34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Лакша јесења варијанта, 7.10.2012.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена)

поени	задатак	
3	1.	Пет ученика имају имена Цаки, Димитрије, Јанко, Радосав и Стефан, док су њихова презимена (у неком редоследу) Цакић, Димитријевић, Јанковић, Радосављевић и Стефановић. Познато је да је Цаки старији 1 годину од Цакића, Димитрије старији 2 године од Димитријевића, Јанко старији 3 године од Јанковића, Радосав старији 4 године од Радосављевића. Да ли је старији Стефан или Стефановић и за колико?
4	2.	Нека је $C(n)$ број простих делилаца природног броја n (нпр. $C(10) = 2, C(11) = 1, C(12) = 2$). Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a + b) = C(a) + C(b)$ коначан или бесконачан?
5	3.	У нека јединична поља табле 10×10 постављене су бомбе. Свако јединично поље које нема бомбу, садржи број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страну или ако имају заједничко теме). Након овога направљен је нови распоред - свако поље које није садржало бомбу сада садржи бомбу, док је у свако преостало поље уписан број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (у новом распореду). Да ли је могуће да је збир свих уписаних бројева у новом распореду већи од збира свих уписаних бројева у почетном распореду?
5	4.	Кружница додирује странице AB, BC и CD паралелограма $ABCD$, редом, у тачкама K, L и M. Доказати да права KL полови висину паралелограма конструисану из темена C на страницу AB.
5	5.	Двадесет ученика неког одељења ишло је на неколико излета. Сваком излету присуствовао је бар један ученик. Доказати да постоји излет такав да је сваки његов учесник учествовао на бар $\frac{1}{20}$ свих излета.

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Лакша јесења варијанта, 7.10.2012.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена)

поени задатак

1. У нека јединична поља табле $m \times n$, где су m и n фиксирани природни бројеви, постављене су бомбе. Свако јединично поље које нема бомбу, садржи број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страну или ако имају заједничко теме).
4 Након овога направљен је нови распоред - свако поље које није садржало бомбу сада садржи бомбу, док је у свако преостало поље уписан број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (у новом распореду). Да ли је могуће да је збир свих уписаних бројева у новом распореду већи од збира свих уписаних бројева у почетном распореду?

2. Дат је конвексан полиедар и сфера која сече сваку његову ивицу и дели је на три једнака дела. Да ли многоуглови који представљају стране тог полиеадра морају бити
2 а) подударни
3 б) правилни?

3. Двадесет ученика неког одељења ишло је на неколико излета. Сваком изле-
5 ту присуствовало је бар четворо ученика. Доказати да постоји излет такав да је сваки његов учесник учествовао на бар $\frac{1}{17}$ свих излета.

4. Нека је $C(n)$ број простих делилаца природног броја n.
2 а) Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b)$ коначан или бесконачан?
3 б) Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b) > 1000$ коначан или бесконачан?

5. Међу 239 новчића налазе се два лажна. Исправни новчићи имају међусобно једнаке тежине. Лажни новчићи такође имају међусобно једнаке
5 тежине, али се њихова тежина разликује од тежине исправних новчића. Утврдити помоћу три мерења на теразијама (вага без тегова) да ли су лажни новчићи тежи или лакши од исправних.

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 21.10.2012.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена.)

