# 30. TURNIR GRADOVA

## Jesenje kolo.

Pripremna (bazna) varijanta, 12. oktobar 2008. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (3 poena) U 10 kutija nalaze se olovke. Poznato je da u različiim kutijama ima različit broj olovaka, pri čemu su u svakoj kutiji olovke različitih boja. Dokažite da iz svake kutije možemo uzeti po olovku tako da sve one budu različitih boja.

**2.** (3 poena) Dato je 50 različitih prirodnih brojeva, od kojih 25 nisu veći od 50, a ostali su veći od 50, ali ne prelaze preko 100. Pri tome ni koja dva se ne razlikuju tačno za 50. Nađite zbir (svih) tih brojeva.

**3.** (4 poena) U kružnicu poluprečnika 2 upisan je oštrougli trougao $A_1A_2A_3$. Dokažite da se na lukovima $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_1$ može naći po jedna tačka

$B_1$, $B_2$, $B_3$ (tim redom), tako da površina šestougla $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ bude brojčano jednaka obimu trougla $A_1A_2A_3$.

**4.** (4 poena) Data su tri prirodna broja takva da je jedan od njih jednak poluzbiru druga dva. Može li proizvod ta tri broja biti tačan 2008. stepen prirodnog broja?

**5.** (4 poena) Nekoliko sportista startovalo je istovremeno sa jednog kraja pravolinijske staze. NJihove brzine su različite, ali konstantne (stalne). Kad dođu do kraja staze sportisti se trenutno okreću i trče nazad, zatim sve to ponavljaju, itd. U jednom momentu su se svi sportisti našli u jednoj tački. Dokažite da će takvih susreta biti još.

# 30. TURNIR GRADOVA

## Jesenje kolo.

## Pripremna (bazna) varijanta, 12. oktobar 2008. god.

## 10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (3 poena) Aljoša ima kolače raspoređene u nekoliko kutija. Aljoša je zapisao po koliko kolača ima u svakoj kutiji. Serjoža je uzeo po jedan kolač iz svake kutije i stavio na prvi tanjir. Zatim je ponovo uzeo po jedan kolač iz svake kutije koja nije prazna i stavio ih na drugi tanjir. Tako je radio sve dok svi kolači nisu bili raspoređene po tanjirima. Posle toga, Serjoža je zapisao po koliko je kolača bilo na svakom tanjiru. Dokažite da je količina različitih brojeva koje je Aljoša zapisao jednaka količini različitih brojeva koje je Serjoža zapisao.

**2.** (3 poena) Rešite sistem jednačina $(n>2)$

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2+\ldots+x_n}=\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3+\ldots+x_n+x_1}=\ldots=\sqrt{x_n}+\sqrt{x_1+\ldots+x_{n-1}}\,;\quad x_1-x_2=1$$

**3.** (4 poena) U kružnicu poluprečnika 2 upisan je tridesetougao $A_1 A_2 \ldots A_{30}$. Dokažite da se na lukovima $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_{30}A_1$ može naći po jedna tačka $B_1, B_2, \ldots, B_3$ (tim redom), tako da površina šezdesetougla $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{30}B_{30}$ bude brojčano jednaka obimu tridesetougla $A_1A_2 \ldots A_{30}$.

**4.** (4 poena) Da li postoji aritmetička progresija od pet različitih prirodnih brojeva, čiji je proizvod jednak tačno 2008-om stepenu prirodnog broja?

**5.** (4 poena) Na kvadratnoj mreži nacrtano je nekoliko pravougaonika čije se stranice poklapaju sa linijama mreže. Svaki pravougaonik se sastoji iz neparnog broja polja (kvadratića) i nikoja dva pravougaonika nemaju zajedničkih polja. Dokažite da te pravougaonike možemo obojiti sa 4 boje tako da pravougaonici iste boje nemaju zajedničke granične tačke.

# 30. TURNIR GRADOVA

## Jesenje kolo.

Osnovna varijanta, 26. oktobar 2008. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena,
a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (4 poena) Na šahovskoj tabli 100×100 raspoređeno je 100 dama koje ne tuku jedna drugu. Dokažite da se u svakom ugaonom kvadratu 50×50 nalazi bar jedna dama. (*Dama je šahovska figura koja se kreće po horizontali, vertikali i dijagonali - na bilo koje rastojanje*!)

**2.** (6 poena) Imamo 4 kamena, od kojih svaki važe ceo broj grama. Imamo terazije sa tasovima i strelicom koja pokazuje na kojem od dva tasa se nalazi veća masa i za koliko grama je ta masa veća. Može li se sa 4 merenja odrediti masa svakog kamena, ako se u jednom od tih merenja može pogrešiti za 1 gram? (*Masa kamena ne može biti* ni 0, *ni negativna*!)

**3.** (6 poena) Serjoža je nacrtao trougao *ABC* i njegovu težišnu duž *AD*. Zatim je svom drugu Ilji saopštio dužinu težišne duži *AD* i dužinu stranice *AC*. Na osnovu tih podtaka Ilja je dokazao tvrđenje: ugao *CAB* je tup, a ugao *DAB* je oštar. Nađite odnos $\frac{AD}{AC}$ (i dokažite Iljino tvrđenje za svaki trougao u kome važi takav odnos).

**4.** (6 poena) Baron Minhauzen je pričao da on ima kartu zemlje Oz na kojoj je prikazano 5 gradova. Svaka dva grada spojena su putem koji ne prolazi kroz druge gradove. Svaki put na karti seče najviše jedan od drugih puteva (i najviše na jednom mestu). Putevi su označeni žutom ili crvenom bojom (prema boji podloge na putu), a pri obilasku oko svakog grada (po obodu) boje puteva koji iz njega polaze, a na koje se pri takvom obilasku nailazi, menjaju se naizmenično. Može li Baron biti u pravu?

**5.** (8 poena) Dati su pozitivni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zna se da je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le \frac{1}{2}$.

Dokažite da je $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot \ldots \cdot(1+a_n) < 2.$

**6.** (9 poena) Nad stranicama *AC* i *BC* raznostraničnog trougla *ABC* sa spoljašnje strane, kao nad osnovicama, konstruisani su jednakokraki trouglovi *AB'C* i *CA'B* sa jednakim uglovima na osnovicama. Svaki od tih uglova je $\varphi$. Normala iz temena *C* povučena na duž *A'B'* seče simetralu duž *AB* u tački $C_1$. Odredite ugao $AC_1B$.

**7.** U beskonačnom nizu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ broj $a_1$ jednak je 1, a svaki sedeći broj $a_n$ nastaje iz prethodnog broja $a_{n-1}$ po pravilu: ako najveći neparni delilac broja *n* ima ostatak 1 pri deljenju sa 4, tada je $a_n = a_{n-1} + 1$, a ako ima ostatak 3, tada je $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokažite da se u tom nizu:

**a)** (5 poena) broj 1 pojavljuje beskonačno mnogo puta;

**b)** (5 poena) svaki prirodan broj javlja beskonačno mnogo puta.

(Evo nekoliko prvih članova tog niza: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)

(*Najveći neparni delilac broja n je najveći neparni broj kojim je broj n deljiv, pri čemu to ne mora biti prost delilac.*)

# 30. TURNIR GRADOVA

## Jesenje kolo.

## Osnovna varijanta, 26. oktobar 2008. god.

## 10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (4 poena) Kvadratna tabla podeljena je pravama koje su paralelne stranicama table na 64 pravougaona polja koja su zatim obojena kao šahovska tabla. Rastojanja među pravama ne moraju biti jednaka, pa zato polja mogu biti različitih dimenzija. Poznato je, međutim, da odnos površine ma kojeg belog polja prema površini ma kojeg crnog polja nije veći od 2. Nađite najveći mogući odnos zbira površina belih polja prema zbiru površina crnih polja.
(*Ako uzmemo da je jedna stranica table vertikalna, a druga horizontalna, onda povučenih 7 vertikalnih i 7 horizontalnih pravih dele tablu na 64 pravougaona polja*)

**2.** (6 poena) Prostor je razdeljen na jednake kocke. Da li je tačno da je za svaku od tih kocki uvek moguće naći drugu koja sa njom ima zajedničku stranu?

