Живка Михова, Христо Лесов
Казанлк, Бугарија

ЗА НЕКОИ СВОЈСТВА НА ОРТОЦЕНТАРОТ НА ТРИАГОЛНИК

Во оваа работа ќе разгледаме некои карактеристични својства на ортоцентарот на триаголник. Во понатамошните разгледувања за елементите на ΔABC ќе ги користиме ознаките:

- a, b, c за страните спротивни на темињата A, B, C, соодветно,
- α, β, γ за внатрешните агли при темињата A, B, C, соодветно,
- H за ортоцентарот на триаголникот, и
- O за центарот на опишаната кружница околу триаголникот

Теорема 1. За ΔABC точни се равенствата:

a) $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$, $\angle CHA = 180^\circ - \alpha$ и $\angle AHB = 180^\circ - \gamma$, ако триаголникот е остроаголен,

b) $\angle BHC = \alpha$, $\angle CHA = \beta$ и $\angle AHB = 180^\circ - \gamma$, ако $\gamma > 90^\circ$.

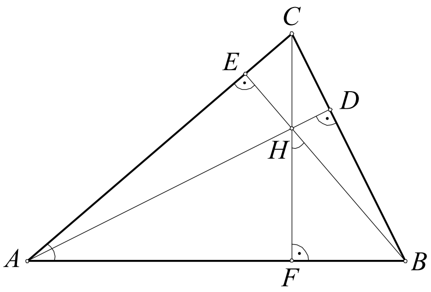
Доказ. Нека $AH \cap BC = D, BH \cap CA = E$ $BH \cap CA = E$ и $CH \cap AB = F$. Тогаш, AD, BE и CF се височините на триаголникот ABC. Ако тој е остроаголен, цртеж 1, тогаш имаме

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle BHF = 180^\circ - (90^\circ - \angle FBH)$$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \angle ABE) = 180^\circ - \alpha$$

Аналогно се докажува дека

$$\angle CHA = 180^\circ - \beta \text{ и } \angle AHB = 180^\circ - \gamma.$$



Црт. 1

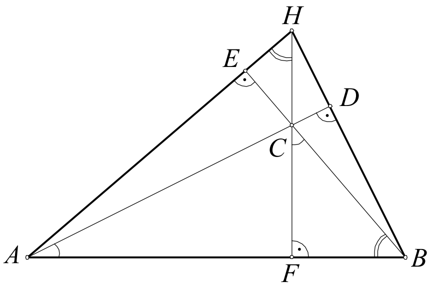
Ако за ΔABC важи, $\angle ACB = \gamma > 90^\circ$, цртеж 2, тогаш имаме

$$\angle BHC = 90^\circ - \angle FBH = 90^\circ - \angle ABE = \alpha,$$

$$\angle CHA = 90^\circ - \angle FAH = 90^\circ - \angle BAD = \beta \text{ и}$$

$$\angle AHB = \angle CHA + \angle BHC = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

Докажаните равенства во претходната теорема еднозначно го определуваат ортоцентарот на триаголник, што може да се види од следната теорема.



Црт. 2

Теорема 2. За ΔABC точката Q е негов ортоцентар, ако е исполнет условот:

a) за остроаголен ΔABC, Q е внатрешна точка и важат две од равенствата $\angle BQC = 180^\circ - \alpha$, $\angle CQA = 180^\circ - \beta$, $\angle AQB = 180^\circ - \gamma$.

b) за тапоаголен ΔABC со $\angle ACB = \gamma > 90^\circ$, C е внатрешна точка за ΔABQ и се исполнети две од равенствата $\angle BQC = \alpha$, $\angle CQA = \beta$, $\angle AQB = 180^\circ - \gamma$.

Доказ. Секое од равенствата покажува, дека точката Q лежи на геометриското место на точки, од кои соодветната страна на триаголникот се гледа под даден агол. Како што е познато, ова геометриско место се состои од два кружни лаци на кружници, симетрични во однос на правата, определена од соодветната страна.

