



Седма Иранска геометриска олимпијада
Напредно ниво
30.10.2020 година

Време за работа: 270 минути.
 Секоја задача се вреднува 8 бода.

1. Нека M, N и P се соодветно средините на страните BC, AC и AB на $\triangle ABC$. Точките E и F припааат на страната BC и се такви што $\angle NEC = \frac{1}{2}\angle AMB$ и $\angle PFB = \frac{1}{2}\angle AMC$. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{AF}$.

2. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со центар на впишана кружница I . Нека N е средината на лакот BAC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а точката P е таква што $ABPC$ е паралелограм. Нека Q е симетричната точка на A во однос на N , а R е проекцијата на A врз правата QI . Докажи дека правата AI е тангента на кружницата опишана околу $\triangle PQR$.

3. Дадени се три кружници $k_i(O_i, r_i), i=1,2,3$ кои се надвор една од друга и се такви што секоја права која одделува две од дадените кружници има непразен пресек со внатрешноста на третата кружница. Докажи дека

$$\overline{O_1O_2} + \overline{O_2O_3} + \overline{O_3O_1} \leq 2\sqrt{2}(r_1 + r_2 + r_3).$$

(Права одделува две кружници ако кружниците не се сечат со правата и се наоѓаат на различни страни од неа.)

4. Впишаната кружница, со центар I , во тангентниот четириаголник $ABCD$ ги допира неговите страни AD, DC, CB и BA во точките K, L, M и N , соодветно. Правите AD и BC се сечат во точката E , а правите AB и CD се сечат во точката F . Нека KM ги сече AB и CD во точките X и Y , соодветно. Нека LN ги сече AD и BC во точките Z и T , соодветно. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот XFY и кружницата со дијаметар EI се допираат ако и само ако кружницата опишана околу триаголникот TEZ и кружницата со дијаметар FI се допираат.

5. Даден е остроаголен триаголник ABC ($\overline{AC} > \overline{AB}$) со ортоцентар H и опишана кружница Γ . Точките M и P се средини на отсечките BC и AH , соодветно. Правата AM по вторпат ја сече Γ во точката X . Точката N припаѓа на правата BC и е таква што NX е тангента на Γ . Точките J и K припаѓаат на кружницата со дијаметар MP и се такви што $\angle AJP = \angle HNM$ (B и J се на иста страна од AH). Кружницата ω_1 , која минува низ K, H и J , и кружницата ω_2 , која минува низ K, M и N , надворешно се допираат една со друга. Докажи дека заедничките надворешни тангенти на ω_1 и ω_2 се сечат на правата NH .