}+\frac{1}{n}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k}+1\right)=x_{n-1}+\frac{1}{n}[1-(1-1)^n]=x_{n-1}+\frac{1}{n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

(да забележиме дека збирот $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{n}\binom{n}{k}$ според биномната формула е еднаков на нула, односно

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{n}\binom{n}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\frac{1}{n}(1+(-1))^n=\frac{1}{n}(1-1)^n=\frac{1}{n}0^n=0\ ).$$

Сега, според принципот на математичка индукција добиваме дека равенството

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

е точно за секој природен број n.

655 А. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n$ ... , дефинирана со: $a_1=2$ и

$$a_{n+1}=1+a_1a_2...a_n$$

за секој природен број, $n\geq 2$. Да се пресмета $S_{2009}+P_{2009}$, каде

$$S_k=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ \text{ и }\ P_k=\frac{1}{a_1a_2...a_n},$$

за секој $k\geq 1$.

Решение. Нека $t_n=S_n+P_n$ тогаш

$$t_1=S_1+P_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\ t_2=S_2+P_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1\ .$$

Со Математичка индукција ќе покажеме дека $t_n=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Да забележиме дека

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{a_{n+1}}\ \text{ и }\ P_{n+1}=\frac{P_n}{a_{n+1}}\ .$$

За $n=1$, јасно, тврдењето важи.

Нека за $n=k$ тврдењето важи т.е. $t_k=1$.

За $n=k+1$ имаме

$$t_{k+1}=S_{k+1}+P_{k+1}=S_k+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}=S_k+P_k+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}-P_k=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}(1-a_{k+1})=$$
$$=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}(-a_1a_2...a_k)=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}\cdot\frac{-1}{P_k}=1+\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+1}}=1$$

Според Принципот на математичка индукција следува дека $t_n=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи $S_{2009}+P_{2009}=1$.

656 Б. За даден број ќе велиме дека е "шарен" ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Определи го бројот на сите четирицифрени "шарени" броеви запишани со различни цифри?

Решение. Имаме 5 парни цифри , $\{0,2,4,6,8\}$ и 5 непарни цифри, $\{1,3,5,7,9\}$. Два парни броја од 5 можеме да избереме на $C_5^2=10$ начини, т.е. ги имаме следниве можности $\{\{0,2\},\{0,4\},\{0,6\},\{0,8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}\}$. На исто толку начини може да се изберат два од 5-те непарни цифри.

За секои два пара (еден пар парни и еден пар непарни броеви) постојат вкупно $4!=24$ начини за формирање на низа од четири цифри. Па вкупно имаме $10\cdot10\cdot24=2400$ четирицифрени низи, кои се состојат од две парни и две непарни цифри.

Останува да ги преброиме оние каде на прво место се наоѓа 0. Ако во некој пар составен од парни броеви се наоѓа 0 тогаш бројот на четирицифрени броеви кои започнуваат со 0 е $3!=6$. Бидејќи имаме четири парни пара, во кои се наоѓа 0, следува дека бројот на сите "шарени" четирицифрени низи кои започнуваат со 0 е $4\cdot10\cdot6=240$.

Па според ова бројот на сите четирицифрени "шарени" броеви запишани со различни цифри е $2400-240=2160$.

657 А. Секоја точка од рамнината е обоена во една од две бои, сина или црвена. Да се докаже дека во таа рамнина постои рамностран триаголник чии темиња се обоени во една иста боја.

Решение. Прво ќе докажеме дека постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја. Имено, во дадената рамнина конструираме рамностран триаголник, тогаш според Принципот на Дирихле меѓу трите темиња постојат две кои се обоени во иста боја, според ова во дадената рамнина постои отсечка чии крајни точки се обоени во иста боја.

Понатаму ќе покажеме дека постои отсечка чии крајни точки и средишна точка се обоени во иста боја.

Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени на пример во сина боја (таква отсечка постои според претходното). Нека D и E (од различни страни на A и B) се точки такви што $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{BE}$. Тогаш ако некоја од точките D и E е обоена во сина боја , задачата е решена. Затоа нека точките D и E се обоени во црвена боја. Средишната точка F на AB е средишна и на отсечката DE, и јасно F е обоена или во сина или во црвена боја. Со ова тврдењето е докажано.

Сега да разгледаме три сини точки A, B, C такви што B е средина на AC, (такви постојат според претходното). Нека D, E и F се трети темиња на рамностраните триаголници конструирани над AC, AB, BC , соодветно од иста страна на правата AC.

Тогаш ако барем една од E, F и D е сина, задачата е решена.

Ако пак сите три точки E, F и D се црвени тогаш бараниот триаголник е EFD (тој е рамностран и сите негови темиња се обоени црвено).

658 Б. Дадена е функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$. Докажи дека f е периодична функција.

Решение. Од даденото равенство што го исполнува функцијата f имаме :

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

односно

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Понатаму,

$$f(x+4)=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=f(x)-\sqrt{2}(f(x-1)+f(x+1))=f(x)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}f(x)$$
$$=f(x)-2f(x)=-f(x).$$

Од ова пак следува дека,

$$f(x+8)=-f(x+4)=-(-f(x))=f(x).$$

Значи, функцијата f е периодична со период 8.

XXXIV регионален натпревар - 2010 година

I година

659. За природните броеви a,b,c,d се исполнети равенствата

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ab+1}{cd+1}.$$

Докажи дека $a=c$ и $b=d$.

Решение. Бидејќи $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, постои рационален број α таков што

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ab+1}{cd+1}=\alpha.$$

Тогаш $a=\alpha c$, $b=\alpha d$ и $ab+1=\alpha(cd+1)$. Ако во последните равенства замениме $a=\alpha c$ и $b=\alpha d$, добиваме

$$\alpha^2cd-\alpha cd-\alpha+1=0$$
$$\alpha cd(\alpha-1)-(\alpha-1)=0$$
$$(\alpha-1)(\alpha cd-1)=0.$$

Притоа можни се два случаи

а) $\alpha-1=0$, т.е. $\alpha=1$. Тогаш $a=c$, $b=d$ (според равенствата $a=\alpha c$, $b=\alpha d$).

б) Ако $\alpha-1\neq 0$, а $\alpha cd-1=0$ имаме

$$(\alpha c)d-1=0$$
$$ad=1 \text{ (бидејќи } \alpha c=a\text{)}$$

Бидејќи $a,d\in\mathbb{N}$, последното равенство е можно ако и само ако $a=d=1$. Но тогаш $\frac{1}{c}=\frac{d}{1}$, односно $bc=1$. Повторно, бидејќи $b,c\in\mathbb{N}$, добиваме $b=c=1$.

Значи, и во овој случај $a=b=c=d=1$.

660. Докажи дека за секој природен број $n\in N$ равенството

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

е точно.

Решение. Ако тргнеме од левата страна на равенството, со помош на елементарни алгебарски трансформации, добиваме:

$$\begin{aligned}L&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n}\right)=\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)=\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=D\end{aligned}$$

Од произволноста на природниот број n ја добиваме точноста на тврдењето од задачата.

661Б. Најди го најголемиот делител на 1001001001 кој што е помал од 10000.

Решение. Да забележеме дека:

$$\begin{aligned}1001001001&=1001\cdot10^6+1001=1001\cdot\left(10^6+1\right)=1001\cdot\left(10^2+1\right)\cdot\left(10^4-10^2+1\right)=\\&=1001\cdot101\cdot9901=7\cdot11\cdot13\cdot101\cdot9901\end{aligned}$$

Бројот 9901 е прост. Лесно се проверува дека тој е најглемиот делител на 1001001001 помал од 10000.

662А. Најди ги сите прирдни броеви n за кои броевите

$$3n-4, 4n-5, 5n-3$$

се прости.

Решение. Да забележиме $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ е парен. Па затоа мора барем еден од броевите $3n-4, 4n-5, 5n-3$ да е парен. Па бидејќи единствен прост парен број е 2, мора барем еден од нив да е 2. Јасно $4n-5$ не може. Па мора да е $3n-4$ или $5n-3$. Ако $3n-4=2$ тогаш $n=2$, па броевите би биле 2, 3 и 7 што се прости броеви. Ако $5n-3=2$ тогаш $n=1$ и тогаш бревите би биле -1, -1 и 2. Но тие не се сите прости. Па само за $n=2$ броевите $3n-4,\ 4n-5,\ 5n-3$ се прости.

663. Дадени се 80 топчиња, наизглед сите еднакви (по форма, боја и големина) и познато е дека 79 од нив се со иста тежина, а едно е полесно. Располагаме со вага со два таса (без тегови). Како може со четири мерења на вагата да откриеме кое е полесното топче?

Решение. Ги делиме топчињата на три групи: групираме на два пати по 27 топчиња, а преостанатите 26 топчиња формираат трета група. Ги споредуваме на вагата двете групи со по 27 топчиња. Со тоа сме потрошиле едно мерење, и како резултат сме добиле: или вагата не е во рамнотежа, па знаеме меѓу кои 27 топчиња е полесното топче; или пак вагата е во рамнотежа па знаеме дека полесното топче е во групата од 26 топчиња. Во вториов случај кон тие 26 додаваме произволно топче од првите две групи. Така со едно мерење на вагата успеваме да дојдеме до група од 27 топчиња меѓу кои е и полесното. Оваа група ја делиме на три подгрупи со по 9 топчиња, секоја, и споредуваме на вагата две од тие три подгрупи. Така после две мерења успеваме да дојдеме до група од 9 топчиња меѓу кои е и полесното. Оваа група ја делиме на 3 подгрупи со по 3

топчиња, секоја, и споредуваме на вагата две од тие три подгрупи. Така после три мерења успеваме да дојдеме до група од 3 топчиња меѓу кои е и полесното. Во четвртото мерење споредуваме две од тие 3 топчиња: доколку вагата не е во рамнотежа полесното топче е на тасот кој не натежнал, а доколку вагата е во рамнотежа полесното топче е преостанатото трето топче.

II година

664. За позитивните рационални броеви a, b и c е исполнето равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во облик

$$ac+bc=ab,$$

односно

$$ab-ac-bc=0.$$

Тогаш

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac-bc)=(a+b-c)^2.$$

Сега

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b-c)^2}=|a+b-c|,$$

Бидејќи $a,b,c\in\mathbb{Q}^+$, добиваме $|a+b-c|\in\mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in\mathbb{Q}^+$.

665 А. Нека е даден комплексниот број u. Да се определат сите комплексни броеви z, такви што бројот $a=\frac{u-\overline{u}z}{1-z}$ да е реален број.

Решение 1. Бројот a е реален ако и само ако $a=\overline{a}$. Во задачата $\frac{u-\overline{u}z}{1-z}=\overline{\left(\frac{u-\overline{u}z}{1-z}\right)}$, од каде се добива $\frac{u-\overline{u}z}{1-z}=\frac{\overline{u}-u\overline{z}}{1-\overline{z}}$, па по средување на добиеното равенство следи дека: $\left(\overline{u}-u\right)\left(1-z\overline{z}\right)=0,\ z\neq 1$. Од последната релација заклучуваме дека ако $u=\overline{u}$, т.е. ако u е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z\neq 1$. Ако u не е реален број, тогаш $1-z\overline{z}=0\Leftrightarrow 1-|z|^2=0\Leftrightarrow |z|=1$, т.е решение е секој комплексен број чиј модул е еднаков на 1 ($z\neq 1$).

Решение 2. Нека $u=a+ib, z=x+iy$. Тогаш

$$a=\frac{u-\overline{u}z}{1-z}=\frac{a+ib-\left(a-ib\right)\left(x+iy\right)}{1-x-iy}=\frac{a-ax-by+i\left(b-ay+bx\right)}{1-x-iy},$$

па по рационализација со конјугираниот комплексен број на именителот на оваа дропка и средување на равенствата се добива $b\left(1-x^2-y^2\right)=0$, од каде: $b=0$ или $x^2+y^2=1$, (|z|=1). Ако b=0, т.е ако u е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z\neq 1$, а ако u не е реален број, тогаш решение е секој комплексен број чиј модул е еднаков на 1 ($z\neq 1$).

666 Б. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{y} \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$$

Решение. Дефиниционата област на системот е множеството од сите парови (x,y) за кои што важи $x \geq y \geq 0$. Првата равенка ја квадрираме и го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} x+y-2\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}+x-y=y \\ x^2-y^2=9 \end{cases}, \quad \text{односно} \quad \begin{cases} 2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}=y \\ x^2-y^2=9 \end{cases}.$$

Со замена на втората равенка во првата добиваме $\begin{cases} 2x-2\cdot 3=y \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$. Оттука имаме

$$\begin{cases} 2x-2\cdot 3=y \\ x^2-(2x-6)^2=9 \end{cases}, \quad \text{односно} \quad \begin{cases} 2x-2\cdot 3=y \\ x^2-8x+15=0 \end{cases}.$$

Решенијата на квадратната равенка се $x_1=5$ и $x_2=3$. Тогаш, $y_1=4$ и $y_2=0$. Решенија на системот се $(5,4)$ и $(3,0)$, бидејќи се точки од дефиниционата област.

667. Периметарот на еден правоаголен триаголник е $2p$ ($p>0$), а неговата висина спуштена кон хипотенузата има должина h. Определи ги неговите страни.

Решение. Од условот на задачата имаме $a+b+c=2p$, каде a и b се должините на катетите, а c е должина на хипотенузата. Според тоа

$$a+b=2p-c \tag{1}$$

$$(a+b)^2=(2p-c)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=(2p-c)^2$$

$$c^2+2ab=(2p-c)^2$$

$$ab=2p^2-2pc. \tag{2}$$

Бидејќи $ab=ch$, ако замениме во (2) добиваме $ch+2pc=2p^2$ односно

$$c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

Ако добиеното c го замениме во (1) и (2) добиваме.

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{2p(h+p)}{h+2p} \\ a\cdot b=\dfrac{2p^2h}{h+2p} \end{cases}$$

Според тоа, a и b се корени на квадратната равенка

$$x^2-\frac{2p(h+p)}{h+2p}x+\frac{2p^2h}{h+2p}=0.$$

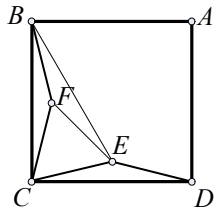
Значи,

$$a=\frac{p}{h+2p}\left(h+p+\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\right), \quad b=\frac{p}{h+2p}\left(h+p-\sqrt{(p-h)^2-2h^2}\right), \quad c=\frac{2p^2}{h+2p}.$$

668 Б. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ се дадени точки E и F така што триаголникот CDE е рамнокрак со агол 150° кај темето E и триаголникот BCF е рамнокрак со агол 150° кај темето F.

а) Докажи дека триаголникот CEF е рамностран.

б) Колкав е аголот ABE?



Решение. а) Триаголниците BCF и CDE се складни (еднакви агли и страна) и затоа $\overline{CF}=\overline{CE}$. Имаме

$$\measuredangle FCE = 90^\circ - \measuredangle BCF - \measuredangle DCE = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ .$$

Значи, триаголникот CEF е рамнокрак со агол 60° и затоа е рамностран.

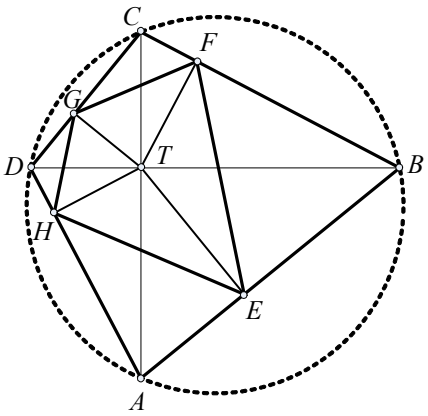
б) Бидејќи триаголникот CEF е рамностран, следува $\overline{FE}=\overline{FC}$. Но, $\overline{FC}=\overline{FB}$ па $\overline{FE}=\overline{FB}$. Значи, триаголникот BFE е рамнокрак.

Уште, $\measuredangle BFE = 360^\circ - \measuredangle BFC - \measuredangle CFE = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$ и затоа триаголникот EBF е складен со BCF. Оттука $\measuredangle EBF = \measuredangle CBF = 15^\circ$, односно $\measuredangle CBE = 30^\circ$ и затоа

$$\measuredangle ABE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ .$$

669 А. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Од пресекот на дијагоналите T се спуштени нормали кон страните на четириаголникот и тие ги сечат страните AB, BC, CD, DA во точките E, F, G, H соодветно.

Докажи дека четириаголникот $EFGH$ е тетивен.



Решение. Од тетивниот четириаголник $GCFT$ следува $\measuredangle TGF = \measuredangle TCF$, а од тетивниот четириаголник $ABCD$ имаме $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$. Па следува дека $\measuredangle TGF = \measuredangle ADB$.

Од тетивниот четириаголник $HTGD$ следува $\angle HDT = \angle HGT$. Па имаме дека

$$\measuredangle TGF = \measuredangle ADB = \measuredangle HGT .$$

Аналогно се покажува дека

$$\measuredangle HET = \measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \measuredangle TEF .$$

Следува дека

$$\angle HGF + \angle HEF = 2\cdot\angle HGT + 2\cdot\angle HET = \\ = 2\cdot\angle ADB + 2\cdot\angle DAC = 180^\circ$$

каде што последното равенство важи од тоа што дијагоналите на $ABCD$ се заемно нормални.

III година

670 А. Реши ја неравенката $\left|x+1\right|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}} < 1$.

Решение. Прво да ја определиме дефиниционата област. Со оглед на својствата на експоненцијалната функција, потребно е $|x+1|>0, |x+1|\neq 1$, од каде $x\neq -1$ и дефиниционата област е $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Имајќи предвид дека зависно од основата, експоненцијалната функција може да биде и растечка и опаѓачка, ќе разгледаме два случаи:

Случај 1. Нека $0<|x+1|<1$, неравенка чие решение е

$$-1<x<1 \Leftrightarrow x\in(-2,-1)\cup(-1,0).$$

Тогаш функцијата е опаѓачка и од $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1=|x+1|^0$, добиваме дека $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}>0$. По разложувањето на квадратниот трином имаме неравенка $(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. Конечно, по наоѓање на пресек на интервалите, за решението имаме $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$.

Случај 2. Нека $|x+1|>1$, односно $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. На овој интервал, функцијата е растечка, па од $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1=|x+1|^0$, следува дека

$$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}<0 \Leftrightarrow x\in\left(1,\frac{3}{2}\right).$$

Множеството решенија е унија од решенијата добиени во двата разгледани случаи $M=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

671 Б. Реши ја равенката $\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2(3^{x-1}+1)+2$.

Решение. Прво да ја определиме дефиниционата област. Со оглед на својствата на експоненцијалната функција, $9^{x-1}>0, 3^{x-1}>0$ на целото множество реални броеви, па $D=\mathbb{R}$. Користејќи својства на логаритамските функции, од $2=\log_2 4$ и $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$, равенката добива облик

$$\log_2(9^{x-1}+7)=\log_2(3^{x-1}+1)+\log_2 4 \Leftrightarrow \log_2(9^{x-1}+7)=\log_2 4(3^{x-1}+1).$$

Тогаш

$$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)\Leftrightarrow, 9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)\Leftrightarrow\ 3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+7-4=0\Leftrightarrow 3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+3=0,$$

а со воведувањето на смената $3^{x-1}=t$, равенката ја доведуваме до квадратна равенка $t^2-4t+3=0$, со решенија $t_1=1, t_2=3$. Враќајќи во смената $3^{x-1}=1=3^0$ и $3^{x-1}=3=3^1$, добиваме линеарни равенки $x-1=0$, односно $x-1=1$. Конечно, решенијата по променливата x, се $x\in\{1,2\}$.

672. Во конус е впишана топка, при што плоштината на топката и плоштината на основата на конусот се еднакви. Пресметај го косинусот од аголот на оскиниот пресек на конусот во темето што е и врв на конусот.

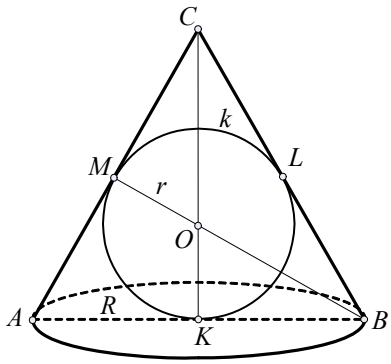
Решение. Еден оскин пресек на конусот и впишаната топка е рамнокрак триаголник ABC, со должина на основата еднаква на $2R$ каде R е радиус на основата на конусот, во кој е впишана кружница k со радиус r. При тоа r е радиусот на впишаната топка. Нека центар на k е точката O, а допирните точки со страните AB, BC и CA се точките K, L и M соодветно (види цртеж).

Од равенството $4r^2\pi=R^2\pi$ добиваме $R=2r$.

Триаголниците AKC и OMC се слични. Ако воведеме стандардни ознаки $\overline{AK}=R$, $\overline{OK}=\overline{OM}=r$, $\overline{CK}=H$ и $\overline{AC}=s$ добиваме:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}},$$

$$\frac{r}{H-r}=\frac{R}{s}=\frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}=\frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}.$$



Од равенството $\frac{r}{H-r}=\frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}$ добиваме $H=\frac{8}{3}r$, па според тоа

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{\frac{8}{3}r-r}=\frac{3}{5}.$$

Сега, користејќи го идентитетот $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ не е тешко да се пресмета дека

$$\cos\alpha=\frac{7}{25}.$$

673. Дали постои триаголник, таков што за неговите агли α,β и γ е точно равенството

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma.$$

Решение. Нека постои триаголник со агли α,β и γ за кои е исполнето даденото равенство. За било кое θ, $\theta\neq k\pi$ е исполнето равенството $\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{\mathrm{ctg}\theta}$. Користејќи го идентитетот $\mathrm{ctg}2\theta=\frac{\mathrm{ctg}^2\theta-1}{\mathrm{ctg}\theta}$ и равенството $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, имаме

$$\mathrm{ctg}\alpha-\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}+\mathrm{ctg}\beta-\frac{1}{\mathrm{ctg}\beta}+\mathrm{ctg}\gamma-\frac{1}{\mathrm{ctg}\gamma}=0,$$

$$\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{\mathrm{ctg}\alpha}+\frac{\mathrm{ctg}^2\beta-1}{\mathrm{ctg}\beta}+\frac{\mathrm{ctg}^2\gamma-1}{\mathrm{ctg}\gamma}=0,$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha+\mathrm{ctg}2\beta+\mathrm{ctg}2\gamma=0,$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha+\mathrm{ctg}2\beta+\mathrm{ctg}[2\pi-(2\alpha+2\beta)]=0. \qquad (1)$$

Во идентитетите

$$\mathrm{ctg}[2\pi-(2\alpha+2\beta)]=\mathrm{ctg}(2\alpha+2\beta),$$

$$\mathrm{ctg}(2\alpha+2\beta)=\frac{\mathrm{ctg}2\alpha\ \mathrm{ctg}2\beta-1}{\mathrm{ctg}2\alpha\ \mathrm{ctg}2\beta},$$

ако воведеме ознаки $\mathrm{ctg}\,2\alpha=x$ и $\mathrm{ctg}\,2\beta=y$, и замениме во (1) добиваме

$$x+y+\frac{xy-1}{x+y}=0.$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+1=0.$$

Не постојат реални броеви за кои ова равенство е исполнето. Бидејќи последното равенство според воведените ознаки за x и y е еквивалентно со почетното равенство, добиваме дека не постои таков триаголник.

674. Даден е квадратниот трином

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

при што $c < 0$ и $a + b + c > 0$.

Докажи дека f има реални корени.

Решение. Нека $f(x) = ax^2 + bx + c$ нема реални корени. Тогаш дискриминантата $D = b^2 - 4ac < 0$.

Значи, $4ac > b^2$ и бидејќи $c < 0$ добиваме $a < \frac{b^2}{4c}$.

Оттука имаме

$$a + b + c < \frac{b^2}{4c} + b + c = \frac{b^2 + 4bc + 4c^2}{4c} = \frac{(b+2c)^2}{4c} < 0,$$

што е во контрадикција со почетниот услов.

IV година

675. Нека p и q се природни броеви и $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија за која a_p е еднаков на q, а a_q е еднаков на p.

Пресметај ја врдноста на a_n.

Решение. Разликата на прогресијата ќе ја означиме со d. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} a_1 + d(p-1) = q \\ a_1 + d(q-1) = p \end{cases}$$

Според тоа,

$$d(p-1) - d(q-1) = q - p,$$

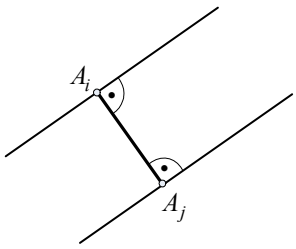
$$d(p-q) = q - p,$$

односно $d = -1$. Сега, $a_1 = p + q - 1$, од каде добиваме

$$a_n = p + q + d(n-1) = p + q - (n-1).$$

676 А. Дадени се 2010 точки во рамнина така што секои три од нив формираат тапоаголен триаголник.

Докажи дека може да се додаде уште една точка така што повторно секои три од добиените 2011 точки формираат тапоаголен триаголник.



Решение. Од тие точки можеме да формираме $\binom{2010}{2}$ ленти (види цртеж).

За дадени две точки од дадените повлекуваме две прави кои минуваат низ крајните точки на отсечката формирана со нив, и се нормални на таа отсечка. Бидејќи бројот на точки е конечен, тие ленти не ја покриваат целата рамнина. Ако избереме точка надвор од унијата на $\binom{2010}{2}$-те ленти, таа ќе ги задоволува наведените услови.

677 Б. Нека q е реален број различен од 1. Ако

$$A_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,$$

$$B_n = 1 + \frac{1+q}{2} + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$$

докажи дека важи

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} A_1 + \binom{n+1}{3} A_2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} A_n = 2^n B_n .$$

Решение. Јасно е дека

$$A_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}; \quad B_n = \frac{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1+q}{2}\right) - 1} = \frac{(1+q)^{n+1} - 2^{n+1}}{(q-1)\cdot 2^n} .$$

Понатаму од биномната формула имаме

$$\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} A_1 + \binom{n+1}{3} A_2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} A_n =$$

$$= \frac{1}{q-1}\left[\binom{n+1}{1}(q-1) + \ldots + \binom{n+1}{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{q-1}\left((1+q)^{n+1} - (1+1)^{n+1}\right) = \frac{2^n}{2^n(q-1)}\left((1+q)^{n+1} - 2^{n+1}\right) = 2^n B_n .$$

678. Темињата на еден триаголник се точки со целобројни координати, во декартов координатн систем.

Докажи дека неговите агли се различни од 60°.

Решение. Нека $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се темиња на триаголникот (тие се со целобројни координати). Од формулите за растојание помеѓу две точки добиваме дека квадратите на должините на страните на триаголникот a^2, b^2 и c^2 се цели броеви.

Плоштината на триаголникот е еднаква на

$$P = \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\,|,$$

и јасно е дека P е рационален број.

Нека претпоставиме дека барем еден агол на триаголникот има 60°, односно нека $\gamma = 60^\circ$. Според косинусна теорема

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - ab ,.$$

од каде добиваме $ab = a^2 + b^2 - c^2 \in \mathbb{Z}$.

Од друга страна, плоштината на триаголникот е еднаква на

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}ab ,$$

од каде добиваме $\sqrt{3} = \frac{4P}{ab} \in \mathbb{Q}$. Последното равенство не е точно, па според тоа триаголникот не може да има агол од 60°.

679. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Одреди ги сите точки M во рамнината за кои е исполнето

$$\overline{MA}^2-\overline{MB}^2-\overline{MC}^2+\overline{MD}^2=2c \ \ (c \text{ е позитивен број}).$$

Докажи дека растојанието од тие точки до правата на која што лежи страната BC е константно. Одреди го тоа растојание.

Решение. Координатниот систем ќе го поставиме како на цртежот, т.е.

$$A\left(0,-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right),\ C\left(0,\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2},0\right).$$

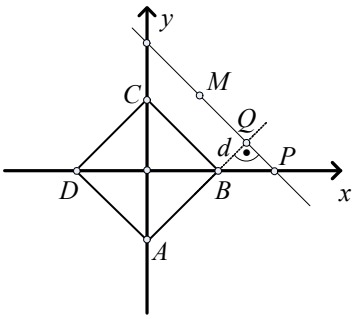
Ако $M(x,y)$, дадениот услов може да се запише во обликот

$$x^2+\left(y+\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-y^2-x^2-\left(y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+y^2=2c\ , \qquad (*)$$

кој што после поедноставувањето се сведува на

$$x+y=\frac{c}{a\sqrt{2}}\ . \qquad (**)$$

Значи множеството точки кои што го задоволуваат условот на задачата е правата зададена со равенката $x+y=\frac{c}{a\sqrt{2}}$. Тоа е права паралелна со правата на која што лежи страната BC на квадратот.



Растојанието од произволна точка M до правата на која што лежи страната BC е всушност растојание помеѓу две паралелни прави, кое што е константно.

Растојанието d меѓу правите може да се одреди од рамнокракиот правоаголен триаголник BPQ (со $P\left(\frac{c}{a\sqrt{2}},0\right)$).

Значи, $2d^2=\overline{BP}^2 \Rightarrow d=\frac{\overline{BP}}{\sqrt{2}}=\left|\frac{c}{2a}-\frac{a}{2}\right|$.

XXXIV регионален натпревар - 2011 година

I година

680 А. Димитар на некој начин цифрите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ги распоредил на кружница. Секои три последователни цифри, во насока на стрелките на часовникот, формираат трицифрен број. Сите такви броеви тој ги собрал. Кој збир го добил Димитар?

Решение. Секоја запишана цифра ќе се појави во три различни броја, еднаш како цифра на стотки, еднаш како цифра на десетки и еднаш како цифра на единици.Според тоа, цифрата n во вкупниот збир ќе учествува со

$$(1+10+100)n=111n\ .$$

Бидејќи вкупно има 9 такви броја, добиваме дека вкупниот збир ќе биде

$$111(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=111\frac{9\cdot 10}{2}=111\cdot 45=4995\ .$$

681 Б. Најди ги сите трицифрени броеви A, за кои аритметичката средина на броевите добиени со пермутација на цифрите на бројот A, е еднаква на бројот A.

Решение. Нека $A=\overline{abc}$ е дадениот број кој ги исполнува условите од задачата. Броеви добиени со пермутација на цифрите на бројот A се $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Тогаш

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\overline{abc}$$

од каде што добиваме

$$222(a+b+c)=6(100a+10b+c),$$

или $7a=3b+4c$. Последната равенка може да се решава во множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, заменувајќи последователно $a=1$, $a=2$,..., $a=9$ и решавајќи ги добиените равенки.

Постапката може да се скрати ако равенката $7a=3b+4c$ ја запишеме во обликот $7(a-b)=4(c-b)$. Тогаш според признаците за деливост имаме $a=b=c$ или $\begin{cases}a-b=4\\c-b=7\end{cases}$ или $\begin{cases}b-a=4\\b-c=7\end{cases}$. Во првиот систем $\begin{cases}a-b=4\\c-b=7\end{cases}$, исполнето е неравенството $0\le b\le 2$, а во вториот систем исполнето е неравенството $7\le b\le 9$.

Сите решенија на задачата се

$$111,\ 222,\ 333,\ 444,\ 555,\ 666,\ 777,\ 888,\ 999,\ 407,\ 518,\ 629,\ 370,\ 481,\ 592.$$

682. Во 20 часот биле запалени две еднакво долги свеќи. По извесно време свеќите биле изгаснати и притоа е констатирано дека остатокот од првата свеќа е 4 пати поголем од остатокот на втората свеќа. Пресметај во колку часот се изгаснати свеќите, ако се знае дека првата свеќа изгорува за 5 часа, а втората за 4 часа.