**3.** (6 poena) Na stolu se nalazi N > 2 gomilica oraha sa bar jednim orahom svakoj od njih.. Dvoje igraju ("vuku poteze") naizmenično. U jednom potezu treba uzeti dve gomilice u kojima su brojevi oraha uzajamno prosti, a zatim od njih ih napraviti jednu gomilicu. Pobeđuje onaj koji učini poslednji potez. Za svako *N* objasnite koji od igrača može uvek da pobedi, ma kako igrao njegov protivnik.

**4.** (6 poena) Dat je nejednakokraki trapez *ABCD*. Tačka $A_1$ je tačka preseka kružnice opisane oko trougla *BCD* i prave *AC* ($A_1$ je različito od *C*.) Analogno određujemo tačke $B_1$, $C_1$, $D_1$. Dokažite da je $A_1B_1C_1D_1$ takođe trapez. (*Trapez je figura kod koje su dve stranice paralelne, a dve ne*!)

**5.** (8 poena) U beskonačnom nizu $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . . broj $a_1$ jednak je 1, a svaki sledeći broj $a_n$ nastaje iz prethodnog broja $a_{n-1}$ po pravilu: ako najveći neparni delilac broja *n* ima ostatak 1 pri deljenju sa 4, tada je $a_n = a_{n-1} + 1$, a ako ima ostatak 3, tada je $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokažite da se u tom nizu svaki prirodan broj javlja beskonačno mnogo puta.
(Evo nekoliko prvih članova tog niza: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, . . .)
(*Najveći neparni delilac broja n je najveći neparni broj kojim je broj n deljiv, (pri čemu to ne mora biti prost delilac.*)

**6.** (9 poena) Polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima je takav da jednačina $P(m)+P(n)=0$ ima beskonačno mnogo rešenja za cele brojeve *m* i *n*. Dokažite da grafik funkcije $y=P(x)$ ima centar simetrije.

**7.** Test se sastoji iz 30 pitanja. Na svako pitanje postoje dve varijante odgovora (jedan tačan, a drugi netačan). U jednom pokušaju Vita odgovora na sva pitanja, posle čega mu saopštavaju na koliko pitanja je odgovorio tačno. Može li Vita da postupa tako da garantovano sazna na koja je pitanja tačno odgovorio, najkasnije

**a)** (5 poena) posle 29. pokušaja (i da odgovori tačno na sva pitanja u 30. pokušaju);

**b)** (5 poena) posle 24. pokušaja (i da odgovori tačno na sva pitanja u 25. pokušaju)?

(U početku Vita ne zna ni jedan odgovor, a test je stalno jedan te isti)

# 30. TURNIR GRADOVA

## Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (3 poena) U konveksnom 2009 - uglu povučene su sve dijagonale. Prava seče 2009- ugao, ali ne prolazi ni kroz jedno njegovo teme. Dokažite da ta prava seče paran broj dijagonala.

**2.** (4 poena) Neka $a{*}b$ znači izraz $a^b$. U izrazu $7{*}7{*}7{*}7{*}7{*}7{*}7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se dobije isti rezultat?

**3.** (4 poena) Vlada hoće da napravi kolekciju kocki istih dimenzija i na svakoj strani svake kocke da napiše po jednu cifru, tako da se te kocke mogu poređati da čine ma koji 30- cifreni broj. Koliko najmanje kocki mu je za to dovoljno? (Cifre 6 i 9 se pri obrtanju kocke ne pretvaraju jedna u drugu.)

**4.** (4 poena) Prirodan broj su uvećali za 10% i ponovo dobili prirodan broj. Da li se pri tome zbir cifara mogao umanjiti za 10%?

**5.** (5 poena) U rombu *ABCD* ugao *A* iznosi 120°. Na stranicama *BC* i *CD* uzete su tačke *M* i *N* tako da je $\angle NAM$=30°. Dokažite da se centar kružnice opisane oko trougla *NAM* nalazi na dijagonali romba.

# 30. TURNIR GRADOVA

## Prolćno kolo.

Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

# 10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

**1.** (3 poena) Neka $a*b$ znači izraz $a^b$. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se uvek dobije isti rezultat?

**2.** (4 poena) U ravni je dato nekoliko tačaka takvih da nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj. Neke tačke spojene su dužima. Zna se da svaka prava koja ne prolazi kroz date tačke seče paran broj duži. Dokažite da iz svake tačke polazi paran broj duži.

**3.** Za svaki prirodan broj $n$ označimo sa $O(n)$ njegov najveći neparni delilac. Dati su proizvoljni prirodni brojevi $x_1=a$ i $x_2=b$. Formirajmo beskonačni niz prirodnih brojeva po pravilu: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, gde je $n = 3, 4, ...$

**a)** (2 poena) Dokažite da će, počev od nekog mesta, svi brojevi u nizu biti jednaki jednom istom broju.

**b)** (2 poena) Kako naći taj broj, ako se znaju brojevi $a$ i $b$?

**4.** (4 poena) Redom je napisano nekoliko nula i jedinica. Posmatrajmo (sve) parove cifara u tom redu (ne obavezno susednih), gde je leva cifra 1, a desna 0. Neka se među tim parovima nalazi tačno $M$ takvih u kojima između jedinice i nule ima paran broj cifara (moguće i nijedna), i tačno $N$ takvih u kojima između jedinice i nule stoji neparan broj cifara. Dokažite da je $M \geq N$.

**5.** (4 poena) U unutrašnjosti nekog tetraedra uzeta je proizvoljna tačka $X$. Kroz svako teme tetraedra povučena je prava, paralelna duži koja spaja tačku $X$ sa tačkom preseka medijana (težišnih duži) naspramne strane. Dokažite da se četiri dobijene prave seku u jednoj tački.

# 30. TURNIR GRADOVA

## Prolećno kolo.

## Bazna varijanta, 1. mart 2009. god.

## 10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.
Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (3 poena) Neka $a*b$ znači izraz $a^b$. U izrazu $7*7*7*7*7*7*7$ treba staviti zagrade koje će određivati redosled operacija (ukupno 5 parova zagrada). Mogu li se te zagrade postaviti na dva različita načina, ali tako da se uvek dobije isti rezultat?

**2.** (4 poena) U ravni je dato nekoliko tačaka takvih da nikoje tri ne pripadaju istoj pravoj. Neke tačke spojene su dužima. Zna se da svaka prava koja ne prolazi kroz date tačke seče paran broj duži. Dokažite da iz svake tačke polazi paran broj duži.

**3.** Za svaki prirodan broj $n$ označimo sa $O(n)$ njegov najveći neparni delilac. Dati su proizvoljni prirodni brojevi $x_1=a$ i $x_2=b$. Formirajmo beskonačni niz prirodnih brojeva po pravilu: $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$, gde je $n = 3, 4, ...$

**a)** (2 poena) Dokažite da će, počev od nekog mesta, svi brojevi u nizu biti jednaki jednom istom broju.

**b)** (2 poena) Kako naći taj broj, ako se znaju brojevi $a$ i $b$?

**4.** (4 poena) Redom je napisano nekoliko nula i jedinica. Posmatrajmo (sve) parove cifara u tom redu (ne obavezno susednih), gde je leva cifra 1, a desna 0. Neka se među tim parovima nalazi tačno $M$ takvih u kojima između jedinice i nule ima paran broj cifara (moguće i nijedna), i tačno $N$ takvih u kojima između jedinice i nule stoji neparan broj cifara. Dokažite da je $M \geq N$.

**5.** (4 poena) U unutrašnjosti nekog tetraedra uzeta je proizvoljna tačka $X$. Kroz svako teme tetraedra povučena je prava, paralelna duži koja spaja tačku $X$ sa tačkom preseka medijana (težišnih duži) naspramne strane. Dokažite da se četiri dobijene prave seku u jednoj tački.

# 30. TURNIR GRADOVA

## Prolećno kolo.

## Složena varijanta, 15. mart 2009. god.

## 8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena,
a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (3 poena) Vasa i Pera igraju sledeću igru. Na tabli su napisani brojevi 1/2009 i 1/2008. Pri svakom potezu Vasa bira neki broj *x,* a Pera uveća jedan od brojeva na tabli (koji hoće) za *x.* Vasa pobeđuje ako se u nekom trenutku na tabli pojavi broj 1 Može li Vasa pobediti bez obzira na to kako igra Pera?

**2.** a) (2 poena) Dokazati da postoji mnogougao koji se može podeliti jednom duži na dva podudarna dela tako da ta duž deli jednu stranicu na pola, a drugu u odnosu 1 : 2.

b) (3 poena) Da li postoji konveksan mnogougao s takvim svojstvom?

