Краткие решения задач олимпиады 5 класса
28 января 2018

Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

1. Между некоторыми цифрами поставьте знаки арифметических действий и скобки, чтобы получилось верное равенство: (*И.Решетников*)

Ответ. Один из возможных вариантов:

$$2017+(7+1+0+2):(2+0+1+7)=2018$$

2. Автомобиль в пробке въехал в туннель со скоростью 5м/мин. Сначала он ехал 11мин, затем стоял 2мин, затем ехал 10мин, стоял 3мин,затем 9мин ехал, 4 – стоял и так далее, пока туннель не кончился. Он достиг конца туннеля через 55мин. Какова длина туннеля? (*Т.Антошкина*)

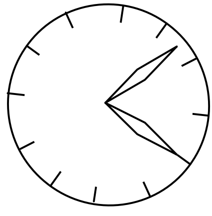
Ответ. 205м.

Решение. Один этап «ехал+стоял»=13мин, в 55мин укладывается 4 таких промежутка + 3мин. Следовательно, автомобиль ехал 11+10+9+8+3 = 41мин

3. Егор выписал несколько подряд идущих двузначных чисел. Оказалось, что каждая цифра выписана хотя бы один раз. Какое минимальное количество чисел мог выписать Егор? (*Е.Иванова*)

Ответ. 8
Решение. Докажем, что Егор не мог выписать менее 8 чисел. Для того, чтобы в записи 7 чисел встречались все 10 цифр, нужно, чтобы хотя бы у трех выписанных чисел в записи участвовали 5 разных цифр. Иначе не наберется 10 разных цифр. Но тогда среди выписанных 7 чисел была два раза смена цифры десятка. А среди 7 последовательных чисел это невозможно. Пример на 8 чисел: 13 14 15 16 17 18 19 20

4. На часах у Кролика нет цифр и стрелки одинаковой длины. Как-то раз часы упали, и Кролик повесил их обратно, не обратив внимания на то, как они висели. Сколько времени показывают часы? (*фольклор*)



Ответ. 15:30 или 3:30. (половина 4 тоже принималась)

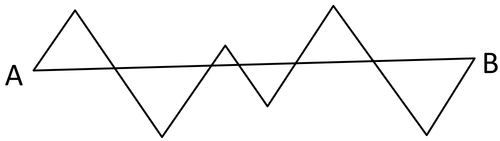
Решение. Стрелка, стоящая точно на делении, не может быть часовой, так как иначе вторая должна также стоять точно на делении (на 12). Значит, точно на делении стоит минутная стрелка. Тогда часовая стоит ровно посередине между делениями и часы показывают половину какого-то часа.

5. Костя выкладывает доминошки в цепочку по правилам домино, выбирая при этом из оставшихся каждый раз доминошку с максимальной суммой точек. **А)** Какой длины получится цепочка? **Б)** Какой будет последняя доминошка в цепочке? (*Е.Иванова*)

Ответ. А) 13 доминошек, Б) последняя 0-6 .

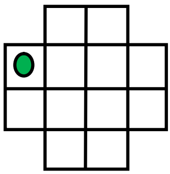
Решение. При таких правилах возможен только один вариант 66-65-55-54-46-63-35-52-26-61-15-50-06.

6. Ломаную из 7 звеньев с концами в точках А и В пересекли отрезком АВ. Оказалось, что все получившиеся треугольники – равносторонние. Длина отрезка АВ равна 12 дюймам. Найдите длину исходной ломаной. (Равносторонний треугольник – треугольник, у которого все стороны равны) (*фольклор*)

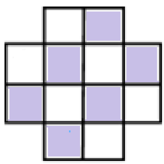


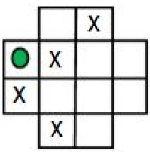
Ответ. 24 дюйма.

Решение. Поскольку все треугольники равносторонние, то сумма длин двух сторон в два раза больше соответствующего кусочка отрезка АВ.



7. На клетчатой доске в одной из клеток стоит фишка. Она может перемещаться в соседнюю по стороне клетку. Фишка обошла все клетки доски по одному разу и остановилась. В какой клетке доски она могла оказаться? Отметьте все возможные клетки. (*по мотивам Уральских турниров 2000г*)





Ответ. на рисунке

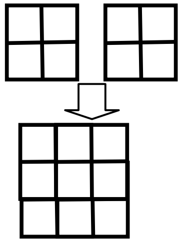
Решение. Раскрасим доску в шахматном порядке. Тогда шашка каждым ходом меняет цвет клетки. Поскольку белых и черных одинаковое количество, то закончить маршрут фишка может только на черном поле. Однако закончить на двух неотмеченных черных клетках не получится. Для остальных четырех маршрут существует.