Решение. Нека со a ја означиме должината на свеќите.. Тогаш, за x часови од првата свеќа ќе изгори $\frac{a}{5}x$, а од втората $\frac{a}{4}x$. Значи останало од првата свеќа $a-\frac{a}{5}x$, а од втората $a-\frac{a}{4}x$. Според условот на задачата следува дека остатокот од првата свеќа е 4 пати поголем од остатокот на втората свеќа, имаме:

$$a-\frac{a}{5}x=4\left(a-\frac{a}{4}x\right).$$

По решавањето на равенката се гледа дека должината на свеќата не влијае на решението. Се добива $x=3h\,45\min$, што значи дека свеќите се изгаснати во 23 часот и 45 минути.

683. Пред секој од броевите $1,2,\ldots,2011$, изберете еден од знаците + или -, така што изразот $A=\left|\pm1\pm2\pm\ldots\pm2011\right|$ да има најмала вредност.

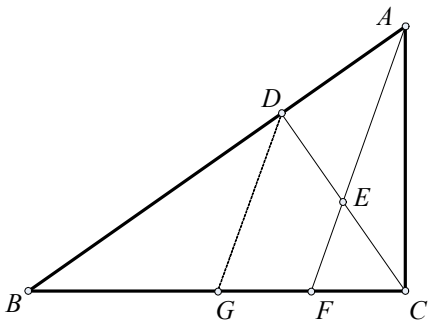
Решение. Јасно е дека $A\ge 0$. Ако најдеме избор на знаци за кој $A=0$, тогаш за таквиот избор A има најмала вредност . Пред првите три броеви ги избираме знаците -, - и +, а пред останатите 2008 броја (2008 е делив со 4), ги избираме наизменично знаците +, - , - , + . Се добива:

$$A=\left|-1-2+3+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\ldots+(2008-2009-2010+2011)\right|=0.$$

684 А. Во правоаголниот триаголник ABC, точката D е подножје на висината спуштена од темето C врз хипотенузата AB, точката E е средина на висината CD, а точката $\{F\} = AE \cap BC$. Ако $\overline{AD} = 4$ и $\overline{BD} = 9$.

Пресметај ја должината на отсечката AF.

Решение. Од равенството $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ кое важи за правоаголниот триаголник ABC добиваме дека $\overline{CD} = 6$, а бидејќи точката E е средина на висината CD, имаме $\overline{DE} = 3$. Од правоаголниот триаголник AED имаме $\overline{AE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Нека G е точка на страната BC, таква што $DG \parallel AF$. Бидејќи EF е средна линија на триаголникот CDG, ако означиме $\overline{EF} = x$, тогаш $\overline{DG} = 2x$.



Од сличноста на триаголниците AFB и DGB следува дека

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}, \text{ т.е. } \frac{5+x}{2x} = \frac{13}{9} \Rightarrow x = \frac{45}{17}.$$

Значи

$$\overline{AF} = \frac{130}{17}.$$

685 Б. Нека a, b, c се должините на страните, s е полупериметарот и P е плоштината на триаголникот ABC, при што $a < c$ и $b < c$. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен ако и само ако $(s-a)(s-b) = P$.

Решение 1. Ако триаголникот ABC е правоаголен, тогаш c е хипотенуза. Имаме:

$$(s-a)(s-b) = \frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{c-b+a}{2} = \frac{c^2 - (b-a)^2}{4} = \frac{c^2 - b^2 - a^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2} = P.$$

Обратно, нека за триаголникот ABC важи $(s-a)(s-b) = P$. Тогаш, $\frac{c^2 - b^2 - a^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2}$ и оттука $\frac{c^2 - b^2 - a^2}{4} = 0$, односно $c^2 = a^2 + b^2$, па триаголникот ABC е правоаголен.

Решение 2. Равенството $(s-a)(s-b) = P$ е еквивалентно со $\frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{c-b+a}{2} = \frac{ab}{2}$, односно со $\frac{c^2 - b^2 - a^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2}$. Последното равенство е еквивалентно со $\frac{c^2 - b^2 - a^2}{4} = 0$, односно $c^2 = a^2 + b^2$, што важи ако и само ако триаголникот ABC е правоаголен.

II година

686. Определи ги сите вредности на природниот број n за кои системот

$$\begin{cases} x + y = n^2 \\ 10x + y = n^3 \end{cases}$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме

$9x = n^2(n-1)$.

Бидејќи бараме решенија во множеството природни броеви имаме

$x + y + z = 1$.

Според тоа, можни се два случаи.

Случај 1. $3 \mid n$. Тогаш

$$x = k^2(3k-1)$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{yz+zx+xy}{xyz} + \frac{x+y+z}{xyz} + \frac{1}{xyz} \geq ,$$

каде $n = 3k$, за некој природен број k . Бидејќи y е природен број, можни вредности за k се $\log(1+a^2) - \log a - 2\log 2 = 1 - \log(100+b^2) + \log b$ и 3 . Во тој случај $n = 3,6,9$.

Случај 2. Нека $\log(1+a^2) + \log(100+b^2) = \log a + \log 4 + \log 10 + \log b$ и $9 \mid (n-1)$.

Тогаш постои природен број $\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab$ така што $n = 9m+1$, па

$x = m(9m+1)^2$

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab .$$

односно за ниеден природен број m , y не може да биде природен број.

Значи, единствени вредности за $a,b \in \mathbb{R}^+$ за кои системот има решенија во множеството природни броеви се $3,6,9$.

687. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1 + a + b .$$

Решение. Бидејќи $b = 10$ и b се позитивни реални броеви, следните неравенства се еквивалентни

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1 + a + b ,$$

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 \geq ab(1+a+b) ,$$

$$2a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a^2b - 2ab^2 \geq 0 ,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2a^2b + a^2 + a^2b^2 - 2b^2a + b^2 \geq 0 ,$$

$$(a-b)^2 + a^2(b^2 - 2b + 1) + b^2(a^2 - 2a + 1) \geq 0 ,$$

$$(a-b)^2 + a^2(b-1)^2 + b^2(a-1)^2 \geq 0 .$$

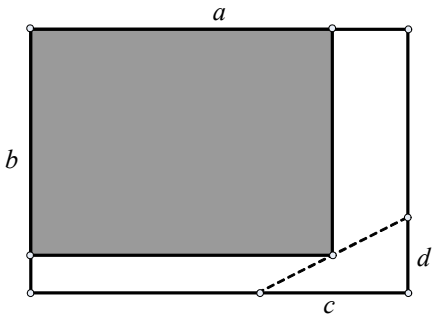
Последното равенство е точно бидејќи секој собирок е ненегативен.

Равенство важи ако и само ако секој собирок во последното равенство е нула. Според тоа $a = b = 1$.

688 А. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC , а $x,y,z \in \mathbb{N}$ се должините на соодветните висини. Ако $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ тогаш триаголникот ABC е рамностран. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека триаголникот ABC не е рамностран, односно нека $a \neq b$.

Од $h_a = b\sin\gamma$ и $h_b = a\sin\gamma$ имаме $a + b\sin\gamma = b + a\sin\gamma$, односно $\begin{cases} 3^x = 27 \\ 1 + 3^{y-x} + 3^{z-x} = 811 \end{cases}$. Тогаш, $1 - \sin\gamma = 0$ и оттука $\gamma = 90^\circ$. Значи, $3^{y-3} + 3^{z-3} = 810$ е хипотенуза и затоа $a \neq c$. Тогаш, $(a-c)(1-\sin\beta) = 0$, односно $\beta = 90^\circ$, а со тоа добиваме контрадикција. Аналогно се разгледуваат и другите случаи ($b \neq c$, $a \neq c$)

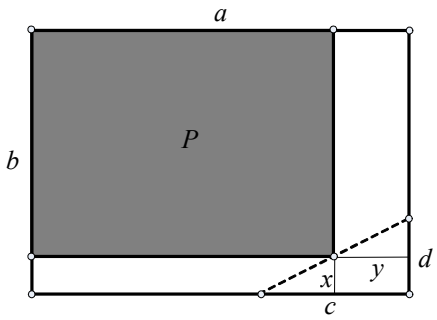


689 Б. Од правоаголна плоча со страни a,b исечено е триаголно ќоше со катети $c = \frac{a}{3}$ и $d = \frac{b}{3}$ (види цртеж). Од преостанатиот дел исечи нова правоаголна плоча со страни паралелни на страните од дадената правоаголна плоча (види цртеж), така што нејзината плоштина P да биде најголема. Колку изнесува таа плоштина?

Решение. Од цртежот, имаме: $P = (b-y)(a-x)$. Бидејќи

$$y : d = (c-x) : c \Rightarrow y = d - \frac{d}{c}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \left(b - d + \frac{d}{c}x\right)(a-x) = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad + cd - bc)^2 - \underbrace{\frac{d}{c}\left[x - \frac{1}{2d}(ad + cd - bc)\right]^2}_{*} .$$



Членот * не може да биде негативен, па според тоа плоштината е најголема ако овој член е најмал, т.е. нула, односно

$$x = \frac{1}{2d}(ad + cd - bc) \quad \Rightarrow$$
$$P = ab - ad + \frac{1}{4cd}(ad + cd - bc)^2 .$$

690А. Нека $x_1 > 0$ и $a,b \in \mathbb{R}$ се корените на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, за чии коефициенти важи $3a = 2(c-b)$. Најди ги корените на равенката.

Решение. Да забележиме дека $a \neq 0$, во спротивно равенката не е квадратна. Користејќи ја формулата за разложување на квадратен трином кога се познати корените на соодветната квадратна равенка, може да запишеме $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Заменувајќи ги условите на задачата добиваме

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - 4x_1) = ax^2 - 5ax_1x + 4ax_1^2 .$$

Споредувајќи ги коефициентите на квадратните триноми имаме $b = -5ax_1$, $c = 4ax_1^2$. Овие вредности ќе ги замениме во условот за коефициентите, па оттука $3a = 2\left(4ax_1^2 + 5ax_1\right)$. Ако равен-

ката се подели со $a \neq 0$ следува дека x_1 е корен на квадратната равенка $8x_1^2 + 10x_1 - 3 = 0$, со решенија $x_{1_1} = \frac{1}{4}$ и $x_{1_2} = -\frac{3}{2}$. Со оглед на тоа што $x_1 > 0$, останува $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1$.

691 Б. Нека a и b се различни цели броеви за кои равенката $(x-a)(x-b) = -1$ има цел корен r. Докажи дека $a + b = 2r$.

Решение. Нека a, b, r се цели броеви и од тоа што $ab > 0$ е корен на дадената равенка важи $(r-a)(r-b) = -1$. Сега, $r-a$, $r-b$ се цели броеви чиј производ е -1. Ова е можно само во случај кога едниот множител е 1, а вториот множител -1. Значи можни се два случаи и тоа: $\begin{cases} r-a=1 \\ r-b=-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} r-a=-1 \\ r-b=1 \end{cases}$. Собирајќи ги равенките во двата системи, се добива $2r - a - b = 0$, односно $a + b = 2r$, што требаше и да се докаже.

III година

692. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Решение. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме имаме

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{yz+zx+xy}{xyz} + \frac{x+y+z}{xyz} + \frac{1}{xyz} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{xyz} + \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{xyz} + \frac{1}{xyz} =$$

$$= 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}} + \frac{1}{xyz} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{3}{x+y+z}\right)^3 = 64$$

693 А. Позитивните реални броеви го исполнуваат равенството

$$\log(1+a^2) - \log a - 2\log 2 = 1 - \log(100+b^2) + \log b.$$

Пресметај го збирот $a + b$.

Решение. Со алгебарски трансформации, од осбините на логаритми добиваме

$$\log(1+a^2) + \log(100+b^2) = \log a + \log 4 + \log 10 + \log b$$

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab$$

Заради тоа што $y = \log x$ е монотона функција, имаме

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab,$$

$$(1+a^2)(100+b^2) = 40ab. \qquad (*)$$

Од тоа што $a,b \in \mathbb{R}^+$, според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$1+a^2 \geq 2a$$
$$100+b^2 \geq 20b$$

и во двата случаи важи равенство ако и само ако $a=1$ и $b=10$. Значи, ако $a \neq 1$ или $b \neq 10$, тогаш

$$(1+a^2)(100+b^2) > 40ab,$$

што е во спротивност со (*).

Сега, $a=1, b=10$ од каде добиваме

$$a+b=1+10=11.$$

694 Б. Определи ги сите решенија на равенката

$$3^x+3^y+3^z=21897,$$

такви што $x,y,z \in \mathbb{N}$ и $x<y<z$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$3^x(1+3^{y-x}+3^{z-x})=27\cdot 811.$$

Бидејќи $(3^x,811)=1$ и $(1+3^{y-x}+3^{z-x},27)=1$, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases} 3^x = 27 \\ 1+3^{y-x}+3^{z-x}=811. \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $x=3$, а втората равенка го добива обликот

$$3^{y-3}+3^{z-3}=810$$
$$3^{y-3}(1+3^{z-y})=3^4\cdot 10.$$

Заради $(3^{y-3},10)=1$ и $(1+3^{y-z},3^4)=1$, добиваме

$$\begin{cases} 3^{y-3} = 3^4 \\ 1+3^{z-y}=10. \end{cases}$$

Од првата равенка $y-3=4$, т.е. $y=7$, а втората равенка го добива обликот $3^{z-7}=3^2$.

Конечно, решение на почетната равенка е $x=3, y=7, z=9$.

695 А. Во множеството реални броеви, реши ја равенката

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a},\ a,b\in\mathbb{R} \text{ и } a,b>0.$$

Решение. Од равенката следува дека $b\cos x+a\neq 0$ и $b\sin x+a\neq 0$, па множејќи ја равенката со $(b\cos x+a)(b\sin x+a)$ ја добиваме равенката $(a\sin x+b)(b\sin x+a)=(a\cos x+b)(b\cos x+a)$ која е еквивалентна на почетната.

Со множење и соодветно групирање, ја добиваме равенката

$$(\sin x-\cos x)\left(a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)\right)=0.$$

Значи $\sin x-\cos x=0$ или $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$.

Од $\sin x-\cos x=0$ добиваме дека $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ се решенија на почетната равенка.

Од $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$ и $ab>0$ добиваме дека $\sin x+\cos x=-\frac{a^2+b^2}{ab}$. Користејќи дека

$a^2+b^2\geq 2ab$ (следува од $(a-b)^2\geq 0$) добиваме $\sin x+\cos x=-\frac{a^2+b^2}{ab}\leq -\frac{2ab}{ab}=-2$. Множејќи го ова неравенство со $\frac{\sqrt{2}}{2}$ добиваме $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-2\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\sqrt{2}$, што не е можно. Значи равенката $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$ нема решение.

Според тоа, сите решенија на почетната равенка се елементите на множеството $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Забелешка. Заклучокот дека равенката $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$ нема решение може да се изведе и на следниов начин:

Јасно е дека $\sin x+\cos x\geq -2$.

Ако $\sin x+\cos x=-2$, заради $\sin x\geq -1$ и $\cos x\geq -1$ добиваме дека $\sin x=-1$ и $\cos x=-1$, па $\sin^2 x+\cos^2 x=2$ што не е можно.

Значи, $\sin x+\cos x>-2$.

Сега имаме $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)>a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$, па равенката $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$ нема решение.

696 Б. Нека a,b,c се страните на еден триаголник. Одреди го аголот спроти страната c, ако важи $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$.

Решение. Од даденото равенство добиваме $(a+b)^2-c^2=3ab$, т.е. $a^2+b^2-c^2=ab$. Од косинусната теорема, за аголот γ, спроти c, важи $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, па $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$. Бидејќи γ е агол во триаголник, важи $0<\gamma<180^\circ$. Следува дека $\gamma=60^\circ$.

697. Даден е триаголникот ΔABC. На страната BC избрани се точки D и E така што $\overline{BD}=\overline{EC}$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle CAE$. Докажи дека ΔABC е рамнокрак.

Решение. Да забележиме дека $P_{\Delta ABD}=P_{\Delta ACE}$ бидејќи имаат еднакви основи и заедничка висина. Од тоа имаме

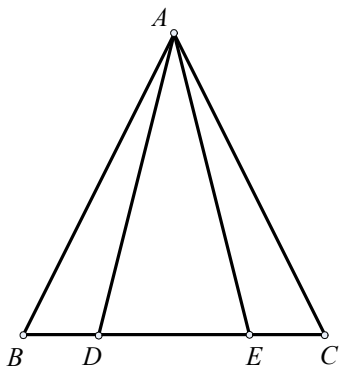
$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin(\measuredangle BAD)}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}\sin(\measuredangle CAE)}{2},$$

односно $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.

Аналогно $P_{\Delta ABE}=P_{\Delta ACD}$, од што се добива

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AE}\sin(\measuredangle BAE)}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin(\measuredangle CAD)}{2},$$

односно $\overline{AB}\cdot\overline{AE}=\overline{AC}\cdot\overline{AD}$.



Ако го помножиме ова равенство со равенството $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$ добиваме $\overline{AB}^2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{AC}^2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AD}$. Од ова се добива $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$, односно $\overline{AB}=\overline{AC}$.

IV година

698 АБ. Докажи дека за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ е исполнето неравенството

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!}+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}<\frac{1}{2}.$$

Решение. За секој природен број k имаме:

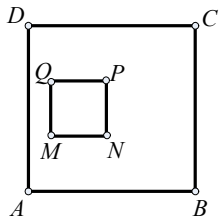
$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k!\left[1+(k+1)+(k+2)(k+1)\right]}=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=$$
$$=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}.$$

Сега,

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!}+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=$$
$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}<\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

699 Б. Докажи дека ако страните на триаголникот образуваат аритметичка прогресија, тогаш радиусот на впишаната кружница е $\frac{1}{3}$ од должината на висината спуштена кон средната по големина страна.

Решение. Нека a, $a+d$, $a+2d$ се страни на триаголникот, h е висина спуштена на страната $a+d$, r е радиусот на впишаната кружница. Плоштината на триаголникот е $P=\frac{(a+d)h}{2}$, а од друга страна $P=s\cdot r=\frac{a+(a+d)+(a+2d)}{2}\cdot r=\frac{3(a+d)r}{2}$. Па, $\frac{(a+d)h}{2}=\frac{3(a+d)r}{2}$, од каде $h=3r$, односно $r=\frac{1}{3}h$.



700 А. Во внатрешноста на квадратот *ABCD* е впишан квадрат *MNPQ* чии што страни се паралелни со страните на квадратот *ABCD* (види цртеж). Докажи дека правите *BQ*, *DN*, *AP* и *CM* минуваат низ иста точка.

Решение. Без губење на општоста, претпоставуваме дека страната на квадратот *ABCD* е со должина 1. Поставуваме координатен систем со координатен почеток во точката *A* и координатни оски *AB* (*x*-оска) и *AD* (*y*-оска). Тогаш: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$. Нека координатите на *M* се (a,b), каде што $0<a,b<1$. Тогаш координатите на другите точки се: $N(a+s,b)$, $P(a+s,b+s)$, $Q(a,b+s)$, каде што s е должината на страната на квадратот *MNPQ* (јасно, $s<1$). Тогаш равенките на правите *BQ*, *DN*, *AP* и *CM* се $y=\frac{b+s}{a-1}x-\frac{b+s}{a-1}$, $y=\frac{b-1}{a+s}x+1$, $y=\frac{b+s}{a+s}x$, $y=\frac{b-1}{a-1}x+\frac{a-b}{a-1}$, соодветно.

Пресечната точка на правите *DN* и *AP* е $S\left(\frac{a+s}{s+1},\frac{b+s}{s+1}\right)$. Со проверка се утврдува дека S лежи и на правите *BQ* и *CM*.

701 А. Дадени се 8 различни природни броеви, сите помали од 16.

Докажи дека меѓу позитивните разлики на секои два од нив, постојат барем 3 меѓусебно еднакви.

Решение. Нека броевите се $a_1, a_2, ..., a_8$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_8 < 16$. Вкупниот број позитивни разлики што ги даваат овие броеви е $\binom{8}{2} = 28$, додека од $1 \le a_i < a_j < 16$ следува дека $1 \le a_j - a_i \le 14$, односно $a_j - a_i$ може да прими најмногу 14 различни вредности **.** Бидејќи 28 разлики примаат вредности од множество со 14 елементи и бидејќи неможе да се случи две разлики да се 14 ($a_j - a_i = 14$ ако и само ако $a_j = 15$, $a_i = 1$), од принципот на Дирихле следува дека најмалку 3 разлики се еднакви меѓусебе.

702 Б. Докажи дека ако $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, се такви што

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \in (0°, 180°),$$

каде n е природен број поголем од 1, тогаш

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n .$$

Решение. Неравенството ќе го покажеме со помош на математичка индукција. Неравенството е точно за $n = 2$. Навистина, имајќи во предвид дека α_1, α_2 припаѓаат во интервалот $(0°, 180°)$, тогаш

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 .$$

Претпоставуваме дека неравенството е точно за $n = k$, односно за $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \in (0°, 180°)$ важи

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_k .$$

За $n = k + 1$ се добива дека

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1}) &= \sin((\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}) = \\ &= \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)\cos\alpha_{k+1} + \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)\sin\alpha_{k+1} < \\ &< \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) + \sin\alpha_{k+1} < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_k + \sin\alpha_{k+1},\end{aligned}$$

од каде согласно принципот на математичка индукција следува точноста на неравенството за секој природен број поголем од 1.

703 АБ. Определи го полиномот $P(x)$ ако тој е од четврти степен, $P(0) = 0$ и $P(x) - P(x-1) = x^3$, за секој реален број x. Користејќи го добиениот резултат пресметај го збирот $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Решение. Ако во функционалната равенка $P(x) - P(x-1) = x^3$ замениме $x = 0$, добиваме $P(0) - P(-1) = 0$ и заради $P(0) = 0$, имаме $P(-1) = 0$. Значи, $x = -1$ е нула на полиномот. Полиномот е од четврти степен, па според тоа $P(x) = x(x+1)(ax^2 + bx + c)$.

Добиваме $x(x+1)(ax^2 + bx + c) - (x-1)x\left[a(x-1)^2 + b(x-1) + c\right] = x^3$

односно

$$x^2(4a - 1) + x(3a - 3b) + 2c + a - b = 0 .$$

Полиномот од левата страна на последното равенство е нулти, ако и само ако

$$\begin{cases} 4a-1=0 \\ 3a-3b=0 \\ 2c+a-b=0 \end{cases}$$

Решение на системот е $c=0, a=b=\frac{1}{4}$. Значи, бараниот полином е $P(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)^2$

Ако во функционалната равенка замениме редоследно $x=1,2,3,\ldots,n,$ тогаш ја добиваме низата равенства

$$P(1)-P(0)=1^3$$
$$P(2)-P(1)=2^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P(n)-P(n-1)=n^3$$

Од тоа што $P(0)=0$, ако ги собереме претходните равенства, добиваме

$$P(n)=1^3+2^3+\cdots+n^3.$$

Сега, јасно е дека

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

XXXV регионален натпревар - 2012 година

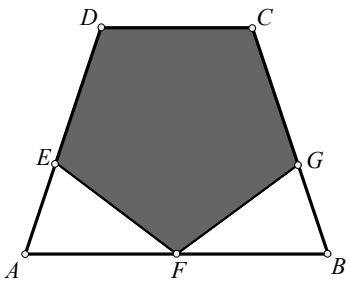
I година

704 АБ. Докажи дека: $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}$.

Решение. Имаме

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=$$
$$=-\frac{1}{x(x-y)(z-x)}-\frac{1}{y(x-y)(y-z)}-\frac{1}{z(y-z)(z-x)}=$$
$$=-\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=-\frac{y^2z-yz^2+xz^2-x^2z+x^2y-xy^2}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=$$
$$=-\frac{-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=-\frac{(x-y)(-zx-zy+z^2+xy)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=$$
$$=-\frac{(x-y)(x(y-z)-z(y-z))}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{1}{xyz}$$

705 АБ. На цртежот е прикажан правилен петаголник $CDEFG$ кој е во внатрешноста на трапезот $ABCD$. Докажи дека $\overline{AB}=2\overline{CD}$.



Решение. Збирот на надворешните агли на правилниот петаголник е 360°. Според тоа, било кој надворешен агол е

$$360^\circ : 5 = 72^\circ,$$

(надворешните агли се еднакви меѓу себе) па според тоа било кој надворешен агол е еднаков на

$$180^\circ - 72^\circ = 108^\circ .$$

Според тоа $\measuredangle EDC = 108^\circ$ и $\measuredangle EAF = 72^\circ$. Бидејќи $\measuredangle AEF = 72^\circ$, добиваме дека ΔAFE е рамнокрак со основа AE. Триаголниците ΔAFE и ΔGFB се складни (имаат исти агли е една иста страна), па според тоа

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{AF} = \overline{FB} .$$

Бидејќи петаголникот е правилен, добиваме дека

$$\overline{AF} = \overline{FB} = \overline{DC}$$

од каде се добива дека

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = \overline{CD} + \overline{CD} = 2\overline{CD} .$$

706 А. Докажи дека $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Решение. Нека $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{99}{100}$ и $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\frac{100}{101}$. Ќе покажеме дека $A < B$. Имено:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \qquad \ldots \qquad , \frac{99}{100} < \frac{100}{101},$$

бидејќи $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, што е еквивалентно со $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$ за секој природен број n. Од друга страна

$$AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\cdot\frac{99}{100} = \frac{1}{101},$$

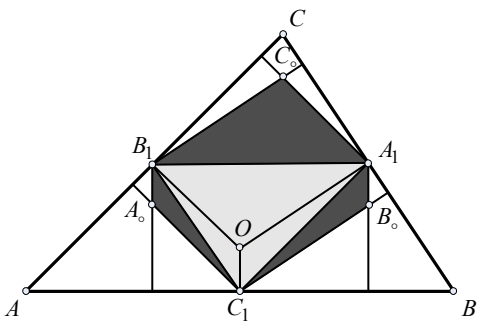
па според тоа

$$A^2 < AB = \frac{1}{101},$$

од каде се добива бараното неравенство

$$A < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10} .$$

707А. Од средините A_1, B_1 и C_1 на страните на триаголникот ABC, се спуштени висини кон секоја од останатите две страни. Докажи дека плоштината шестоаголникот ограничен со тие висини е еднаква на половина од плоштината на триаголникот.



Решение. Бидејќи $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ се средни линии на триаголникот ABC, важи

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}P_{ABC} .$$

Од точките A_1, B_1 и C_1, повлекуваме нормали на страните $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Тие се симетрали на страните и се сечат во центатот на опишаната кружница O. Четириаголникот $A_\circ C_1 O B_1$ е пара-

лелограм. Следува $P_{A_0C_1B_1} = P_{C_1OB_1}$. (види цртеж) Аналогно $P_{C_1B_0A_1} = P_{C_1A_1O}$ и $P_{A_0C_1B_1} = P_{C_0B_1A_1}$. Следува плоштината на шестоаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, што требаше да се покаже.

708 Б. Докажи дека за секој природен број n изразот $n^{19} - n^7$ е делив со 30.

Решение. Да означиме $A = n^{19} - n^7$. Со разложување добиваме

$$A = n^{19} - n^7 = n^7\left(n^{12} - 1\right) = n^7\left(n^6 - 1\right)\left(n^6 + 1\right) =$$
$$= n^7(n-1)(n+1)\left(n^4 + n^2 + 1\right)\left(n^2 + 1\right)\left(n^4 - n^2 + 1\right) =$$
$$= (n-1)n(n+1)\left(n^2 + 1\right) \cdot B, \quad B \in \mathbb{N}.$$

При тоа имаме:

а) Бидејќи n и $n+1$ се последователни природни броеви, еден од нив е парен, па $n^{19} - n^7$ е делив со 2 за секој $n \in \mathbb{N}$.

б)Еден од трите последователни броја $n-1, n$ и $n+1$ е делив со 3, па $n^{19} - n^7$ е делив со 2 за секој $n \in \mathbb{N}$.

в) -ако $n = 5k, k \in \mathbb{N}, \quad n$ е делив со 5,

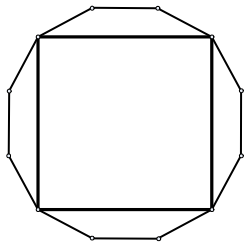
-ако $n = 5k \pm 1, k \in \mathbb{N}, \quad n^2 - 1$ е делив со 5,

-ако $n = 5k \pm 2, k \in \mathbb{N}, \quad n^2 + 1$ е делив со 5.

Според тоа $n^{19} - n^7$ е делив со 5 за секој $n \in \mathbb{N}$. Бидејќи $2, 3$ и 5 се попарно заемно прости, добиваме дека $30 \mid n^{19} - n^7$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

709 Б. На страните на квадрат со должина 2, конструирани се од надворешната страна, рамнокраки трапези, така што темињата на сите трапези се истовремено темиња на правилен дванаестоаголник.

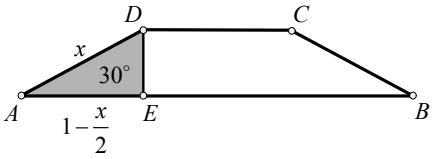
Колку е периметарот на дванаестоаголникот?



Решение. Да разгледаме еден трапез од дванаестоаголникот.

Внатрешниот агол на дванестоаголникот е $\frac{12-2}{12} \cdot 180^\circ = 150^\circ$.

Следува $\alpha = 30^\circ$. Од $|BC| = |CD| = |DA| = x$ и $|AB| = 2$, следува $|AE| = 1 - \frac{x}{2}$. Од друга страна за правоаголниот триаголник AED, со агли 30° и 60°, важи $|AE| = x\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Значи $x\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{x}{2}$, односно $x = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

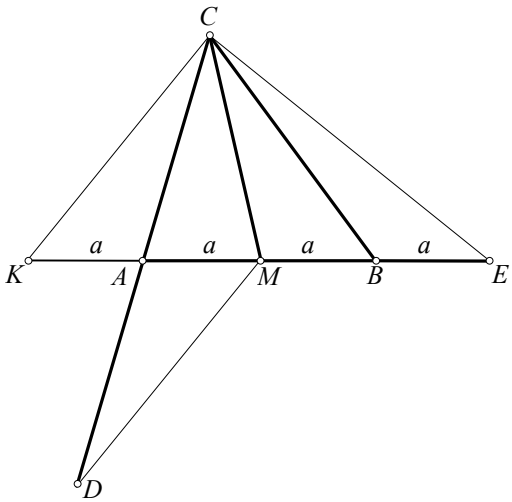
Затоа периметарот на дванестоаголникот

$$L = 12x = 12\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

II година

710 А. Во триаголникот ABC должината на тежишната линија CM е еднаква на должината на страната AB. На продолженијата на страните AC и AB се избрани точки D и E соодветно, така што $\overline{AD}=\overline{AC}$ и $\overline{BE}=\overline{BM}$.

Докажи дека DM и CE се заемно нормални.



Решение. Воведуваме ознака $\overline{BM}=a$. Нека K е точка симетрична на точката M во однос на точката A. Тогаш

$$\overline{KM}=\overline{MC}=\overline{ME}=2a.$$

Во триаголникот KCE должината на тежишната линија CM е половина од страната кон која е повлечена. Според тоа, триаголникот KCE е правоаголен. Значи, $KC\perp CE$.

Четириаголникот $DMCK$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се половат. Според тоа $KC \parallel DM$, од каде добиваме $DM\perp CE$, што и требаше да се докаже.