**3.** (5 poena) U svakom polju kvadrata 101 $\times$ 101, osim centralnog, stoji jedan od sledeća dva saobraćajna znaka: "pravo" ili "skreći". Šahovska figura "auto" može spolja ući (pod pravim uglom prema ivici) na bilo koje ivično polje kvadrata. Ako je stala na polje na kojem je znak "pravo", onda produžava pravo na sledeće polje, a ako je stala na polje sa znakom "skreći", onda skreće pod uglom od $90^0$ na stranu koju sama izabere. U centralnom polju se nalazi garaža. Mogu li se polja označiti tako da auto ne može da stigne u garažu?

**4.** (5 poena) Dat je beskonačan niz međusobno različitih prirodnih brojeva. Poznato je da je svaki član tog niza, osim prvog, ili aritmetička ili geometrijska sredina svoja dva susedna člana. Da li su obavezno svi članovi tog niza, počevši od nekog mesta, isključivo aritmetičke ili isključivo geometrijske sredine svojih suseda?

**5.** (6 poena) Zamak je opasan kružnim bedemom sa 9 kula na kojima stražare vitezovi. Kada protekne sat vremena svaki od njih (istovremeno) prelazi na susednu kulu, pri čemu se svaki od vitezova stalno kreće ili u pravcu kazaljke na satu ili u suprotnom pravcu. Za jednu noć svaki od vitezova je stigao da boravi na svakoj od kula. Poznato je da su u nekom trenutku na svakoj kuli dežurala bar dva viteza, kao i da je bio trenutak kada je na tačno 5 kula bio tačno po jedan vitez. Dokazati da je postojao trenutak kada je postojala kula na kojoj niko nije stražario.

**6**. (7 poena) Ugao *C* u vrhu jednakokrakog trougla *ABC* je $120^0$. Iz temena *C* su puštena (povučena) dva zraka koji između sebe čine ugao od $60^0$ i koji se po zakonu "upadni ugao jednak je uglu odbijanja" odbijaju od osnovice *AB* i završavaju na kracima tog jednakokrakog trougla. Na taj način je polazni trougao podeljen na 5 manjih trouglova. Uočimo ona tri koja leže na osnovici *AB.* Dokažite da je površina srednjeg od njih jednaka površini druga dva.

**7.** (9 poena) Neka $C_n^k$ označava broj načina da se izaberu *k* predmeta iz skupa od *n* različitih predmeta (poredak predmeta nije bitan – načini koji se razlikuju samo u redosledu izbora predmeta smatraju se istim). Dokažite, ako su prirodni brojevi *k* i *l* manji od *n*, onda brojevi $C_n^k$ i $C_n^l$ imaju zajednički delilac veći od 1.

# 30. TURNIR GRADOVA

## Prolećno kolo.

## Složena varijanta, 15. mart 2009. god.

## 10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

**1.** (4 poena) Pravougaonik je podeljen na nekoliko manjih pravougaonika. Da li je moguće da za svaki par dobijenih pravougaonika duž, koja spaja njihova središta, seče još neki od tih pravougaonika?

**2.** (4 poena) Dat je beskonačan niz međusobno različitih prirodnih brojeva. Poznato je da je svaki član tog niza, osim prvog, ili aritmetička ili geometrijska sredina svoja dva susedna člana. Da li su obavezno svi članovi tog niza, počevši od nekog mesta, isključivo aritmetičke ili isključivo geometrijske sredine svojih suseda?

**3.** 6 poena) Na svakom polju table veličine $10\times10$ nalazi se žeton. U svakom potezu je dozvoljeno odabrati dijagonalu na kojoj se nalazi paran broj žetona i sa nje ukloniti jedan (proizvoljan) žeton. Koji je najveći broj žetona koji se mogu tako ukloniti sa table?

**4.** (6 poena) Tri ravni dele paralelepiped na osam tela, a svako od njih ima šest strana od kojih je svaka četvorougao (svaka ravan seče par naspramnih strana parelelepipeda, a ne seče preostali par naspramnih strana). Poznato je da se oko jednog od tih osam tela može opisati sfera. Dokazati da se i oko svakog od tih osam tela može opisati sfera.

**5.** (8 poena) Neka $C_n^k$ označava broj načina da se izaberu $k$ predmeta iz skupa od $n$ različitih predmeta (poredak predmeta nije bitan – načini koji se razlikuju samo u redosledu izbora predmeta smatraju se istim). Dokažite, ako su prirodni brojevi $k$ i $l$ manji od $n$, onda brojevi $C_n^k$ i $C_n^l$ imaju zajednički delilac veći od 1.

**6.** (9 poena) Dat je prirodan broj $n > 1$. Dvoje naizmenično označavaju tačke na kružnici: prvi crvenom, a drugi plavom bojom. Kada je označeno po $n$ tačaka svake boje, označavanje (igra) se završava. Zatim svaki od igrača bira luk maksimalne dužine čiji su krajevi njegove boje, ali tako da se na njemu ne nalazi niti jedna označena tačka. Pobeđuje onaj igrač čiji je luk duži. Moguć je i nerešen ishod – u slučaju da su luci jednaki, a takođe ako se ne može naći takav luk (tada se smatra da je dužina luka jednaka nuli). Koji od igrača ima dobitnu strategiju, ma kako igrao njegov protivnik?

**7.** (9 poena) U memoriju računara je upisan broj 6. Dalje računar vrši milion operacija. Svaka operacija se sastoji u sledećem: u $n$-tom koraku on povećava broj u svojoj memoriji za najveći zajednički delilac tog broja u memoriji i broja $n$. Dokažite da u ma kojem koraku računar uvećava broj u memoriji ili za 1 ili za neki prost broj.

**ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

11 класс, устный тур, 10 мая 2009 г.

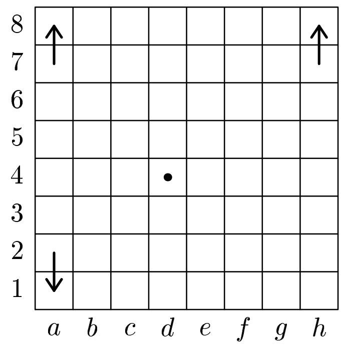
---

**1.** На доске написаны числа 1, 2, …, 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

*(И.И.Богданов)*

**2.** Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$. Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$?
(Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

*(А.К.Толпыго)*




**3.** Даны $n$ цветов с номерами от 1 до $n$. Для каждого $k$ от 1 до $n$ пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до $n$ в первые $k$ цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что числа $f_1(n)+f_3(n)+f_5(n)+\ldots$ и $f_2(n)+f_4(n)+f_6(n)+\ldots$ отличаются на 1.
(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2)=1$ и $f_2(2)=2$.)

*(М.А.Берштейн, Г.А.Мерзон)*

**4.** Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$ кроме ребра $CD$. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра кроме ребра $AB$.

*(В.В.Произволов)*

**5.** Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального $n$ найдется такое натуральное $k$, что $P(\frac{1}{n})=\frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа $c$ и $m$, что $P(x)=c\cdot x^m$.

*(С.Спиридонов)*

**6.** Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1\times1\times2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

*(А.В.Шаповалов)*

**Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.**

**Базовый вариант, младшие классы.**

**1.** Расположим коробки в ряд так, чтобы число карандашей в них возрастало слева направо. Заметим, что тогда в самой левой коробке минимум один карандаш, во второй слева — минимум два, ..., в десятой слева — минимум 10 карандашей. Из самой левой коробки возьмём любой лежащий в ней карандаш. Поскольку во второй коробке лежат карандаши минимум двух разных цветов, там найдется карандаш не того цвета, что мы взяли из первой коробки. Возьмём его. В третьей коробке лежат карандаши минимум трёх разных цветов. Поэтому там найдётся карандаш, цвет которого отличается от цветов обоих уже выбранных. Возьмем его. Продолжая такую процедуру, мы выберем искомые 10 карандашей разных цветов.

**2.** Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. По условию ни одна из разностей не равна ни одному из 25 чисел, которые не превосходят 50. Поэтому вместе с ними разности дают 50 различных натуральных чисел, которые не превосходят 50, то есть это все числа от 1 до 50. Их сумма равна $51 \cdot 25$, а сумма всех исходных чисел равна, стало быть, $51 \cdot 25 + 50 \cdot 25 = 101 \cdot 25 = 2525$.