Според тоа, од равенството $\angle AQB = 180^\circ - \gamma$ следува, дека Q лежи на кружен лак од кружница, која минува низ A и B, и лежи во полурамнината определена со правата AB во која е и точката C. Од равенството $\angle BQC = 180^\circ - \alpha$ (или $\angle BQC = \alpha$) следува, дека Q лежи и на кружниот лак од кружницата, која минува низ B и C, и лежи во полурамнината определена со правата BC во која лежи (или не лежи) и точката A. Значи, Q е заедничка точка на овие два кружни лаци, за кои втората заедничка точка е B. Но, според теорема 1 за ортоцентарот H на ΔABC се исполнети истите равенства, што значи дека и H е заедничка точка на овие кружни лаци. Бидејќи кружните лаци се различни, тие имаат најмногу две зеднички точки, од кои едната е B. Значи, Q се совпаѓа со H.

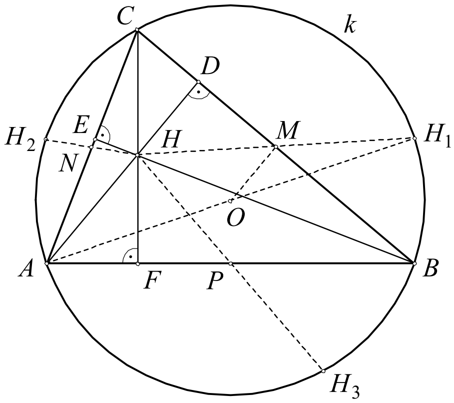
Во натамошните разгледувања посебно место имаат следните четири тврдења.

Теорема 3. За произволен триаголник точките, симетрични на ортоцентарот во однос на средините на неговите страни, лежат на кружницата опишана околу триаголникот.

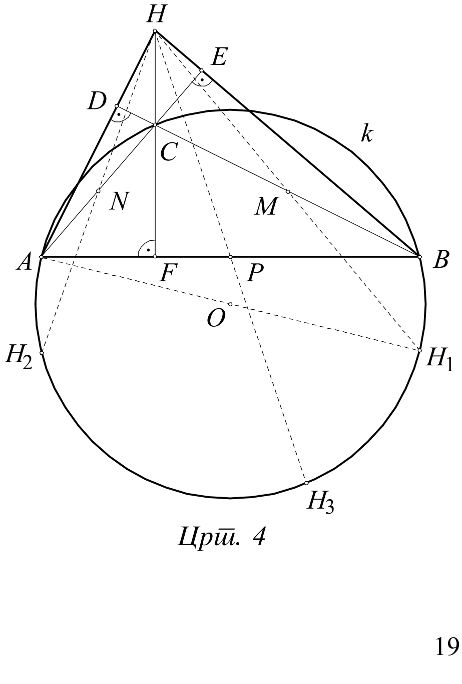
Доказ. Нека за ΔABC со M, N, P ги означуваме средините на страните BC, CA, AB соодветно, а со H_1, H_2, H_3 ги означиме точките симетрични на ортоцентарот H во однос на M, N, P соодветно. Тогаш од симетричноста на H и H_1 следува

$$\angle BH_1C = \angle BHC .$$

Ако ΔABC е остроаголен, тогаш од теорема 1 a) следува $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$, цртеж 3. Според тоа, $\angle BH_1C = 180^\circ - \alpha$, па затоа $\angle BH_1C + \angle CAB = 180^\circ$, од што следува дека околу четириаголникот ABH_1C може да се опише кружница, т.е. H_1 лежи на кружницата k опишана околу ΔABC. Аналогно се докажува дека и точките H_2 и H_3 лежат на кружницата k.



Црт. 3



Црт. 4

Ако $\angle ACB = \gamma > 90^\circ$, тогаш од теоремата 1 b) следува дека $\angle BHC = \alpha = \angle BH_1C$, цртеж 4, и отсечката BC се гледа под ист агол од точките A и H_1. Според тоа, точките A, B, C и H_1 лежат на една кружница, т.е. H_1 лежи на k.

Последица 1. Точките H_1, H_2, H_3 се симетрични на A, B, C соодветно, во однос на центарот O на кружницата k опишана околу ΔABC.

Доказ. Навистина, при ознаките на цртежите 3 и 4 добиваме дека дијагоналите BC и HH_1 на четириаголникот $BHCH_1$ се преполовуваат, па значи тој е паралелограм. Оттука следува дека $BH_1 \parallel CH$ и како $CH \perp AB$ добиваме дека $\angle ABH_1 = 90^\circ$. Според тоа, AH_1 е дијаметар на кружницата k, т.е. точките A и H_1 се симетрични во однос на нејзиниот центар.