711 АБ . Определи ги сите цели броеви a и b за кои што

$$7a+14b=5a^2+5ab+5b^2.$$

Решение. Равенката можеме да ја запишеме како квадратна равенка по b, при што

$$5b^2+(5a-14)b+5a^2-7a=0.$$

Нејзини решенија се

$$b_{1/2}=\frac{14-5a\pm\sqrt{(5a-14)^2-20(5a^2-7a)}}{10}=\frac{14-5a\pm\sqrt{196-75a^2}}{10}.$$

За да решенијата се реални, доволно е $196-75a^2\ge 0$, т.е. $a^2\le\frac{196}{75}$. Значи,

$$-\frac{14}{5\sqrt{3}}\le a\le\frac{14}{5\sqrt{3}}.$$

Но, a е цел број, па можни вредности за a се $a\in\{-1,0,1\}$. Со замена на a во $b_{1/2}$, добиваме

1° $a=-1$ $\Rightarrow$ $b_1=3$, $b_2\notin\mathbb{Z}$

2° $a=0$ $\Rightarrow$ $b_1\notin\mathbb{Z}$, $b_2=0$

3° $a=0$ $\Rightarrow$ $b_1=2$, $b_2\notin\mathbb{Z}$.

Значи, бараните решенија се $(a,b)\in\{(-1,-3),(0,0),(1,2)\}$.

712 АБ. Ако a,b и c се комплексни броеви такви што $|a|=|b|=1$ и $\bar{a}\ne b$, тогаш $\frac{\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{a}bc}{\bar{a}-b}$ е имагинарен број.

Докажи!

Решение. Нека $w=\frac{\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{a}bc}{\overline{a}-b}$. Тогаш $\overline{w}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\overline{c}}{a-\overline{b}}$. Од $|a|=|b|=1$ следува дека $a\overline{a}=b\overline{b}=1$. Имаме:

$$\overline{w}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\overline{c}}{a-\overline{b}}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\overline{c}}{a-\overline{b}}\cdot\frac{\overline{a}b}{\overline{a}b}=\frac{a\overline{a}b+\overline{a}b\overline{b}+\overline{a}bc+a\overline{a}b\overline{b}\overline{c}}{a\overline{a}b-\overline{a}b\overline{b}}=\frac{b+\overline{a}+\overline{a}bc+\overline{c}}{b-\overline{a}}=-w$$

и оттука $\operatorname{Re}w=0$.

713 А. Нека $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$, каде што $n\in\mathbb{N}$. Пресметај ја вредноста на изразот $f(1)+f(2)+\ldots+f(40)$.

Решение. Нека $2n-1=a$ и $2n+1=b$. Тогаш $4n=a+b$ и $4n^2-1=ab$.

$$\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3}{a-b}.$$

Оттука,

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3}{a-b}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+1}-(2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}.$$

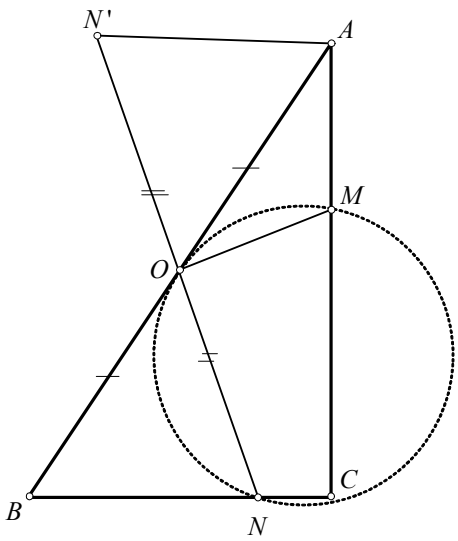
Тогаш:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(40)=\frac{1}{2}\left(\left(3\sqrt{3}-1\right)+\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(81\sqrt{81}-79\sqrt{79}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(81\sqrt{81}-1\right)=364.$$

714 Б. Во правоаголниот триаголник ABC, точката O е средина на хипотенузата AB. На страната AC е земена точка M, а на страната BC точка N, така што $\angle MON$ е прав агол.

Докажи дека

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{MN}^2. \qquad (1)$$



Решение. Нека N' е симетрична точка на точката N во однос на точката O.

Триаголниците OAN' и OBN се складни, според признакот САС. Од друга страна $\angle N'AM=\angle N'AO+\angle MAO=\angle ABC+\angle CAB=90^\circ$, односно $\angle N'AO$ е прав.

Според Питагорина теорема,

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{AM}^2+\overline{AN'}^2=\overline{MN'}^2 \qquad (2)$$

Точката O е средина на NN' и $OM\perp NN'$. Значи, $\Delta OMN\cong\Delta OMN'$, од каде добиваме $\overline{MN}=\overline{MN'}$.

Сега, ако замениме во (2) го добиваме (1).

715 Б. Определи го множеството вредности на изразот $(x-y)(y-z)(z-x)$ ако x, y и z се реални броеви за кои

$$\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\ .$$

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во облик

$$\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}\ .$$

Ако квадрираме, добиваме

$$(\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{z})^2$$

$$2\sqrt{y}\sqrt{x-y+z}=2\sqrt{x}\sqrt{z}\ .$$

Ако повторно квадрираме добиваме

$$y(x-y+z)=xz$$

$$xy-y^2-(xz-yz)=0$$

$$y(x-y)-z(x-y)=0$$

$$(x-y)(y-z)=0\ .$$

Сега е јасно дека вредноста на изразот е еднаков на

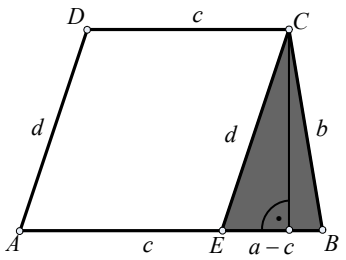
$$(x-y)(y-z)(z-x)=0(z-x)=0\ .$$

III година

716 АБ. Определи ја плоштината на трапез на кој должините на страните му се a,b,c и d .

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD при што $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{DA}=d$. Нека $E\in AB$ е таква што $AD\parallel CE$. Тогаш

$$P_{\Delta EBC}=\frac{(a-c)h}{2},$$



каде h е висината на трапезот. Ако s' е полупериметарот на триаголникот EBC , тогаш

$$s'=\frac{a-c+b+d}{2}\ .$$

Според Хероновата формула имаме

$$P_{\Delta EBC}=\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}$$

од каде добиваме

$$\frac{(a-c)h}{2}=\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}\ ,\quad h=\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}\ .$$

Сега, површината на трапезот е

$$P=\frac{a+c}{2}h=\frac{a+c}{2}\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a-c+b+d)(a-b-c+d)(a-c+b-d)(-a+b+c+d)}\ .$$

Ако воведеме ознака $s=\frac{a+b+c+d}{2}$, добиваме

$$P=\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(s-a)(s-c)(s-b-c)(s-d-c)}\ .$$

717 А. Дадени се броевите $a,b,c \in (0,1)$. Докажи дека

$$\log_a^4 b + \log_b^4 c + \log_c^4 a \geq \log_a b + \log_b c + \log_c a .$$

Решение. За било кои реални броеви x, y и z е исполнето неравенството

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx . \qquad (1)$$

Навистина, даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 .$$

Од точноста на последното неравенство се добива точоста на неравенството (1).

Ако ставиме $x = \log_a^2 b$, $y = \log_b^2 c$ и $z = \log_c^2 a$, добиваме

$$\begin{aligned}\log_a^4 b + \log_b^4 c + \log_c^4 a &\geq \log_a^2 b \log_b^2 c + \log_b^2 c \log_c^2 a + \log_c^2 a \log_a^2 b = \\ &= (\log_a b \cdot \log_b c)^2 + (\log_b c \cdot \log_c a)^2 + (\log_c a \cdot \log_a b)^2 = \\ &= \log_a^2 c + \log_b^2 a + \log_c^2 b \overset{(1)}{\geq} \log_a c \cdot \log_b a + \log_b a \cdot \log_c b + \log_c b \cdot \log_a c = \\ &= \log_b c + \log_c a + \log_a b\end{aligned}$$

718 АБ. Пресметај го аголот γ во триаголникот ABC, ако

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c},$$

каде a,b,c се должини на страните на триаголникот ABC наспроти темињата A,B,C соодветно и γ е аголот кај темето C.

Решение. Го множиме равенството $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ со $a+b+c>0$ и добиваме еквиваалентна равенка

$$\frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3$$

или

$$\frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} = 1 .$$

Последното равенство го множиме со $(a+c)(b+c)>0$ и ја добиваме еквивалентната равенка

$$b^2 + bc + a^2 + ac = ab + ac + cb + c^2$$

или

$$c^2 = b^2 + a^2 - ab . \qquad (*)$$

Од друга страна според косинусна теорема имаме $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, а заради (*) добиваме

$$\cos\gamma = \frac{1}{2},$$

од каде добиваме дека $\gamma = 60^\circ$.

719 А. Да се најдат тангенсите од аглите во еден триаголник, ако тие се цели броеви.

Решение. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот, за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha < \beta < \gamma$. Но тогаш $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$, па според тоа $\operatorname{tg}\alpha \in \left(0, \sqrt{3}\right]$.

Бидејќи $\mathrm{tg}\alpha$ е цел број, добиваме дека $\mathrm{tg}\alpha = 1$. Тогаш

$$-1 = -\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\pi - \alpha) = \mathrm{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma}{1 - \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}.$$

Од последното равенство имаме

$$\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = 1 - \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma,$$

кое може да се запише во облик

$$(\mathrm{tg}\beta - 1)(\mathrm{tg}\gamma - 1) = 2.$$

Сега е очигледно дека $\mathrm{tg}\beta - 1 = 1$ и $\mathrm{tg}\gamma - 1 = 2$. Значи, бараните тангенси се

$$\mathrm{tg}\alpha = 1,\ \mathrm{tg}\beta = 2 \text{ и } \mathrm{tg}\gamma = 3.$$

720 Б. Нека a и b се рационални броеви такви што $a > 1$, $b > 0$ и $ab = a^b$ и $\frac{a}{b} = a^{3b}$. Определи ги вредностите за a?

Решение 1. Со логартимирање на дадените равенки со основа a добиваме

$$\log_a ab = \log_a a^b \qquad \log_a \frac{a}{b} = \log_a a^{3b}$$

$$1 + \log_a b = b \qquad 1 - \log_a b = 3b$$

$$\log_a b = b - 1 \qquad \log_a b = 1 - 3b$$

Сега од последните две равенки имаме

$$b - 1 = 1 - 3b$$

$$4b = 2$$

$$b = \frac{1}{2}.$$

Со замена во равенката $ab = a^b$ добиваме

$$a \cdot \frac{1}{2} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a^2 = a$$

$$a^2 = 4a$$

Бидејќи $a > 1$ добиваме дека $a = 4$.

Решение 2. Од $\frac{a}{b} = a^{3b}$ следува дека $b = a^{1-3b}$. Ако замениме во $ab = a^b$ ќе добиеме $a^{2-3b} = a^b$. Од условот $a > 1$ добиваме $2 - 3b = b$, $b = \frac{1}{2}$. Сега ако замениме во $ab = a^b$ имаме $\frac{a}{2} = \sqrt{a}$, од каде добиваме дека решение е $a = 4$.

Според тоа, $a = 4$ е единствениот број за кој се исполнети равенствата.

721 Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^2 + 6x\cos(xy) + 9 = 0$.

Решение 1. Равенката ја трансформираме во облик $\left(x + 3\cos(xy)\right)^2 + \left(3\sin(xy)\right)^2 = 0$. Истото е можно само ако $x + 3\cos(xy) = 0$, $\sin(xy) = 0$. Од основното тригонометриско равенство, $\sin^2(xy) + \cos^2(xy) = 1$, последните две равенства се еквивалентни со системот $\begin{cases} x + 3\cos(xy) = 0 \\ \cos(xy) = \pm 1 \end{cases}$.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $\cos(xy)=1$.

Тогаш од првата равенка добиваме $x+3=0$, односно $x=-3$. Според тоа,

$$\cos(-3y)=1$$

$$\cos(3y)=1.$$

Решенија на последната равенка се $3y=2k\pi$, од каде добиваме $y=\frac{2k\pi}{3}$. Значи, решенија во овој случај се $\left\{\left(-3,\frac{2k}{3}\pi\right)/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Случај 2. $\cos(xy)=-1$.

Тогаш од првата равенка добиваме $x-3=0$, односно $x=3$. Според тоа,

$$\cos(3y)=-1$$

Решенија на последната равенка се $3y=(2k+1)\pi$, од каде добиваме $y=\frac{(2k+1)\pi}{3}$. Значи, решенија во овој случај се $\left\{\left(3,\frac{2k+1}{3}\pi\right)/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Конечно, решенија на равенката се $\left\{\left(3,\frac{2k+1}{3}\pi\right)/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(-3,\frac{2k}{3}\pi\right)/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Решение 2. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $x^2+9\geq 2\sqrt{9x^2}=6|x|$. Јасно е дека $x=0$ не е решение на дадената равенка . Според тоа равенката мо`еме да ја запишеме во облик

$$\cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}.$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $x>0$.

Тогаш,

$$\frac{x^2+9}{6x}\geq\frac{6|x|}{6x}=\frac{6x}{6x}=1$$

$$\cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}\leq -1.$$

Равенство се достигнува ако и само ако $x^2=9$, т.е. $x=3$. Но тогаш, равенката го добива обликот $\cos(3y)=-1$, а нејзини решенија се

$$3y=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi$$

$$y=\frac{2k+1}{3}\pi.$$

Случај 2. $x<0$.

Тогаш

$$\frac{x^2+9}{6x}\leq\frac{6|x|}{6x}=-\frac{6x}{6x}=-1$$

$$\cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}\geq 1.$$

Равенство се добива ако и само ако $x^2=9$, односно $x=-3$. Но тогаш $\cos(-3y)=1$, односно $\cos(3y)=1$. Решенија на последната равенка се

$$3y = 2k\pi$$

$$y = \frac{2k}{3}\pi .$$

Значи, решенија на равенката се $\left\{\left(3, \frac{2k+1}{3}\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(-3, \frac{2k}{3}\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

IV година

722 А. Нека n е природен и нека $x_\circ = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{1}{n-k}(x_\circ + x_1 + \cdots + x_{k-1})$.

Пресметај го збирот $x_\circ + x_1 + \cdots + x_{n-1}$.

Решение. Со примена на горната формула за x_k се добива дека $x_1 = \frac{1}{n(n-1)}$, $x_2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$. Ќе докажеме дека $x_k = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}$ со помош на принципот на математичка индукција . Нека тврдењето важи за $i < k$. Тогаш

$$x_k = \frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{(n-k+2)(n-k+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n-k+2}\right) = \frac{1}{n-k} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}.$$

`Според тоа,

$$x_\circ + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} == \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n-k+2} + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = 1 .$$

723 АБ. Во еден триаголник должините на страните a, b, c во дадениот редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}$$

(α е агол спроти страната a; γ е агол спроти страната c).

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Ако замениме во равенството

$$a + c = 2b$$

добиваме

$$\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\beta .$$

Ако ги искористиме идентитетите $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, добиваме

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} .$$

Од друга страна, заради равенството $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\beta}{2}$, со алгебарски транформации добиваме

$$\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}\right) = 0 .$$

Бидејќи $\cos\frac{\beta}{2}\neq 0$ и $\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, добиваме

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=0\,.$$

Сега заради формулите $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$ имаме

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=0$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

од каде се добива точноста на бараното равенство.

724 АБ. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}}+\sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}+\ldots+\sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}}<2^n-1\,.$$

Решение. Ако искористиме дека $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$ и $\left(\sqrt{\binom{n}{k}}-\sqrt{\binom{n}{k+1}}\right)^2\geq 0$ следува дека $\binom{n+1}{k+1}\geq 2\sqrt{\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}}$. Ако во последното неравенство ставеме $k=0,1,\ldots n-1$ и ги собереме добиените неравенства ќе добиеме

$$\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}}+\sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}+\ldots+\sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}}\leq\frac{1}{2}\left(\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-2\right)=\frac{1}{2}\left(2^{n+1}-2\right)=2^n-1$$

Притоа ја користевме познатата формула $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

725 А. Да се најдат сите полиноми

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_\circ,\ n\geq 2,$$

со реални и ненулти коефициенти така што $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен полином, каде

$$P_1(x)=a_1x+a_\circ,\ P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_\circ,\ \ldots,\ P_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_\circ\,.$$

Решение. Бидејќи полиномот $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен и $a_k\neq 0$, $k=\overline{1,n-1}$, имаме дека

$$\deg P=\deg(P_1P_2\cdot\ldots\cdot P_{n-1})=\deg P_1+\deg P_2+\ldots+\deg P_{n-1}==1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Добиваме дека $n=\frac{n(n-1)}{2}$, па $n\in\{0,3\}$. Бидејќи $n\geq 2$, заклучуваме $n=3$.

Според тоа $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, и $P(x)-P_1(x)P_2(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$ ако и само ако:

$$\begin{aligned}&a_3=a_1a_2\\&a_2={a_1}^2+a_0a_2\\&a_1=2a_0a_1\\&a_0={a_0}^2+k\end{aligned}\qquad(1)$$

Од (1) имаме $a_1(1-2a_0)=0$, бидејќи $a_1 \neq 0$ следува $a_0=\frac{1}{2}$ и $k=\frac{1}{4}$. Нека $a_1=a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогаш $a_2=2a^2$ и $a_3=2a^3$.

Па, бараните полиноми се од облик $P(x)=2a^3x^3+2a^2x^2+ax+\frac{1}{2}$, каде $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

726 Б. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурзивната формула $a_\circ=-1$, $a_n=\dfrac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}$, $n\in\mathbb{N}$. Определи го општиот член a_n на низата.

Решение. Ако замениме во рекурзивната формула се добива дека

$$a_1=\frac{5}{7},\ a_2=\frac{11}{13},\ a_3=\frac{17}{19},\ a_4=\frac{23}{25},\ a_5=\frac{29}{31},$$

односно

$$a_1=\frac{6\cdot1-1}{6\cdot1+1},\ a_2=\frac{6\cdot2-1}{6\cdot2+1},\ a_3=\frac{6\cdot3-1}{6\cdot3+1},\ a_4=\frac{6\cdot4-1}{6\cdot4+1},\ a_5=\frac{6\cdot5-1}{6\cdot5+1}.$$

Со принципот на математичка индукција ќе покажеме дека $a_n=\dfrac{6n-1}{6n+1}$. Претпоставуваме дека тврдењето важи за $n=k$, односно $a_k=\dfrac{6k-1}{6k+1}$. Тогаш за $n=k+1$ имаме дека

$$a_{k+1}=\frac{2a_k-3}{3a_k-4}==\frac{2\dfrac{6k-1}{6k+1}-3}{3\dfrac{6k-1}{6k+1}-4}=\frac{\dfrac{12k-2-18k-3}{6k+1}}{\dfrac{18k-3-24k-4}{6k+1}}=\frac{-6k-5}{-6k-7}=\frac{6(k+1)-1}{6(k+1)+1}$$

Согласно принципот на математичка индукција имаме дека $a_n=\dfrac{6n-1}{6n+1}$ за секој природен број.

727 Б. Во множеството реални броеви, реши ја равенката:

$$|x^4-x^2-6|=|x^4-4|-|x^2+2|.$$

Решение. Левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$|x^4-x^2-6|=|x^4-4-(x^2+2)|=|(x^2+2)(x^2-2)-(x^2+2)|=(x^2+2)|x^2-2-1|=(x^2+2)|x^2-3| \qquad (*)$$

а десната можеме да ја запишеме во облик

$$|x^4-4|-|x^2+2|=|(x^2+2)(x^2-2)|-|x^2+2|=(x^2+2)(|x^2-2|-1) \qquad (**)$$

Во (*) и (**) ја искористивме точноста на неравенството $x^2+2>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Почетната равенка ја запишуваме во облик

$$(x^2+2)|x^2-3|=(x^2+2)(|x^2-2|-1),$$

и ако поделиме со x^2+2 истата го добива обликот

$$|x^2-3|=(|x^2-2|-1). \qquad (1)$$

Сега ќе разгледаме три случаи.

а)Ако $|x|\geq\sqrt{3}$ равенката преминува во идентитетот $x^2-3=x^2-2-1=x^2-3$.

б)Ако $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ равенката преминува во равенката $3-x^2=x^2-2-1$ чие решение е $x=\sqrt{3}$ кое не припаѓа во интервалот $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$.

в)Ако $|x|<\sqrt{2}$ равенката преминува во $3-x^2=2-x^2-1$ што не е можно.

Значи, решение на равенката е секој x, $|x|\geq\sqrt{3}$.

LVI Републички натпревар по математика за учениците од средното образование-16.03.2013 година

1 година

728. Најди ги сите целобројни решенија на равенката $x^3 + y^3 = 2013$.

Решение. Бидејќи a^3 при делење со 9 може да има остаток 0,1 и 8, $x^3 + y^3$ може да има остаток 0,1,2,7 и 8. Бидејќи $2013 = 9 \cdot 223 + 6$ добиваме дека равенката $x^3 + y^3 = 2013$ нема решенија во множеството цели броеви.

729. Докажи дека $e + f < 2a + h$, каде што e и f се должини на дијагоналите на некој ромб, a е должина на страната на ромбот, а h е должината на висината на ромбот.

Решение. Од формулата за плоштина на ромб имаме $\frac{ef}{2} = ah \Rightarrow ef = 2ah.$ Од Питагоровата теорема меѓу страната и дијагоналите на ромбот, имаме

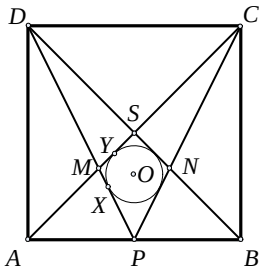
$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2 \text{, т.е. } e^2 + f^2 = 4a^2,$$

па,

$$(e+f)^2 = e^2 + 2ef + f^2 = 4a^2 + 2ef = 4a^2 + 4ah < 4a^2 + 4ah + h^2 = (2a+h)^2,$$

од каде следува дека $e + f < 2a + h$ (заради $e + f > 0$ и $2a + h > 0$).

730. Даден е квадратот $ABCD$. Дијагоналите на квадратот се сечат во точка S и P е средина на страната AB. Нека M е пресечна точка на AC и PD а N на BD и PC. Во четириаголникот $PMSN$ е впишана кружница. Докажи дека радиусот на таа кружница е еднаков на $\overline{MP} - \overline{MS}$.



Решение. Важи $OY \perp MS$, $\measuredangle YSO = \measuredangle ASP = 45^\circ$ (SP е симетрала на $\measuredangle MSN$).

Тогаш, $\Delta SYO \sim \Delta SPA$, па ΔSYO е правоаголен и рамнокрак и оттука следува дека $\overline{SY} = \overline{YO} = r$. Триаголниците OXP и PAD се слични бидејќи

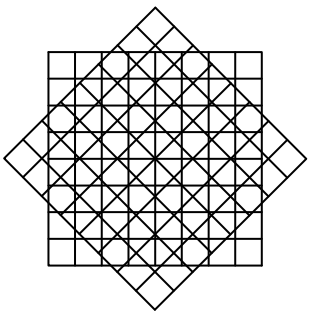
$$\measuredangle OXP = \measuredangle DAB = 90^\circ, \measuredangle OPX = \measuredangle PDA.$$

Од сличноста имаме

$$\overline{XP} : \overline{XO} = \overline{AD} : \overline{AP} = 2 \Rightarrow \overline{XP} = 2r.$$

Бидејќи X и Y се допирни точки на тангентата на кружницата повлечени од точката M имаме $\overline{MY} = \overline{MX}$. Конечно,

$$\overline{MP} - \overline{MS} = (\overline{MX} + \overline{XP}) - (\overline{MY} + \overline{YS}) = \overline{XP} - \overline{YS} = 2r - r = r$$



731. Две еднакви шаховски табли (8×8 полиња) имаат заеднички центар и едната од нив потполно ја покрива другата (поставени се една над друга). Едната од нив се ротира околу центарот за 45°. Одреди ја плоштината на пресекот на сите црни полиња на едната табла со сите црни полиња на другата табла ако

плоштината на едно поле е 1.

Решение. Нека означиме со S_{cc} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и црните полиња на долната табла (т.е. тоа што се бара да се пресмета во задачата), со S_{cb} - збир на сите заеднички плоштини на црните полиња на горната и белите полиња на долната табла, со S_{bc} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и црните полиња на долната табла и со S_{bb} - збир на сите заеднички плоштини на белите полиња на горната и белите полиња на долната табла.

Тогаш, $S = S_{cc} + S_{cb} + S_{bc} + S_{bb}$, каде што S е плоштина на правилниот осумаголник кој е пресек на двете табли кога ќе се изврши ротирањето на горната табла за 45° како на сликата. Нека оваа положба на таблите е почетна.

Ако горната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc} = S_{bc}$ и $S_{cb} = S_{bb}$.

Ако долната табла се заротира за 90° околу центарот, тогаш црните полиња на таа табла ќе дојдат на местото од нејзините бели полиња, па имаме $S_{cc} = S_{cb}$ и $S_{bc} = S_{bb}$. Значи $S_{cc} = S_{cb} = S_{bc} = S_{bb} \Rightarrow S_{cc} = \frac{1}{4}S.$

Исто така важи дека плоштината на заедничкиот осумаголник се добива кога од плоштината на целата табла ќе се одземе плоштината на четирите правоаголни триаголници што се наоѓаат на краевите на таблата, т.е. $S = 64 - 4P$. Останува уште да ја пресметаме плоштината P. Триаголникот е рамнокрак правоаголен и ако со a ја обележиме хипотенузата, а со h висината спуштена спрема хипотенузата, имаме дека $a = 2h.$ Ако пак со d ја означиме дијагоналата на таблата, тогаш имаме $d = 2h + 8$, т.е. $h = \frac{d-8}{2} = \frac{8\sqrt{2}-8}{2} = 4\left(\sqrt{2}-1\right).$ Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме: $P = \frac{ah}{2} = h^2 = 16\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 16\left(3-2\sqrt{2}\right)$ т.е.

$$S = 64 - 4P = 128\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$S_{cc} = 32\left(\sqrt{2}-1\right).$$

2 година

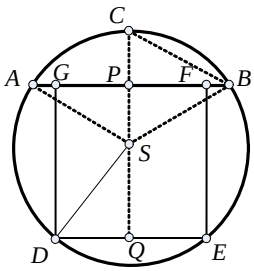
732. За коефициентите a, b, c на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$ важи равенството $2b^2 - 9ac = 0$, ако и само ако едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Докажи!

Решение. Нека x_1 и x_2 се двата корени на равенката $ax^2 + bx + c = 0$. Од условот $2b^2 - 9ac = 0$, дискриминантата на равенката е $b^2 - 4ac = b^2 - 4\frac{2b^2}{9} = \frac{b^2}{9}$ и затоа корените на равенката се $x_{1/2} = \frac{-b \pm \frac{|b|}{3}}{2a} = \frac{-3b \pm |b|}{6a}$. Ако $b > 0$ добиваме $x_1 = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$ и $x_2 = \frac{-4b}{6a} = -2\frac{b}{3a}$. Тогаш, $x_2 = 2x_1$. Слично добиваме и ако $b < 0$.

Ако $b = 0$ од равенството $2b^2 - 9ac = 0$ добиваме дека $c = 0$ (заради $a \neq 0$), па само $x = 0$ е корен на равенката. Следува дека трдењето важи за $b = 0$.

Обратно. Нека едниот корен на равенката е двапати поголем од другиот корен. Да претпоставиме дека $x_2 = 2x_1$. Тогаш $x_1 + x_2 = 3x_1 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = 2x_1^2 = \frac{c}{a}$. Значи, $\frac{c}{2a} = x_1^2 = \left(-\frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{b^2}{9a^2}$ и оттука $2b^2 - 9ac = 0$.

733. Тетивата AB ја дели една кружница со радиус r на два лаци во однос $1:2$. Во поголемиот дел впишан е квадрат чија една страна лежи на таа тетива. Изрази ја должината на страната на квадратот преку радиусот r.



Решение. Исто како што тетивата AB ја дели кружницата на два лаци во однос $1:2$ така и соодветните централни агли се однесуваат во однос $1:2$, т.е. едниот е $120°$, а другиот е $240°$. Нека со S го означиме центарот на кружницата. Нека C е точка од помалиот лак така што $SC \perp AB$ и $SC \cap AB = \{P\}$ и $SC \cap DE = \{Q\}$.

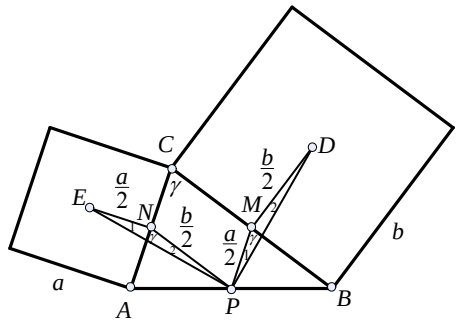
Тогаш имаме $\measuredangle ASB = 120°$, а $\measuredangle CSB = 60°$. Од тоа што триаголникот CSB е рамностран ($\overline{SB} = \overline{SC} = r$, а аголот меѓу нив е $60°$) следува дека BP е висина во овој триаголник и ја дели страната SC на половина, т.е. $\overline{SP} = \frac{r}{2}$, а заради ова $\overline{SQ} = a - \frac{r}{2}$, каде што со a е означена страната на квадратот $DEFG$.

Од правоаголниот ΔSDQ со примена на Питагорова теорема, имаме:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{r}{2}\right)^2 \quad \text{т.е.} \quad 5a^2 - 4ar - 3r^2 = 0.$$

Бидејќи $a > 0$ се добива $a = \frac{4r + \sqrt{16r^2 + 60r^2}}{10}$, т.е. $a = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} r$.

734. Од надворешноста на страните AC и BC во триаголникот ABC, се конструирани квадрати (со страни AC и BC) и со центри D и E. Нека P е средина на страната AB. Докажи дека отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.



Решение. Нека M и N се средини на страните BC и AC и аголот при темето C е γ.

Тогаш $\Delta PEN \cong \Delta DPM$, бидејќи имаат по една страна со должина $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, а аглите меѓу тие страни се еднакви на $90^0 + \gamma$ ($\overline{PN} = \frac{b}{2}$ како средна линија, $\overline{MD} = \frac{b}{2}$, $\overline{NE} = \frac{a}{2}$ и $\overline{PM} = \frac{a}{2}$ како средна линија,

$$\angle PNE = 90^0 + \angle PNA = 90^0 + \gamma$$

и

$$\angle PMD = 90^0 + \angle PMB = 90^0 + \gamma \text{).}$$

Следува отсечките PD и PE се еднакви. Исто така $\angle EPN = \angle PDM$ и $\angle PEN = \angle DPM$.

Бидејќи четириаголникот $MPNC$ е паралелограм, следува дека $\angle MPN=\gamma$, од каде

$$\angle EPD=\angle EPN+\gamma+\angle MPD=\angle EPN+\gamma+\angle NEP=\gamma+(180^\circ-(90^\circ+\gamma))=90^\circ.$$

735. Реши ја равенката $\sqrt{5-x}=x^2-5$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е множеството $(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$. За $x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},5)$ дадената равенка е еквивалентна со равенката $5-x=(x^2-5)^2$.
Ќе ја запишеме равенката како квадратна по бројот 5, т.е. $5^2-(1+2x^2)5+x^4+x=0$.
Оттука ги добиваме равенките:

$$5=\frac{(1+2x^2)+(1-2x)}{2}\Leftrightarrow x^2-x-4=0 \text{ и } 5=\frac{(1+2x^2)-(1-2x)}{2}\Leftrightarrow x^2+x-5=0.$$

Со директна проверка забележуваме дека само $x_1=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ припаѓаат на дефиниционата област.