**3.** Пусть точки $B_1$, $B_2$, $B_3$ — середины дуг $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_1$ соответственно. Площадь шестиугольника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ равна сумме площадей четырёхугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, что нам и нужно.

**4.** Ответ: Может.

Решение. Возьмём сначала любые три различных натуральных числа, одно из которых равно полусумме двух других, например, числа 1, 2 и 3. Их произведение равно 6 и не является 2008-й степенью натурального числа. Домножим каждое из чисел на $6^n$, получим числа $6^n$, $2 \cdot 6^n$, $3 \cdot 6^n$. По-прежнему, одно из чисел будет равно полусумме двух других, а произведение будет равно $6^{3n+1}$. Осталось подобрать $n$ так, чтобы $3n+1$ равнялось 2008 (или делилось на 2008). Поскольку 2007 делится на три, можно взять $3n+1 = 2008$, то есть $n = 669$.

**5.** Изобразим беговую дорожку в виде левой половины некоторой окружности. Будем считать, что бегун, добегая до конца дорожки, не поворачивает обратно, а бежит дальше по правой половине этой окружности. Тогда все бегуны просто бегут по этой окружности. Условие того, что бегуны оказываются в одной точке исходной беговой дорожки, означает, что они находятся на прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности. Пусть через время $t$ после начала забега бегуны встретились (находятся на соответствующей прямой). Тогда бегуны, находящиеся на левой половине, находятся на некотором расстоянии $x$ от точки старта, и бегуны, находящиеся на правой половине, тоже находятся на расстоянии $x$ от точки старта. При этом каждый бегун на левой половине пробежал некоторое целое число кругов и еще расстояние $x$, а каждый бегун на правой половине не добежал до некоторого целого числа кругов расстояние $x$. Где будут бегуны через время $2t$ от начала забега? Каждый бегун на левой половине пробежит некоторое целое число кругов и еще расстояние $2x$, а каждый бегун на правой половине не добежит до некоторого целого числа кругов расстояние $2x$. Но это как раз и означает, что они находятся на некоторой прямой, перпендикулярной диаметру, разделяющему левую и правую половины нашей окружности (поскольку находятся на одинаковом расстоянии (вдоль окружности) от точки старта). Значит на исходной дорожке бегуны снова встретятся через время $2t$, и аналогично через время $3t$, и так далее.

**Базовый вариант, старшие классы.**

**1.** Расположим коробки в ряд так, чтобы число пирожных в них убывало слева направо. Теперь нарисуем на клетчатой бумаге «лесенку», где высота первого столбика (шириной в одну клетку) равна числу пирожных в первой слева коробке, высота второго стобика равна числу пирожных во второй слева коробке, и т.д. Лестница разделится на ступеньки. Первая (самая левая) ступенька будет состоять из самых высоких столбиков, вторая ступенька — из следующих по высоте столбиков, и так далее, последняя (самая правая) ступенька будет состоять из самых низких столбиков. Количество различных чисел в записях Алёши равно числу ступеней этой лесенки (самые полные коробки соответствуют самой высокой ступеньке, и так далее). Но этому же числу равно и количество различных чисел среди записанных Серёжей. В самом деле, можно считать, что выбирая по пирожному из каждой коробки, мы просто срезаем у нашей лесенки нижний слой квадратиков. Тогда заполнив подносы с наибольшим числом пирожных, мы срежем несколько слоев так, что пропадет целая ступенька (самая низкая), и число ступенек уменьшится на 1. Когда мы заполним подносы со следующим количеством пирожных (по величине), мы срежем еще одну ступеньку, и так далее.

**2.** Ответ: $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Решение. Возведём в квадрат равенство $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2+\cdots+x_n} = \sqrt{x_2}+\sqrt{x_3+\cdots+x_n+x_1}$, вычтем из обеих частей сумму $x_1+\cdots+x_n$ и снова возведём в квадрат. Получим $x_1(x_2+\cdots+x_n) = x_2(x_3+\cdots+x_n+x_1)$, откуда $(x_1-x_2)(x_3+\cdots+x_n) = 0$. Так как $x_1-x_2 = 1$, получаем, что $x_3+\cdots+x_n = 0$. Поскольку из чисел $x_3, \ldots, x_n$ извлекается квадратный корень, то они неотрицательны, и раз их сумма равна 0, то каждое из них равно 0.

Пусть $x_2 \neq 0$, т.е. $x_2 - x_3 \neq 0$. Рассмотрев суммы с $\sqrt{x_2}$ и $\sqrt{x_3}$ и рассуждая как выше, получаем $x_1 = 0$. Тогда $x_2 = -1$, но существует $\sqrt{x_2}$ — противоречие. Значит, $x_2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, и тогда все условия выполнены.

**3.** Пусть точки $B_1$, $B_2$, …, $B_{30}$ — середины дуг $A_1A_2$, $A_2A_3$, …$A_{30}A_1$ соответственно. Площадь шестидесятиугольника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ равна сумме площадей четырёхугольников $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$, …, $OA_{30}B_{30}A_1$. Но у этих четырехугольников диагонали перпендикулярны, а значит площадь каждого равна половине произведения его диагоналей. Заметим, что один из этих четырехугольников может оказаться невыпуклым (если центр окружности лежит снаружи исходного тридцатиугольника), но его площадь все равно вычисляется так же (проверьте). Искомая сумма равна тогда $\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \cdots + \frac{1}{2}OB_{30} \cdot A_{30}A_1$. Поскольку по условию $OB_1 = OB_2 = \cdots = OB_{30} = 2$, эта сумма численно равна $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{30}A_1$, что нам и нужно.

**4.** Ответ: Может.

Решение. Возьмём сначала любую прогрессию из пяти различных натуральных чисел, например, числа 1, 2, 3, 4, 5. Их произведение равно 120 и не является 2008-й степенью натурального числа. Домножим каждое из чисел на $120^n$, получим числа $120^n$, $2\cdot120^n$, $3\cdot120^n$, $4\cdot120^n$, $5\cdot120^n$. По-прежнему, числа будут образовывать арифметическую прогрессию, а их произведение будет равно $120^{5n+1}$. Осталось подобрать $n$ так, чтобы $5n+1$ делилось на 2008. Поскольку 5 и 2008 взаимно просты, это возможно. Ищем $y$ такое, чтобы $5n+1 = 2008y$. Годится, например, $y = 2$, $n = 403$. Произведение будет тогда 2008-й степенью числа $120^2$.

**5.** Можно считать, что наши прямоугольники нарисованы на бесконечной клетчатой плоскости. Разобьем мысленно плоскость на квадраты размером $2 \times 2$ клетки, и пронумеруем клетки каждого квадратика цифрами 1, 2, 3, 4 по часовой стрелке, начиная с левого верхнего угла квадратика. Так как обе стороны каждого нашего прямоугольника нечетны, в углах любого прямоугольника будут стоять одинаковые цифры. Занумеруем тогда цифрами 1, 2, 3, 4 четыре различных цвета, и каждый прямоугольник выкрасим в цвет, номер которого стоит в углах этого прямоугольника. Нетрудно убедиться, что цифры в углах любых двух примыкающих друг к другу прямоугольников будут различны.

**Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.**

**Сложный вариант, младшие классы.**

**1.** Доска состоит из четырех угловых квадратов $50\times50$: левого верхнего, левого нижнего, правого верхнего и правого нижнего. Предположим, что в одном из угловых квадратов, скажем, в левом верхнем, нет ферзей. Пусть в правом нижнем квадрате всего $x$ ферзей. В левом нижнем квадрате тогда находится не более $50-x$ ферзей (так как ферзи левого и правого нижних квадратов находятся в 50 строчках прямоугольника $50\times100$). Аналогично, в правом верхнем угловом квадрате находится не более $50-x$ ферзей. Общее количество ферзей на доске не превосходит тогда $x+50-x+50-x=100-x$. Но ферзей всего 100, а $x$ неотрицательно — это возможно лишь при $x=0$. Значит, в правом нижнем квадрате ферзей тоже нет, то есть все ферзи находятся в левом нижнем и правом верхнем квадратах.

Рассмотрим у нашей доски клетчатую диагональ, соединяющую левую нижнюю и правую верхнюю клетки, а так же все диагонали, параллельные этой и пересекающие левый нижний и правый верхний квадраты. Их будет ровно 99, и все 100 ферзей находятся на этих диагоналях. Тогда какие-то два ферзя находятся на одной диагонали и значит бьют друг друга — противоречие.