поени	задаци
4	1. За декадни запис неког целог броја користе се само две различите цифре. Познато је да тај број има барем 10 цифара и да су сваке две узастопне цифре међусобно различите. Који је највећи степен двојке који може да дели овај број?
5	2. Чип и Дејл играју следећу игру. На почетку игре, Чип распореди 222 лешника у 2 кутије. Дејл види како су распоређени лешници и бира природан број N из скупа $\{1, 2, ..., 222\}$. Затим, Чип узима додатну трећу кутију (која је празна) и премешта, уколико је то неопходно, неки број лешника из прве две кутије у трећу са циљем да у некој од ове три кутији буде тачно N лешника, или да неке две кутије заједно садрже N лешника. Дејл добија све лешнике који су премештени у трећу кутију. Који је максималан број лешника који Дејл може да добије, без обзира како Чип игра?
6	3. У неким пољима таблице 11×11 уписан је знак плус: $+$. Познато је да је укупан број плусева у целој таблици паран и да је број плусева у свакој 2×2 подтаблици такође паран. Доказати да је укупан број плусева на главној дијагонали ове таблице паран број. (Главна дијагонала је она дијагонала која спаја горње лево и доње десно поље)
7	4. Дат је троугао ABC. Нека је I центар уписаног круга овог троугла, а X, Y, Z центри уписаних кругова троуглова AIB, BIC анд AIC, редом. Центар уписаног круга троугла XYZ поклапа се са тачком I. Да ли из тога обавезно следи да је троугао ABC једнакостраничан?
8	5. Аутомобил се креће по кружној стази у смеру кретања казаљки на часовнику. Тачно у подне, Петар и Павле стали су поред траке, на различитим позицијама, да посматрају аутомобил. Након неког времена, истовремено су напустили своје позиције и упоредили своја запажања. Приметили су да је аутомобил прошао поред сваког од њих барем 30 пута. Поред тога, Петар је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду брже него претходни, а Павле је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду спорије него претходни. Доказати да су они посматрали аутомобил барем један и по сат.
	6.
4	а) Унутар круга уочена је тачка A. Кроз тачку A конструисане су две међусобно нормалне праве које пресецају круг у четири тачке. Доказати да центар маса ове четири тачке не зависи од избора оваквих двеју правих.
4	б) Унутар круга уочен је правилан $2n$-тоугао ($n \geq 2$) са центром у A (A није обавезно и центар круга). $2n$ полуправих које полазе из тачке A и садрже темена овог $2n$-тоугла, пресецају круг у $2n$ тачака. Обележимо са O центар маса ових $2n$ тачака. Затим се овај $2n$-тоугао ротира око тачке A и поново се конструишу нових $2n$ полуправих које полазе из A и садрже темена $2n$-тоугла, које пресецају круг у нових $2n$ тачака. Обележимо са N центар маса ових нових $2n$ тачака. Доказати да је $O = N$.
10	7. Петар и Павле играју следећу игру. На почетку игре, Петар замисли неки природан број a чији је збир цифара једнак 2012. Павле зна да је збир цифара броја a једнак 2012, али жели да погоди који је то број. У сваком потезу, Павле бира природан број x, а Петар му саопштава колики је збир цифара броја $\|x - a\|$. Колики је минимални број потеза потребан Павлу да би одредио који је број a?

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 21.10.2012.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена.)