3 година

736. Докажи дека ако $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$ тогаш $|ac\text{-}bd|\le 1$.

Решение 1. Бидејќи $a,b,c,d\in[-1,1]$ следува дека постојат реални броеви α,β такви што $a=\sin\alpha, b=\cos\alpha, c=\sin\beta, d=\cos\beta$.
Тогаш $ac-bd=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta)$, па следува дека $|ac\text{-}bd|=|-\cos(\alpha+\beta)|\le 1$.

Решение 2. Од $(|a|-|c|)^2\ge 0$ и $(|b|-|d|)^2\ge 0$ следува дека $|ac|\le\frac{a^2+c^2}{2}$ и $|bd|\le\frac{b^2+d^2}{2}$.
Користејќи го неравенството на триаголник и горните неравенства добиваме

$$|ac-bd|\le|ac|+|bd|\le\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

737. Докажи дека за секој реален број x важи неравенството $\cos(\sin(x))>\sin(\cos(x))$.

Решение. Нека $f(x)=\cos(\sin x)$ и $g(x)=\sin(\cos x)$. Очигледно е дека $T=2\pi$ е период на $f(x)$ и $g(x)$. Затоа доволно е да се докаже неравенството на интервалот $[-\pi,\pi]$.

Двете функции се парни и затоа е доволно да се докаже неравенството на интервалот $[0,\pi]$. За $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $f(x)>0$ и $g(x)\le 0$ па останува да се докаже неравенството на интервалот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

За $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ имаме

$$\cos(\sin x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)>\sin(\cos x)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\pi}{2}-\sin x>\cos x\quad\Leftrightarrow\quad\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$$

Последново неравенство е точно заради

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$$

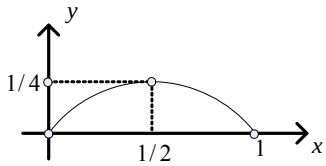
Со тоа неравенството е докажано.

738. За $x_1,x_2>0,\ x_1+x_2=1$, докажи дека $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2\ge\frac{25}{2}$.

Решение 1. Нека $y = x_1x_2 = x_1(1-x_1)$. За $x_1 > 0$, разгледувајќи го y како квадратна функција, заклучуваме дека функцијата е растечка на интервалот $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ со максимум во $x_1 = \frac{1}{2}$ и тогаш $y = \frac{1}{4}$. Јасно, како функција по x_1, $y \le \frac{1}{4}$. Ќе го средиме изразот $L = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 - \frac{25}{2}$.

Имено $L = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + 4 - \frac{25}{2} = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2} + 4 - \frac{25}{2} = -\left(2y - \frac{1-2y}{y^2} + \frac{15}{2}\right) = -\frac{4y^3+15y^2+4y-2}{2y^2}$

За $y \le \frac{1}{4}$, $4y^3 + 15y^2 + 4y - 2 \le \frac{4}{4^3} + \frac{15}{4^2} + 1 - 2 = 0$, па $L \ge 0$ што требаше и да се докаже.



Решение 2. Изразот на левата страна од неравенството е еднаков на $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + 4$. Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за позитивните броеви x_1 и x_2 добиваме $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \ge \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2}$, односно

$$x_1^2 + x_2^2 \ge \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

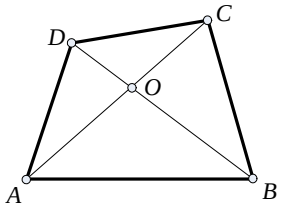
Исто така важи и

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}. \qquad (2)$$

Бидејќи $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \ge 0$ следува дека

$$x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \frac{1}{x_1x_2} \ge 4. \qquad (3)$$

Ако (1) и (3) ги замениме во (2) добиваме дека $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2} \ge \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$. На крај имаме $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + 4 \ge \frac{1}{2} + 8 + 4 = \frac{25}{2}$.



739. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник во кој должините на сите страни и дијагонали се рационални броеви. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека $\overline{AO}$ е рационален број.

Решение. Ќе означиме $\beta_1 = \angle ABO$, $\beta_2 = \angle CBO$, $\beta = \angle ABC$, $\delta_1 = \angle AOB$ и $\delta_2 = \angle BOC$. Да забележиме дека $\sin\delta_1 = \sin\delta_2$. Од синусна теорема за триаголниците ABO и CBO, имаме $\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\delta_1}$ и $\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\beta_2}$. Од овие равенства добиваме $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$. Од косинусна теорема за триаголниците ABC, ABD и DBC, бидејќи сите страни и дијагонали на четириаголниот се рационални броеви, следува дека $\cos\beta$, $\cos\beta_1$ и $\cos\beta_2$ се рационални броеви. Да забележиме дека

$$\cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2$$

од што следува дека и $\sin\beta_1 \sin\beta_2$ е рационален број. Па сега

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{\sin^2\beta_2}=\frac{\sin\beta_1\sin\beta_2}{1-\cos^2\beta_2}$$

од што добиваме дека и $\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}$ е рационален број. Но, тогаш и $\frac{\overline{OC}}{\overline{AO}}+1=\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}}$ е рационален број. Конечно, бидејќи $\overline{AC}$ е рационален број добиваме дека и $\overline{AO}$ е рационален број.

4 година

740. Докажи дека за сите реални броеви $x, y > 1$ важи неравенството

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8.$$

Решение 1. Земаме смени $a=x-1$ и $b=y-1$. Од условот на задачата следува дека a и b се позитивни реални броеви. Неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq 8...(1)$. Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви a и 1 важи $a+1\geq 2\sqrt{a}$ т.е. $(a+1)^2\geq 4a$.

На ист начин добиваме дека важи $(b+1)^2\geq 4b$. Сега ако замениме во (1) имаме

$$\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=8.$$

Решение 2. Од неравенство меѓу геометриска и хармониска средина за позитивните броеви x и $\frac{x}{y-1}$ добиваме $\sqrt{x\cdot\frac{x}{y-1}}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{y-1}{x}}=2\cdot\frac{x}{y}$, т.е. $\frac{x^2}{y-1}\geq 4\cdot\frac{x^2}{y^2}...(1)$.

На ист начин се добива дека $\frac{y^2}{x-1}\geq 4\cdot\frac{y^2}{x^2}....(2)$. Со собирање на (1) и (2) имаме

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 4\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}}=8.$$

741. Нека k е природен број. Докажи дека аритметичка прогресија чија разлика е природен број или не содржи ниту еден член кој е k-ти степен на природен број или содржи бесконечно многу.

Решение. Нека a е првиот член на аритметичката прогресија и d е нивната разлика $(d\in\mathbb{N})$. Ако a не е природен број тогаш тврдењето важи бидејќи прогресијата не содржи ниеден природен број. Нека a е природен број и нека b^k (за некој b природен број) е член на прогресијата. Јасно, постои природен број n така што $b^k=a+nd$. Тогаш, сите броеви од облик $(b+md)^k, m\in\mathbb{N}$, исто така се членови на таа аритметичка прогресија, бидејќи важи

$$(b+md)^k=b^k+kb^{k-1}md+\binom{k}{2}b^{k-2}m^2d^2+...+m^kd^k,$$

па оттука следува дека $(b+md)^k=b^k+dt=a+nd+dt=a+d(n+t)$, каде t е некој природен број. Со тоа доказот е завршен.

742. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x^2+f(y))=y-x^2$.

Решение. Ако ставиме $x=0$, добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Па, затоа за $x,y\in\mathbb{R}$ имаме $f(y-x^2)=f(f(x^2+f(y))=x^2+f(y)$. Ако замениме $y=x^2$ во последното равенство имаме: $f(x^2-x^2)=f(0)=x^2+f(x^2)$, односно $f(x^2)=f(0)-x^2$. Ако замениме $y=0$ добиваме $f(-x^2)=x^2+f(0)$. Одовде можеме да заклучиме дека $f(x)=-x+C$, за секој реален број x, каде $C=f(0)$. Навистина, сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+C$, $C\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата: $f(x^2+f(y))=f(x^2-y+C)=-(x^2-y+C)+C=y-x^2$.

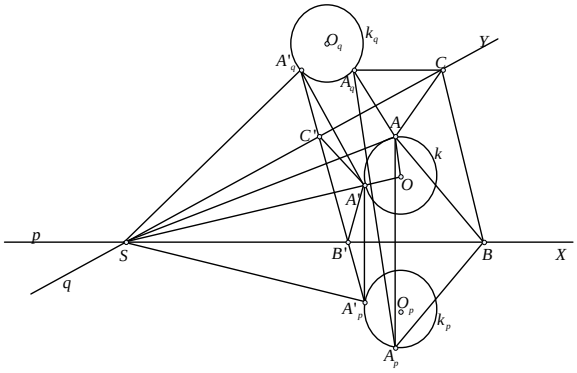
743. Нека е даден $\measuredangle XSY=\alpha<90^\circ$ и $k(O,r)$ е кружница која целосно се наоѓа во α. Нека ABC е триаголник таков што A е на k, B е на правата $p\equiv SX$ и C е на правата $q\equiv SY$. Ако $s=\overline{SO}$, пресметај ја најмалата вредност која може да ја достигне периметарот на ваков ΔABC.

Решение. Нека A' е пресечната точка на SO со k, које е меѓу S и O, $k_p(O_p,r)$, $k_q(O_q,r)$ се кружници осносиметрични на k во однос на p и q соодветно, A'_p и A'_q се сликите на A', при осните симетрии и B' и C' се пресечни точки на $A'_pA'_q$ со p и q соодветно. Ќе докажеме дека $\Delta A'B'C'$ има најмал периметар од бараните. Нека ΔABC е произволен ваков триаголник и нека A_p и A_q се сликите на A, при осните симетрии, тогаш $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{A_pB}+\overline{BC}+\overline{CA_q}\geq\overline{A_pA_q}$.

Од друга страна $\measuredangle A_pSA_q=\measuredangle A_pSA+\measuredangle ASA_q=2(\measuredangle XSA+\measuredangle ASY)=2\measuredangle XSY=2\alpha$, па аголот $\measuredangle A_pSA_q$ не зависи од изборот на точките A, B и C. Исто така од осните симетрии следува дека $\overline{SA_p}=\overline{SA}=\overline{SA_q}$, па ΔA_pA_qS е рамнокрак. Од оценката

$$L_{\Delta ABC}\geq\overline{A_pA_q}=2\overline{SA_p}\sin\alpha=2\overline{SA}\sin\alpha=2\left(\left(\overline{SA}+\overline{AO}\right)-\overline{AO}\right)\sin\alpha\geq2\left(\overline{SO}-\overline{A'O}\right)\sin\alpha=2\overline{SA'}\sin\alpha=L_{\Delta A'B'C'}$$

следува дека $\Delta A'B'C'$ достигнува најмал можен периметар и тој е еднаков на $L_{\Delta A'B'C'}=2\left(\overline{SO}-\overline{A'O}\right)\sin\alpha=2(s-r)\sin\alpha$. Забелешка: Од условот на задачата мора $s>r$.



XXXVII Регионален натпревар по математика за учениците од средното образование, 15.II-2014

I година

744. Докажи дека збирот од квадратите на пет последователни цели броеви не може да биде полн квадрат.

Решение. Нека се тоа броевите $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2.$ Тогаш нивниот збир е

$$S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5\left(n^2+2\right)$$

што значи дека $5|S$. Ако бројот S е полн квадрат, тогаш треба $5|\left(n^2+2\right).$ Ова не е можно за ниту еден број $n\in\mathbb{Z}.$ Имено ако $n=5k$, тогаш $n^2+2=5A+2,$ ако $n=5k\pm1$, тогаш $n^2+2=5B+3,$ ако $n=5k\pm2$, тогаш $n^2+2=5C+1.$ Оттука следува дека овој број не може да биде полн квадрат.

745. Докажи дека дадената равенка нема решение во множеството на цели броеви:

$$xy\left(x^2-y^2\right)+yz\left(y^2-z^2\right)+zx\left(z^2-x^2\right)=1\,.$$

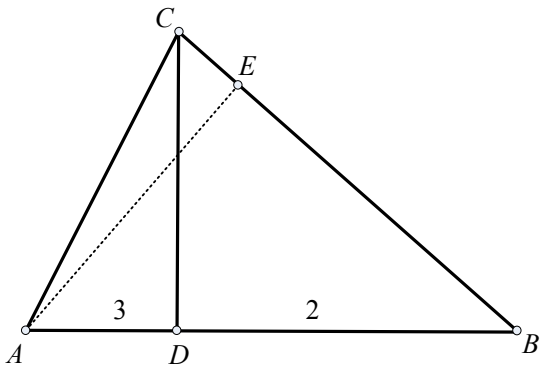
Решение. Имаме

$$\begin{aligned}xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)&=xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-y^2-x^2+y^2)=\\&=(xy-zx)(x^2-y^2)+(yz-zx)(y^2-z^2)=x(y-z)(x^2-y^2)-z(x-y)(y^2-z^2)=\\&=(x-y)(y-z)(x^2+xy-zy-z^2)=(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y).\end{aligned}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)=1$ и оттука $(x-y),(y-z),(z-x)\in\{-1,1\}$.

Значи, $(x-y)+(y-z)+(z-x)\neq0$ што е невозможно и затоа равенката нема решение во множеството на цели броеви.

746.Б. Во остроаголен триаголник ABC висината од врвот C ја дели спротивната страна на два дела $\overline{AD}$ и $\overline{DB}$ со должини $\overline{AD}=3\,\text{cm}$ и $\overline{DB}=2\,\text{cm}$. Аголот при темето A изнесува 60°. Одреди ги должините на страните на триаголникот ABC како и должината на висината на триаголникот ABC спуштена од темето A .



Решение. Јасно е дека $\overline{AB}=5sm$. Бидејќи аголот кај темето A изнесува 60° и бидејќи триаголникот ADC е правоаголен имаме дека аголот $\angle DCA$ изнесува 30° од каде пак се добива дека $\overline{AC}=2\overline{AD}=6sm$.

Од Питагоровата теорема кај триаголникот ADC имаме

$$\overline{DC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{25}=5\,cm\,.$$

Од Питагоровата теорема кај триаголникот BDC имаме

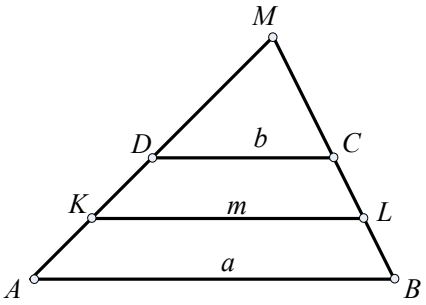
$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{DC}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{29}\,cm\,.$$

Следно, за плоштината на триаголникот ABC имаме $P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{5\cdot5}{2}=\frac{25}{2}$. Од друга страна $P_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}\Rightarrow\ \frac{25}{2}=\frac{\sqrt{29}\cdot\overline{AE}}{2}.$

Односно, висината од темето A изнесува $\overline{AE}=\frac{25}{\sqrt{29}}\text{cm}$.

747А. Трапезот $ABCD$ е поделен со права p , таква што $p\parallel AB\parallel CD$, на два дела со еднакви плоштини. Определи ја должината на отсечката чиишто крајни

точки се пресечните точки на правата p и краците на трапезот, ако се дадени дожините на основите a и b.



Решение. Ги продолжуваме краците AD и BC до нивниот пресек M. Нека $KL=p$. Тогаш, $\triangle ABM \sim \triangle KLM \sim \triangle DCM$ и при тоа

$$P_{\triangle ABM}:P_{\triangle KLM}:P_{\triangle DCM}=a^2:m^2:b^2$$

т.е.

$$P_{\triangle ABM}=ka^2,\ P_{\triangle KLM}=km^2,\ P_{\triangle DCM}=kb^2,$$

каде што k е коефициент на пропорционалност. Од условот на задачата,

$$P_{ABLK}=P_{KLCD}$$
$$P_{\triangle ABM}-P_{\triangle KLM}=P_{\triangle KLM}-P_{\triangle DCM}$$
$$ka^2-km^2=km^2-kb^2$$
$$m=\overline{KL}=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}.$$

748Б. На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочката ги означува со a,b и c по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b, 3b-c$ и $3c-a$. Дали може Марко со последователна примена на оваа постапка во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

Решение. Ако претпоставиме дека во некој момент може да се добијат сите три броеви да се исти, имаме дека $3a-b=3b-c=3c-a=t$. Од овој систем добиваме дека

$$b=3a+t$$
$$c=3b-t=9a-4t$$
$$a=3c-t=27a-13t$$

Од последната равенка $26a=13t \Rightarrow a=\frac{t}{2}$. Ако се вратиме и замениме, добиваме дека $b=\frac{t}{2}$ и $c=\frac{t}{2}$, односно $a=b=c=\frac{t}{2}$. Од оваа дискусија се заклучува дека три еднакви броја во некој чекор би добиле ако во претходниот чекор сме имале три исти броеви. Но, бидејќи се тргнува од броевите 2012, 2014 и 2016, следува дека не е можно да се добијат три исти броја.

749А. Најди ги сите парови заемно прости природни броеви a и b такви што $a+b$ е делител на a^4+b^4.

Решение. Користиме $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ од каде $a+b$ е делител на a^4-b^4. Добиваме дека $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)+(a^4-b^4)=2a^4$ и $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)-(a^4-b^4)=2b^4$ или $(a+b)|\text{НЗД}(2a^4,2b^4)$. Од НЗД$(a,b)=1$ следува НЗД$(a^4,b^4)=1$ (5) односно $(a+b)|Н.З.Д(2a^4,2b^4)=2$. Конечно $a=1, b=1$.

II година

750АБ. Најди ги целобројните вредности на параметарот a, за кои решенијата на системот:

$$\begin{cases} a(x+y-1)=x-2y-1 \\ a(x-y-3)=x+2y-3 \end{cases}$$

се целобројни.

Решенија. Дадениот систем е еквивалентен со:

$$\begin{cases} (a-1)x+(a+2)=a-1 \\ (a-1)x-(a+2)y=3a-3 \end{cases}.$$

Имаме $\begin{cases}2(a-1)x=4a-4\\2(a+2)y=-2a+2\end{cases}$. Ако $a\neq 1$, тогаш $x=2$, а ако $a=1$, тогаш $x\in\mathbb{R}$. Ако $a=-2$ тогаш нема решение за y па и за системот . Ако $a\neq -2$, имаме $y=\frac{-a+1}{a+2}=-1+\frac{3}{a+2}$. Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $a+2$ треба да е делител на 3 и затоа $a+2=\pm 1,\pm 3$. Оттука, $a=-5,-3,-1,1$. Добиваме:

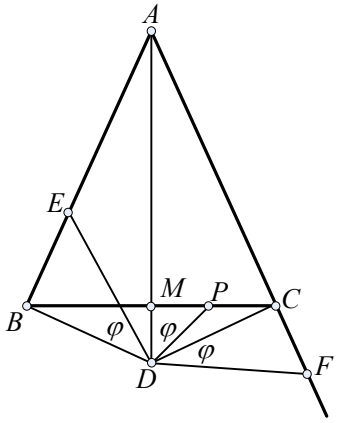
$a=-5:\ x=2,\ y=-2;$ $a=-3:\ x=2,\ y=-4;$ $a=-1:\ x=2,\ y=2;$ $a=1:\ x\in$, $y=0$.

751АБ. Нека a,b,c се реални боеви за кои важат: $ab-a=b+119$, $bc-b=c+59$, $ca-c=a+71$. Пресметај ги сите можни вредности на $a+b+c$.

Решение. Од првата равенка имаме $a(b-1)=(b-1)+120$ односно $(a-1)(b-1)=120$. Слично, втората е еквивалентна со $(b-1)(c-1)=60$ и третата со $(c-1)(a-1)=72$. Оттука, $\frac{a-1}{c-1}=2$, $a-1=2(c-1)$ и заменето во третата добиваме $2(c-1)^2=72$. Добиваме, $c_1=7$, $c_2=-5$ и оттука $a_1=13, a_2=-11$ и $b_1=11, b_2=-9$. Затоа, можните вредности за $a+b+c$ се: $13+11+7=31$ и $-11-9-5=-25$.

752А. Реши ја равенката: $\left(x^2-8\right)\left(x+1\right)^2+x^2=0$.

Решение. -1 не е решение на равенката па затоа таа е еквивалентна со: $x^2-8+\frac{x^2}{(x+1)^2}=0$. Ја трансформираме во $\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+2\frac{x^2}{x+1}-8=0$, односно во $\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\frac{x^2}{x+1}-8=0$. Ја воведуваме смената $t=\frac{x^2}{x+1}$ и ја добиваме $t^2+2t-8=0$, чиишто решенија се 2 и -4. Од $\frac{x^2}{x+1}=2$ ги добиваме $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, а од $\frac{x^2}{x+1}=-4$ го добиваме $x_3=-2$.



753А. Над отсечката BC, како основа, во различните полурамнини конструирани се рамнокраките триаголници ABC и DCB, пришто $\angle DBA=90°$. Нека M е средината на основата BC. Нека E е точка од страната AB, P е на отсечката MC и F е на полуправата AC така што C е меѓу A и F, пришто $\angle EDB=\angle PDA=\angle FDC$. Докажи дека P е средина на отсечката EF и DP и EF се заемно нормални.

Решение. Нека $\angle EDB=\angle PDA=\angle FDC=\phi$. Триаголниците EBD, PMD и FCD се правоаголни и оттука: $\cos\phi=\frac{\overline{BD}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{FD}}$. Тогаш, од $\overline{BD}=\overline{CD}$ следува дека $\overline{ED}=\overline{FD}$, па триаголникот DFE е рамнокрак. Уште, $\angle FDE=\angle FDC+\angle CDE=\angle EDB+\angle CDE=\angle CDB$, па триаголниците DCB и DFE се слични, со коефициент на сличност $\cos\phi$.

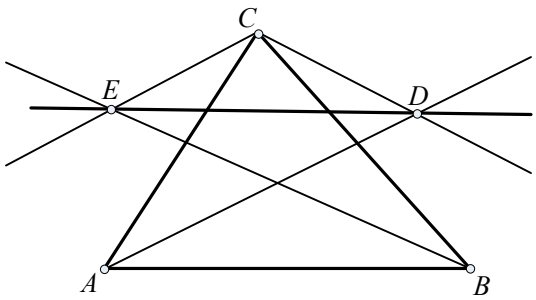
Од $\angle PDE=\angle PDM+\angle MDE=\angle EDB+\angle MDE=\angle MDB$, следува дека DP е симетрала на аголот FDE, па затоа DP и EF се заемно нормални. Од тоа што DM е висина во триаголникот DCB, DP е симетрала на аголот FDE и $\cos\phi=\frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}$, следува дека DP е висината во триаголникот DFE па затоа P е средина на отсечката EF.

754Б. Најди ги сите реални броеви c такви што равенката

$$\left(x^2-4x-c\right)^2-8x^2+32x+8c=0$$

има точно две реални решенија.

Решение. Равенката е еквивалентна со $(x^2-4x-c)^2-8(x^2-4x-c)=0$. Ако $t=x^2-4x-c$, добиваме $t^2-8t=0$ и оттука $x^2-4x-c=0$ или $x^2-4x-c=8$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1=4(c+4)$, а на втората $D_2=4(4+c+8)=4(c+12)$. Равенката има точно две реални решенија ако: 1) $\begin{cases}D_1>0\\D_2<0\end{cases}$ или 2) $\begin{cases}D_1=0\\D_2=0\end{cases}$ или 3) $\begin{cases}D_1<0\\D_2>0\end{cases}$. Решение има третиот систем т.е. $c\in(-12,-4)$.



755Б. Во остроаголниот триаголник ABC повлечени се симетралите на внатрешните агли во темињата A и B. Од темето C се повлечени прави паралелни со овие симетрали кои нив ги сечат во точките D и E, соодветно. Ако правата DE е паралелна со AB докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

Решение. Бидејќи AD е симетрала на $\angle A$, користејќи ја паралелноста $AB \parallel ED$ и $AD \parallel EC$ добиваме $\angle CAD=\angle BAD=\angle DEC$. Од ова добиваме дека точките A, D, C и E лежат на иста кружница **(3)**. Слично, добиваме дека точките B, D, C и E лежат на иста кружница. Значи A, B, D, C и E лежат на иста кружница. Од паралелноста $AD \parallel EC$ и $BE \parallel CD$ следи $\angle DAC=\angle DEC=\angle EDA=\angle ABE$, од каде го добиваме тврдењето во задачата .

III година

756АБ. Најди ги решенијата на системот:

$$\begin{cases}(x+3)^3=3-2y\\ z^2+4y^2=8y\\ (2z-x)(x+3)=5x+16\end{cases}$$ за кои $z\ge 0$.

Решение. Ако ја разгледаме втората равенка од системот како квадратна во однос на y, нејзината дискриминанта е $D=64-16z^2$. Од $64-16z^2\ge 0$, добиваме дека $|z|\le 2$.Од условот $z\ge 0$ имаме $0\le z\le 2$. Да ја претставиме третата равенка на системот како квадратна во однос на x: $x^2-2(z-4)x-6z+16=0$. За нејзината дискриминанта D имаме $\frac{1}{4}D=(z-4)^2+6z-16\ge 0$.

Оттука, имајќи предвид дека $z\ge 0$, добиваме $z\in\{0\}\cup[2,\infty)$. Но $0\le z\le 2$, па $z=0$ и $z=2$. Решенијата се $(-4,2,0)$ и $(-2,1,2)$.

757АБ. Нека a,b и c се должини на страни на триаголник. Определи го аголот спроти страната со должина c, ако е исполнето равенството $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=c^2$.

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во обликот

$$a^3+b^3+c^3=c^2(a+b+c)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=c^3+c^2(a+b)\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)=c^2(a+b)$$

Бидејќи a и b се должини на страни во триаголник, имаме $a+b\ne 0$, па

$$c^2=a^2-ab+b^2 \quad \text{(i)}.$$

Од косинусната теорема имаме дека

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (ii)

Од (i) и (ii) следува дека $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, односно $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

758А. Ако за аглите во триаголник α и β важи релацијата

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

тогаш $\alpha = \beta$. Докажи!

Решение. Бидејќи α и β се агли во триаголник, за нив важи $0 < \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. На интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, синусната функција е строго растечка, косинусната функција е строго опаѓачка и двете функции се позитивни.

а) Ако $\alpha > \beta$ тогаш $\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$ и важат неравенствата $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) > 0$, $0 < \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

Оттука следува дека $\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right) > 0$ и $0 < \cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right)$. Од овие две неравенства (со нивно множење), се добива

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right) > \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

б) Ако $\alpha < \beta$, аналогно како во а), се докажува дека важи

$$\sin^{2014}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^{2015}\left(\frac{\beta}{2}\right) < \sin^{2014}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos^{2015}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

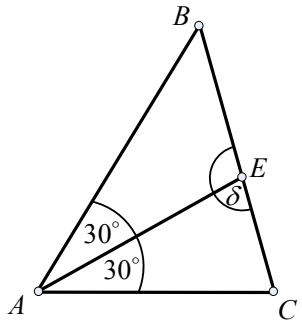
Значи, равенството е можно акко $\alpha = \beta$.

759А. Во тетраедарот $ABCD$, со врв A важи

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 60^\circ.$$

Докажи дека важи неравенството

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} \le \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD}.$$



Решение. Нека AE е симетрала на аголот А, на страната АВС. Со примена на синусната теорема, на триаголниците АВЕ и АСЕ, добиваме $\frac{\overline{AB}}{\sin(180-\delta)} = \frac{\overline{BE}}{\sin 30}; \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = \frac{\overline{CE}}{\sin 30}$.

Оттука следува дека $2\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sin\delta}; 2\overline{CE} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta}$

Со собирање на последните две еднаквости, добиваме $2\left(\overline{BE} + \overline{CE}\right) = 2\overline{BC} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\sin\delta} \ge \overline{AB} + \overline{AC}$.

Значи

$$2\overline{BC} \ge \overline{AB} + \overline{AC} \qquad (1)$$

Аналогно се докажува дека

$$2\overline{BD} \ge \overline{AB} + \overline{AD} \qquad (2)$$

и

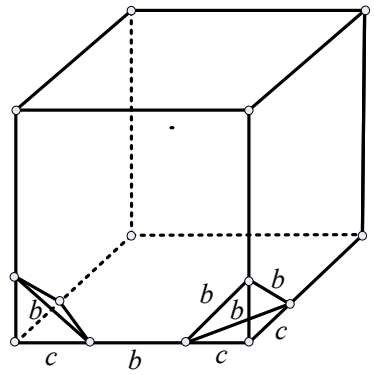
$$2\overline{CD} \ge \overline{AC} + \overline{AD} \qquad (3)$$

Со собирање на неравенствата (1), (2) и (3), се добива бараното неравенство.

760Б. Без користење на калкулатор, докажи дека важи неравенството

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

Решение. Бидејќи $\log_2\pi+\log_4\pi=\log_2\pi+\frac{1}{\log_\pi 4}=\log_2\pi+\frac{1}{2\log_\pi 2}=\log_2\pi+\frac{\log_2\pi}{2}=\frac{3\log_2\pi}{2}$, доволно е да докажеме дека $3\log_2\pi<5$, т.е. $\pi^3<2^5$



Ова неравенство лесно се докажува со користење на тривијалното неравенство $\pi<3{,}15$

Имено, $\pi^3<3{,}15^2\cdot 3{,}15<10\cdot 3{,}2=2^5$. Со тоа задачата е решена.

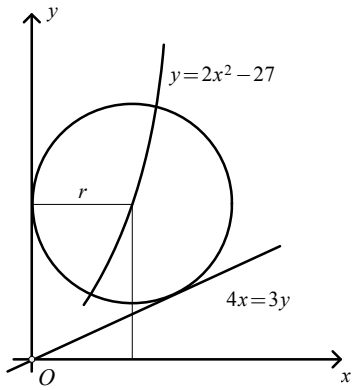
761Б. Од коцка со раб 3 см., отсечени се сите 8 темиња, така што новодобиеното тело има 24 темиња и сите негови рабови се со еднаква должина. Одреди го волуменот на новодобиеното тело.

Решение. Од равенките $b+2c=a=3$ и $b=c\sqrt{2}$, добиваме дека $c=\frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$ см

Волуменот на секој од 8-те тетраедри е $V_T=\frac{c^3}{6}=\frac{9\left(10-7\sqrt{2}\right)}{8}$ см^3. Волуменот на коцката е $V_K=a^3=27$ см^3. Конечно, волуменот на телото е $V=V_K-8V_T=63\left(\sqrt{2}-1\right)$ см^3.

IV година

762АБ. Правите $x=0$ и $4x=3y$ се тангенти на кружница која се наоѓа во првиот квадрант и има центар на параболата $y=2x^2-27$. Најди го радиусот на кружницата.



Решение. Нека (a,b) се координатите на центарот на кружницата и r е нејзиниот радиус. Да забележиме дека кружницата лежи во полурамнината определена со правата $4x=3y$ и точката $(0,1)$ (т.е. со позитивниот дел на y-оската), па важи $3a-4b>0$. Бидејќи кружницата се наоѓа во првиот квадрант, следува дека $a>0$ и $b>0$. Од тоа што y-оската е тангента следува дека $r=a$, а бидејќи центарот се наоѓа на параболата $y=2x^2-27$ следува дека $b=2a^2-27=2r^2-27$, па координатите на центарот се $(r,2r^2-27)$. Растојанието од центарот до y-оската е r а до правата $4x=3y$ е $\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6r^2-4r-81}{5}$. Бидејќи двете прави се тангенти, следува дека $r=\frac{6r^2-4r-81}{5}$, и оттука добиваме $6r^2-9r-81=0$. Решенија на последнава равенка се -3 и $\frac{9}{2}$, па бараниот радиус е $\frac{9}{2}$.