**2.** Ответ: можно.

Пусть гири весят $a$, $b$, $c$, $d$ грамм.

*Первое решение.*

Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири $a$, $b$, на другой — $c$, $d$;

2) на одной чаше гири $a$, $c$, на другой — $b$, $d$;

3) на одной чаше гири $a$, $d$, на другой — $b$, $c$;

4) одна чаша пустая, на другой — $a$, $b$, $c$, $d$.

Пусть $b=a+x$, $c=a+y$, $d=a+z$. Из первых трех взвешиваний (сложив результаты), мы знаем разность между $3a+(b+c+d)$ и $2(b+c+d)$, то есть $x+y+z$, либо точно, либо с ошибкой в 1. Из последнего взвешивания мы знаем $a+b+c+d=4a+(x+y+z)$ либо точно, либо с ошибкой в 1. Причем ошибка на 1 может быть только ровно в одном из этих случаев. Значит мы знаем разность $(x+y+z)$ и $4a+(x+y+z)$, то есть $4a$, с точностью до 1. Тогда легко найдем $a$ из делимости на 4. Аналогично найдем $b$, $c$, $d$.

*Второе решение.*

Годятся, например, такие 4 взвешивания:

1) на одной чаше гири $a$, $b$, $c$, на другой — $d$;

2) на одной чаше гири $a$, $b$, $d$, на другой — $c$;

3) на одной чаше гири $a$, $c$, $d$, на другой — $b$;

4) на одной чаше гири $b$, $c$, $d$, на другой — $a$;

Из показаний весов мы получаем следующие числа (одно, возможно, с ошибкой):

$x=a+b+c-d$, $y=a+b-c+d$, $z=a-b+c+d$, $t=-a+b+c+d$.

Решаем эту систему: например, чтобы найти $a$, складываем три первых уравнения и вычитаем из результата четвертое, получаем: $4a=(x+y+z-t)$, откуда $a=(x+y+z-t)/4$. Аналогично находим $b$, $c$ и $d$. Одно из чисел $x$, $y$, $z$, $t$ мы знаем, возможно, с ошибкой в 1 грамм. Поэтому в выражениях для чисел $a$, $b$, $c$, $d$ числители могут не делиться на 4. Но легко однозначно восстановить их истинные значения (добавляя или вычитая 1 так, чтобы числитель делился на 4). Откуда находим массы камней.

**3.** Ответ: 1/2.

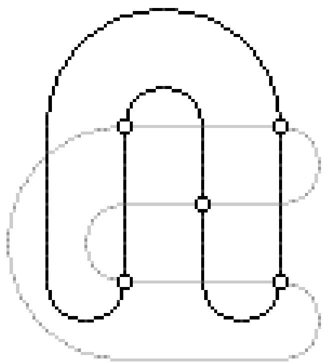
Немного переформулируем задачу. Продлим медиану $AD$ на ее длину за точку $D$, получим точку $D'$. Тогда $CABD'$ — параллелограмм (так как диагонали этого четырехугольника делятся пополам их точкой пересечения), откуда угол $DAB$ равен углу $DD'C$. Поскольку углы $CAB$ и $ACD'$ параллелограмма в сумме дают $180^\circ$, условие того, что угол $CAB$ тупой, означает, что угол $ACD'$ острый. В итоге имеем: Илья, зная только длину стороны $AD'$ (она равна удвоенной длине $AD$), смог доказать, что в треугольнике $CAD'$ углы при стороне $CD'$ острые. При каком сотношении сторон $AC$ и $AD'$ это возможно?

Ясно, что если треугольник $CAD'$ равнобедренный ($AC = AD' = 2AD$), то углы при основании острые (ведь они равны и их сумма меньше 180°). Значит, ответ $AD/AC = 1/2$ подходит (и мы доказали для этого случая утверждение Ильи).

Если треугольник $CAD'$ неравнобедренный ($AC \neq AD'$), то например возьмем большую из сторон $AC$ и $AD'$ за гипотенузу, а меньшую — за катет, и построим треугольник $CAD'$, в котором один из углов $ACD'$ или $AD'C$ будет прямым. Достроим теперь параллелограмм $CABD'$ и получим треугольник $CAB$, который вполне мог оказаться у Сережи, и в этом треугольнике один из углов $DAB$ или $CAB$ будет прямым. Значит Илья не смог бы доказать свое утверждение для $AD/AC \neq 1/2$.

**4.** Ответ: могут.

Пример изображен на рисунке:



**5.** *Первое решение.* Раскроем в произведении $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)$ скобки. Получим сумму $1+(a_1+\dots+a_n)+(a_1a_2+\dots+a_{n-1}a_n)+(a_1a_2a_3+\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n)+\dots+a_1a_2\dots a_n$. В первой скобке стоит просто сумма чисел $a_1, \dots, a_n$, слагаемые во второй скобке получаются так — выбираем пару чисел из $a_1, \dots, a_n$ и записываем их произведение, слагаемые в третьей скобке получаются так — выбираем тройку чисел из $a_1, \dots, a_n$ и записываем их произведение, и так далее. Ясно, что сумма чисел во второй скобке не превосходит $(a_1 + \dots + a_n)^2$, сумма чисел в третьей скобке не превосходит $(a_1 + \dots + a_n)^3$, и так далее. Значит, наше произведение не превосходит $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$.

*Второе решение.* Докажем по индукции, что для всех $k$ от 1 до $n$ верно утверждение: $(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_k) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_k)$ .

Для $k = 1$ утверждение очевидно ($1 + a_1 < 1 + 2a_1$, так как $a_1$ положительно).

Сделаем шаг индукции.

Пусть для некоторого $k$, где $k < n$, верно $(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_k) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_k)$. Домножим это неравенство на $(1 + a_{k+1})$. Получим:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_{k+1}) < (1 + 2(a_1 + \dots + a_k))(1 + a_{k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + 2(a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1}(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) = 1 + 2(a_1 + \dots + a_{k+1}).$$

Утверждение доказано.

Взяв $k = n$, получим, что $(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) < 1 + 2(a_1 + \dots + a_n) < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$, что и требовалось доказать.

*Замечание для знатоков.* На самом деле выполнено более точное неравенство. Можно доказать, что при постоянной сумме $a_1 + \dots + a_n$ выражение $(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n)$ принимает наибольшее значение, когда числа $a_1, \dots, a_n$ равны. Значит

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) \leqslant \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Как известно из курса математического анализа, выражение под корнем не превосходит числа Эйлера $e = 2,71828..$, откуда $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < \sqrt{e} = 1,64...$

Кстати, неравенство $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \le 2$ равносильно неравенству $\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n \ge \frac{1}{2}$, которое сразу следует из неравенства Бернулли.

**6.** Обозначим точку пересечения $CC_1$ с $A'B'$ за $C'$, середину $AC$ — $M_B$, а середину $BC$— $M_A$. Заметим, что $CB'M_BC'$ — вписанный, так как $\angle CC'B' = \angle CM_BB'$. Аналогично вписанный $CA'M_AC'$. Поэтому углы $\angle CC'M_B$, $\angle CC'M_A$ равны по $90° + \varphi$. Проведем через вершины $A$ и $B$ прямые параллельные $M_BC'$, $M_AC'$ соответственно. Пусть они пересеклись в точке $C''$. Из подобия получим, что точка $C''$ лежит на прямой $CC'$. При этом $CC'$ является бисcктрисой в треугольнике $AC''B$. По известному свойству, что биссектриса проходит через середину дуги описанной окружности, получаем, что $\angle AC_1B = 180° - 2(90° - \varphi) = 2\varphi$.

**7.**

**а)** Пусть $b_n$ равно 1, если наибольший нечетный делитель числа $n$ имеет остаток 1 при делении на 4, и $-1$ в противном случае. Тогда $a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Разобьем последовательность чисел $b_n$ на строчки таким образом, чтобы длина первой строчки равнялась 1, длина второй – 2, …, длина $k$-ой – $2^{k-1}$:

$b_1,$
$b_2, b_3,$
$b_4, b_5, b_6, b_7,$
$\dots,$
$b_{2^{k-1}}, \dots, b_{2^k-1},$
$\dots$

Первые пять строк выглядят так:

$1,$
$\mathbf{1}, -1,$
$\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$
$\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$
$\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, \mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, \mathbf{1}, -1, -\mathbf{1}, 1, -\mathbf{1}, -1,$

Заметим, что каждая строка, начиная с третьей, получается "втасовыванием" в предыдущую строку последовательности $1, -1, 1, -1, \dots$ такой же длины. (Для наглядности, числа, взятые из предыдущей строки, выделены жирным шрифтом.) Действительно, $b_{2m} = b_m$ для любого $m$; при этом $(k+1)$-ая строка имеет вид:

$b_{2^k}, b_{2^k+1}, b_{2^k+2}, b_{2^k+3}, b_{2^k+4}, b_{2^k+5}, \dots$

что сводится к

$b_{2^{k-1}}, 1, b_{2^{k-1}+1}, -1, b_{2^{k-1}+2}, 1, \dots$

Мы воспользовались тем, что $2^k$ делится на 4 при $k > 1$.