поени	задаци	
4	1.	Дат је бесконачни низ реалних бројева $a_1, a_2, a_3, \ldots$ За сваки природан број k постоји природан број $t = t(k)$ тако да је $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Да ли обавезно постоји природан број T тако да је $a_k = a_{k+T}$ за свако $k \in \mathbb{N}$?
5	2.	Чип и Дејл играју следећу игру. На почетку игре, Чип распореди 1001 лешник у 3 кутије. Дејл види како су распоређени лешници и бира природан број N из скупа $\{1, 2, ..., 1001\}$. Затим, Чип узима додатну четврту кутију (која је празна) и премешта, уколико је то неопходно, неки број лешника из прве три кутије у четврту са циљем да у неким кутијама (могће и само једној), међу овим четири, буде укупно тачно N лешника. Дејл добија све лешнике који су премештени у четврту кутију. Који је максималан број лешника који Дејл може да добије, без обзира како Чип игра?
6	3.	Аутомобил се креће по кружној стази у смеру кретања казаљки на часовнику. Тачно у подне, Петар и Павле стали су поред траке, на различитим позицијама, да посматрају аутомобил. Након неког времена, истовремено су напустили своје позиције и упоредили своја запажања. Аутомобил је прошао поред сваког од њих барем 30 пута. Поред тога, Петар је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду брже него претходни, а Павле је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду спорије него претходни. Доказати да су они посматрали аутомобил барем један и по сат.
8	4.	На страницама AB и BC троугла ABC уочене су тачке C_1 и A_1 редом, различите од темена троугла. Нека је K средина дужи A_1C_1 и I центар уписаног круга троугла ABC. Ако је четвороугао A_1BC_1I тетиван, доказати да је угао $\angle AKC$ туп.
8	5.	Петар и Павле играју следећу игру. На почетку игре, Петар замисли неки природан број a чији је збир цифара једнак 2012. Павле зна да је збир цифара броја a једнак 2012, али жели да погоди који је то број. У сваком потезу, Павле бира природан број x, а Петар му саопштава колики је збир цифара броја $\|x - a\|$. Колики је минималан број потеза потребан Павлу да би одредио који је број a?
	6.	
5	а)	Унутар сфере уочена је тачка A. Кроз тачку A конструисане су три међусобно нормалне праве које пресецају сферу у шест тачака. Доказати да центар маса ових шест тачака не зависи од избора оваквих правих.
5	б)	Унутар сфере уочен је икосаедар са центром у A (A није обавезно и центар сфере). 12 полуправих које полазе из тачке A и садрже темена овог икосаедра, пресецају круг у 12 тачак чији је центар масе тачка O. Затим се овај икосаедар ротира око тачке A и поново се конструишу нових 12 полуправих које полазе из A и садрже темена икосаедра, које пресецају круг у нових 12 тачака. Обележимо са N центар маса ових нових 12 тачака. Доказати да је $O = N$. (Икосаедар је правилан полиедар са 20 троугаоних страна; из сваког темена полази 5 ивица).
10	7.	Трака димензије $1 \times 1\,000\,000$, сачињена од јединичних поља, подељена је на 100 сегмената. У свако поље уписан је по један цео број, тако да поља која припадају истом сегменту садрже исте бројеве. На свако поље је постављен по један жетон и урађено је следеће: сваки жетон је померен удесно за онолико поља колики је број у пољу на коме је жетон постављен (уколико је у поље био уписан негативан број, жетон се помера улево). Испоставило се да се након ове операције поново на сваком пољу нашао по један жетон. Ова операција је затим понављана много пута. За сваки жетон који је на почетку био постављен на неко поље из првог сегмента, записан је број операција изведених док се тај жетон није први пут вратио на неко поље из првог сегмента. Доказати да међу записаним бројевима, постоје највише 100 различитих.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša prolećna varijanta, 24.2.2013.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	U ravni je dato šest tačaka. Poznato je da se ove tačke mogu podeliti u dve grupe od po tri tačke, tako da tačke iz iste grupe čine temena trougla. Da li odatle sledi da se ove tačke mogu podeliti u dve grupe od po tri tačke, tako da tačke iz iste grupe čine temena trougla i da ta dva trougla nemaju zajedničkih tačaka (kako unutrašnjih tako i ivičnih)?
4	2.	Na tabli je zapisan prirodan broj A. U svakom koraku brišemo broj koji se trenutno nalazi na tabli (neka je to broj x), a umesto njega pišemo ili $x+9$ ili broj koji se dobija izbacivanjem cifre 1 sa bilo koje pozicije u broju x. Da li je uvek moguće, počevši od broja A, nakon nekoliko poteza dobiti broj $A+1$? (Ako želimo da obrišemo cifru 1 sa vodeće pozicije, brišemo i sve nule koje slede neposredno nakon te jedinice).
4	3.	Svaki od 11 tegova ima masu koja iznosi prirodan broj grama. Nikoja dva tega nemaju jednake mase. Poznato je da, ako izaberemo bilo koji podskup ovog skupa tegova i rasporedimo ga u bilo kom rasporedu na dva tasa terazija, ukoliko se broj tegova na jednom i drugom tasu razlikuju, uvek će teža biti ona strana na kojoj se nalazi veći broj tegova. Dokazati da barem jedan od ovih tegova ima masu veću od 35 grama.
5	4.	Na šahovskoj tabli, dimenzije 8×8, nalazi se 8 topova, tako da se nikoja dva topa međusobno ne napadaju. Sva polja table podeljena su ovim topovima na sledeći način: polje na kome se nalazi top pripada tom topu; ako neko polje napadaju dva topa, ono pripada onom topu koji je bliži tom polju, a ukoliko je to polje jednako udaljeno od oba topa, svaki top dobija po polovinu tog polja. Dokazati da je svaki top ukupno dobio istu površinu na tabli.
5	5.	U četvorouglu $ABCD$, ugao kod temena B iznosi $150°$, ugao kod temena C iznosi $90°$, a stranice AB i CD su jednake. Odrediti ugao između prave BC i prave koja spaja sredine stranica BC i AD.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša prolećna varijanta, 24.2.2013.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	Na tabli je zapisan prirodan broj A. U svakom koraku brišemo broj koji se trenutno nalazi na tabli (neka je to broj x), a umesto njega pišemo ili $x+9$ ili broj koji se dobija izbacivanjem cifre 1 sa bilo koje pozicije u broju x. Da li je uvek moguće, počevši od broja A, nakon nekoliko poteza dobiti broj $A+1$? (Ako želimo da obrišemo cifru 1 sa vodeće pozicije, brišemo i sve nule koje slede neposredno nakon te jedinice).
4	2.	Neka je ABC pravougli trougao, sa pravim uglom u temenu C. Nad katetama AC i BC konstruisani su kvadrati $ACKL$ i $BCMN$, u spoljašnjosti trougla ABC. Ako je CE visina trougla ABC, dokazati da je ugao LEM prav.
4	3.	Na šahovskoj tabli, dimenzije 8×8, nalazi se 8 topova, tako da se nikoja dva topa međusobno ne napadaju. Sva polja table podeljena su ovim topovima na sledeći način: polje na kome se nalazi top pripada tom topu; ako neko polje napadaju dva topa, ono pripada onom topu koji je bliži tom polju, a ukoliko je to polje jednako udaljeno od oba topa, svaki top dobija po polovinu tog polja. Dokazati da je svaki top ukupno dobio istu površinu na tabli.
4	4.	Na svakom od 100 tegova nalazi se nalepnica koja pokazuje stvarnu masu tog tega. Nestašni Griša želi da preuredi nalepnice tako da suma brojeva na nalepnicama bilo koje grupe od $k \in \{1, 2, ..., 99\}$ tegova nije jednaka ukupnoj masi tih tegova. Da li Griša uvek može da uspe u svojoj nestašnoj nameri?
5	5.	Kvadratni trinom je *prihvatljiv* ako su mu koeficijenti celobrojni, vodeći koeficijent je jednak 1, apsolutna vrednost koeficijenata ne prelazi 2013 i nule tog kvadratnog trinoma su celi brojevi. Vasa je sabrao sve prihvatljive kvadratne trinome. Dokazati da trinom koji je dobio tom prilikom nema realnih nula.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 10.3.2013.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena.)