763АБ. Аглите на конвексниот n- аголник се $\alpha, 2\alpha,..., n\alpha$. Најди ги сите можни вредности за n и соодветните вредности за α.

Решение. Јасно е дека $n\geq 3$. Збирот на аглите во конвексниот n- аголник е $(n-2)\pi$ (n-аголникот можеме да го поделиме на $n-2$ триаголници). Од друга страна $\alpha+2\alpha+...+n\alpha=\alpha(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$.

Од равенката, $(n-2)\pi=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$ добиваме $\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}$ и $n\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n+1}<\pi$. Но, тогаш $\frac{2(n-2)}{n+1}<1$, т.е. $n<5$.Сега за $n=3$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{6}$, а за $n=4$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{5}$.

764А. Најди $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, ако $a_1=1$, $a_{n+1}a_n=4(a_{n+1}-1)$, за $n\geq 1$.

Решение. Бидејќи $a_{n+1}a_n=4(a_{n+1}-1)$, $a_{n+1}=\frac{4}{4-a_n}$. Ако на двете страни одземеме 2, имаме $a_{n+1}-2=\frac{4}{4-a_n}-2=\frac{2(a_n-2)}{4-a_n}$. Оттука, $\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{4-a_n}{2(a_n-2)}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}$. Па, низата $(\frac{1}{a_n-2})$ е аритметичка прогресија со почетен член $\frac{1}{a_1-2}=-1$ и разлика $d=-\frac{1}{2}$. Па,

$\frac{1}{a_n-2}=-1+(n-1)\left(\frac{-1}{2}\right)=-\frac{n+1}{2}$, од каде $a_n=2\cdot\frac{n}{n+1}$. Конечно,

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\left(2\cdot\frac{2}{3}\right)\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)\ldots\left(2\cdot\frac{n}{n+1}\right)=\frac{2^n}{n+1}.$$

765А. Најди ги сите природни броеви n така што $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ е цел број.

Решение. Бидејќи

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}=\frac{n!+n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3+\ldots+n(n-1)+n+1}{n!}=\frac{(n-1)S+n+1}{n!}$$

добиваме дека $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}=\frac{(n-1)S+(n+1)}{(n-1)!}$. За бројот $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k!}$ да биде цел треба $(n-1)!|(n-1)S+n+1$. Бидејќи $(n-1)|(n-1)!$ и $n-1|(n-1)S$ следува дека мора $n-1|n+1$.Јасно $n-1|n-1+2$ па оттука $n-1|2$. Значи $n=2$ и $n=3$.)

766Б. Ако $x^2=x+1, n\geq 2$ тогаш докажи дека $x^n=F_nx+F_{n-1}$ каде $F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ за секој природен број n.

Решение. Ќе докажеме со помош на математичка индукција по n. За $n=2$ добиваме $x^2=F_2x+F_1=x+1$.

Сега, нека претпоставиме за $n>2$ е исполнето $x^{n-1}=F_{n-1}x+F_{n-2}$.

Имаме

$$x^n=x\cdot x^{n-1}=x\cdot(F_{n-1}x+F_{n-2})=x^2F_{n-1}+xF_{n-2}=(x+1)F_{n-1}+xF_{n-2}=x(F_{n-1}+F_{n-2})+F_{n-1}=$$
$$=xF_n+F_{n-1}.$$

767Б. Ако $n\,|\,a-b$ докажи дека $n^2\,|\,a^n-b^n$. Дали важи обратното ?

Решение. Бидејќи $n|a-b$ следува дека постои цел број c така што $a=nc+b$.

Од Биномната формула добиваме

$$a^n-b^n=(b+nc)^n-b^n=b^n+\binom{n}{1}b^{n-1}nc+\binom{n}{2}b^{n-2}n^2c^2+\ldots+\binom{n}{n}n^nc^n-b^n=$$
$$=n^2\left(b^{n-1}c+\binom{n}{2}b^{n-2}c^2+\ldots+\binom{n}{n}n^nc^n\right)$$

Значи, $n^2|(a^n-b^n)$.

Обратно не важи бидејќи $3^n\equiv 1^4 \pmod{4^2}$ но 3 и 1 немат ист остаток при делење со 4.

Регионален натпревар по математика, 14.II-2015 година

I година

768АБ Ако $xyz = 1$, докажи дека

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4\,.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
&\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=\\
&=\left(x+yz\right)^2+\left(y+xz\right)^2+\left(z+xy\right)^2-\left(x+yz\right)\left(y+xz\right)\left(z+xy\right)=\\
&=x^2+2xyz+y^2z^2+y^2+2xyz+x^2z^2+z^2+2xyz+x^2y^2-\\
&\quad-\left(xyz+x^2y^2+x^2z^2+x^3yz+y^2z^2+xy^3z+z^2+xyz\right)=\\
&=6+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2-\left(2+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\right)=\\
&=4\ (5\ \text{поени})
\end{aligned}$$

769АБ Нека a и b се природни броеви такви што бројот 24 е делител на бројот $ab+1$. Докажи дека $a+b$ е делив со 24.

Решение. Броевите 3 и 8 се заемно прости. Доволно е да се докаже дека $a+b$ е делив со 3 и 8.

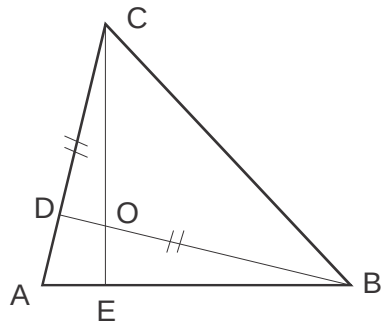
Од условот на задачата бројот ab при делење со 3 има остаток 2. Тоа е можно ако бројот a при делење со 3 има остаток 2 а бројот b при делење со 3 има остаток 1 или обратно. Во секој случај добиваме дека $3 \mid a+b$.

Исто така, од условот на задачата бројот ab при делење со 8 има остаток 7. Тоа е можно во два случаи.

Случај 1. Бројот a при делење со 8 има остаток 1 а бројот b при делење со 8 има остаток 7 или обратно. Во двете можности $8 \mid a+b$.

Случај 2. Бројот a при делење со 8 има остаток 3 а бројот b при делење со 8 има остаток 5 или обратно. Во двете можности $8 \mid a+b$.

Од добиените реалции $3 \mid a+b$ и $8 \mid a+b$, како што веќе кажавме, $(3,8)=1$ добиваме $24 \mid a+b$, што требаше да се докаже.



770А. Висините на остроаголниот триаголник ABC се сечат во точката О, при што $\overline{OC}=\overline{AB}$. Колкав е аголот ACB ?

Решение: Нека подножјето на висината од B ја означиме со D, а на онаа од C со E. Тогаш триаголникот ABD е складен со триаголникот OCD (правоаголни, $\overline{OC}=\overline{AB}$ од условот на задачата, и $\measuredangle ABD=\measuredangle ACE$ како агли со нормални краци).Од овде $\overline{BD}=\overline{CD}$, па триаголникот BCD е рамнокрак правоаголен.Така, $\measuredangle DCB=\measuredangle CBD=45^\circ$ па бараниот агол е 45.

771Б. Бојан му вели на Павел: "Јас имам 2 пати повеќе години отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Кога ти ќе имаш толку години колку јас сега, тогаш збирот на нашите години ќе е 63." Колку години има секој од нив?

Решение. Ако со x ги означиме годините на Бојан, а со y годините на Павел, тогаш од условите на задачата го составуваме следниов систем линеарни равенки:

$$\begin{cases} x = 2\left(y - \left(x - y\right)\right) \\ x + \left(x + \left(x - y\right)\right) = 63 \end{cases}$$

или $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - y = 63 \end{cases}$. Ако го решиме овој систем, добиваме дека Бојан има 28 години, а Павел 21 година.

772А. Најди го најголемиот природен број којшто е помал од збирот на квадратите на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ е бараниот број, односно $a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + \ldots + a_1^2 + a_0^2$. Тогаш $a_n(10^n - a_n) + \ldots + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0$ **.** Сите собироци освен последниот на левата страна се позитивни, а $a_0(1 - a_0) \geq -72$ **.** Ако барем една цифра a_k за $k \geq 2$ е различна од нула(бројот е барем трицифрен), тогаш $a_k(10^k - a_k) > 10^k - 9 > 90$, а тоа значи дека сумата од левата страна е позитивна**.** Според тоа, тој број мора да е помал од 100. Бидејќи $99 < 9^2 + 9^2$ тој број (99) е бараното решение**.**

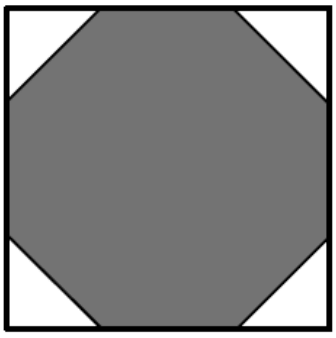
773Б Плоштината на основата на една права триаголна призма е 4см^2, а плоштините на бочните површини се 9, 10 и 17 см^2. Определи го волуменот на призмата.

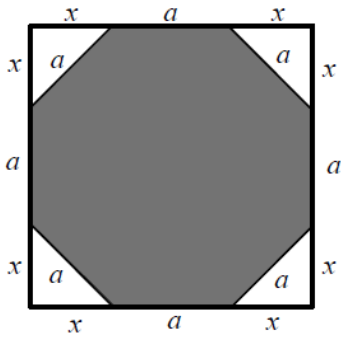
Решение: Нека a, b, c се должините на страните на основата на призмата, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ е полупериметарот на основата а h е нејзината висина. Од условот имаме $a = \dfrac{9}{h}$, $b = \dfrac{10}{h}$, $c = \dfrac{17}{h}$ и $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4$. Ако вредностите за a, b, c ги замениме во последното равенство имаме $\sqrt{\dfrac{18}{h} \cdot \dfrac{9}{h} \cdot \dfrac{8}{h} \cdot \dfrac{1}{h}} = 4 \quad \Rightarrow \quad 16h^2 = 18 \cdot 9 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 9^2 \quad \Rightarrow \quad h = 9.$

Добиваме $V = Bh = 4 \cdot 9 = 36sm^2$.

II Година

774АБ. Правилен осумаголник со должина на страна a е впишан во квадрат сострана 1, како што е прикажано на цртежот. Докажи дека $a^2 + 2a = 1$.





Решение. Квадратот е составен од осумаголник и четири рамнокраки правоаголни триаголници, со хипотенуза a и катети $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ Според тоа, од страната на квадратот имаме $a+2\frac{a}{\sqrt{2}}=1$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)=1$, т.е. $a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1$. Сега, $a^2+2a=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)=2-2\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2=1$, што требаше да се докаже.

775А. Кога секој корен на равенката $x^2+px+q=0$ ќе се зголеми за 1, се добиваат корените на равенката $x^2-p^2x+pq=0$. Определи ги p и q.

Решение. Од Виетовите формули за првата равенка имаме $\alpha+\beta=-p$ и $-\alpha\beta=q$, а за втората, согласно условот на задачата, $\alpha+\beta+2=p^2$ и $(\alpha+1)(\beta+1)=pq$. Тогаш, $p^2+p-2=0$ и $q+p^2-1=pq$. Од првата равенка добиваме $p_1=1, p_2=-2$, а втората е еквивалентна со $(p-1)q=p^2-1$. Ако $p=1$, тогаш q е произволен реален број Ако $p=-2$ тогаш $q=-1$.

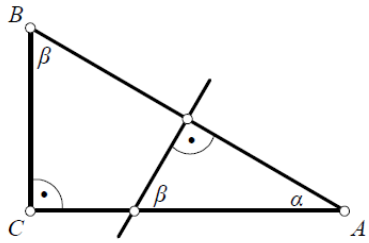
776Б. Кога секој корен на $x^2+3x-7=0$ ќе се зголеми со реципрочната вредност на другиот корен, се добиваат корените на равенката $2x^2+ax+b=0$. Определи ги a и b.

Решение. Нека α и β се корените на $x^2+3x-7=0$. Тогаш за нив важи $\alpha+\beta=-3$ и $\alpha\beta=-7$. Според условот, корени на $2x^2+ax+b=0$ се $\alpha+\frac{1}{\beta}$ и $\beta+\frac{1}{\alpha}$. Тогаш:

$$a=-2\left(\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(-(-3)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=2\left(3-\frac{-3}{-7}\right)=\frac{36}{7} \text{ и}$$

$$b=2\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\right)=2\left(-7-\frac{1}{7}+2\right)=-\frac{72}{7}.$$

777АВ. Во правоаголниот триаголник ABC на катетата AC е избрана точка M така што $\overline{AM}=2\overline{MC}$. Определи го најмалиот агол на триаголникот ABC, ако M лежи на симетралата на хипотенузата AB.



Решение. Со O ќе ја означиме средината на хипотенузата AB. Од условот на задачата правата OM е симетрала на AB. Јасно е дека триаголникот OMA е сличен со триаголникот BCA (имаат исти агли) **(5 поени)**. Ќе воведеме стандардни ознаки $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$. Тогаш, повторно од условот на задачата, $\overline{OA}=\frac{1}{2}c$ и $\overline{AM}=\frac{2}{3}b$, заради погорната сличност имаме $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}b}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{b}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}c^2=\frac{2}{3}b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2}=\frac{3}{4}$ **(10 поени)**. Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен, имаме $\cos^2\alpha=\frac{b^2}{c^2}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ **(8 поени)**. Според тоа, аглите во триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, а најмалиот меѓу нив има 30° **(2 поени)**.

778А. Реши го системот $\begin{cases} xyz = x+y+z \\ yzt = y+z+t \\ ztu = z+t+u \\ tux = t+u+x \end{cases}$ во множеството реални броеви.

Решение. Ако од првата равенка ја одземеме втората, добиваме $yz(x-t) = x-t$, односно $(yz-1)(x-t) = 0$. Можни случаи се $yz-1=0$ или $x-t=0$. Ако $yz-1=0$, со замена во првата равенка добиваме $0 = y+z$. Тогаш, од $yz-1=0$ и $y+z=0$ следува дека $y^2 = -1$, па во овој случај нема решение. Затоа, важи $x-t=0$, т.е. $x=t$. Ако се повтори постапката со втората и третата равенка, како и со третата и четвртата добиваме $x=t=y=z$. Тогаш, $x^3 = 3x$, $x(x^2-3)=0$ и оттука множеството решенија на системот е $\{(0,0,0,0),(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}$.

779Б. Реши го системот $\begin{cases} \frac{3xy}{x+y} = 5 \\ \frac{2xz}{x+z} = 3 \\ \frac{yz}{y+z} = 4 \end{cases}$ во множеството реални броеви. .

Решение. Бидејќи $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, дадениот систем е еквивалентен со $\begin{cases} \frac{3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 5 \\ \frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} = 3 \\ \frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}} = 4 \end{cases}$,

односно со $\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x} = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$. Тогаш, ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $\frac{1}{y}-\frac{1}{z} = -\frac{1}{15}$. Од $\begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{1}{z} = -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{4} \end{cases}$ добиваме $\begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{19}{120} \\ \frac{1}{y} = \frac{11}{120} \end{cases}$. Тогаш $\frac{1}{x} = \frac{3}{5} - \frac{11}{120} = \frac{61}{120}$. Конечно, $x = \frac{120}{61}$, $y = \frac{120}{11}$ и $z = \frac{120}{19}$.

III година

780АБ. За реалните броеви $x,\ y \in (0,\pi)$ е исполнето равенството

$$\cos 2x \cos y - \cos 2y \cos x = \cos y - \cos x.$$

Докажи дека $x = y$.

Решение. Не е тешко да се види дека даденото равенство може да се запише во облик

$$\cos y(1-\cos 2x)-\cos x(1-\cos 2y)=0.$$

Заради равенствата $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ и $1-\cos 2y=2\sin^2 y$, последното равенство го добива обликот $\cos y\sin^2 x-\cos x\sin^2 y=0$, **(5)** а заради основната тригонометриска релација, во облик

$$\cos y\cos^2 x-\cos x\cos^2 y=\cos y-\cos x$$

$$\cos y\cos x(\cos x-\cos y)=\cos y-\cos x.$$

Конечно тоа може да се запише во облик $(\cos y-\cos x)(\cos x\cos y+1)=0$.

Но, $x,y\in(0,\pi)$, па $\cos x\cos y+1>0$, и според тоа

$$\cos y-\cos x=0, \qquad (1)$$

т.е. $\cos x=\cos y$. Функцијата $f(t)=\cos t$ на интервалот $(0,\pi)$ е монотоно опаѓачка, па равенството $\cos x=\cos y$ е можно само ако $x=y$.

Забелешка. Решението од (1) може да продолжи со примена на равенството

$$\cos y-\cos x=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}.$$

781А. Нека важи $0<x<1$ и $a,b>0$. Докажи дека $a^x b^{1-x}<a+b$.

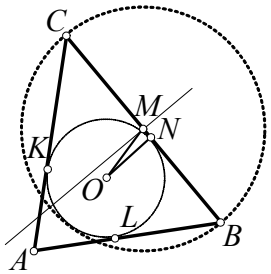
Решение. Да го означиме бараното неравенство $a^x b^{1-x}<a+b$ со (1). Претпоставуваме дека $b\le a$. **...(5)** Ако го поделиме неравенството (1) со a, добиваме $\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}<1+\frac{b}{a}$, односно $\left(\frac{b}{a}\right)^{1-x}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)<1.....(2)$. Со оглед на тоа дека $0<\frac{b}{a}\le 1$ и $0\le 1-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}<1$, неравенството (2) е точно, а со тоа и еквивалентното неравенство (1) во случај кога $b\le a$. **...(10)** Нека сега $a<b$. Го делиме неравенството (1) со b и добиваме $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}<1+\frac{a}{b}$, односно $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x}\right)<1.....(3)$. Од тоа што $0<\frac{a}{b}<1$, важи и $0<\left(\frac{a}{b}\right)^{x}<1$ и $0<1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-x}<1$, па сигурно важи неравенството (3), а со тоа и неравенството (1)..

782А. Реши ја равенката $\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x=2$.

Решение: Равенката ќе ја запишеме во следниов облик $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$. Да забележиме дека $\cos^5 x\le\cos^2 x$, $\sin^5 x\le\sin^2 x$.Оттука добиваме дека левата страна на последното равенство $\sin^5 x+\cos^5 x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Од друга страна, имено десната $2-\sin^4 x\ge 1$, па дадената равенка е еквивалентна на системот равенки: $\begin{cases}\sin^5 x+\cos^5 x=1\\ 2-\sin^4 x=1\end{cases}$.

За $\sin x = \pm 1$ добиваме дека $\cos^5 x = 0$ или $\cos^5 x = 2$. Од последниве равенки ги добиваме бараните решенија во облик $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

783АБ. Страната BC на триаголникот ABC има должина a а радиусот на впишаната кружница r. Определи ја плоштината на триаголникот, ако впишаната кружница ја допира кружницата со дијаметар BC.



Решение. Нека O е центар на впишаната кружница, а M е средина на отсечката BC. Нека кружницата k впишана во триаголникот ABC ги допира страните AC, AB и BC во точките K, L и N соодветно. Ќе воведеме ознаки $\overline{AK} = \overline{AL} = x$, $\overline{CK} = \overline{CN} = y$ и $\overline{BL} = \overline{BN} = z$. Притоа, од условот на задачата имаме $\overline{OM} = \frac{a}{2} - r$ и $y + z = a$. Но тогаш

$$\overline{NM} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{ON}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 - r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar},$$

од каде што следува дека едната од отсечките y и z има должина $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$ а другата $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ar}$.

Од Хероновата формула имаме $P = \sqrt{(x+y+z)xyz}$, а од формулата за пресметување на плоштина $P = pr$, каде $p = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z$, имаме $P = (x+y+z)r$. **(5)** Според тоа

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)r, \qquad xyz = (x+a)r^2, \qquad arx = (x+a)r^2$$

Од последното равенство имаме $x = \frac{ar}{a-r}$, па за плоштината добиваме

$$P = (x+y+z)r = (x+a)r = \left(\frac{ar}{a-r} + a\right)r = \frac{a^2 r}{a-r},$$ што требаше да се определи.

784Б. Реши ја равенката $\log_{\frac{1}{8}}(2x) - 4\log_{\frac{1}{4}} x \cdot \log_8 x = 0$.

Решение. Имајќи во предвид дека $\log_{\frac{1}{8}}(2x) = \log_{\frac{1}{8}} 2 + \log_{\frac{1}{8}} x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x$, $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x$ и $\log_8 x = -\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x$ **...(10)**, равенката можеме да ја запишеме во обликот: $2\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0$.

Решенијата на квадратната равенка која одговара на горната равенка се: $\log_{\frac{1}{2}} x_1 = \frac{1}{2}$ и $\log_{\frac{1}{2}} x_2 = -1,$ од каде за решенијата на првата равенка имаме: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = 2.$

785Б. Реши ја неравенката $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}.$

Решение. Левата страна на неравенката е дефинирана и позитивна за секој реален број x, додека десната страна е дефинирана за секој број $x \neq -2$, при што изразот може да добие и негативни вредности**...(5)**. Тогаш

1. Ако десната страна е негативна односно ако $2^{x+2} < 1,$ неравенството е исполнето за секое $x < -2$
2. Ако $x > -2$ тогаш равенката е еквивалентна со следнава неравенка

$$2^{2x} + 3 \leq 2^{x+2} - 1, \text{ односно } 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 \leq 0.$$

Ако се изврши замена $2^{2x} = t$, неравенката го добива обликот

$$t^2 - 4t + 4 \leq 0 \text{ или } (t-2)^2 \leq 0.$$

Нејзино единствено решение е $t = 2$ односно $x = 1.$

Конечното решение на почетната неравенка е $x \in (-\infty, -2) \cup \{1\}.$

IV Година

786А. Одреди го 2015-от член во низата 1, 2, -2, 3, -3, 3, 4, -4, 4, -4, 5, -5, 5, -5, 5, 6,-6, 6, -6,6, -6,...

Решение. Нека 2015-от член во низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување во низата на број со апсолутна вредност 2 има реден број 3; на број со апсолутна вредност 3 има реден број 6; на број со апсолутна вредност 4 има реден број 10 и.т.н.**(5)**

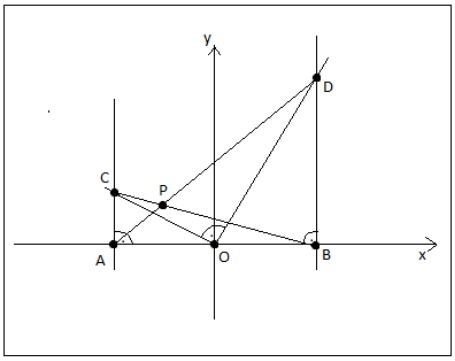
Последното појавување на број чија апсолутна вредност е k има реден број $\frac{k(k+1)}{2}$.

Бидејќи $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ и $\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$, следува дека на 2015-та позиција во низата е бројот $(-1)^{2015-1953+1} 63 = -63.$

787Б. Пресметај го производот $P = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right).$

Решение. Множејќи ги двете страни на равенството со $1-\frac{1}{2}$, добиваме $\left(1-\frac{1}{2}\right)P = 1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$.

Оттука следува дека $P = 2\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right).$



788А. Дадени се точките A(-2, 0) и B(2, 0). Точките C и D припаѓаат на нормалите на отсечката AB во точките A и B соодветно, при што аголот COD е прав. Одреди го геометриското место на точки

на пресекот на правите AD и BC.

Решение. Нека точката C има координати C(-2, c). Равенката на правата OC е $y = -\frac{c}{2}x$.

Бидејќи аголот COD е прав, равенката на правата OD е $y = \frac{2}{c}x$ и точката D има координати $D\left(2, \frac{4}{c}\right)$. Равенката на правата AD е $y = \frac{1}{c}\left(x+2\right)$, додека на правата BC е $y = -\frac{c}{4}\left(x-2\right)$.

Координатите на пресечната точка P, на правите AD и BC, се решение на системот $\begin{cases} y = \frac{1}{c}\left(x+2\right) \\ y = -\frac{c}{4}\left(x-2\right) \end{cases}$.

Со елиминација на параметарот *c* од равенките, се добива равенката $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Од **произволноста на *c***, следува дека геометриското место е **елипсата** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

789Б. Нека S_n, S_{2n}, S_{3n} се сумите на првите $n, 2n, 3n$ членови на аритметичка прогресија, соодветно. Докажи дека $S_{3n} = 3\left(S_{2n} - S_n\right)$

Решение. $a_{2n} = a_1 + (2n-1)d = a_1 + (n-1)d + nd = a_n + nd$

$a_{3n} = a_1 + (3n-1)d = a_1 + (n-1)d + 2nd = a_n + 2nd$

$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$,

$S_{2n} = \frac{2n}{2}\left(a_1 + a_{2n}\right) = n\left(a_1 + a_n + nd\right) = n\left(\frac{2S_n}{n} + nd\right) = 2S_n + n^2 d$,

$S_{3n} = \frac{3n}{2}\left(a_1 + a_{3n}\right) = \frac{3n}{2}\left(a_1 + a_n + 2nd\right) = \frac{3n}{2}\left(\frac{2S_n}{n} + 2nd\right) = 3S_n + 3n^2 d$

$3\left(S_{2n} - S_n\right) = 3\left(2S_n + n^2 d - S_n\right) = 3\left(S_n + n^2 d\right) = S_{3n}$

790АВ . Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат различни природни броеви x_1, x_2 , ..., x_n, такви што $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2013}$.

Решение. Задачата ќе ја докажеме со методот на математичка индукција. Имаме $\frac{1}{2013} = \frac{1}{3 \cdot 671} = \frac{1}{674}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{671}\right) = \frac{1}{3 \cdot 674} + \frac{1}{671 \cdot 674}$, равенството важи за $n = 2$. **(5)**

Нека тврдењето важи за $n = k$, односно постојат различни природни броеви x_1, x_2 , ..., x_k, такви што $\frac{1}{2013} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k}$. Тогаш $\frac{1}{2013} = \frac{1}{4026} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \ldots + \frac{1}{2x_k}$.

Јасно $x_i \neq 2013$ односно $2x_i \neq 4026$ за сите $i = 1, 2.., n$ и $2x_1, 2x_2$, ..., $2x_k$ се различни природни броеви. Следува тврдењето важи и за $n = k + 1$.

Сега, според принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број $n \in \mathbb{N}$.

791АБ. Нека a, b, c се попарно различни реални броеви. Докажи дека барем една од равенките $\begin{array}{l}(x-a)(x-b)=x-c\\(x-b)(x-c)=x-a\\(x-c)(x-a)=x-b\end{array}$ има реални решенија.

Решение 1. Ќе ги разгледаме квадратните функции

$$\begin{aligned}f_1(x)&=(x-a)(x-b)-(x-c)\\f_2(x)&=(x-b)(x-c)-(x-a)\\f_3(x)&=(x-c)(x-a)-(x-b)\end{aligned}$$

Нека тврдењето на задачата не е точно. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ немаат корени. Но тогаш, бидејќи најстарите коефициенти им се единици, добиваме дека $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Од особините на реални броеви имаме $f_1(x) + f_2(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Од друга страна

$$\begin{aligned}&f_1(x)+f_2(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)+(x-b)(x-c)-(x-a)=\\&=(x-b)[(x-a)+(x-c)]-[(x-a)+(x-c)]\\&=[2x-(a+c)](x-b-1)\end{aligned}$$

има реални корени $x_{\circ 1} = b+1$ и $x_{\circ 2} = \dfrac{a+c}{2}$. Значи, не е исполнето $f_1(x_{\circ 1}) > 0$ и $f_2(x_{\circ 1}) > 0$, односно $f_1(x_{\circ 2}) > 0$ и $f_2(x_{\circ 2}) > 0$. Заради добиената контрадикција, постојат два полиноми, односно имаме две равенки кои имаат реален корен.

Решение 2. Како и во претходното решение ќе претпоставиме дека на пример дека $f_2(x)$ и $f_3(x)$ немаат реални решенија.(10 поени од почетокот на решение 1) Тогаш нивните дискриминанти се негативни, т.е. $(b+c+1)^2 - 4(bc+a) < 0$, т.е. $(b+c+1)^2 < 4(bc+a)$

$$(c+a+1)^2 - 4(ca+b) < 0, \text{ т.е. } (c+a+1)^2 < 4(ca+b).$$

Истите неравенства ќе ги запишеме во облик $\begin{array}{l}(b-c-1)^2 < 4a-4b\\(c-a+1)^2 < 4b-4a\end{array}$.

Броевите од десната страна се позитивни, а нивниот збир е еднаков на нула, што не е можно.

Заради добиената контрадикција, добиваме дека барем две од дадените равенки имаат реални решенија.

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ЗА СРЕДНО ОБРАЗОВАНИЕ, 13.II-2016 година
I година

792АБ. Да се определат сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ така што $\overline{cda}-\overline{abc}=297$ и $a+b+c=23$.

Решение. Равенката $\overline{cda}-\overline{abc}=297$ можеме да ја запишеме во облик
$99(c-a)+10(d-b)=3\cdot 99$.

Сега, според теоремите за деливост во множеството природни броеви $99|10(d-b)$. Бидејќи $d-b$ или $b-d$ е цифра, тоа е можно ако и само ако $10(d-b)=0$, т.е. $d=b$. Но тогаш $99(c-a)=3\cdot 99$, од каде добиваме $c-a=3$, т.е. $c=a+3$. Ако пак сега замениме во $a+b+c=23$ добиваме

$$a+b+a+3=23, \qquad b+2a=20, \qquad b=2(10-a).$$

Бидејќи b е цифра, $b\in\{0,2,4,6,8\}$, па според тоа $10-a\le 4$, т.е. $a\ge 6$. Бидејќи и c е цифра од равенството $c=a+3$, добиваме дека $a=6$. Сега е јасно дека $c=9$ и $b=8$.

Значи, единствениот број кој го задоволува условот од задачата е бројот $\overline{abcd}=6898$.

793Б. На еден квиз натпреварувачот одговара на 24 прашања. Ако точно одговори на поставеното прашање тој освојува 4 поени, а во спротивно губи 1,4 поени. На колку прашања натпреварувачот не го знаел одговорот, ако на крајот од натпреварувањето тој освоил 69 поени?

Решение. Нека x е бројот на точно одговорени прашања, а y бројот на неточно одговорени прашања. Јасно $x+y=24$, односно $y=24-x$. Од друга страна вкупниот број на освоени поени е $4x-1{,}4y=69$. Ако замениме $y=24-x$ имаме

$$4x-1{,}4y=69 \qquad 4x-1{,}4(24-x)=69 \qquad 4x-33{,}6+1{,}4x=69$$

$$5{,}4x=102{,}6 \qquad x=\frac{102{,}6}{5{,}4}, \quad x=19$$

Значи, бројот на неточно одговорени прашања е $y=24-x=24-19=5$.

794А. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества заедно имале 913, 973, 873, 1011 и 1002 страници. Колку страници имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страниците на книгите се a,b,c,d,e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a+b+c+d=913 \\ a+b+c+e=973 \\ a+b+d+e=873 \\ a+c+d+e=1011 \\ b+c+d+e=1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки, се добива: $4(a+b+c+d+e)=4772 \Rightarrow a+b+c+d+e=1193$

Ако од оваа равенка се одземе секоја од петте равенки од системот, ќе се добие $a=182, b=191, c=320, d=220, e=280$ страници.