Докажем, что сумма всех чисел в $k$-й строке равна нулю при $k > 1$. Воспользуемся индукцией по $k$. База индукции $b_2 + b_3 = 0$ очевидна.

Предположим, что сумма всех чисел в $k$-й строке равна нулю. Поскольку элементы $(k+1)$-й строки — это элементы $k$-й строки плюс еще четное количество чередующихся 1 и $-1$, то и сумма всех чисел в $(k+1)$-й строке равна нулю.

Отсюда легко следует (вновь по индукции), что $a_{2^k-1} = 1$ для любого $k > 0$, то есть число 1 встречается в последовательности $(a_n)$ бесконечно много раз.

**б)** Докажем теперь, что при $k > 1$ у $k$-й строки есть начальный участок, сумма чисел в котором равна $k-1$. Воспользуемся индукцией. База вновь очевидна.

Пусть длина начального участка с суммой $k-1$ в $k$-й строке равна $m_k$. При четном $m_k$ положим $m_{k+1} = 2m_k - 1$, а при нечетном $m_k$ положим $m_{k+1} = 2m_k$. Рассмотрим первые $m_{k+1}$ чисел в $(k+1)$-й строке Легко понять, что в любом случае начальный участок $(k+1)$-й строки длины $m_{k+1}$ получается вставлением между числами начального участка $k$-й строки нечетного количества чередующихся 1 и $-1$. Поэтому сумма увеличивается на 1, что и требовалось.

По доказанному в пункте а), $a_{2^{k-1}-1} = 1$, что соответствует концу $(k-1)$-й строки. Поэтому $a_{2^{k-1}-1+m_k} = k$. Так как при увеличении $n$ на единицу $a_n$ изменяется (в ту или другую сторону) на единицу, мы видим, что $a_n$ обязательно принимает все значения от 1 до $k$ при $n$ пробегающем натуральные числа от $2^{k-1}-1$ до $2^{k-1}-1+m_k$. Отсюда следует, что каждое натуральное число встречается в последовательности $(a_n)$ бесконечно много раз.

**Критерии проверки**

Как всегда, «+» ставится за любое правильное решение, «±» за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, «∓» — за неверное решение, однако с существенным продвижением, «−» за неверное решение. «0» ставится, если задача не записана. Оценки «+.» «−». (варианты «+» и «−») ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем «±» и «∓». Оценка «+/2» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком «+!».

При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

**Базовый вариант, младшие классы.**

**Задача 1.**

∓ Коробки располагаются по возрастанию числа карандашей в них и карандаши выбираются последовательно. Но нет ключевого утверждения, что в очередной коробке карандашей больше, чем выбрано из предыдущих коробок. Например, написано только, что в очередной коробке есть карандаши другого цвета, чем в предыдущей коробке.

**Задача 2.**

± За ошибку в вычислениях, приведшую к неверному ответу, если после её исправления получается верное решение.

∓ *и выше* есть идея разбить на пары чисел с разностью 50, из каждой пары взято ровно одно число

−. Только верный ответ 2525 или ответ и частные случаи выбора чисел

**Задача 3.**

− За разбор только случая равностороннего треугольника

**Задача 5.**

− Все встречи только в точке старта

∓ Есть идея, что встреча повторится через тот же промежуток времени

**Сложный вариант, младшие классы.**

**Задача 1.**

± Задача решена, но не доказано утверждение, что если в одном из угловых квадратов ферзей нет, то в двух соседних с ним (по стороне) угловых квадратах будет по 50 ферзей

∓ Доказано только, что если в одном из угловых квадратов ферзей нет, то в двух соседних с ним (по стороне) угловых квадратах будет по 50 ферзей

**Задача 2.**

± Только верный пример взвешиваний без доказательства

**Задача 3.**

± Сказано, что если отношение больше 1/2, то один угол может быть острым, если меньше 1/2, то другой тупым, если 1/2, то всё получается. Во всех трёх случаях есть попытки доказательства шевелением третей вершины треугольника, но они нестрогие.

+/2 Только найдено верное отношение (с доказательством), или только доказано при таком отношении утверждение Ильи

$\mp$ Доказано неравенство в одну сторону (например, что $AD/AC$ не превосходит 1/2)

$\mp$ Доказана половина утверждения Ильи (например, что $\angle BAC$ острый) при отношении 1/2.

$-$. Только ответ

**Задача 4.**

$-$. Доказано, что дороги одного цвета образуют несамопересекающийся цикл

$-$. Доказано, что каждая дорога должна пересекать дорогу другого цвета

**Задача 5.**

Оценка не снижается, если нет доказательства, что сумма конечной геометрической прогрессии со знаменателем 1/2 и начальным членом 1/2 меньше 1.

$+$ Оценка не снижается, если ссылаются на неравенство Коши или если говорят, что максимум произведения достигается при равных.

$\pm$ Утверждается без доказательства, что задача сводится к случаю $a_1 = \dots = a_n$, без объяснения или неправильно и задача решается для этого случая

$\mp$ Задача сведена к случаю $a_1 = \dots = a_n$, дальнейшего продвижения нет

$\mp$ Есть идея, что при раскрытии скобок слагаемые группируются, и что сумма оценивается геометрической прогрессией, но это не доказано

$-$ Рассмотрен только случай $n = 2$

**Задача 6.**

$-$. Только ответ

**Задача 7а).**

$-$. Утверждается без доказательства, что если $a_n = 1$, то и $a_{2^n+1} = 1$

$-$. Утверждается без доказательства, что члены последовательности с номерами $2^n - 1$ равны 1

$\mp$ Сказано, что у нечетных чисел остатки от деления на 4 наибольшего нечетного делителя чередуются, а остатки от деления на 4 наибольшего нечетного делителя у четного числа и у его половины совпадают, больше ничего не сделано

$\pm$ То же, что и в предыдущем пункте, но говорится, что отсюда следует, что сумма остатков (по модулю 4) наибольших нечетных делителей нечетных чисел равна 0, для четных чисел проводится аналогичное рассуждение и утверждается без объяснений, что 1 встретится бесконечное число раз.

**Задача 7б)**

$\mp$ Для некоторого отрезка $[a_k, b_k]$, который строится удвоением предыдущего, школьник пытается доказать утверждение о том, что там есть число $k$, но для этого отрезка это неверно

**Решения задач осеннего тура 30-го турнира городов.**

**Сложный вариант, старшие классы.**

**1.** Ответ: 5/4.

Рассмотрим среди вертикальных линий 2-ю, 4-ю и 6-ю, и среди горизонтальных тоже 2-ю, 4-ю и 6-ю. Эти линии делят доску на 16 прямоугольников, каждый из которых разделен на 4 клетки, раскрашенные в шахматном порядке. Если в каждом таком прямоугольнике отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных не больше 5/4, то это же будет верно и для большого прямоугольника (в самом деле, если в $i$-ом прямоугольнике $a_i$ — площадь белых клеток, а $b_i$ — площадь черных, и $a_i \leq (5/4)b_i$, то сложив все эти неравенства получим нужное неравенство для всей доски).