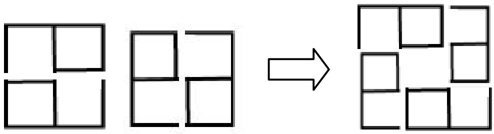
8. В Марсианском заповеднике живут драконы с тремя головами и четырьмя лапами и чучундры с пятью лапами и шестью головами. Алиса сосчитала, что всего у них 126 голов и 123 лапы. Сколько драконов и сколько чучундр живет в марсианском зоопарке? (*И.Григоренко*)

Ответ. 12 драконов и 15 чучундр

Решение. Заметим, что у дракона лап на 1 больше, чем голов, а у чучундры наоборот – голов на 1 больше, чем лап. Поскольку в результате голов на 3 больше, то чучундр на 3 больше, чем драконов. Вычтем 3 чучундр и получим, что у остальных 108 голов и 108 лап. Так как в паре дракон-чучундра 9 голов и 9 лап, то таких пар 12.

9. Имеется две проволочные решетки в виде квадратов из 4 клеток. Разрежьте решетки на 2 одинаковые фигурки (всего 4 фигурки) и сложите из них проволочную решетку из 9 клеток. См. рис. (*В.Илюхин*)



Ответ.  есть и другие варианты.

10. В комнате сидело 11 человек – жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут)

Первый сказал : «Среди нас есть лжец» Второй: «среди нас есть рыцарь»

Третий: «Среди нас есть 2 лжеца». Четвертый: «Среди нас есть 2 рыцаря»

И так далее, Десятый: «Среди нас есть 5 рыцарей». Последний промолчал

Сколько на самом деле в комнате могло быть лжецов?

Ответ. 3

Решение. Заметим, что если какие-то утверждение про N рыцарей (или лжецов) верно, то верны и все утверждения про меньшее количество лжецов (или рыцарей соответственно)

Первый обязательно рыцарь, иначе лжец сказал бы правду. Тогда второй тоже сказал правду. Следовательно, правду сказал четвертый, а затем и шестой, восьмой и десятый. То есть рыцарей не меньше 6. Следовательно, девятый лжет. Если седьмой говорит правду, то правду должны говорить третий и пятый, получим противоречие с количеством лжецов. Значит, седьмой лжет и лжецов как минимум 2. Но тогда третий говорит правду. Предположим, что 5й лжет, тогда лжецов как минимум 3 (5,7,9) и он говорит правду – противоречие. Значит, 5й говорит правду. Но тогда лжецов должно быть не менее трех и, значит, 11й – лжец. В этом случае все подходит.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. У Буратино есть 5 монет на вид совершенно одинаковых. Из них 2 фальшивых, обе они легче настоящих, а весят одинаково. Буратино требуется заплатить за обед одну настоящую монету. Хозяин харчевни разрешает воспользоваться чашечными весами без гирь ровно один раз. Как Буратино найти одну настоящую монету? (на чаши весов можно класть какое угодно количество монет) (*И.Сиротовский*)

Решение. На одну чашу положим две монеты, на другую – другие две. Рассмотрим варианты. А) если весы в равновесии, значит, на обеих чашах 1 легкая и 1 тяжелая. Значит, оставшаяся монета – тяжелая. Б) если весы не в равновесии, то на тяжелой чаше точно обе монеты настоящие. Так как если б там была хотя бы одна фальшивая, то на легкой чаше должны были бы находиться две легкие (фальшивые) монеты, а фальшивых только 2.

2. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки. Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника двумя прямолинейными разрезами, также идущими по линиям сетки. Пятиклассник Петя сосчитал, что у трёх из этих прямоугольников площади составляют 4см^2, 8см^2 и 16см^2. Чему равна площадь исходного прямоугольника? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет. (*Омск, олимпиада им.Кукина, 2010г.*)

Ответ. 30см^2, 36см^2, 60см^2.

a	*b*
c	*d*

Решение. Обозначим площади маленьких прямоугольников через *a, b, c* и *d* (см.рис) Тогда произведения *ad* и *bc,* равны, поскольку каждое из них есть произведение длин одних и тех же четырёх отрезков. Поэтому площадь четвёртого прямоугольника равна произведению двух площадей, деленное на третью площадь. Возможны три варианта: 2см^2, 8см^2 и 32см^2. Для каждого из них строится пример.