Пример 1. Да се конструира ΔABC, ако се дадени ортоцентарот H, центарот O на опишаната кружница и средината M на страната BC.

Решение. Најпрво ја определуваме точката H_1 како симетрична на H, во однос на кружницата $k(O, \overline{OH_1})$ е опишаната кружница околу ΔABC. Во точката M повлекуваме права p нормална на OM и во пресек со k ги определуваме темињата B и C. Темето A го наоѓаме како точка симетрична на H_1 во однос на центарот O на k.

Последица 2. Растојанијата од ортоцентарот H до темињата A, B, C на ΔABC се двапати поголеми од растојанијата од центарот O на кружницата опишана околу ΔABC до страните BC, CA, AB соодветно.

Доказ. Според последицата 1 точката O е средина на AH_1 (цртежи 3 и 4) и како $OM \perp BC$ добиваме дека OM е средна линија во ΔAHH_1. Според тоа $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AH}$. Аналогно се докажува дека $\overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{BH}$ и $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{CH}$.

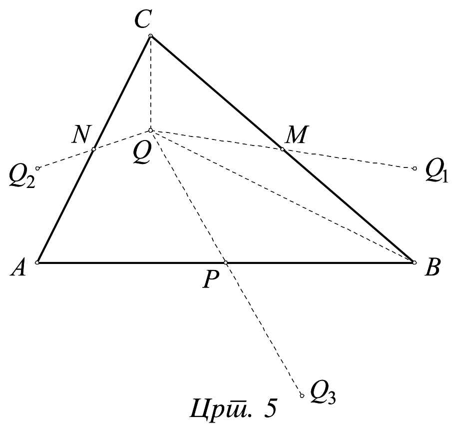
Теорема 4. За ΔABC точката Q е негов ортоцентар , ако две од точките симетрични на Q во однос на средините на страните BC, CA, AB лежат на кружницата опишана околу ΔABC и е исполнет условот:

a) ако ΔABC е остроаголен, тогаш Q е негова внатрешна точка,

b) ако $\angle ABC > 90^\circ$, тогаш C е внатрешна точка за ΔABQ.

Доказ. Нека за ΔABC со M, N, P ги означуваме средините на страните BC, CA, AB соодветно, а со Q_1, Q_2, Q_3 ги означиме точките симетрични на Q во однос на M, N, P соодветно. Тогаш $\angle BQC = \angle BQ_1C$.

Ако ΔABC е остроаголен и Q е негова внатрешна точка, тогаш точките A и Q_1 се во различни полурамнини во однос на BC, цртеж 5. Бидејќи Q_1 лежи на опишаната кружница околу ΔABC добиваме



Црт. 5

$$\angle BQ_1C + \angle CAB = 180^\circ \quad \text{т.е.} \quad \angle BQ_1C = 180^\circ - \alpha$$

што значи $\angle BQC = 180^\circ - \alpha$. Аналогно се докажува дека

$$\angle CQA = 180^\circ - \beta \text{ и } \angle AQB = 180^\circ - \gamma .$$

Сега тврдењето следува од теорема 2 a).

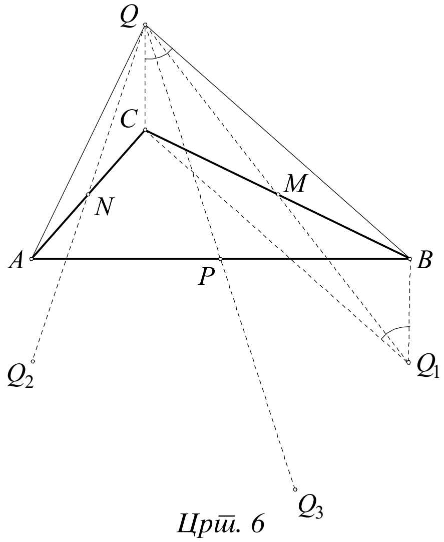
Ако $\angle ACB > 90^\circ$ и C е внатрешна точка за ΔABC, тогаш точките A и Q_1 се во иста полурамнина во однос на BC, цртеж 6. Бидејќи Q_1 лежи на кружницата опишана околу ΔABC добиваме

$$\angle BQ_1C = \angle BAC = \alpha ,$$

па затоа $\angle BQC = \alpha$. Аналогно се докажува дека

$$\angle CQA = \beta \text{ и } \angle AQB = 180^\circ - \gamma .$$

Сега тврдењето следува од теорема 2 b).