Рассмотрим теперь отдельный прямоугольник, разбитый на 4 клетки. Пусть длины его сторон — $x$ (по горизонтали) и $y$ (по вертикали). Ясно, что у одной из белых клеток длина горизонтальной стороны не меньше $x/2$. Пусть для определенности эта клетка верхняя левая. Горизонтальную прямую, разделяющий прямоугольник, можно тогда передвигать вниз до тех пор, пока отношение площади левой верхней клетки (белой) к левой нижней (черной) не станет равно 2. При этом условие задачи (о том, что площадь любой белой клетки меньше удвоенной площади любой черной клетки) по-прежнему будет выполнено, а суммарная площадь белых клеток только увеличится (или не изменится). Дальше прямую двигать нельзя (нарушится условие задачи). Аналогично, после этого можно двигать вправо вертикальную прямую (пока площадь верхней левой клети не станет в 2 раза больше площади верхней правой). Стороны верхней левой клетки будут тогда равны $2x/3$ и $2y/3$, и площадь белых клеток будет равна $4xy/9 + xy/9 = 5xy/9$, а площадь черных будет равна $xy - 5xy/9 = 4xy/9$. Получили, что отношение площади белых клеток к площади черных равно 5/4, и больше быть не может.

Осталось привести пример, когда в каждом из 16 прямоугольников нужное отношение равно 5/4. Разделим доску так, чтобы наши 16 прямоугольников были одинаковыми квадратами, в каждом из них левая верхняя клетка была квадратной, причем ее стороны в 2 раза длиннее сторон правой нижней клетки. Ясно, что так разделить доску можно, и получится искомый пример.

**2.** Ответ: не обязательно.

Приведем один из примеров, который нетрудно описать. Будем считать, что в пространстве заданы три направления: вверх-вниз, вправо-влево, вперед-назад. Сначала заполним все пространство кубиками обычным образом. Выберем теперь один из кубиков. К нему примыкают такие шесть бесконечных слоев толщиной в один кубик: два параллельных слоя соответственно слева и справа, направленные вверх-вниз, два других — спереди и сзади, направленные влево-вправо, и еще два — снизу и сверху, направленные вперед-назад. Сдвинем каждый слой вдоль его направления на половину длины ребра кубика (первые два сдвинем вверх, следующие два — влево, следующие два — вперед). Все пространство по-прежнему будет заполнено, но выбранный кубик ни с одним другим не будет граничить по целой грани.

**3.** Всегда может выигрывать второй игрок. Разберем два случая.

Пусть $N > 2$ нечетно.

Докажем, что второй может каждым своим очередным ходом объединять две наибольшие имеющиеся кучки.

Сначала первый обязательно сделает кучку из двух орехов, после чего второй сделает кучку из трех орехов, и ситуация после хода второго будет такая: в наибольшей куче нечетное число орехов, а в каждой из остальных кучек по одному ореху.

В такой ситуации у первого есть две возможности. Либо он сделает кучку из двух орехов — и тогда второй присоединит ее к наибольшей куче. Либо он увеличит наибольшую кучку на один камень — тогда в ней будет четное число орехов, и так как $N$ нечетно, то останется еще хотя бы одна кучка из одного ореха, и второй сможет присоединить один орех к наибольшей кучке. В итоге снова получается описанная ситуация.

Мы видим, что у второго всегда есть ход. Кучи со временем кончатся, и первый проиграет.

Пусть $N > 2$ четно.

Заметим, что после хода любого игрока число куч уменьшается на одну. Пусть второй действует так же, как и в случае нечетного $N$, до тех пор, пока перед его ходом не останутся две или три кучи

В первом случае он просто объединяет оставшиеся кучи (это возможно, так как в наибольшей четное число орехов, а в другой — два или один).

Во втором случае, если в двух «маленьких» кучах по одному ореху, он просто объединяет «маленькие» кучи и оставляет первому две кучи с четным числом орехов — и тот проиграл; если в «малениких» кучах один и два ореха, то добавляет один орех в наибольшую кучу (и снова первый проиграл).

**4.** Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$.

Так как четырехугольник $A_1BCD$ вписан в окружность, имеем $BO \cdot OD = A_1O \cdot OC$ (из подобия треугольников $BOA_1$ и $COD$). Аналогично, $BO{\cdot}OD = AO{\cdot}OC_1$, $AO{\cdot}OC = BO{\cdot}OD_1$ и $AO \cdot OC = B_1O \cdot OD$.

Из первых двух равенств получаем, что $OC/AO = OC_1/A_1O$, из двух других получаем, что $BO/OD = B_1O/OD_1$.

Заметим, что условие параллельности сторон $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ можно записать в виде $BO/OD = OC/AO$ (из подобия треугольников $BOC$ и $DOA$).

Но тогда (из предыдущего) $BO_1/OD_1 = OC_1/A_1O$, то есть стороны $B_1C_1$ и $A_1D_1$ параллельны.

Аналогично проверяем, что непараллельность сторон $AB$ и $CD$ влечет непараллельность сторон $A_1B_1$ и $C_1D_1$.

Значит $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция, что и требовалось доказать.

**5.** Пусть $b_n$ равно 1, если наибольший нечётный делитель числа $n$ имеет остаток один при делении на 4, и равно $-1$ в другом случае. Тогда $a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Докажем по индукции, что $a_{2^k-1} = 1$. База выполнена. Пусть $a_{2^k-1} = 1$. Заметим, что $b_m = b_{2^k+m}$ при $m < 2^k$ и $m \neq 2^{k-1}$. Действительно: если $m = a \cdot 2^l$, где $a$ — нечётно, то $2^k + m = (2^{k-l} + a) \cdot 2^l$, где $l < k$, то есть $2^{k-l} + a$ — наибольший нечётный делитель числа $2^{k-1} + m$. А так как $m \neq 2^{k-1}$, то $k > l + 1$, то есть $2^{k-l}$ делится на 4.

При $k = l + 1$ имеем $m = 2^{k-1}$ и $m + 2^k = 3 \cdot 2^{k-1}$, то есть $b_{2^{k-1}} = 1$ и $b_{3 \cdot 2^{k-1}} = -1$.

Тогда по предположению индукции и по только что доказанному:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^{k+1}-1} &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^k-1}) + b_{2^k} + (b_{2^k+1} + b_{2^k+2} + \cdots + b_{2^{k+1}-1}) = \\ &= 2 \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^k-1}) - 2 + b_{2^k} = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Докажем теперь по индукции, что на отрезке $1 \ldots 2^k - 1$ последовательность $a_n$ принимает значение $k$. Для первых двух отрезков утверждение верно. Пусть $a_x = n - 1$, где $x < 2^{n-1}$, докажем, что $a_{2^n+x} = n + 1$. Тогда по предположению индукции и по доказанному ранее

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^n+x} &= (b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^n-1}) + b_{2^n} + (b_{2^n+1} + b_{2^n+2} + \cdots + b_{2^n+x)} = \\ &= 1 + 1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_x) = n + 1. \end{aligned}$$

Заметим, что на отрезке $2^n - 1 \ldots 2^n + x$ встречаются все числа от 1 до $n + 1$. Поэтому каждое число встречается бесконечно много раз.

Замечание: из решения следует, что $a_{2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots} = n + 1$.

**6.** Можно считать, что старший коэффициент $P(x)$ равен 1. Если бы степень многочлена $P(x)$ была четной, то при достаточно больших по модулю $x$ выполнялось бы неравенство

$P(x) > 0$, и могло найтись лишь конечное число пар целых чисел $m, n$, для которых выполнено равенство $P(m) + P(n) = 0$. Значит, степень $P(x)$ нечетна (будем этим пользоваться в дальнейшем без напоминания).

Заметим теперь, что, начиная с некоторого $x$, $P(x)$ монотонно увеличивается при увеличении $x$ и стремится к бесконечности при стремлении $x$ к бесконечности. И аналогично, начиная с некоторого $x$, $P(x)$ монотонно уменьшается при уменьшении $x$ и стремится к минус бесконечности при стремлении $x$ к минус бесконечности.

Кроме того, для данного числа $n$ может найтись лишь конечное число таких чисел $m$, что $P(m) = -P(n)$ (поскольку многочлен может принимать одно и то же конкретное значение лишь в конечном числе точек, не превышающем его степень).

Учитывая все вышесказанное, получаем, что для любого наперед заданного числа $C$ есть пары чисел $m, n$, для которых $P(m)+P(n) = 0$, причем числа $m$ и $n$ разных знаков, и модуль каждого из них больше $C$.

Пусть степень $P(x)$ равна $k$, и $P(x) = x^k + ax^{k-1} + \ldots$ (здесь и далее троеточием обозначены слагаемые меньших степеней). Легко подобрать такое число $d$, что многочлен $P(x-d)$ будет иметь вид $x^k+bx^{k-2}+\ldots$, то есть коэффициент при степени $k-1$ будет нулевым. Действительно, $P(x-d) = (x-d)^k + a(x-d)^{k-1} + \cdots = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + \ldots$, и достаточно взять $d$ равным $a/k$. Докажем, что точка $(d; 0)$ и является центром симметрии графика. Обозначим $P(x-d)$ за $Q(x)$. Достаточно доказать, что $Q(x) = -Q(-x)$ при любом $x$.