3. Чтобы приготовить зелье для превращения розового пони в голубого единорога нужно 33 минуты варить на слабом огне птичье молоко, затем сразу добавить звездной пыли и варить еще 6 минут, после чего добавить маковую росинку и пять умных мыслей. У Гарри Поттера есть двое песочных часов: на 4мин и на 7мин. Помогите ему с помощью этих часов отмерить нужные промежутки времени и сварить зелье. (*И.Григоренко*)

Решение. Запускаем часы на 7 и на 4 одновременно. Когда кончаются 4мин – переворачиваем эти часы, когда кончаются 7 – ставим на огонь птичье молоко. Когда снова кончаются 4мин, переворачиваем и ждем. Таким образом отмерится 5 минут. Как только кончаются 4мин (третий раз) запускаем 4 раза 7мин (отмеряем 28мин). Таким образом, отмерили 5+28=33мин. Пока варится молоко, готовимся отмерять 6мин. А именно, как только прошло 14мин (два раза по 7), ставим часы на 4мин и к моменту, когда молоко будет вариться 33мин, у нас останется еще 2мин в 4минутных часах. Добавляем пыль и ждем, когда кончатся 2мин, и еще раз ставим 4мин. Итого 2+4=6мин

4. Три разбойника нашли клад из 9 изумрудов – весом 3, 4, 7, 8, 9, 12, 17, 21, 22 граммов. Они хотят разделить изумруды так, чтобы каждому досталось по три штуки, при этом старшему в 2 раза больше по весу, чем среднему, а среднему – в 2 раза больше, чем младшему. Смогут ли они поделить изумруды таким образом? Если можно, то как, если нельзя, то почему. (*И.Григоренко*)

Ответ. Не смогут

Решение. Предположим, что поделить получилось. Тогда младшему досталось А грамм, среднему 2А грамм (в 2 раза больше), а старшему – 4А грамм (в 4 раза больше, чем младшему). То есть всего должно быть 7А грамм. То есть общий вес изумрудов должен делиться на 7. Но сумма равна 103 грамма и на 7 не делится.

5. В городе Октопусе построили метро из 8 станций. При этом из них выходит 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1 линий метро соответственно (одна линия соединяет ровно две станции). Одну линию закрыли на ремонт. Могло ли оказаться, что теперь карта метро состоит из двух одинаковых независимых кусков? (*Е.Иванова*)

Ответ. Не могло.

Решение 1. Предположим, что такое получиться могло. Тогда карта разбилась на два одинаковых куска по 4 станции, из которых выходит соответственно равное количество линий. Значит, после удаления одной линии станций с 4 исходящими линиями больше нет (иначе она попала бы в какой-то только один кусок, и в другом куске такой станции не было бы). Также, чтобы такое разделение имело место, нужно, чтобы после закрытия одной линий, число станций с двумя исходящими линиями должно быть четно (чтобы поделилось пополам на 2 куска). Следовательно, необходимо, чтобы была закрыта линия, соединяющая станцию с 4 исходящими линиями и станцию с 2 исходящими линиями. Тогда получим, что в каждом куске должны быть такие станции с таким числом исходящих линий: 3, 3, 2, 1, что невозможно.

Докажем это. Сосчитаем количество всех линий в этом куске – (3+3+2+1) : 2 – каждую линию мы сосчитали дважды и должно было получиться четное число, но оно нечетное. Следовательно, такой вариант невозможен.

Решение 2. Предположим, что такое получиться могло. Тогда карта разбилась на два одинаковых куска по 4 станции, из которых выходит соответственно равное количество линий. Значит, после удаления одной линии количество линий должно стать четным. Но изначально их уже было (4+3+3+3+3+2+2+2+1):2=10 – четно. Соответственно будет нечетно и поделить на две части будет нельзя.

Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла (если пунктов несколько, то каждый пункт стоит 2 балла).

В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Творческая Лаборатория «Дважды Два»

Творческая лаборатория «2×2» – содружество преподавателей, студентов, аспирантов и просто математиков, обеспокоенных состоянием математического образования в России. Мы хотим, чтобы наши дети росли любознательными, заинтересованными, грамотными, и стараемся по мере сил этому содействовать. За много лет работы мы создали систему обучения детей математике с 1 по 11 класс. Она включает в себя матклассы, олимпиады различного уровня, кружки в разных точках Москвы.

Кроме олимпиад мы проводим выездные математические школы для всех классов. Школы проводятся в период каникул, а также майских праздников. Кроме того мы проводим мини-школы или школы выходного дня. Ближайшая такая школа планируется ***с 22 февраля***.

Летняя школа в Болгарии (2 смены) – ***с 27 июня по 25 июля*** – 1-9 класс.
Летняя школа в Подмосковье – ***с 4 по 25 августа*** – для 4–10 классов.

Большое внимание мы уделяем также нашим математическим классам на базе разных школ Москвы. В прошлом наши ученики завоевали более десятка золотых медалях на международных олимпиадах по математике и физике, а также разнообразные призы и награды на других соревнованиях России и других стран. В частности в 2015 и 2016 годах наших ученики в составе сборной России на международной Олимпиаде по математике завоевали две серебряные и две золотые медали.

Один из наших новых проектов – «Малый Лицей» совместно с лицеем 1535
http://mathbaby.ru/classes/2018/malyy-licey

Более подробно со всеми направлениями нашей работы в можете познакомиться на сайте.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 15 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур пройдёт 18 марта в помещении МИРЭА. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.