Црт. 6

Теореме 5. За произволен триаголник, точките симетрични на ортоцентарот во однос на правите определени од страните лежат на опишаната кружница околу триаголникот .

Доказ. Нека во ΔABC висините AD, BE, CF се сечат во точката H и H', H'', H''' се симетричните точки на H во однос на правите BC, CA, AB соодветно. Тогаш $\angle BH'C = \angle BHC$.

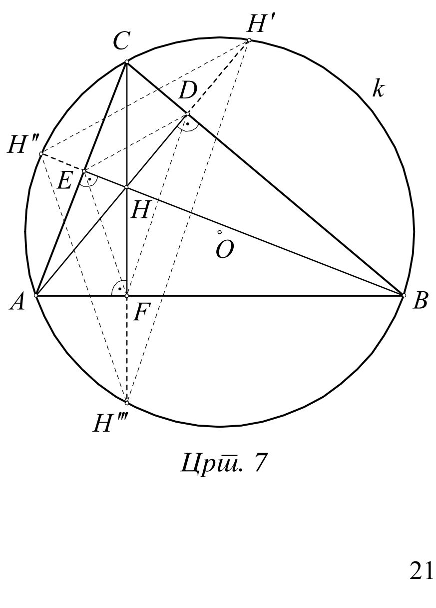
Ако ΔABC е остроаголен, тогаш од теорема 1 a) следува дека $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$, цртеж 7. Така $\angle BH'C + \angle CAB = 180^\circ$ и $\angle BH'C = 180^\circ - \alpha$, од што следува дека околу четириаголникот $ABH'C$ може да се опише кружница k. Значи, точката H' лежи на кружницата k опишана околу ΔABC. Аналогно се докажува, дека H'' и H''' исто така лежат на k.

Ако $\angle ACB = \gamma > 90^\circ$, тогаш од теорема 1 b) (цртеж 8) следува дека

$$\angle BHC = \alpha = \angle BH'C .$$

Според тоа, отсечката BC се гледа под еднакви агли од A и H'. Значи, A, B, C, H' лежат на една кружница, т.е. H' лежи на кружницата k. Аналогно се докажува дека H'' и H''' исто така лежат на k.

Забелешка 1. Точките H', H'', H''' се симетрични на H во однос на D, E, F, соодветно, и тоа се пресечните точки на височините на ΔABC со кружницата k опишана околу него.



Црт. 7

Пример 2. Да се конструира ΔABC, ако се дадени ортоцентарот H, центарот O на кружницата опишана околу ΔABC и правата BC.

Решение. Ако се искористи теорема 5 после наоѓањето на точката H' симетрична во однос на правата BC, ја конструираме кружницата $k(O, \overline{OH'})$, која е опишана околу ΔABC. Сега темињата на ΔABC се пресечните точки на кружницата k со правата BC и со правата HH'.

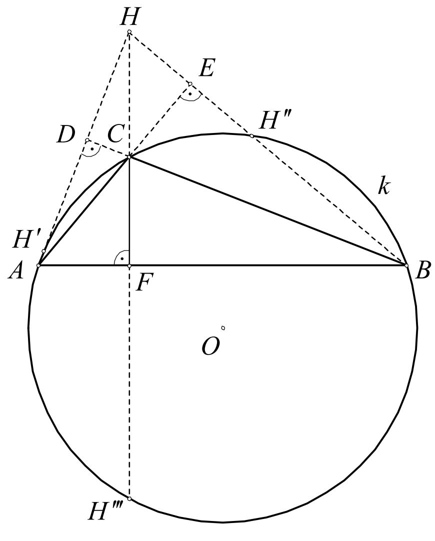
Последица 3. Нека AD, BE, CF се висините на ΔABC. Тогаш пресечната точка на симетралите на внатрешните агли на ΔDEF е:

a) ортоцентарот H на ΔABC, ако ΔABC е остроаголен,

b) темето C на ΔABC, ако $\angle ACB > 90^\circ$.