795АБ. Упрости го изразот:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x-6}{3x-3}\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x+3}{x-3}+\frac{x^2+4x-9}{x^2-5x+6}\right).$$

Решение. Имаме

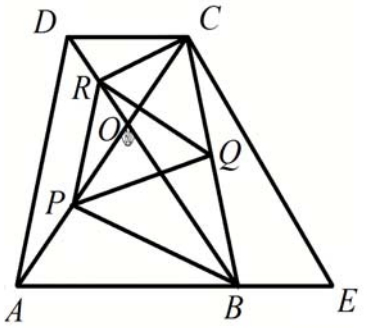
$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x-6}{3x-3}\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x+3}{x-3}+\frac{x^2+4x-9}{x^2-5x+6}\right)=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2x+3}{x-3}+\frac{x^2+4x-9}{(x-2)(x-3)}\right)=$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot\left(\frac{(x+1)(x-3)-(2x+3)(x-2)+x^2+4x-9}{(x-2)(x-3)}\right)=$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot\frac{\cancel{x^2}-2x-3-\cancel{2x^2}+x+6+\cancel{x^2}+4x-9}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-3)}{3(x-1)}\cdot\frac{3x-6}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{3}(x-1)}\cdot\frac{\cancel{3}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}=\ (5)=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1.$$

796А. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со основи AB и CD и дијагонала AC таква што $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{CD}$. Ако O е пресекот на дијагоналите, докажи дека средините на отсечките AO, BC и DO се темиња на рамностран триаголник.



Решение. Од сличноста на триаголниците ABO и CDO следува дека

$$\overline{CO}:\overline{AO}=\overline{CD}:\overline{AB},$$

а од тоа

$$\left(\overline{CO}+\overline{AO}\right):\overline{AO}=\left(\overline{CD}+\overline{AB}\right):\overline{AB}$$

односно $\overline{AC}:\overline{AO}=\overline{AC}:\overline{AO}$, па $\overline{AO}=\overline{AB}$.

Значи, триаголникот ABO е рамностран, аналогно и $\triangle CDO$ е рамностран. Тоа значи дека $BP\perp AO$ (P е средина на $\overline{AO}$), односно триаголникот BCP е правоаголен, со хипотенуза BC. Но, бидејќи PQ е тежишна линија над хипотенузата BC, следува дека

$$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{BC}. \qquad (1)$$

Аналогно, од правоаголниот триаголник BCR имаме

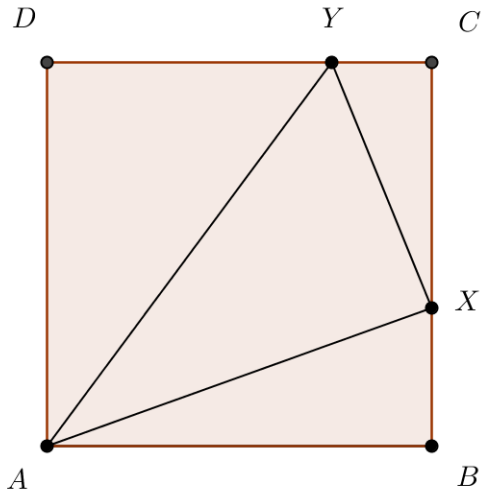
$$\overline{RQ}=\frac{1}{2}\overline{BC} \qquad (2)$$

Понатаму, во триаголникот ADO, PR е средна линија, па важи

$$\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{AD} \qquad (3)$$

Конечно, ако се земе предвид условот на задачата $\overline{AO}=\overline{AB}$ и (1), (2) и (3) заклучуваме дека триаголникот PQR е рамностран, со страна еднаква на половината од кракот $\overline{AD}$.

797Б. Даден е квадрат $ABCD$. Точките X и Y лежат на страните BC и CD, соодветно. Должината на отсечките XY, AX и AY се 3, 4 и 5 соодветно. Пресметај ја должината на страната на квадратот.



Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Триаголникот AXY е правоаголен (страните се 3,4 и 5) со прав агол кај темето X. Бидејќи $\angle CXY=\angle XAB$ (агли со нормални краци) следува дека ΔCXY е сличен со ΔBAX. Добиваме дека страните им се пропорционални, односно $\frac{\overline{CX}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{XY}}{\overline{AX}}$ или $\overline{CX}=\frac{\overline{XY}\cdot\overline{BA}}{\overline{AX}}=\frac{3a}{4}$. Непосредно добиваме дека $\overline{BX}=\frac{a}{4}$. Од Питагоровата теорема за ΔABX добиваме $a^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2=4^2$, од каде $a=\frac{16\sqrt{17}}{17}$.

II година

798А. Реши ја ирационалната равенка $\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5$.

Решение. За $x \neq -5$ имаме:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}=5\sqrt{x^2+x+6}-5\sqrt{x^2-x-4} \Leftrightarrow$$

$$6\sqrt{x^2-x-4}=4\sqrt{x^2+x+6} \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-x-4}=2\sqrt{x^2+x+6}.$$

Квадрирајќи ја последната равенка добиваме

$$9\left(x^2-x-4\right)=4\left(x^2+x+6\right) \Leftrightarrow 9\left(x^2-x-4\right)=4\left(x^2+x+6\right) \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169+1200}}{10}=\frac{13\pm 37}{10} \Leftrightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{12}{5}.$$

Со проверка се утврдува дека двете решенија припаѓаат на дефиниционата вредност и се решенија и на почетната равенка.

799Б. Докажи дека ако m и n се реални броеви со еднакви знаци, тогаш бројот

$$B=\left(m^3+m^2n-mn^2-n^3\right)^2-\left(m^3-m^2n-mn^2+n^3\right)^2$$

е ненегативен.

Решение. Со помош на формулата за разлика на квадрати добиваме,

$$B=\left(m^3+m^2n-mn^2-n^3+m^3-m^2n-mn^2+n^3\right)\left(m^3+m^2n-mn^2-n^3-\left(m^3-m^2n-mn^2+n^3\right)\right)=$$

$$\left(2m^3-2mn^2\right)\left(2m^2n-2n^3\right)=4\left(m^3-mn^2\right)\left(m^2n-n^3\right)=4mn\left(m^2-n^2\right)\left(m^2-n^2\right)=4mn\left(m^2-n^2\right)^2.$$

Следува дека бројот B е ненегативен, бидејќи mn е ненегативен број кога m и n се со еднакви знаци.

800АБ. Разликата на нулите на квадратниот трином x^2+px+q е a. Определи го квадратниот трином така што збирот $p+q$ има најмала вредност.

Решение. Нека x_1, x_2 се нулите на квадратниот трином x^2+px+q, односно се корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$. Од условот на задачата следува $x_1-x_2=a$. Според Виетовите формули имаме

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1\cdot x_2=q.$$

Значи, изразот $p+q$ може да се запише во облик

$$p+q=x_1x_2-(x_1+x_2).$$

Но, од равенството $x_1-x_2=a$ имаме $x_2=x_1-a$, па ако замениме во претходното равенство добиваме

$$p+q=x_1(x_1-a)-x_1-(x_1-a)=x_1^2-(a+2)x_1+a=\left(x_1-\frac{a+2}{2}\right)^2+a-\frac{(a+2)^2}{4}.$$

Последниот израз е најмал ако и само ако $x_1=\frac{a+2}{2}$, а во тој случај добиваме дека $x_2=\frac{2-a}{2}$. Отука имаме $p=-2$ и $q=1-\frac{a^2}{4}$. Бараниот трином е $y=x^2-2x+1-\frac{a^2}{4}$.

801АБ. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-2y^2=6 \end{cases}.$$

Решение. Очигледно е дека $x \neq 0$, бидејќи во спротивно би го добиле системот $\begin{cases} y^2=3 \\ y^2=-3 \end{cases}$ кој очигледно нема решение. Воведуваме смена $y=tx$ со која системот го добива обликот

$$\begin{cases} x^2(2-3t+t^2)=3 \\ x^2(1+2t-2t^2)=6 \end{cases} \quad (1).$$

Ако првата равенка на системот ја поделиме со втората равенка, ја добиваме равенката

$$\frac{2-3t+t^2}{1+2t-2t^2}=\frac{1}{2},$$

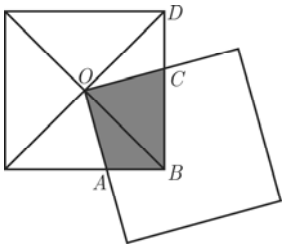
која е определена за $t\neq\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Последната равенка е ја запишуваме во обликот $4t^2-8t+3=0$, а нејзини решенија се $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=\frac{3}{2}$ Двете решенија ќе ги разгледаме како одделни случаи.

Случај 1. $t_1=\frac{1}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2=4$, па според тоа $x_1=2$ и $x_2=-2$. Соодветно $y_1=1$ и $y_2=-1$. Лесно се проверува дека паровите $(x_1,y_1)=(2,1)$ и $(x_2,y_2)=(-2,-1)$ се решенија на системот.

Случај 2. $t_2=\frac{3}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2=-12$, па според тоа, во овој случај системот нема решение.

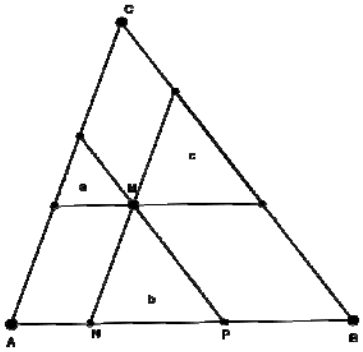
Конечно, единствени решенија на системот се $(x_1,y_1)=(2,1)$ и $(x_2,y_2)=(-2,-1)$.

802А. Дадени се два квадрати со страна 1, така што едно теме на едниот квадрат е центар на другиот квадрат. Која е најмалата можна вредност на плоштината на пресечниот дел?



Решение. Да го разгледаме цртежот десно. Аглите COD и AOB се еднакви како агли со нормални краци, $\sphericalangle OBA=\sphericalangle ODC=45^\circ$ и $\overline{OD}=\overline{OB}$, па затоа следува дека $\Delta AOB\cong\Delta COD$. Значи, бараната плоштина е еднаква на плоштината на триаголникот BOD, т.е. таа е еднаква на четвртина од плоштината на квадратот. Според тоа, бараната плоштина е еднаква на $\frac{1}{4}$. Бидејќи плоштината на пресечниот дел е константна, таа е и најмалата можна вредност.

803Б. Нека M е внатрешна точка на триаголникот ABC. Низ M се повлечени прави паралелни на страните на триаголникот. Нека плоштините на штрафираните делови се означени со a, b и c (види цртеж). Докажи дека плоштината P на триаголникот ABC е



$$P=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2.$$

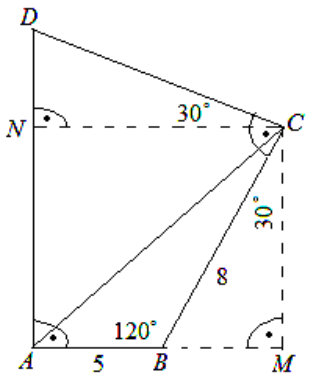
Решение. Очигледно триаголниците со плоштини a, b и c се слични со триаголникот ABC. Од сличноста на триаголниците следува

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}},\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{NP}}{\overline{AB}}\ \text{и}\ \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}.$$

Со собирање на горните равенства добиваме

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{P}}=\frac{\overline{AN}+\overline{NP}+\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}=1,$$

од каде следува $\sqrt{P}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, т.е. $P=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$.



III година

804А. 2Б. Определи ги $\log_a b, \log_{ab} b, \log_{ab^2} b$ и $\log_{ab^3} b$, ако

$$\log_a b - \log_{ab} b = \log_{ab^2} b - \log_{ab^3} b.$$

Решение. За $b=1$, равенството е точно за било кое a, затоа што сите логаритми се еднакви на нула. За $b>0, b\neq 1$, дадениот услов може да го запишеме во обликот $\frac{1}{\log_b a}-\frac{1}{\log_b a+1}=\frac{1}{\log_b a+2}-\frac{1}{\log_b a+3}$. Нека $\log_b a = x$. Тогаш ја добиваме равенката $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$, чие решение е $x=-\frac{3}{2}$.
Тогаш бараните вредности се

$$\log_a b=\frac{-2}{3}, \log_{ab} b=-2, \log_{ab^2} b=2, \log_{ab^3} b=\frac{2}{3}.$$

805Б. Реши ја равенката $4^x+9^x=2\cdot 6^x$.

Решение. $4^x+9^x=2\cdot 6^x \Leftrightarrow 2^{2x}+3^{2x}=2\cdot 2^x\cdot 3^x$. Последната равенка ќе ја поделиме со $2^x\cdot 3^x$ и добиваме $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2$ .....**(10)** Сега воведуваме смена $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$ и добиваме $t+\frac{1}{t}=2$, каде $t\neq 0$. Понатаму добиваме $t^2-2t+1=0$, односно $(t-1)^2=0$. Значи, $t=1$, од каде за x добиваме $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1=\left(\frac{2}{3}\right)^0$, односно $x=0$ .....$\sin\frac{x-y}{2}=0$ мора да е $x=y$.
Со замена во почетните услови, добиваме $\sin x = 2\sin^3 x$ или дека $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=y=\frac{\pi}{4}$.
Од друга страна, заради $x, y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, добиваме дека $\frac{x+3y}{2}\in(0,\pi)$ и за да $\cos\frac{x+3y}{2}=0$ мора да е $x+3y=\pi$. Со замена во почетните услови, добиваме

$$\sin 3y - \sin(\pi-3y) - \sin x - 2\sin^3 y$$

од каде

$$3\sin y - 4\sin^3 y = 2\sin^3 y \Leftrightarrow \sin y = \sin^3 y$$

или дека $\sin y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $y=\frac{\pi}{4}$ и на крај $x=\pi-3y=\frac{\pi}{4}$.

IV година

806А. Определи го најголемиот член на низата $a_n=\frac{2016^n}{n!}, n\in\mathbb{N}$.

Решение. Од $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2016}{n+1}$, следува дека низата расте до 2015-от член кој е еднаков со 2016-от, а потоа опаѓа. Значи, најголеми членови на низата се a_{2015} и a_{2016}.

807Б. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **е определена со**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Пресметај $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2016)$.

Решение. Дадената функција ја трансформираме на следниот начин:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(x+1)-(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right).$$

Значи $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$.

Сега имаме

$$2f(1)=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}$$

$$2f(2)=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1}$$

$$2f(3)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$$

.....

$$2f(2014)=\sqrt[3]{2015}-\sqrt[3]{2013}$$

$$2f(2015)=\sqrt[3]{2016}-\sqrt[3]{2014}$$

$$2f(2016)=\sqrt[3]{2017}-\sqrt[3]{2015}$$

Собирајќи ги горните равенства, добиваме

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2016)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2017}+\sqrt[3]{2016}-1\right).$$

808АБ. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3.$$

Решение. Бидејќи $x\neq 0$ (дефиниционa област на равенката), ако равенката ја помножиме со x таа го добива обликот $(x-1)+(x-2)+(x-3)+....+3+2+1=3x$.
Левата страна на равенката е аритметичка прогресија, која е опаѓачка, со прв член $a_1=x-1$, со разлика $d=-1$, $a_n=1$ и $S_n=3x$. Бидејќи $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{1-x+1}{-1}+1=x-1$, добиваме

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{x-1+1}{2}(x-1)=\frac{x(x-1)}{2}, \text{ т.е. } x^2=7x.$$

Бидејќи $x\neq 0$, решение на последната равенка е $x=7$.

809А, 4Б. Низата броеви $a_1,a_2,...$ е зададена со $a_1=1$, $a_2=143$ и $a_{n+1}=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$, за $n\geq 2$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви.

Решение 1. Да забележиме дека $a_3=5\frac{a_1+a_2}{2}=5\cdot\frac{144}{2}=5\cdot 72=360$. За $n\geq 4$ имаме

$$a_n=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1}=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}}{n-2}.$$

Со алгебарски трансформации добиваме

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}=\frac{n-2}{5}a_{n-1}, \qquad a_n=\frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}a_{n-1}+a_{n-1}\right)$$

$$a_n=\frac{5}{n-1}\frac{n+3}{5}a_{n-1}=\frac{n+3}{n-1}a_{n-1}.$$

Според тоа,

$$a_n=\frac{(n+3)(n+2)\cdot....\cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 3}a_3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 360=(n+3)(n+2)(n+1)n,$$

што требаше да се докаже.

Решение 2. Ако воведеме ознака $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, тогаш $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Значи, доволно е да докажеме дека S_n е цел број. Од самата дефиниција е јасно дека $S_1 = 1$, $S_2 = 144$, а од равенството $a_{n+1} = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$ добиваме $S_{n+1} - S_n = \frac{5}{n} S_n$

$$S_{n+1} = \frac{n+5}{n} S_n .$$

Значи, при $n \geq 2$ добиваме

$$S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)\cdot....\cdot 7}{n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 2} S_2 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} 144 =$$
$$= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}$$

Но, броевите $n+5, n+4, n+3, n+2, n+1$ се пет последователни природни броеви па еден од нив е делив со 5. Значи, $S_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, што требаше и да се докаже.

810А. Најди го бројот на сите подмножества од три различни елементи од множеството $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^{2000}\}$ така што тие елементи се последователни членови на растечка геометриска прогресија.

Решение. Нека трите броеви од множеството се $2^a, 2^b, 2^c$, така што $1 \leq a < b < c \leq 2000$. За да овие броеви формираат растечка геометриска прогресија потребно е

$\frac{2^b}{2^a} = \frac{2^c}{2^b}$, односно $2^{b-a} = 2^{c-b}$, $b - a = c - b$, односно $c = 2b - a$.

Од овде заклучуваме дека за $1 \leq a < b$, можеме да најдеме c, така да трите избрани броеви формираат растечка геометриска прогресија со еквивалентните услови: $b < c \leq 2000$, $b < 2b - a \leq 2000$, $0 < b - a < 2000 - b$. За секои a, b, c за кои $b \leq 1000$, ($1001 \leq b \leq 1999$) можеме да најдеме c такво да $1 \leq a < b < c \leq 2000$ и $2^a, 2^b, 2^c$ формираат растечка геометриска прогресија.

За секој избор на b, каде $2 \leq b \leq 1000$ имаме $b - 1$ избори на a, па така вкупниот број на избори на a и b е

$$\sum_{b=2}^{1000} (b-1) = \sum_{b=1}^{999} b = \frac{999\cdot 1000}{2} = 499500 .$$

Ако $1001 \leq b \leq 1999$, тогаш $a < 2000 - b$, па вкупниот број на избори е

$$\sum_{b=1001}^{1999} (2000 - b) = 999\cdot 2000 - \sum_{b=1001}^{1999} b = 1998000 - (1999000 - 500500) = 499500 .$$

Значи бројот на такви троелементни подмножества е 999000.

811Б. Броевите $3x, 4y, 5z$ формираат геометриска прогресија, а броевите $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ формираат аритметичка прогресија. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$.

Решение. Ако $3x, 4y, 5z$ формираат геометриска прогресија, тогаш $(4y)^2 = 3x\cdot 5z$, односно $16y^2 = 15xz$. Ако $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ формираат аритметичка прогресија, тогаш $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{x+z}{xz}$, што е еквивалентно на $x + z = \frac{2xz}{y}$. Од првото равенство имаме дека $xz = \frac{16y^2}{15}$, па со замена во второто равенство добиваме $x + z = \frac{32y}{15}$. Уште повеќе имаме

$$x^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz = \frac{1024y^2}{225} - \frac{32y^2}{15} = \frac{544y^2}{225} .$$

Конечно, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2 + z^2}{xz} = \frac{544y^2}{225} \cdot \frac{15}{16y^2} = \frac{34}{15}$.

XL РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2017
18.02.2017 година

Прва година

812 АБ Ако $a,b\in\mathbb{N}$, тогаш барем еден од броевите $a+b,\ a-b,\ ab$ е делив со 3. Докажи!

Решение. Според тоа какви остатоци може да даваат броевите $a,b\in\mathbb{N}$ при делење со 3 ќе ги разгледаме следниве случаи:

1) Ако барем едниот од a,b е делив со 3, тогаш нивниот производ ab е делив со 3.

2) Ако и двата броја a,b при делење со 3 даваат ист ненулти остаток, тогаш нивната разлика $a-b$ е делива со 3, т.е.

- ако $a=3m+1$ и $b=3n+1$, тогаш $a-b=3(m-n)$,
- ако $a=3m+2$ и $b=3n+2$, тогаш $a-b=3(m-n)$.

Во двата случаи $3\,|\,a-b$.

3) Ако двата броја a,b при делење со 3 даваат различни ненулти остатоци, тогаш нивниот збир $a+b$ е делив со 3, т.е.

- ако $a=3m+1$ и $b=3n+2$, тогаш $a+b=3(m+n+1)$,
- ако $a=3m+2$ и $b=3n+1$, тогаш $a+b=3(m+n+1)$.

Во двата случаи $3\,|\,a-b$.

813АБ. За природните броеви a,b,c и d е исполнето равенството $ab=cd$. Дали може бројот $a+b+c+d$ да биде прост?

Решение. Од условот на задачата имаме дека $\frac{ab}{c}$ е природен број. Постојат природни броеви $m,n,x,y\in\mathbb{N}$ такви што $c=mn, a=mx, b=ny$. Но, тогаш $d=\frac{ab}{c}=\frac{mx\cdot ny}{mn}=xy$, од каде што добиваме

$$a+b+c+d=mx+ny+mn+xy=m(n+x)+y(n+x)=(n+x)(m+y).$$

Бидејќи $m,n,x,y\in\mathbb{N}$ добиваме дека $m+y,n+x\geq 2$ па според тоа $(n+x)(m+y)$ е сложен број.

814А. Докажи дека ако $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$ тогаш $xyz=0$.

Решение. Дадени се равенствата

$$x+y+z=1$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$x^3+y^3+z^3=1$$

Ако го квадрираме првото равенство, имаме $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=1$ и ако го одземеме второто равенство, добиваме: $xy+xz+yz=0$. Ако пак ги помножиме првото и второто равенство, а потоа ги искористиме првото и претходното равенство последователно добиваме

$$x^3+y^3+z^3+(x+y)xy+(x+z)xz+(y+z)yz=1$$
$$1+(1-z)xy+(1-y)xz+(1-x)yz=1$$
$$xy+yz+zx-3xyz=0$$
$$0-3xyz=0$$
$$xyz=0$$

815Б. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека O е пресечна точка на дијагоналите во четириаголник $ABCD$, $\angle OCB = \angle ODA = 30^0$, $\angle OBA = 50^0$ и $\angle AOB = 70^0$. Најди ги аглите на четириаголникот.

Решение. Од $\angle OCB = \angle ODA = 30^0$ следува дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. **(7)**

Следува дека $\angle ACD = ABD = 50^0$ како агли над AD. **(6)** Понатаму,

$$\angle BAO = 180^0 - \angle AOB - \angle OBA = 60^0$$

$$\angle BDC = \angle BAC = 60^0.$$

Добиваме

$$\angle CDA = \angle CDO + \angle ODA = 90^0$$

$$\angle ABC = 180^0 - \angle ADC = 90^0$$

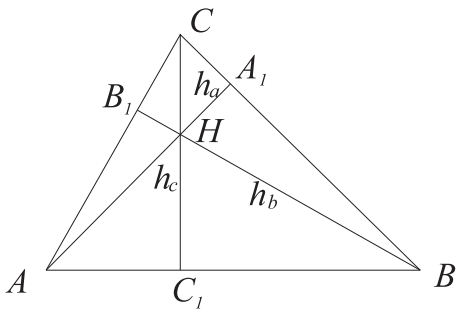
$$\angle BAD = 180^0 - \angle BCD = 100^0$$

816А. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H. Докажи дека

$$\overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Решение. Од сличноста на триаголниците AB_1H и AA_1C добиваме $\overline{AB_1} \cdot \overline{AC} = \overline{AH} \cdot \overline{AA_1}$ или

$$\overline{AB_1} \cdot b = \overline{AH} \cdot h_a . \qquad (1)$$



Од сличноста на триаголниците CB_1H и CC_1A добиваме

$$\overline{CB_1} \cdot b = \overline{CH} \cdot h_a \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$b(\overline{AB_1} + \overline{CB_1}) = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{CH} \cdot h_c$ односно,

$$b^2 = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{CH} \cdot h_c \qquad (3)$$

Аналогно, за другите две страни

$$a^2 = \overline{BH} \cdot h_b + \overline{CH} \cdot h_c \qquad (4)$$

$$c^2 = \overline{AH} \cdot h_a + \overline{BH} \cdot h_b \qquad (5)$$

Со собирање на (3). (4) и (5) се добива бараното равенство.

817Б. Дадени се три картончиња. На едното е запишан бројот 19, на другото бројот 97, а на третото некој двоцифрен број. Ако ги собереме сите шестцифрени броеви, кои се добиваат со подредување на кортончињата во ред, го добиваме бројот 3232320. Кој број е запишан на третото картонче?

Решение. *Прв начин.* Нека x е двоцифрениот број запишан на третото картонче. Постојат шест можности на подредување на трите картончиња ред и при тоа се добиваат броевите:

$$\overline{1997x}, \overline{19x97}, \overline{x1997}, \overline{9719x}, \overline{97x19}, \overline{x9719} .$$

За нивниот збир добиваме:

$$S = 2 \cdot 19(10000 + 100 + 1) + 2 \cdot 97(10000 + 100 + 1) + 2x(10000 + 100 + 1) = 20202(19 + 97 + x)$$

Од условот $S = 3232320$ наоѓаме: $19 + 97 + x = 160 \Rightarrow x = 44$. Следствено, на третото картонче е запишан бројот 44.

Втор начин. Нека $\overline{ab}$ е двоцифрениот број запишан на третото картонче. Постојат шест можности на подредување на трите картончиња во ред и при тоа се добиваат броевите:

$$\overline{1997ab}, \overline{19ab97}, \overline{ab1997}, \overline{9719ab}, \overline{97ab19}, \overline{ab9719} .$$

За нивниот збир добиваме:

$$S = 1\cdot 202020 + 9\cdot 222222 + 7\cdot 20202 + a\cdot 202020 + b\cdot 20202$$
$$2343432 + a\cdot 202020 + b\cdot 20202 = 3232320$$
$$(10a+b)\cdot 20202 = 888888$$
$$10a + b = 44$$
$$\overline{ab} = 44$$

Следствено, на третото картонче е запишан бројот 44.

Втора година

818АБЗа кои вредности на параметарот n, системот линеарни равенки $\begin{cases} 3x + ny = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$, има решение што ги исполнува условите $x > 0$ и $y < 0$?

Решение. Прво го решаваме системот равенки. Од втората равенка имаме $x = \frac{1+4y}{2}$. Заменуваме во првата равенка, $\frac{3}{2}(1+4y) + ny = 3$, и добиваме $3 + 12y + 2ny = 6$; $2(n+6)y = 3$; т.е. $(n+6)y = \frac{3}{2}$. Ако $n = -6$, добиваме $0 = \frac{3}{2}$, па системот нема решение. Ако $n \neq -6$, следува $y = \frac{2}{2(n+6)}$ од каде $x = \frac{1}{2}(1 + 4\frac{3}{2(n+6)}) = \frac{n+12}{n+6}$. Значи за $n \neq 6$ решение е парот $(\frac{n+12}{n+6}, \frac{3}{2(n+6)})$. Од условот на задачата треба да важи системот неравенки $\frac{n+12}{n+6} > 0$ и $\frac{3}{2(n+6)} < 0$ **(2 п.)**. Од втората неравенка добиваме $n + 6 < 0$, т.е. $n < -6$. Но, тогаш $\frac{n+12}{n+6} > 0$ ако и само ако $n + 12 < 0$ т.е. $n < -12$. Оттука, решението на системот неравенки е $(-\infty, -12)$. Следува $n \in (-\infty, -12)$.

819АБ Нека a и b се ненулти броеви, такви што равенката $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$ има единствено решение. Докажи дека $|a| = |b|$.

Решение. *Прв начин.* Ќе претпоставиме спротивно, т.е. $|a| \neq |b|$. Тогаш од својствата на апсолутната вредност имаме $a \neq \pm b$, т.е. $a \neq b$ и $a \neq -b$ Бидејќи $a + b \neq 0, a - b \neq 0$, равенката можеме да ја запишеме во облик

$$(a+b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + a^3 + b^3 = 0.$$

За дискриминантата D на равенката имаме

$$\frac{D}{4} = (a^2+b^2)^2 - (a+b)(a^3+b^3) = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - ab^3 - ba^3 - b^4 = -ab(a^2 - 2ab + b^2) == -ab(a-b)^2$$
$$= -ab(a-b)^2.$$

Од претпоставката имаме $\frac{D}{4} \neq 0$, бидејќи $a, b, a - b \neq 0$. Според тоа, равенката нема единствено решение. Заради добиената контрадикција имаме $|a| = |b|$..

Втор начин. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. a и b се со ист знак.

а) $a, b > 0$. Во тој случај $a(x-a)^2 \geq 0$, $b(x-b)^2 \geq 0$, па равенството ќе биде исполнето ако $x \in \mathbb{R}$ е таков што $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$, а тоа е можно ако и само ако $x = a$ и $x = b$, т.е. $a = b$, што требаше да се докаже .

б) $a, b < 0$. Во овој случај $a = -|a|$ и $b = -|b|$, па равенката го добива обликот $-|a|(x-a)^2 + (-|b|)(x-b)^2 = 0$, т.е. $|a|(x-a)^2 + |b|(x-b)^2 = 0$. Понатаму овој подслучај се разгледува како и првиот подслучај од овој случај, при што се добива $a = b$.

Случај 2. a и b се со различен знак. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a>0$ и $b<0$. Постојат позитивни реални броеви c и d такви што $a=c^2$ и $b=-d^2$. Во тој случај равенката го добива обликот

$$0=a(x-a)^2+b(x-b)^2=c^2(x-a)^2-d^2(x-b)^2=(c(x-a))^2-(d(x-b))^2$$
$$=(c(x-a)-d(x-b))(c(x-a)+d(x-b))=((c-d)x-(ac-bd)((c+d)x-(ac+bd)).$$

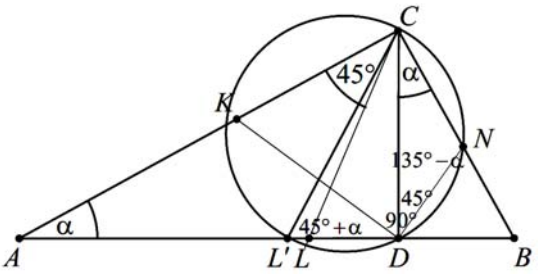
Ако $c\neq d$ равенката има две различни решенија, т.е. два различни корени, и тоа $x_1=\frac{ac-bd}{c-d}=\frac{c^3+d^3}{c-d}$ и $x_2=\frac{ac+bd}{c+d}=\frac{c^3-d^3}{c+d}$. Да забележиме дека $|x_1|>|x_2|$, бидејќи $|c^3+d^3|>|c^3-d^3|$ и $|c-d|<|c+d|$. Значи, за да е исполнет условот од задачата, т.е. равенката да има едно единствено решение, мора $c=d$, од каде што пак се добива $b=-a$, што требаше да се докаже.

820А Во правоаголниот триаголник ABC со прав агол при темето C, се конструирани висината CD, симетралата CL на аголот ACB и симетралите DK и DN на аглите ADC и BDC. Притоа $D,L\in AB$, $K\in AC$ и $N\in BC$. Докажи дека точките C, K, L, D и N лежат на иста кружница. Докажи дека $\overline{KN}=\overline{CL}$.