---

poeni	zadaci
4	1. Na tabli se nalazi nekoliko prirodnih brojeva. Suma bilo koja dva broja sa table jednaka je nekom stepenu dvojke. Koliko se najviše različitih brojeva može naći na tabli?
4	2. Dvadesetoro dece, deset dečaka i deset devojčica stoje u vrsti. Svaki dečak je izbrojao koliko se dece nalazi desno od njega i zapamtio taj broj. Svaka devojčica je izbrojala koliko se dece nalazi levo od nje i zapamtila taj broj. Dokazati da je zbir svih brojeva koje su zapamtili dečaci jednak zbiru svih brojeva koje su zapamtile devojčice.
5	3. Data je tabla dimenzije 19×19. Da li je moguće markirati neke kvadratiće dimenzije 1×1 tako da svaki kvadrat dimenzije 10×10 sadrži različit broj markiranih kvadratića?
5	4. 1000 realnih brojeva različitih od nule je poredjano u krug i ofarbano naizmenično crnom i belom bojom. Svaki crni broj je jednak zbiru dva njemu susedna bela broja, dok je svaki beli broj jednak proizvodu dva njemu susedna crna broja. Koje sve vrednosti može imati zbir ovih 1000 brojeva?
6	5. Tačka u (koordinatnoj) ravni čije su obe koordinate celi brojevi se naziva *čvor*. Uočimo trougao čija se temena nalaze u čvorovima i koji sadrži tačno dva čvora u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da prava kroz ta dva čvora ili sadrži teme trougla ili je paralelna sa nekom od stranica trougla.
8	6. Neka je ABC pravougli trougao i neka je I centar upisanog kruga u trougao ABC koji dodiruje njegove katete AC i BC u tačkama B_0 i A_0, redom. Neka se normala iz tačke A_0 na pravu AI i normala iz tačke B_0 na pravu BI seku u tački P. Dokazati da je $CP \perp AB$.
9	7. Dva tima A i B učestvuju na školskom turniru u stonom tenisu. Tim A se sastoji od m učenika a tim B od n učenika gde je $m \neq n$. Postoji samo jedan sto za stoni tenis na kome je moguće igrati i turnir je organizovan na sledeći način. Dva učenika iz različitih timova počnu da igraju meč dok svi ostali učenici formiraju red i čekaju njihov red za igru. Kada se neki meč završi, učenik sa početka trenutnog reda menja člana svog tima koji je igrao u tom meču i igra protiv preostalog igrača (tj. član suprotnog tima nastavlja da igra). Igrač koji je zamenjen ide na kraj reda. Dokazati da će svaka dva učenika iz suprotnih timova u nekom trenutku igrati meč jedan protiv drugog.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 10.3.2013.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena.)