Доказ. При ознаките на цртеж 7, DE е средна линија во $\Delta HH'H''$, па затоа $DE \parallel H'H''$ и $\angle ADE = \angle AH'H''$. Аналогно $\angle ADF = \angle AH'H''$. Но, заради симетријата имаме дека $AH'' = AH = AH'''$ и во кружницата k важи $\widehat{AH''} = \widehat{AH'''}$, од што следува дека $\angle AH'H'' = \angle AH'H'''$, т.е. $\angle ADE = \angle ADF$. Според тоа, AD е симетрала на $\angle FDE$. Аналогно се докажува дека BE е симетрала на $\angle DEF$ и CF е симетрала на $\angle EFD$, од што следува тврдењето.

Ако $\angle ACB > 90^\circ$, тогаш сметајќи дека C е ортоцентар во ΔABH, цртеж 8, добиваме дека симетралите на аглите на ΔDEF се AE, BD, HF и тие се сечат во точката C.



Црт. 8

Последица 4. Кружниците опишани околу триаголниците BCH, CAH и ABH имаат еднакви радиуси со кружницата опишана околу ΔABC.

Доказ. Навистина, ΔBCH и $\Delta BCH'$ се симетрични во однос на BC, па затоа симетрични се и опишаните кружници околу нив, што значи дека тие имаат еднакви радиуси.

Забелешка 2. Од претходните разгледувања следува дека ако тир еднакви кружници имаат заедничка точка, тогаш таа е ортоцентар на триаголник со темиња во останатите заеднички точки на кружниците.

Теорема 6. За ΔABC точката Q е негов ортоцентар, ако две од точките симетрични на Q во однос на правите BC, CA, AB лежат на кружницата опишана околу ΔABC и е исполнет условот

a) ако ΔABC е остроаголен, тогаш Q е негова внатрешна точк, и

b) ако $\angle ACB > 90^\circ$, тогаш C е внатрешна точка за ΔABQ.

Доказ. Постапете аналогно како во доказот на теорема 4.

Пример 3. Ако висините AD, BE, CF на остроаголниот триаголник ABC ја сечат опишаната кружница во точките D_1, E_1, F_1, соодветно, тогаш е исполнето равенството

$$\frac{\overline{AD_1}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BE_1}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CF_1}}{\overline{CF}}=4$$

Докажете!

Решение. Бидејќи $D_1 = H', E_1 = H'', F = H'''$ и $\overline{AD_1} = \overline{AD}+\overline{DH'} = \overline{AD}+\overline{HD}$, $\overline{BE_1} = \overline{BE}+\overline{EH''} = \overline{BE}+\overline{HE}$, $\overline{CF_1} = \overline{CF}+\overline{FH'''} = \overline{CF}+\overline{FH}$ равенството е еквивалентно на равенството

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}=1.$$

Последното равенство е исполнето бидејќи

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}=\frac{P_{\Delta BCH}}{P_{\Delta ABC}}+\frac{P_{\Delta CAH}}{P_{\Delta ABC}}+\frac{P_{\Delta ABH}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{P_{\Delta BCH}+P_{\Delta CAH}+P_{\Delta ABH}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}=1.$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Задача 1. Да се конструира ΔABC, ако се дадени точките H_1, H_2, H_3 симетрични на ортоцентарот H во однос на средините на страните на ΔABC.

Задача 2. Да се конструира ΔABC, ако се познати темето A, средината M на страната BC и ортоцентарот H.

Задача 3. Да се конструира триаголник, ако се познати едно теме, ортоцентарот и центарот на опишаната кружница.

Задача 4. Да се докаже дека, сите триаголници впишани во даден остроаголен триаголник, најмал периметар има триаголникот чии темиња се подножјата на висините на дадениот триаголник.

Задача 5. Да се докаже дека, симетричната точка на центарот на вписаната кружница во триаголник во однос на една негова страна или во однос на нејзината средина, лежи на опишаната кружница околу триаголникот, ако и само ако, аголот наспроти таа страна е 60°.

Литература:

[1] Ст. Бодуров, В. Флоров: Сборник от задачи за математически Олимпиади, Народна просвета, София, 1966.

[2] Хр. Хитов: Геометрија на триаголникот, Народна просвета, Софија, 1990.