Решение. Бидејќи $\angle ACB=90°$ и

$$\angle KDN=\angle KDC+\angle CDN=45°+45°=90°,$$

следува четириаголникот $CKDN$ е тетивен т.е. околу него може да се опише кружница k. Нека $AB\cap k=\{D,L'\}$. Нека $\angle BAC=\alpha$, тогаш од сличноста на триаголниците ADC и CDB, следува $\angle DCB=\angle BAC=\alpha$. Заради $\angle CDN=45°$ од ΔCDN следува дека $\angle DNC=135°-\alpha$ Бидејќи $CL'DN$ е тетивен четириаголник, важи



$$\angle CL'B=180°-\angle DNC=180°-(135°-\alpha)=45°+\alpha \quad (1).$$

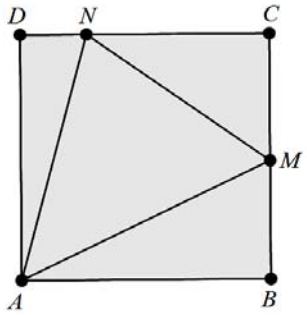
Од друга страна, $\angle ACL=45°$, бидејќи CL е симетрала на прав агол. Оттука, $\angle CLB=45°+\alpha$ (2), како надворешен агол за триаголникот ALC. Од (1) и (2) следува дека $L'\equiv L$ т.е. точките C, K, L, D и N лежат на k. Притоа $\overline{KN}$ и $\overline{CL}$ се дијаметри во опишаната кружница k, бидејќи тетивните агли над нив се прави, па $\overline{KN}=\overline{CL}$

821А Најди ги сите реални броеви a и b, $b>0$, така што корените на дадените равенки $x^2+ax+a=b$ и $x^2+ax+a=-b$ се четири последователни цели броеви.

Решение. Нека x_1,x_2 и x_3,x_4 се корените на првата односно втората равенка. Тогаш, од Виетовите врски имаме дека збирот на корените е еднаков на $-2a$, а од тоа што се четири последователни цели броеви, важи $x+x+1+x+2+x+3=-2a$, $4x+6=-2a$, $x=-\frac{a+3}{2}$ па четирите корени се $-\frac{a+3}{2},-\frac{a+1}{2},-\frac{a-1}{2},-\frac{a-3}{2}$. Имаме, $x_{1,2}=-\frac{a\pm3}{2}$ и $x_{3,4}=-\frac{a\pm1}{2}$, или обратно. Повторно ги користиме Виетовите врски и добиваме: $x_1x_2+x_3x_4=(a-b)+(a+b)$, $(-\frac{a+3}{2})(-\frac{a-3}{2})+(-\frac{a+1}{2})(-\frac{a-1}{2})=2a$, $a^2-4a-5=0$, т.е. $a=-1$ или $a=5$ **(5 п.)**. За $a=-1$ корените се $-1,0,1,2$ и $b=1$. За $a=5$ корените се $-4,-3,-2,-1$ и $b=1$. Значи бараните броеви се $a=-1$ и $b=1$ или $a=5$ и $b=1$.

822Б Дадени се точките M и N на страните BC и CD, соодветно, на квадратот $ABCD$ така што збирот на плоштините на триаголниците ABM и AND е еднаков со плоштинатана триаголникот NMC. Ако $\overline{DN}=3, \overline{BM}=5$, колкава е плоштината на триаголникот AMN ?

Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Тогаш за плоштината на триаголникот ABM имаме $P_1=\frac{a\cdot\overline{BM}}{2}=\frac{5a}{2}$, за плоштината на триаголникот AND имаме $P_2=\frac{a\cdot\overline{DN}}{2}=\frac{3a}{2}$ и за плоштината на триаголникот NMC, $P_3=\frac{\overline{NC}\cdot\overline{MC}}{2}=\frac{(a-3)(a-5)}{2}$. Според условот во задачата, $P_1+P_2=P_3$, па важи $8a=(a-3)(a-5)$ и оттука ја добиваме равенката $a^2-16a+15=0$. Нејзини решенија се 1 и 15, но страната на квадратот, според условите, не може да е 1. Значи, $a=15$ и за плоштината на триаголникот AMN добиваме:



$$P=15^2-2\cdot\frac{12\cdot 10}{2}=225-120=105.$$

823Б Во множеството реални броеви реши го системот равенки: $\begin{cases} x(\frac{1}{2}+y-2x^2)=0 \\ y(\frac{5}{2}+x-y)=0 \end{cases}$.

Решение. Можни се следниве случаи:

1. $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ или 2. $\begin{cases} x=0 \\ \frac{5}{2}+x-y=0 \end{cases}$ или 3. $\begin{cases} \frac{1}{2}+y-2x^2=0 \\ y=0 \end{cases}$ или 4. $\begin{cases} \frac{1}{2}+y-2x^2=0 \\ \frac{5}{2}+x-y=0 \end{cases}$.

Од првиот случај го добиваме решението $(0,0)$. Од вториот случај имаме $x=0$ и $y=\frac{5}{2}$, т.е. го добиваме решението $(0,\frac{5}{2})$. Од третиот случај имаме $y=0$ и $2x^2=\frac{1}{2}$, од каде $x=\pm\frac{1}{2}$. Решенија се $(-\frac{1}{2},0)$ и $(\frac{1}{2},0)$. Од четвртиот случај имаме $y=\frac{5}{2}+x$ и со замена во другата равенка ја добиваме квадратната равенка $2x^2-x-3=0$, чиишто решенија се -1 и $\frac{3}{2}$. Решенија се $(-1,\frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2},4)$.

Трета година

824АБ Реши ја равенката

$$\sin 2x+\cos(x+y)=2.$$

Решение. Бидејќи $\sin 2x\le 1$ и $\cos(x+y)\le 1$, за секои реални броеви x,y, добиваме дека равенство е можно ако и само ако $\sin 2x=1$ и $\cos(x+y)=1$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x+y=2m\pi \end{cases}, \text{ за } k,m\in\mathbb{Z},$$

од каде ги добиваме решенијата $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ и $y=(2m-k)\pi-\frac{\pi}{4}$, $k,m\in\mathbb{Z}$.

825АБ Докажи дека производот на корените на равенката

$$x^{\log_{2016} x} \cdot \sqrt{2016} = x^{2016},$$

е природен број. Која е цифрата на единиците на тој број?

Решение. Дадената равенка ја логаритмираме со логаритам со основа 2016 и последователно добиваме

$$\log_{2016}[x^{\log_{2016} x}\sqrt{2016}] = \log_{2016} x^{2016}$$

$$(\log_{2016} x)^2 + \tfrac{1}{2} = 2016(\log_{2016} x).$$

Понатаму, воведеме смена $t = \log_{2016} x$ и ја добиваме равенката $t^2 - 2016t + \frac{1}{2} = 0$. Според Виетовите правила, за збирот на корените t_1 и t_2 на последната равенка е исполнето $t_1 + t_2 = 2016$. Во тој случај решенија на почетната равенка се $x_1 = 2016^{t_1}$ и $x_2 = 2016^{t_2}$, а за нивниот производ добиваме

$$x_1 x_2 = 2016^{t_1} 2016^{t_2} = 2016^{t_1+t_2} = 2016^{2016},$$

кој е природен број.

Јасно, цифрата на единиците на бројот 2016^{2016} е 6.

826А Реши ја неравенката $\sqrt{x^2 - x - 12} > 7x$?

Решение. Неопходно е прво да ја определиме дефиниционата област во која квадратниот корен е дефиниран, односно множеството на кое $x^2 - x - 12 \geq 0$. Последната неравенка е еквивалентна со неравенката со $(x-4)(x+3) \geq 0,$ од каде добиваме $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$. ... **(5)** Ќе разгледаме два случаи, $x < 0$ и $x \geq 0$. Во случај кога $x < 0$, неравенството $\sqrt{x^2 - x - 12} > 7x$ важи за секое x за кое коренот е дефиниран, односно на дефиниционата област. Тогаш секој $x \in (-\infty, -3]$ е решение на дадената неравенка. За $x \geq 0$, дадената неравенка можеме да ја квадрираме, па ја добиваме неравенка $x^2 - x - 12 > 49x^2 \Leftrightarrow 48x^2 + x + 12 < 0$. Но, последната неравенка нема реални решенија, што значи дека и дадената неравенка нема ненегативни решенија.

Конечно, решенија на неравенката се сите $x \in (-\infty, -3]$.

827Б Реши ја равенката

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-|x-3| - \frac{1}{|x-3|}} = 4.$$

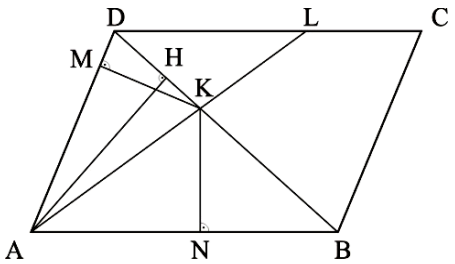
Решение. Јасно, $x \neq 3$. Користејќи ги својствата на степените добивме дека дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$2^{|x-3| + \frac{1}{|x-3|}} = 2^2 \ \ldots \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| + \frac{1}{|x-3|} = 2 \ \ldots \quad \Leftrightarrow$$

$$|x-3|^2 - 2|x-3| + 1 = 0 \ \ldots \quad \Leftrightarrow \quad (|x-3| - 1)^2 = 0 \ \ldots$$

од каде добиваме $|x-3| = 1$, односно $x = 4$ или $x = 2$.

828А. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\angle DAB$ ја сече страната DC во точка L, а дијагоналата BD во точка K, таква да $\overline{DK} : \overline{KB} = 3 : 4$. Пресметај ја должината на отсечката LC, ако периметарот на паралелограмот е 28.



Решение. Бидејќи AL е симетрала на аголот $\angle DAB$ имаме

$$\angle DAL = \angle LAB = \angle ALD ,$$

па затоа ΔALD е рамнокрак

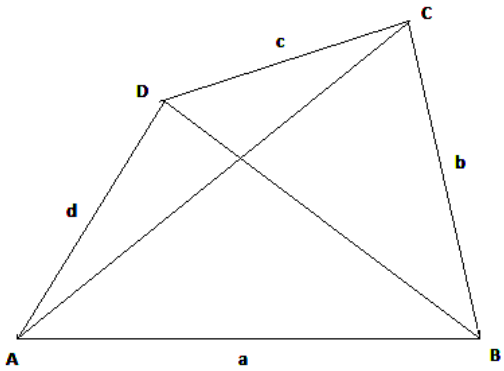
Да означиме $\overline{DL} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AB} = \overline{DC} = a$. За плоштините на триаголниците AKD и ABK имаме

$$P_{\Delta AKD} : P_{\Delta ABK} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{MK}}{2} : \frac{\overline{AB}\cdot\overline{NK}}{2} = \overline{AD} : \overline{AB} = b : a,$$

каде $\overline{MK}, \overline{NK}$ се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK} = \overline{NK}$, затоа што точката K како точка од симетралата на $\angle DAB$ е еднакво оддалечена од краците на аголот.

Од друга страна, $P_{\Delta AKD} : P_{\Delta ABK} = \frac{\overline{DK}\cdot\overline{AH}}{2} : \frac{\overline{BK}\cdot\overline{AH}}{2} = \overline{DK} : \overline{KB} = 3 : 4$.

Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме $b : a = 3 : 4$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b) = 28$, имаме $b = 6, a = 8$. Конечно, $\overline{LC} = a - b = 2$.



829Б. Нека a, b, c и d се должините на последователни страни на еден конвексен четириаголник со плоштина P. Докажи дека важи неравенството

$$P \le \tfrac{1}{4}(a+c)(b+d).$$

Решение. За плоштината на четириаголникот имаме

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin\delta \le \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd = \tfrac{1}{2}(ab+cd) \qquad (1)$$

Аналогно,

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \tfrac{1}{2}ad\sin\alpha + \tfrac{1}{2}bc\sin\gamma \le \tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{2}bc = \tfrac{1}{2}(ad+bc) \qquad (2)$$

Со собирање на (1) и (2), добиваме

$$2P \le \tfrac{1}{2}(ab+cd+ad+bc) = \tfrac{1}{2}(a+c)(b+d),$$

од каде што следува бараното неравенство.

Четврта година

830А. Нека a, b, c и d се четири последователни членови на една геометриска прогресија. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2 .$$

Решение. Нека $b = aq$, $c = aq^2$ и $d = aq^3$. Тогаш

$$(a-c)^2 = (a-aq^2)^2 = a^2 - 2a^2q^2 + a^2q^4 = a^2(1-2q^2+q^4)$$
$$(b-c)^2 = a^2(q^2-2q^3+q^4)$$
$$(b-d)^2 = a^2(q^2-2q^4+q^6)$$
$$(a-d)^2 = a^2(1-2q^3+q^6) .$$

Заменувајќи ги последните четири равенства во почетниот израз имаме

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2 = a^2(1-2q^2+q^4)+a^2(q^2-2q^3+q^4)+a^2(q^2-2q^4+q^6)-a^2(1-2q^3+q^6)$$
$$= a^2(1-2q^2+q^4+q^2-2q^3+q^4+q^2-2q^4+q^6-1+2q^3-q^6) = a^2\cdot 0 = 0$$

831Б. Нека $x > 2$ е реален број и $n = 2^{2017}$. Определи го збирот на броевите $\ln x, \ln\sqrt{x}, \ln\sqrt[4]{x}, ..., \ln\sqrt[n]{x}$.

Решение. Бидејќи

$$\frac{\ln x^{\frac{1}{2^s}}}{\ln x^{\frac{1}{2^{s-1}}}} = \frac{\frac{1}{2^s}\ln x}{\frac{1}{2^{s-1}}\ln x} = \frac{1}{2}, \text{ за секој } s \in \{1, 2, ..., 2017\}$$

следува дека дадените броеви формираат геометриска прогресија со количник $\frac{1}{2}$ и прв член $\ln x$.

(10)

Значи,

$$S_{2017} = \ln x \frac{(\frac{1}{2})^{2017} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left((\tfrac{1}{2})^{2017} - 1\right)\ln x.$$

832АБ. Определи го членот со најголем коефициент во развојот на биномот $(x+\sqrt{2})^{50}$.

Решение. Нека $T_{k+1} = \binom{50}{k} x^k (\sqrt{2})^{50-k}$, и $A_{k+1} = \binom{50}{k}(\sqrt{2})^{50-k}$ е коефициентот пред x^k, за $k = 0, 1, 2, ..., 50$. (5)

Од

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{\binom{50}{k}(\sqrt{2})^{50-k}}{\binom{50}{k-1}(\sqrt{2})^{50-k-1}} = \frac{51-k}{k}\sqrt{2},$$

па

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{51-k}{k}\sqrt{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > 51(2-\sqrt{2}) \approx 29{,}88, \text{ т.е. } k \geq 30.$$

Значи, за $k \geq 30$ важи $A_{k+1} < A_k$, а за $k < 30$ важи $A_{k+1} > A_k$. Според тоа најголем коефициент има членот

$$T_{30} = \binom{50}{29} x^{29} \left(\sqrt{2}\right)^{21}.$$

833АБ. Производот на осум последователни броеви не може да биде четврт степен на природен број. Докажи!

Решение. Нека x е најмалиот од осумте последователни природни броеви. Според тоа, броевите се $x, x+1, x+2, x+3, \quad x+4, x+5, x+6, x+7$, а нивниот производ е

$$P = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7),$$

кој можеме да го запишеме во облик

$$P = [x(x+7)][(x+1)(x+6)][(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)]$$
$$= (x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)$$

Воведеме смена $a = x^2 + 7x + 6$ и тогаш P можеме да го запишеме во облик

$$P = (a-6)a(a+4)(a+6) = (a^2-36)(a^2+4a)$$
$$= a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a = a^4 + 4a(a^2 - 9a - 36)$$
$$= a^4 + 4a(a+3)(a-12)$$

Од условот на задачата x е природен број така што $x \geq 1$, па според тоа $a = x^2 + 7x + 6 \geq 14$. Значи $a - 12 > 0$, од каде добиваме дека $a^4 < P$.
Од друга страна,

$$P = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a < a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = (a+1)^4 .$$

Од последните две равенства добиваме дека

$$a^4 < P < (a+1)^4 ,$$

а тврдењето на задачата следува од тоа што a и $a+1$ се последователни природни броеви.

834А. Нека $f(0) = \frac{1}{4}$ и $f(n+1) = \frac{2f(n)+3}{f(n)+2}$, за секој цел број $n \geq 0$. Докажи дека за секој цел број $n \geq 0$, важи $0 < f(n) < \sqrt{3}$.

Решение. Доказот ќе го дадеме со помош на принципот на математичка индукција.
(5)
Јасно е дека $0 < f(0) = \frac{1}{4} < \sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е. $0 < f(k) < \sqrt{3}$. Имаме,

$$f(k+1) = 2 - \frac{1}{f(k)+2} .$$

Сега, од претпоставката следува

$$0 < f(k) < \sqrt{3}$$
$$2 < 2 + f(k) < 2 + \sqrt{3}$$
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2+f(k)} > \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{2+f(k)} < -\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$0 < 2 - \frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2+f(k)} < 2 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$0 < f(k+1) < 2 - \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $0 < f(n) < \sqrt{3}$, за секој природен број n.

835Б. Докажи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои природен број кој во декадниот запис има само 0 и 1 и кој е делив со n.

Решение. Да ги разгледаме $n+1$- те броеви $1, 11, 111, ..., \underbrace{111...1}_{n+1\text{цифра}}$. При делење со n секој од овие броеви има еден од остатоците $0, 1, ..., n-1$.
Бидејќи се $n+1$ броеви, од принципот на Дирихле следува дека меѓу остатоците мора да има барем два еднакви.
Нека броевите $\underbrace{11...1}_{i}$ и $\underbrace{11...1}_{j}$, $j > i$ при делење со n имаат исти остатоци. Тогаш бројот $\underbrace{11...1}_{j} - \underbrace{11...1}_{i} = \underbrace{11...1}_{j-i}\underbrace{00...0}_{i}$ е делив со n.

XLI РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2018 17.02.2018 година

Прва година

836АБ. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивните НЗС и НЗД е 15.

Решение. Нека $d = \mathrm{NZD}(x, y)$, $s = \mathrm{NZS}(x, y)$. Оттука имаме: $x = da, y = db$, каде што $\mathrm{NZD}(a, b) = 1$ и важи добиваме $s = dab$. Од условот на задачата, $s - d = 15$. Ако замениме, се добива: $dab - d = 15$, т.е.

$$d(ab-1) = 15 \qquad (*)$$

Од (*) следува дека $d \in \{1, 3, 5, 15\}$. Тогаш,

- за $d = 1$ следува $ab - 1 = 15$, т.е. $ab = 16$. Единствените заемно прости броеви чиј производ е 16 се 1 и 16, па $a = 1, b = 16$, т.е. $x = 1,\ y = 16$.

- за $d = 3$ следува $ab - 1 = 5$, т.е. $ab = 6$. Заемно прости броеви чиј производ е 6 се 1 и 6 или 2 и 3, па $x = 3,\ y = 18$ и $x = 6,\ y = 9$.

- за $d = 5$ следува $ab - 1 = 3$, т.е. $ab = 4$. Заемно прости броеви чиј производ е 4 се 1 и 4, па $x = 5,\ y = 20$.

- за $d = 15$ следува $ab - 1 = 1$, т.е. $ab = 2$. Заемно прости броеви чиј производ е 2 се 1 и 2, па $x = 15,\ y = 30$.

837АБ. Гаргамел фатил N Штрумфови и ги распределил во три вреќи. Кога Папа Штрумф го преместил од првата во втората вреќа, Муртенко од втората во третата, а Штрумфета од третата во првата, просечната висина на Штрумфовите во првата вреќа се намалила за 8 милиметри, а просечните висини во втората и третата вреќа се зголемиле за 5 и 8 милиметри, соодветно. Во првата вреќа имало девет Штрумфови. Колку Штрумфови фатил Гаргамел?

Решение. Нака во втората и третата вреќа имало K и L штрумфови соодветно и нека x, y и z се висините на Папа Штрумф, Муртенко и Штрумфета. Ако висините на Штрумфовите во првата вреќа се $x, x_2, x_3, \ldots, x_9$, тогаш

$$\frac{x+x_2+x_3+\ldots+x_9}{9} = 8 + \frac{z+x_2+x_3+\ldots+x_9}{9}, \text{ т.е. } \frac{x}{9} = 8 + \frac{z}{9}.$$

Аналогно, разгледувајќи ги втората и третата вреќа добиваме $5 + \frac{y}{K} = \frac{x}{K}$ и $8 + \frac{z}{L} = \frac{y}{L}$. Според тоа, $x = 72 + z,\ 5K + y = x$ и $8L + x = y$, па ако ги собереме последните три равенки добиваме $72 = 5K + 8L$. Бидејќи K и L се природни броеви, од последната равенка следува $8 \mid K$. Но, не е можно $K \geq 16$, бидејќи тогаш L ќе биде негативен број, ниту пак $K = 0$ (во втората вреќа на почетокот бил Муртенко), па затоа $K = 8$. Според тоа, $8L = 72 - 40$, т.е. $L = 4$, што значи дека Гаргамел фатил $N = 9 + K + L = 21$ штрумф.

838А. Определи ги целобројните вредности на параметарот a, за кои решенијата на системот

$$\begin{cases} a(x+y-1) = x - 2y - 1 \\ a(x-y-3) = x + 2y - 3 \end{cases}$$

се целобројни.

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот:

$$\begin{cases}(a-1)x+(a+2)y=a-1\\(a-1)x-(a+2)y=3a-3\end{cases}.$$

т.е. со системот

$$\begin{cases}2(a-1)x=4a-4\\2(a+2)y=-2a+2\end{cases}$$

Ако $a\neq 1$, тогаш $x=2$, а ако $a=1$, тогаш $x\in\mathbb{Z}$.

Ако $a=-2$, тогаш нема решение за y, па и за системот. Ако $a\neq -2$, имаме $y=\frac{-a+1}{a+2}=-1+\frac{3}{a+2}$.

Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $(a+2)\,|\,3$, па оттука $a+2\in\{\pm1,\pm3\}$, од каде што следува дека $a\in\{-5,-3,-1,1\}$. Добиваме дека бараните решенија се:

$$a=-5:\qquad x=2, y=-2$$
$$a=-3:\qquad x=2, y=-4$$
$$a=-1:\qquad x=2, y=2$$
$$a=1:\qquad x\in\mathbb{Z}, y=0$$

839Б. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) кои ја задоволуваат равенката

$$xy+3y=x^2+6x+12.$$

Решение. Равенката може да се трансформира на следниов начин

$$y(x+3)=(x+3)^2-9+12$$
$$y(x+3)=(x+3)^2+3$$
$$y=x+3+\frac{3}{x+3}$$

Дропката $\frac{3}{x+3}$ треба да е цел број, па за $x\neq -3$ ги имаме следниве случаи

1) $x+3=-1\Rightarrow x=-4$ и $y=-4$

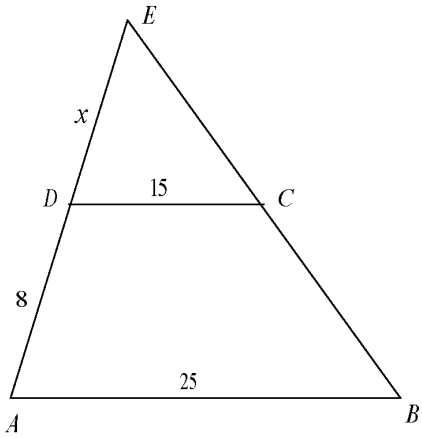
2) $x+3=1\Rightarrow x=-2$ и $y=4$

3) $x+3=3\Rightarrow x=0$ и $y=4$

4) $x+3=-3\Rightarrow x=-6$ и $y=-4$

Значи, решението на равенката се паровите (-4,-4), (-2,4), (0,4), (-6,-4).

840А. Должините на основите на еден трапез се $a=25, b=15$, а на еден од краците должината е $c=8$. Определи го периметарот и плоштината на трапезот, ако збирот на аглите на поголемата основа е 90°.



Решение. Ги продолжуваме краците на трапезот $ABCD$ до нивниот пресек во точката E. Од условот на задачата, збирот на аглите на поголемата основа во трапезот, кои се агли на основата во триаголникот ABE е 90°, што значи дека овој триаголник е правоаголен со прав агол во темето E.

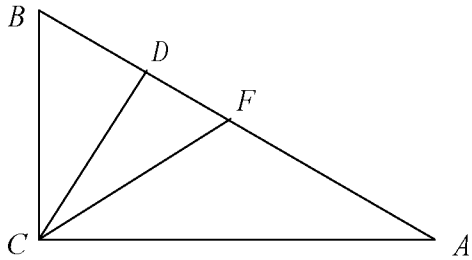
Триаголниците ABE и DCE се слични, заради

паралелноста на основите во трапезот, па може да направиме пропорција (според податоците од условот - види цртеж): $25:15=(8+x):x$, од каде што $x=12$.

Од правоаголниот триаголник DCE имаме: $\overline{CE}=\sqrt{15^2-12^2}=9$, а од правоаголниот триаголник ABE имаме $\overline{BE}=\sqrt{25^2-20^2}=15$, т.е. $\overline{BC}=\overline{BE}-\overline{CE}=15-9=6$.

Според тоа, за периметарот на трапезот добиваме $L=25+8+15+6=54$ единици, а за плоштината $P=P_{ABE}-P_{DCE}=\frac{20\cdot 15}{2}-\frac{12\cdot 9}{2}=150-54=96$.

841Б. Во еден правоаголен триаголник должината на висината повлечена кон хипотенузата е 4, а должината на тежишната линија од правиот агол е 5. Пресметај го збирот на должините на катетите на овој триаголник.



Решение. Нека бараниот триаголник е ABC со прав агол кај темето C. Нека CD е висината и CF е тежишната линија спуштени од C. Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен, следува $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{CF}=5$. Триаголникот CDF е правоаголен, па Питагорова теорема имплицира дека $\overline{DF}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Повторно Питагорина теорема имплицира

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5} \text{ и } \overline{BC}=\sqrt{\overline{DB}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}.$$

Збирот на катетите изнесува $6\sqrt{5}$.

Втора година

842А. Корените на квадратната равенка $x^2+ax+b+1=0$ се природни броеви. Докажи дека a^2+b^2 е сложен број.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корените на дадената равенка. Според Виетовите формули $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b+1$. Оттука добиваме дека

$$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1=$$
$$=x_1^2+1+x_1^2x_2^2+x_1^2=(1+x_1^2)(1+x_2^2)$$

и бидејќи $x_1,x_2\geq 1$ следува дека a^2+b^2 е сложен број.

843АБ. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

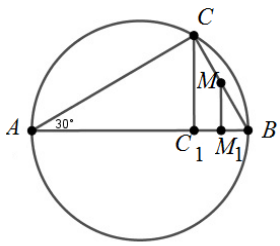
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{5},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{7}.$$

Решение. Јасно, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Со сведување под најмал заеднички содржател од дадениот систем го добиваме системот

$$xy+xz=3(x+y+z)$$
$$yz+yx=5(x+y+z)$$
$$zx+zy=7(x+y+z)$$

Ако ги собереме првата и втората равенка и потоа ја одземеме третата равенка, добиваме $2xy=x+y+z$. На сличен начин добиваме $2yz=9(x+y+z)$ и $2zx=5(x+y+z)$. Затоа важи $x+y+z=2xy=\frac{2}{9}yz=\frac{2}{5}zx$ и ако $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ заклучуваме дека $9x=5y=z$. Сега лесно се добива дека $x=\frac{59}{18}$, $y=\frac{59}{10}$, $z=\frac{59}{2}$.

844А. Нека е дадена кружница со дијаметар AB и нека C е точка од кружницата различна од A и B. Нека M е средина на тетивата BC и растојанието од M до AB е $1cm$. Ако $\measuredangle BAC = 30^\circ$, пресметај ја должината на тетивата AC.



Решение. Нека M_1 е ортогонална проекција на M врз AB, а C_1 е ортогонална проекција на C врз AB. Од $\overline{MM_1} = 1cm$ и MM_1 е средна линија во $\triangle C_1BC$, следува дека $\overline{CC_1} = 2\overline{MM_1} = 2cm$. Од $\triangle AC_1C$ е правоаголен и $\measuredangle C_1AC = 30^\circ$ следува дека хипотенузата $\overline{AC} = 2\overline{CC_1} = 4cm$.

845АБ. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштината на четири од нив се $8,10,5,12$ како што е прикажано на цртежот. Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

8	10	
	5	
		12

Решение. Со a,b,c ќе ги означиме ширините на вертикалните правоаголници кои го разделуваат правоаголникот $ABCD$, а со x,y,z висините на хоризонталните правоаголници на кои е разделен правоаголникот $ABCD$ (види цртеж). Тогаш според дадените податоци имаме $ax = 8$, $bx = 10$, $by = 5$ и $cz = 12$. Од последните равенства добиваме $a = \frac{8}{x}, b = \frac{10}{x}, c = \frac{12}{z}, y = \frac{x}{2}$. Со P ќе ја означиме плоштината на правоаголникот. Тогаш

	a	b	c
x	8	10	
y		5	
z			12

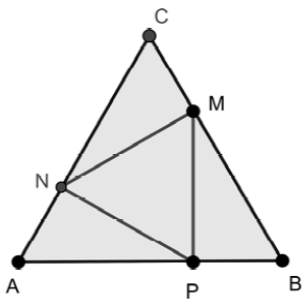
$$P = 8+10+5+12+az+ay+bz+cx+cy$$
$$= 35+\frac{8}{x}z+\frac{8}{x}\frac{x}{2}+\frac{10}{x}z+\frac{12}{z}\frac{x}{2}+\frac{12}{z}x$$
$$= 39+18(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})$$

Изразот $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$ добива најмала вредност $2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}} = 2$ и таа се достигнува за $\frac{x}{z} = \frac{z}{x}$, т.е. $x^2 = z^2$. Бидејќи $x,z > 0$ добиваме $x = z$. Во тој случај плоштината е $P = 75$. Притоа $x = z = 2y$.

846Б. За кое m, корените на равенката $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ се наоѓаат во интервалот $(-2,4)$?

Решение. Корените на равенката $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ се $x_{1,2} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4m^2 + 4}}{2} = m \pm 1$ т.е. $x_1 = m-1$ и $x_2 = m+1$. Бидејќи корените треба да се наоѓаат во интервалот $(-2,4)$ имаме $\begin{cases} -2 < m-1 < 4 \\ -2 < m+1 < 4 \end{cases}$ и оттука $\begin{cases} -1 < m < 5 \\ -3 < m+1 < 3 \end{cases}$, т.е. $-1 < m < 3$.

847Б. Во рамностран триаголник ABC со плоштина 1, впишан е рамностран триаголник MNP, така што M лежи на страната BC, N лежи на страната AC, P лежи на страната AB, и притоа MP е нормална на AB. Колкава е плоштината на триаголникот MNP?



Решение. Триаголниците APN, BMP и CNM се правоаголни со агли 30° и 60°, а бидејќи сите за катета ја

имаат страната на триаголникот MNP, тие се складни. Ако страната на триаголникот ABC е a, а на MNP е x и ако $\overline{MB}=y$, тогаш $\overline{PB}=\frac{y}{2}$ и тогаш $\overline{CM}=\frac{y}{2}$. Важат: $y+\frac{y}{2}=a$, $x=\frac{y}{2}\sqrt{3}$ и оттука $x=\frac{\frac{2a}{3}}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$. Плоштината на триаголникот MNP е $\frac{x^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3a^2}{4\cdot 9}\sqrt{3}=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}$.

Трета година

848А. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log(\log x)+\log(\log x^3-2)=0.$$

Решение. Најпрво да забележиме дека треба да важи $x>0$, $\log x>0$ и $\log x^3-2>0$, од каде добиваме дека $\log x>\frac{2}{3}$, односно $x>\sqrt[3]{100}$.