---

poeni	zadaci	
3	1.	Na tabli se nalazi nekoliko prirodnih brojeva. Suma bilo koja dva broja sa table jednaka je nekom stepenu dvojke. Koliko se najviše različitih brojeva može naći na tabli?
4	2.	Na dugačkoj plaži sede jedan dečak i jedna devojčica. Zatim, dvadesetoro dece, jedno za drugim, dođu na plažu i svako dete sedne između dvoje dece koje već sede na plaži. Dete je *hrabro* ukoliko je selo između dvoje dece suprotnog pola od njegovog. Nakon što je i poslednje dete zauzelo svoje mesto, ispostavilo se da dečaci i devojčice sede naizmenično. Da li je moguće jednoznačno odrediti broj hrabre dece među njima?
6	3.	U ravni je dat koordinatni sistem. Tačku te ravni nazivamo *čvor* ako su obe koordinate ta tačke celobrojne. Posmatrajmo trougao čija su temena čvorovi i koji sadrži barem dva čvora u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da u unutrašnjosti tog trougla postoje dva čvora takva da prava određena njima prolazi kroz teme trougla ili je paralelna sa jednom stranicom trougla.
6	4.	Brojevi $1, 2, ..., 100$ zapisani su na kružnici, u nekom redosledu. Da li je moguće da je za svaka dva susedna broja na kružnici njihova apsolutna vrednost razlike ne manja od 30 i ne veća od 50?
7	5.	U ravni su izabrane tri tačke i jednoj je dodeljena crvena, jednoj plava i jednoj žuta boja; ostalim tačkama te ravni nisu dodeljene boje. Jedan korak sastoji se od sledećeg: izaberu se dve tačke kojima su dodeljene različite boje; zatim se odredi još jedna tačka u ravni i njoj se dodeli preostala treća boja tako da sve tri tačke čine temena jednakostraničnog trougla čijim temenima su dodeljene boje, u smeru kazaljke na satu: crvena, plava, žuta. Svakoj tački ravni može da se dodeli više boja. Dokazati da nakon proizvoljnog broja koraka važi: za proizvoljnu boju $x \in \{\text{crvena, plava, žuta}\}$ sve tačke kojima je dodeljena boja x nalaze se na jednoj pravoj.
	6.	Dato je 5 međusobno različitih pozitivnih realnih brojeva. Poznato je da je suma kvadrata ovih brojeva jednaka sumi 10 proizvoda od po dva različita realna broja.
4	a)	Dokazati da je moguće izabrati tri realna broja od ovih pet, tako da ne postoji trougao čije su dužine stranica jednake tim brojevima.
5	b)	Dokazati da je broj trojki opisanih u delu pod a) barem 6. (Trojke sačinjene od istih brojeva u različitim redosledima smatraju se istim).
	7.	Kralj je odlučio da redukuje svoj Savet koji se sastoji od 1000 čarobnjaka. Poređao ih je u niz i stavio im je kape na kojima su bili zapisani brojevi od 1 do 1001 u nekom redosledu (kapu koju nije iskoristio je sakrio). Svaki čarobnjak vidi samo one kape koje se nalaze na glavama čarobnjaka ispred njega. Kada Kralj da znak, počevši od poslednjeg čarobnjaka u nizu, svaki čarobnjak izgovara jedan broj od 1 do 1001, tako da svi ostali čarobnjaci mogu da ga čuju. Ni jedan broj ne sme biti izgovoren dva puta. Svaki čarobnjak koji ne pogodi broj na svojoj kapi biva izbačen iz Saveta. Čarobnjaci su znali za ovaj test i mogli su da dogovore strategiju unapred.
5	a)	Da li čarobnjaci mogu da smisle strategiju koja bi garantovala da će više od 500 njih ostati u Savetu?
7	b)	Da li čarobnjaci mogu da smisle strategiju koja bi garantovala da će barem 999 njih ostati u Savetu?