Итак, $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + \ldots$, и нам известно, что уравнение $Q(m) + Q(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в таких числах $m$ и $n$, что $m-d$ и $n-d$ — целые. Возьмем такие достаточно большие по модулю решения $m > 0$ и $n < 0$. Докажем, что $|m| = |n|$. Пусть $|m| < |n|$, например $n = -m-1$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(m) + Q(n) = Q(m) + Q(-m-1) = \\ = m^k + bm^{k-2} + \cdots + (-m-1)^k + b(-m-1)^{k-2} + \cdots = \\ = -km^{k-1} + R(m), \end{aligned}$$

где $R(x)$ — некий фиксированный многочлен степени $k-2$. Если $m$ достаточно велико, то число $km^{k-1}$ будет много больше, чем $|R(m)|$, и значит сумма $-km^{k-1} + R(m)$ будет меньше нуля. При увеличении модуля $n$ сумма $Q(m) + Q(n)$ будет еще уменьшаться (так как будет уменьшаться $Q(n)$). Поэтому не может быть $|m| < |n|$ при достаточно больших по модулю $m$ и $n$. Аналогично не может быть и $|m| > |n|$. Значит, есть бесконечно много чисел $m$ таких, что $Q(m) + Q(-m) = 0$, то есть многочлен $Q(x) + Q(-x)$ имеет бесконечно много корней. Это возможно, только если этот многочлен нулевой, то есть выполнено тождество $Q(x) + Q(-x) = 0$, а это как раз и означает, что график многочлена $Q(x)$ симметричен относительно точки $(0; 0)$, и значит график $P(x)$ симметричен относительно точки $(d; 0)$.

**7. а)** Ответ: сможет.

Пусть при первых 29 попытках Витя отвечает так: в $k$-ой попытке отвечает «да» на $k$-ый вопрос и «нет» — на остальные вопросы. Заметим, что любые две попытки из первых 29-ти отличаются ровно в двух ответах. Поэтому количество верных ответов в любых двух этих попытках либо одинаково, либо отличается на 2. Если есть две попытки, скажем $i$-я и $j$-я, в которых число верных ответов различается на 2, мы сразу знаем верные ответы на $i$-й и $j$-й вопросы. Тогда, сравнивая например $i$-ю попытку с остальными попытками, узнаем верные ответы на все вопросы с первого по 29-й. Ответ на 30-й вопрос теперь легко узнать из первой попытки: посчитаем, сколько верных ответов было на первые 29 вопросов, и, сравнивая с сообщением о числе верных ответов при первой попытке, найдем ответ на 30-й вопрос.

Остается случай, когда количество верных ответов в любых двух попытках с первой по 29-ю одинаково. Это означает, что ответы на все вопросы с первого по 29-й одинаковы. Но тогда по сообщению о числе верных ответов в первой попытке мы поймем, это ответы «да», или ответы «нет»(в первом случае нам могут сказать, что верных ответов было 1 или 2, во втором случае — что верных ответов было 28 или 29). Затем узнаем ответ на 30-й вопрос (тоже из первой попытки).

Заметим, что этот метод работает, если общее число вопросов в тесте не меньше 5.

**б)** Разобьем вопросы теста на группы по 5 вопросов (с 1-го по 5-й, с 6-го по 10-й и т.д.) При первой попытке ответим «нет» на все вопросы.

Покажем теперь, как за 4 следующие попытки узнать все ответы на вопросы в первой группе. На вопросы с 6-го по 30-й отвечаем в этих попытках «нет», а в ответах на вопросы с 1-го по 5-й отвечаем так:
при 2-й попытке отвечаем «да» на все пять вопросов;
при 3-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 2-й вопросы (на остальные три — «да»);
при 4-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 3-й вопросы (на остальные три — «да»);
при 5-й попытке отвечаем «нет» на 1-й и 4-й вопросы (на остальные три — «да»).

Заметим, что из сообщений о числе верных ответов в 1-й и 2-й попытках мы знаем, например, сколько было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й в первой попытке.

Если при второй попытке на оба вопроса 1 и 2 мы ответили верно или на оба — неверно, то после третьей попытки мы знаем ответы на вопросы 1 и 2, после четвертой — на вопрос 3, после пятой — на вопрос 4, а значит на 5-й вопрос тоже знаем (так как знаем, сколько было верных ответов на вопросы с 1-го по 5-й при второй попытке). Аналогично с вопросами 1, 3 и 1, 4. Значит остается случай, когда среди ответов при второй попытке на вопросы 1, 2 ровно один верный, среди ответов на вопросы 1, 3 — ровно один верный, и среди ответов на вопросы 1, 4 — ровно один верный. То есть при второй попытке на вопросы 1, 2, 3 наши ответили были либо все верны, либо все неверны.

Но мы уже знаем, каких ответов на вопросы с 1-го по 5-й больше (когда мы отвечаем на их все «нет»): верных или неверных. Значит, мы знаем ответы на вопросы 2, 3, 4, а тогда и на вопрос 1, а значит и на 5-й вопрос.

Аналогично узнаем ответы на вопросы 2-й, 3-й, 4-й и 5-й группы (потратив на каждую 4 попытки). Тогда за $1 + 4 \cdot 5 = 21$ попытку знаем ответы на вопросы 1 — 25. Заметим, что ответы на вопросы последней группы можно узнать за 3 попытки, поскольку мы уже знаем, сколько верных ответов мы сделали на эти вопросы при самой первой попытке. Значит всего хватит 24 вопроса.

**Критерии проверки.**

Как всегда, «+» ставится за любое правильное решение, «+−» за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом, «−+» — за неверное решение, однако с существенным продвижением, «−» за неверное решение. «0» ставится, если задача не записана. Оценки «+.», «−.» (варианты «+» и «−» ) ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем «+−» и «−+». Оценка «+/2» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), — это отмечается знаком «+!» . При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

**Базовый вариант.**

**Задача 2.**

+− Найдены $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$ и доказано, что сумма $x_3 + \cdots + x_n = 0$, но ответа нет (решение не закончено)

−+ Доказательство того, что $x_3 + \cdots + x_n = 0$, без дальнейшего продвижения

$-+$ Найдены $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, но дальнейшего продвижения нет (нет идеи, что сумма $x_3 + \cdots + x_n = 0$)

**Задача 3.**

Разбор только случая правильного 30-угольника оценивается не выше, чем $-+$

$+$. Если проведенное рассуждение годится только для случая, когда центр окружности лежит внутри 30-угольника

$-$. Есть нереализованная идея сделать численно равными длину $A_1A_2$ и площадь $OA_1BA_2$

**Задача 5.**

$-$ За раскраски только отдельных конкретных картинок или раскраски небольшой части соседних прямоугольников (локальная конструкция)

**Сложный вариант**

**Задача 1.**

$+$. верно разобран случай прямоугольника $2 \times 2$ клетки, есть пример для доски $8 \times 8$, и утверждается, что если в каждом из 16 прямоугольников $2 \times 2$ клетки отношение не больше $5/4$, то и во всем прямоугольнике тоже (доказательство не приводится из-за его очевидности)

$+-$ верно разобран случай прямоугольника $2 \times 2$ клетки, есть пример для доски $8 \times 8$, но доказательство утверждения, что если в каждом из 16 прямоугольников $2 \times 2$ клетки отношение не больше $5/4$, то и во всем прямоугольнике тоже, доказано неверно

$+-$ есть оценка, но нет примера

$-+$ только верно разобран случай прямоугольника $2 \times 2$

**Задача 2.**

$+-$ верный пример без достаточных пояснений (например, не показано, как картинка продолжается на все пространство)

**Задача 3.**

$+-$ верно разобран только четный случай

$-+$ верно разобран только нечетный случай

**Задача 5.**

$-+$ за доказательство того, что $a_{2^n-1} = 1$

**Задача 7а).**

$+-$ верный алгоритм без пояснений.

$+-$ небольшие погрешности в алгоритме (например, устранимая ошибка в разборе какого-нибудь подслучая)

**Задача 7б).**

$+-$ небольшие погрешности в алгоритме (в этом случае за 7а)б) ставилось $+ +-$)