Имаме:

$$\log(\log x)+\log(\log x^3-2)=0 \Leftrightarrow \log(\log x(\log x^3-2))=0 \Leftrightarrow \log x(\log x^3-2)=1$$
$$\Leftrightarrow 3\log^2 x-2\log x-1=0.$$

Со смената $\log x=t$, последната равенка се трансформира во $3t^2-2t-1=0$, чии решенија се $t_1=1$ и $t_2=-\frac{1}{3}$. Решението $t=-\frac{1}{3}$ се отфрла бидејќи од условот имаме дека $t>\frac{2}{3}$. За $t=1$ се добива $x=10$.

849АБ. Определи го триаголникот со најголема плоштина, ако должините на неговите страни a,b,c го задоволуваат условот: $1<a\le 2\le b\le 5<c\le 6$.

Решение. Прво ќе го определиме триаголникот со најголема плоштина со страни a,b и c за кој се исполнети условите $1<a\le 2\le b\le 5$. Нека аголот што го зафаќаат страните a и b е γ. Тогаш плоштината на триаголникот е $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

При фиксни a и b, најголема вредност P има за $\sin\gamma=1$, т.е. $\gamma=90^\circ$. Значи триаголникот кој има најголема плоштина при фиксни a и b е правоаголен и неговата најголема плоштина при ограничувањата $1<a\le 2\le b\le 5$ е за $a=2$ и $b=5$ и таа изнесува $P=5$. Во тој случај c е хипотенуза на правоаголен триаголник и $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Конечно, бидејќи $5<\sqrt{29}<6$, добиваме дека бараниот триаголник е правоаголен со катети 2 и 5.

850А. Рамнокрак трапез со висина 12, крак 13 и средна линија 15, ротира околу пократката основа. Пресметај го волуменот на така добиеното тело.

Решение. Од условите на задачата добиваме $\frac{a+b}{2}=15, h=12, c=13$, каде што a и b се должините на основите, h е висината, а c е должината на кракот на трапезот. Од Питагоровата Теорема следува дека $\frac{a-b}{2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$, од каде се добива дека $a=20$ и $b=10$.

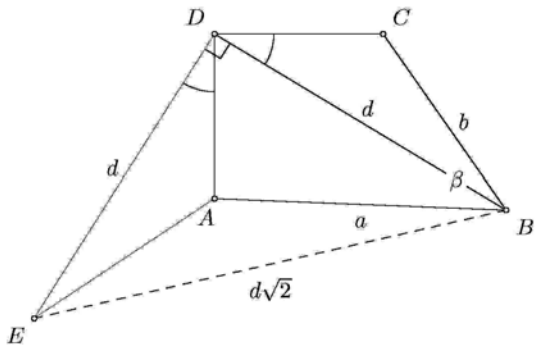
Бараниот волумен е $V=V_1-2V_2$, каде што V_1 е волумен на цилиндар со радиус на основата $h=12$ и висина $a=20$, а V_2 е волумен на конус со радиус на основата $h=12$ и висина $\frac{a-b}{2}=5$. Значи бараниот волумен е $V=12^2\pi\cdot 20-2\cdot\frac{1}{3}12^2\pi\cdot 5=2400\pi$.

851АБ. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD}=\overline{CD}$ и $\measuredangle ADC=90^\circ$. Ако $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{BD}=d$ и $\measuredangle ABC=\beta$, докажи дека $2d^2=a^2+b^2+2ab\sin\beta$.

Решение. Нека E е точка таква што триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето D, а A и E се од сита страна на правата BD. Тогаш $\overline{BE} = d\sqrt{2}$ и важи

$$\measuredangle EDA = 90^\circ - \measuredangle ADB = \measuredangle BDC .$$

Бидејќи $\overline{CD} = \overline{AD}$ и $\overline{DE} = \overline{DB}$, од признакот САС следува дека триаголниците EDA и BCD се складни. Затоа важи $\overline{AE} = b$.



Понатаму, имаме

$$\measuredangle EAB = 360^\circ - \measuredangle EAD - \measuredangle DAB = 360^\circ - \measuredangle DCB - \measuredangle DAB = \measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 90^\circ + \beta.$$

Конечно, од косинусната теорема применета на триаголникот ABE следува

$$2d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(90^\circ + \beta) = a^2 + b^2 + 2ab\sin\beta .$$

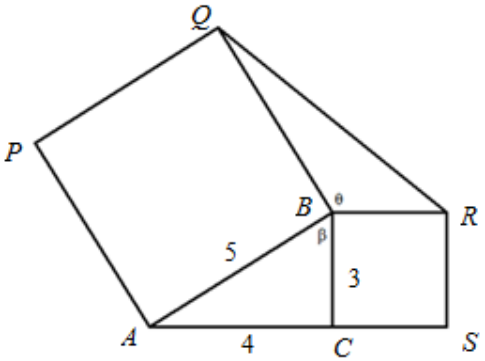
852Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3 .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $x^3 - 9x + 8 = (x-1)^3$.

По средувањето се добива $x^2 - 4x + 3 = 0$, чии решенија се $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Решението $x_1 = 1$ отпаѓа поради дефиницијата на логаритамската функција. Лесно се проверува дека $x = 3$ е решение на почетната равенка.



853Б. Даден е правоаголен триаголник *CBA* со катети со должина 3 и 4. Над помалата катета и хипотенузата надвор од триаголникот се конструирани квадрати *BCSR* и *ABQP* соодветно. Пресметај ја плоштината на триаголникот *BRQ*.

Решение. Од Питагоровата теорема се добива дека должината на хипотенузата е 5.

Нека $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle QBR = \theta$ (види цртеж). Од тоа што $\measuredangle ABQ = \measuredangle CBR = 90^\circ$, имаме дека важи $\beta + \theta = 180^\circ$ т.е. $\theta = 180^\circ - \beta$.

Тогаш $\sin\theta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta = \frac{4}{5}$.

Конечно, плоштината на триаголникот QBR е $P = \frac{1}{2}\overline{BQ}\cdot\overline{BR}\sin\theta = 6$.

Четврта година

854А. Определи го вториот член на аритметичката прогресија ако збирот на првите 10 члена е 300, а првиот, вториот и петтиот член, во тој редослед, формираат геометриска прогресија.

Решение. Од $\frac{10}{2}(2a_1+9d)=300$ добиваме $2a_1+9d=60$. **...(5б)** Од друга страна $a_1a_5=a_2^2$, т.е. $a_1(a_1+4d)=(a_1+d)^2$ и оттука $d=2a_1$.

Заменувајќи во $2a_1+9d=60$ добиваме $a_1=3$, па $d=6$. Значи, $a_2=9$.

855Б. Во геометриската прогресија $a_1,a_2,...,a_n$ важи $a_1+a_3=20, a_2+a_4=40$ и $S_n=a_1+...+a_n=1020$. Определи го n.

Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Од $a_1+a_3=20, a_2+a_4=40$ добиваме дека $a_1(1+q^2)=20$ и $a_1q(1+q^2)=40$. Со делење на второто со првото равенство добиваме $q=2$, а од $a_1(1+q^2)=20$ добиваме $a_1=4$. Сега, од $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}=4\frac{2^n-1}{2-1}=1020$ имаме $2^n=256$, т.е. $n=8$.

856А. Определи колку подредени парови од природни броеви (x,y) постојат за кои е исполнето $\mathrm{NZS}(x,y)=6!$.

Решение. Бидејќи $6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5^1$ и $x=2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}$, $y=2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}$ од условот на задачата следува дека $\max\{a_1,b_1\}=4, \max\{a_2,b_2\}=2, \max\{a_3,b_3\}=1$. Според тоа, паровите $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ и (a_3,b_3) може да се изберат на 9, 5 и 3 начини (со директна проверка). Следува дека постојат $9\cdot 5\cdot 3=135$ подредени парови за кои е исполнет условот на задачата.

857Б. Дадени се правите $y=\frac{3}{4}x+6$, $y=\frac{3}{4}x+3$ и точката $T(7,24)$. Определи равенка на права која ја содржи дадената точка, а отсечката со крајни точки, кои се добиваат во пресекот на таа права со дадените прави, е со должина 4.

Решение. Равенката на бараната права е $y-24=k(x-7)$. Во нејзиниот пресек се добиваат точките $A(\frac{7k-18}{k-\frac{3}{4}},\frac{\frac{45}{4}k-18}{k-\frac{3}{4}})$ и $B(\frac{7k-21}{k-\frac{3}{4}},\frac{\frac{33}{4}k-18}{k-\frac{3}{4}})$.

Од условот на задачата добиваме дека $(\frac{3}{k-\frac{3}{4}})^2+(\frac{3k}{k-\frac{3}{4}})^2=16$, која се сведува на квадратната равенка $7k^2-24k=0$. Нејзини решенија се $k_1=0$ и $k_2=\frac{24}{7}$. Според тоа, бараните прави се $y=24$ и $y=\frac{24}{7}x$.

858АБ. Дадена е низа од позитивни реални броеви $a_0,a_1,a_2,...$ такви што важи

$$a_1=1-a_0,\ a_{n+1}=1-a_n(1-a_n),\ \text{за } n\geq 1.$$

Докажи дека за секој природен број n важи

$$a_0a_1\cdot\ldots\cdot a_n(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n})=1. \qquad (1)$$

Решение. За $n=0$ имаме $a_0 \cdot \frac{1}{a_0}=1$, т.е. точно е равенството (1). Нека претпоставиме дека равенството (1) е точно за секој природен број $n \geq 0$. Тогаш

$$a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=a_{n+1} \cdot a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)+a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$
$$=a_{n+1}+a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

што значи дека за да докажеме дека (1) важи и за $n+1$ доволно е да го докажеме равенството

$$a_n=1-a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}. \qquad (2)$$

Равенството (2) ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ имаме $a_1=1-a_0$, што значи дека равенството (2) е точно. Нека претпоставиме дека равенството (2) е точно за некој природен број $n \geq 1$. Тогаш

$$a_{n+1}=1-a_n(1-a_n)=1-a_n \cdot a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}=1-a_0 a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} a_n,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој природен број $n \geq 1$.

Од претходно изнесеното следува дека (1) важи за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој природен број n.

859АБ. а) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е разбиено (разделено) на две дисјунктни подмножества A и B. Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броја x, y и z такви што $x+y=z$.

б) Дали за множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ е точно тврдењето од задачата под а).

Решение. Нека тврдењето на задачата не е исполнето. Значи множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ не може да се разбие на две дисјунктни подмножества за кои е исполнет условот на задачата.

Од условот $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, добиваме дека бројот 5 припаѓа на едно од множествата. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $5 \in A$. Аналогно, бројот 4 припаѓа на точно едно од множествата A и B и бројот 6 припаѓа точно на едно од множествата A и B. Во зависност од броевите $4,5$ и 6 и направената претпоставка, ги имаме следните случаи.

Случај 1. $5 \in A$, $4 \in A$. Тогаш $9 \in B$ и $1 \in B$. Според тоа $8 \in A$. Бидејќи $5,8 \in A$ добиваме дека $3 \in B$. Но, од $1,3 \in B$ добиваме $2 \in A$, а од $2,4 \in A$ имаме $6 \in B$. Значи, во овој случај $1,3,6,9 \in B$, што не е можно и е спротивно од претпоставката на доказот.

Случај 2. $5,6 \in A$, $4 \in B$. Од $5,6 \in A$ добиваме дека $1 \in B$, а од $1,4 \in B$ добиваме дека $3 \in A$. Но, од $3,5 \in A$ добиваме дека $8 \in B$. Сега, од $1,8 \in B$ имаме $9 \in A$. Значи, $3,5,6,9 \in A$, што е спротивно на претпоставката на доказот.

Случај 3. $5 \in A$, $4,6 \in B$. Од $4,6 \in B$ добиваме дека $2 \in A$, а од $5,2 \in A$, добиваме дека $3 \in B$. Но, сега, од $3,4 \in B$ имаме $7 \in A$. Значи, $2,5,7 \in A$, што е спротивно на претпоставката на доказот.

Конечно, во било кое разбивање на множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на две дисјунктни подмножества A и B исполнет е условот на задачата.

б) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ може да се разбие на дисјунктни подмножества $A=\{1,2,4,8\}$ и $B=\{3,5,6,7\}$, за кои не е исполнет условот на задачата од делот а).

XLII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019
16.02.2019 година

Прва година

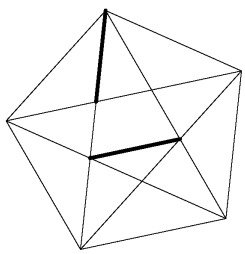
860АБ. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

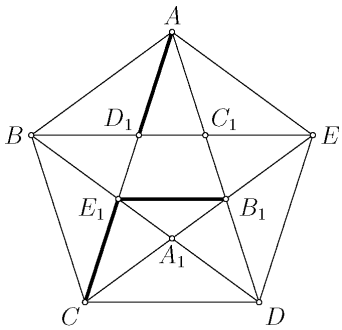
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $a^2=b(a+1)$. Од $\mathrm{NZD}(a,a+1)=1$ и $a+1\,|\,a^2$ следува $a+1=1$ или $a+1=-1$. Во првиот случај $a=0$ и $b=0$, а во вториот случај $a=-2$ и $b=-4$.

861А. Одреди ги сите трицифрени броеви со различни цифри кои се деливи со секој двоцифрен број кој се добива со изоставување на една негова цифра без да се менува редоследот на останатите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш $a\neq b\neq c\neq a$ и $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}},\frac{\overline{abc}}{\overline{bc}},\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}$ се цели броеви. Бидејќи $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}=\frac{\overline{ab0}+c}{\overline{ab}}=10+\frac{c}{\overline{ab}}$, следува дека $\frac{c}{\overline{ab}}$ е цел број што е можно само ако $c=0$. Бидејќи $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}}=\frac{\overline{ab}}{a}=10+\frac{b}{a}$, следува дека a е делител на b. Според тоа, $a\in\{1,2,3,4\}$. Од $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}}=\frac{\overline{ab}}{b}=\frac{10a}{b}+1$ следува дека b е делител на $10a$. Од претходната дискусија добиваме дека броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се: 120, 150, 240, 360,480.

862А. 4Б На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи, дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.





Решение. Бидејќи $\overline{CE_1}=\overline{AD_1}$, доволно е да докажеме дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак. Бидејќи дијагоналата на правилен петаголник е паралелна на неговата страна, важи $B_1E_1\parallel C_1D_1$, односно $E_1B_1\parallel D_1E$. Според тоа, $\measuredangle CB_1E_1=\measuredangle CED_1$, како агли со паралелни краци. Заради симетријата на петаголникот триаголникот CED_1 е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CED_1=\measuredangle ECD_1$. Конечно, $\measuredangle CB_1E_1=\measuredangle B_1CE_1$, што значи дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак.

863А. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $ab-1,bc-1,ac-1$ е делив со 4.

Решение. Секој природен број има еден од облиците $4k,4k+1,4k+2,4k+3$. Бидејќи броевите a,b,c се непарни природни броеви, тие имаат еден од облиците $4k+1,4k+3$. Според

принципот на Дирихле два од броевите a,b,c имаат ист облик. Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека a и b имаат ист облик. Според тоа, $a=4k_1+1, b=4k_2+1$ или $a=4k_1+3, b=4k_2+3$.

Во случајот $a=4k_1+1, b=4k_2+1$ имаме

$$ab-1=(4k_1+1)(4k_2+1)-1=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1-1=4(4k_1k_2+k_1+k_2).$$

Во случајот $a=4k_1+3, b=4k_2+3$ имаме

$$ab-1=(4k_1+3)(4k_2+3)-1=16k_1k_2+12k_1+12k_2+9-1=4(4k_1k_2+3k_1+3k_2+2).$$

Според тоа, $4\mid ab-1$, односно еден од броевите $ab-1, bc-1, ac-1$ е делив со 4.

864Б. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества имале заедно 913, 973, 873, 1011 и 1002 страни. По колку страни имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страните на книгите се a,b,c,d,e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a+b+c+d=913 \\ a+b+c+e=973 \\ a+b+d+e=873 \\ a+c+d+e=1011 \\ b+c+d+e=1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки, се добива:

$$4\left(a+b+c+d+e\right)=4772$$

$$\Rightarrow a+b+c+d+e=1193$$

Ако од оваа равенка се одземе секоја од петте равенки од системот, ќе се добие $a=182, b=191, c=320, d=220, e=280$ страни.

865Б. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=6$, пресметај ја вредноста на изразот $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Решение. Од тоа што

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

и од условот на задачата имаме дека $ab+bc+ca=-3$. Ако ја искористиме уште еднаш формулата за трином на квадрат имаме

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=9.$$

Оттука,

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9.$$

Втора година

866А. Дадени се две квадратни равенки $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$. Одреди ги сите вредности на параметарот a за кои двете равенки имаат барем едно заедничко решение.

Решение. Со одземање на втората равенка од првата добиваме

$$\left(a-1\right)x+1-a=0 \Leftrightarrow \left(a-1\right)\left(x-1\right)=0.$$

Ако $a=1$, тогаш станува збор за иста равенка, па имаат барем едно заедничко решение.
Ако $a\neq 1$, тогаш мора $x=1$, па со замена во равенките добиваме дека $a=-2$. Следува равенките имаат барем едно заедничко решение само кога $a=1$ и $a=-2$.

867АБ Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2-2ab+b^2=a \\ 4a^2-5ab+2b^2=b. \end{cases}$$

Решение. Ако првата равенка ја помножиме со b, а втората со a, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2b-2ab^2+b^3=ab \\ 4a^3-5a^2b+2b^2a=ab \end{cases}$$

Ако во последниот систем ги одземеме равенките добиваме

$$b^3-4b^2a+7a^2b-4a^3=0.$$

Ако $a=0$, тогаш $b=0$, па затоа $(a,b)=(0,0)$ е едно решение на системот.

За $a\neq 0$ ја воведуваме замената $z=\frac{b}{a}$ и ја добиваме равенката

$$z^3-4z^2+7z-4=0$$

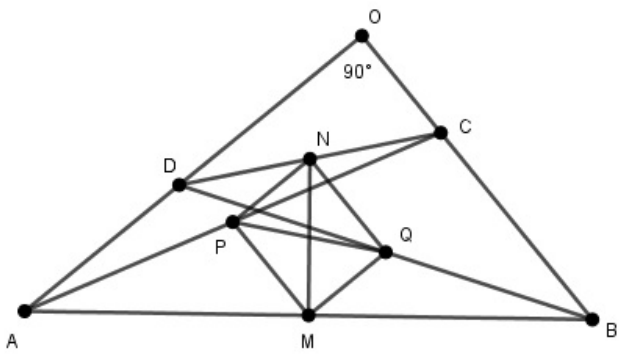
која е еквивалентна со равенката

$$(z-1)(z^2-3z+4)=0.$$

За $z=1$ важи $a=b$, а потоа со замена во почетниот систем лесно се добива дека $(a,b)=(1,1)$.

Понатаму, дискриминантата на равенката $z^2-3z+4=0$ е еднаква на -7, па затоа таа нема реални решенија, што значи дека почетниот систем нема други реални решенија.

868А Нека е даден конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AD\perp BC$. Нека растојанието од средината на AB до средината на CD е $1cm$. Пресметај го растојанието од средината на AC до средината на BD.



Решение. Нека M, N, P и Q се средини на AB, CD, AC и BD соодветно. Тогаш $\overline{MN}=1cm$. Од M и P се средини на AB и AC соодветно следува и $\overline{MP}=\frac{\overline{BC}}{2}$. Од N и Q се средини на CD и BD соодветно имаме $NQ\parallel BC$ и $\overline{NQ}=\frac{\overline{BC}}{2}$.

Од $NQ\parallel BC$ и $PM\parallel BC$ следува $PM\parallel NQ$ и $\overline{DM}=\overline{NQ}$. Аналогно се покажува дека $PN\parallel MQ$ и $\overline{PN}=\overline{MQ}$. Следува четириагонкиот $MQNP$ е паралелограм. Од $AD\perp BC$, $NQ\parallel BC$ и $PN\parallel AD$ следува $\sphericalangle PNQ=90^\circ$. Следува четириаголникот $MQNP$ е правоаголни со дијагонали MN и PQ. Следува $\overline{PQ}=\overline{MN}=1cm$.

869АБ Во зависност од вредноста на реалниот параметар, во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}1+x^2+x^4&=(1+x+x^2)^2-(2x+2x^2+2x^3)\\&=(1+x+x^2)^2-2x(1+x+x^2)\\&=(1+x+x^2)((1+x+x^2)-2x),\end{aligned}$$

па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned}&(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x+x^2)((1+x+x^2)-2x)\\&(1+x+x^2)(((a-1)-(a+1))(1+x+x^2)+2x(a+1))=0\\&(1+x+x^2)(-2(1+x+x^2)+2x(a+1))=0\\&(1+x+x^2)(1-ax+x^2)=0.\end{aligned}$$

Равенката $1+x+x^2=0$ нема реални решенија. Дискриминатата на равенката $x^2-ax+1=0$ е $D=a^2-4a$, па затоа оваа равенка има реални решенија ако и само ако $|a|\geq 2$. Конечно,

- за $a\in(-2,2)$ дадената равенка нема реални решенија,
- за $a=2$ равенката има едно решение $x=1$,
- за $a=-2$ равенката има едно решение $x=-1$ и
- за $a<-2$ или $a>2$ равенката има реални и различни решенија

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

870Б. Во квадратната равенка $x^2-(m+1)x+3m+2=0$ да се определи параметарот m така што збирот од решенијата на дадената равенка да е еднаков на збирот од нивните квадрати.

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=m+1$ и $x_1x_2=3m+2$. Од условот на задачата имаме

$$m+1=x_1+x_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+1)^2-2(3m+2)$$

т.е. $m^2-5m-4=0$. **(10)** Со решавање на квадратната равенка добиваме $m_1=\frac{5-\sqrt{31}}{2}$ и $m_2=\frac{5+\sqrt{31}}{2}$.

871Б. Даден е $\triangle ABC$ со страна $\overline{AB}=2cm, \alpha=30^\circ$ и $\beta=45^\circ$. Да се пресметаат должините на страните BC и AC.

Решение. Нека пресечната точка на висината h_c и страната AB е точка D. Од $\beta=45^\circ$ и $h_c\perp AB$ следува $\measuredangle BCD=45^\circ$ т.е. $\triangle BCD$ е рамнокрак правоаголен триаголник и $\overline{BD}=h_c$. Тогаш од $\sin 45^\circ=\frac{h_c}{a}$ следува $a=\sqrt{2}h_c$. Од $\sin 30^\circ=\frac{h_c}{b}$ следува $b=2h_c$. Од $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ следува $(2h_c)^2-(2-h_c)^2=h_c^2$ и $(\sqrt{2}h_c)^2-h_c^2=h_c^2$. Со изедначување на

последните равенства имаме $(2h_c)^2-(2-h_c)^2=\left(\sqrt{2}h_c\right)^2-h_c{}^2$ т.е. $2h_c{}^2+4h_c-4=0$.

Со решавање на квадратната равенка добиваме дека $h_c=\sqrt{3}-1cm$. Следува $a=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)cm$, а $b=2\left(\sqrt{3}-1\right)cm$.

Трета година

872А. Во множеството реални броеви реши ја равенката $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1$.

Решение. За $x>0$ извлекуваме пред заграда $\log_4 x$ и добиваме:

$$\log_4 x\left(\frac{\log_2 x}{\log_4 x}+\frac{\log_3 x}{\log_4 x}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x\left(\frac{\log_x 4}{\log_x 2}+\frac{\log_x 4}{\log_x 3}+1\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x\left(\log_2 4+\log_3 4+1\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x=\frac{1}{3+2\log_3 2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2^{\frac{1}{3+2\log_3 2}}$$

873АБ Даден е триаголник ABC и точка D на страната BC. Нека $\alpha_1=\measuredangle DAB$ и $\alpha_2=\measuredangle CAD$. Докажи, дека

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\overline{AD}}=\frac{\sin\alpha_1}{\overline{AC}}+\frac{\sin\alpha_2}{\overline{AB}}.$$

Решение. Имаме

$$P_{ABC}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2),\ P_{ABD}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\alpha_1,\ P_{ADC}=\tfrac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha_2.$$

Бидејќи $P_{ABC}=P_{ABD}+P_{ADC}$, добиваме

$$\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\alpha_1+\tfrac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha_2.$$

Ако последното равенство го поделиме со $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$ го добиваме бараното равенство.

874А Пресметај го остриот агол α, без да користиш калкулатор, ако се знае дека

$$ctg\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

Решение. Изразот од условот на задачата можеме да го запишеме како

$$ctg\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\sin 60^\circ+\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ-\sin 30^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ}{2}}{2\sin\frac{15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ}{2}}=ctg\frac{15^\circ}{2}.$$

Конечно, имаме $\alpha=7^\circ 30'$.

875АБ Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}(1+4x^2)y=4z^2\\(1+4y^2)z=4x^2\\(1+4z^2)x=4y^2.\end{cases}$$

Решение. Ако некој x, y или z е еднаков на нула, тогаш $x=y=z=0$. Во спротивно мора да важи $x>0, y>0, z>0$. Ако ги помножиме дадените равенки, тогаш $xyz(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64z^2x^2y^2$ и како $xyz\neq 0$ добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64xyz.$$

Понатаму, за позитивни реални броеви x, y и z важи $1+4x^2\geq 4x, 1+4y^2\geq 4y,\ 1+4z^2\geq 4z$, добиваме $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)\geq 64xyz$ при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Конечно, единствени решенија на системот се $x=y=z=0$ и $x=y=z=\frac{1}{2}$.

876Б. Во множество то реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\frac{5}{2}.$$

Решение. Бидејќи $x^2-2x+3>0$ и $x^2+2x+4>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ имаме дека $D_x=\mathbb{R}$. Ставаме смена $t=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}$ и имаме $\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow t+2+\frac{1}{t}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow 4t^2-17t+4=0\Leftrightarrow t_1=4, t_2=\frac{1}{4}$

Се враќаме во смената и со проверка забележуваме дека за $t_1=4$ равенката нема реални решение, а за $t_2=\dfrac{1}{4}$ имаме $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{4}{3}$.

877Б Докажи го равенството

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2.$$

Решение. Користиме дека $\log_x 2^a=a\log_x 2$ **(5)** и $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=$$

$$=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2^2}+\frac{1}{\log_x 2^2\cdot\log_x 2^3}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=$$

$$=\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2$$

Четврта година

878А. Нека $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ се низи дадени со $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{3x_n + y_n}{4}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5}$.

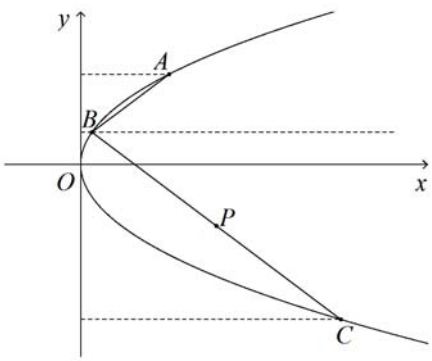
Докажи дека $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дадена со $z_n = y_n - x_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ е геометриска прогресија.

Решение. Од дефиницијата на z_n имаме $z_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1}$, односно

$$z_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5} - \frac{3x_n + y_n}{4} = -\frac{7}{20}x_n + \frac{7}{20}y_n .$$

Значи, $z_{n+1} = \frac{7}{20}(y_n - x_n)$. Имајќи во предвид дека $z_n = y_n - x_n$, добиваме дека $z_{n+1} = \frac{7}{20}z_n$, од каде се добива дека $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{7}{20}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е геометриска прогресија со количник $\frac{7}{20}$.

879АБ Дадена е парабола $y^2 = 2px,\ p > 0$. На параболата се дадени точки A, B, C (A има најголема, а C најмала ордината) такви што симетралата на $\measuredangle ABC$ е паралелна со $x-$оската. Ако должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$, определи ја ординатата на средината на отсечката BC.



Решение. Нека $(\frac{y_A^2}{2p}, y_A), (\frac{y_B^2}{2p}, y_B), (\frac{y_C^2}{2p}, y_C)$ се координатите на точките A, B, C, соодветно. Бидејќи правите AB и BC за фаќаат суплементни агли со $x-$оската, следува дека нивните коефициенти на правци се спротивни. Од условот $k_{AB} = -k_{BC}$ имаме $\frac{y_A - y_B}{\frac{y_A^2}{2p} - \frac{y_B^2}{2p}} = -\frac{y_B - y_C}{\frac{y_B^2}{2p} - \frac{y_C^2}{2p}}$, т.е. $\frac{y_A - y_B}{y_A^2 - y_B^2} = -\frac{y_B - y_C}{y_B^2 - y_C^2}$, од каде добиваме $y_A + 2y_B + y_C = 0$. Бидејќи $y_A > y_C$, а должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$ добиваме $y_A - y_C = 4p$. Од последните две равенства следува $2y_B + 2y_C = -4p$, што значи дека ординатата на средината P на отсечката BC е $\frac{y_B + y_C}{2} = -p$.

880АБ Нека a и b се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a = b$.

Решение. Нека $x = \log_b a$, $y = \log_{2b}(2a)$ и $z = \log_{4b}(4a)$. Тогаш

$$b^x = a\,,\ (2b)^y = 2a \text{ и } (4b)^z = 4a\,.$$

Од условот на задачата следува $2y = x + z$, па затоа

$$4a^2 = (2b)^{2y} = (2b)^{x+z} = 2^{x+z} b^x b^z = 2^{x+z} a \frac{4a}{4^z} = 2^{x-z} 4a^2\,.$$

Според тоа, $2^{-z} = 1$, т.е. $x = z$. Сега од $x = z$ следува $(4b)^x = (4b)^z = 4a = 4b^x$, па затоа $4^x b^x = 4b^x$, од каде добиваме $4^x = 4$, т.е. $x = 1$. Конечно, $a = b^x = b^1 = b$.

881А Пресметај го збирот $2\binom{2007}{2} + 4\binom{2007}{4} + \ldots + 2006\binom{2007}{2006}$.

Решение. Да забележиме дека

$$k\binom{2007}{k} = k\frac{2007!}{k!(2007-k)!} = \frac{2007\cdot 2006!}{(k-1)!(2007-k)!} = 2007\binom{2006}{k-1}.$$

Уште знаеме дека

$$\binom{2006}{1} + \binom{2006}{3} + \ldots + \binom{2006}{2005} = 2^{2006-1},$$

па затоа

$$2\binom{2007}{2} + 4\binom{2007}{4} + \ldots + 2006\binom{2007}{2006} = 2007\cdot 2^{2005}\,.$$

882Б Во рамнина се дадени две множества од паралелни прави $p_1, p_2, \ldots, p_{13}$ и $q_1, q_2, \ldots, q_7$ такви што правите од првото се сечат со правите од второто. Колку паралелограми се определени со тие прави?

Решение. Секој пар на прави од првото множество и секој пар од второто множество одредуваат точно еден паралелограм и обратно. Еден пар од првото множество може да се избере на $\binom{13}{2}$ начини, а од другото множество на $\binom{7}{2}$, од каде следува дека постојат $\binom{13}{2}\binom{7}{2} = 1638$.

883Б Докажи дека, за секој природен број n, $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-\text{корени}}$

Решение. За $n = 1$ тврдењето е точно бидејќи $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Да претпоставиме дека тврењето е точно за природниот број n. За да го покажеме тврдењето, доволно е да се докаже дека равенството важи ако наместо n замениме $n+1$. Така

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-\text{корени}}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{4}} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1-\text{корени}}$$