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев? *Е. Бакаев*
4	2. Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2, C(11) = 1, C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $$C(a + b) = C(a) + C(b)?$$ *Г. К. Жуков*
5	3. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам? *А. Ю. Эвнин*
5	4. Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB. *П. А. Кожевников*
5	5. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/20$ всех экскурсий. *Н. К. Верещагин*

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Таблица $m \times n$ заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

А. Ю. Эвнин

2. Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

2 а) равные многоугольники;

3 б) правильные многоугольники?

Г. А. Гальперин

5 3. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/17$ всех экскурсий.

Н. К. Верещагин

4. Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n.

2 а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и

$$C(a+b) = C(a) + C(b)?$$

3 б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a+b) > 1000$?

Г. К. Жуков

5 5. Из 239 неотличимых на вид монет две — одинаковые фальшивые, а остальные — одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее — фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

К. А. Кноп

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число? *И. И. Богданов*
5	2.	Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 222 ореха по двум коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 222. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую третью коробочку и предъявляет Чичикову одну или две коробочки, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев? *А. Подольский*
6	3.	В некоторых клетках таблицы 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 этой таблицы тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали таблицы. *Е. Бакаев*
7	4.	Дан треугольник ABC. Пусть I — центр вписанной в него окружности, X, Y, Z — центры окружностей, вписанных в треугольники AIB, BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ, совпадает с I. Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний? *Б. Р. Френкин*
8	5.	Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов. *В. Брагин*
	6.	
4	а)	Внутри окружности находится некоторая точка A. Через A провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.
4	б)	Внутри окружности находится правильный $2n$-угольник ($n \geq 2$), его центр A не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из A в вершины $2n$-угольника, высекают $2n$ точек на окружности. $2n$-угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают $2n$ новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых $2n$ точек. *И. В. Митрофанов*
10	7.	Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $\lvert x - a \rvert$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x? *С. Сафин*

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Известно, что для любого номера k можно указать такое натуральное число t, что $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая, то есть существует ли такое натуральное T, что $a_k = a_{k+T}$ при любом натуральном k?

Л. Штейнгарц

5 2. Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 1001 орех по трем коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 1001. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую четвертую коробочку и предъявляет Чичикову одну или несколько коробочек, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?

А. Подольский

6 3. Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов.

В. Брагин

8 4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1, отличные от вершин. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

А. А. Полянский

8 5. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $|x - a|$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?

С. Сафин

6.

5 а) Внутри сферы находится некоторая точка A. Через A провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.

5 б) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из A в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.
(Напомним, что икосаэдр — это правильный многогранник, у которого 20 треугольных граней и в каждой вершине сходятся 5 граней.)

И. В. Митрофанов

10 7. Клетчатая полоска $1 \times 1\,000\,000$ разбита на 100 сегментов. В каждой клетке записано целое число, причем в клетках, лежащих в одном сегменте, числа совпадают. В каждую клетку поставили по фишке. Затем сделали такую операцию: все фишки одновременно передвинули, каждую — на то количество клеток вправо, которое указано в ее клетке (если число отрицательно, то фишка двигается влево); при этом оказалось, что в каждую клетку снова попало по фишке. Эту операцию повторяют много раз. Для каждой фишки первого сегмента посчитали, через сколько операций она впервые снова окажется в этом сегменте. Докажите, что среди посчитанных чисел не более 100 различных.

И. В. Митрофанов

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 24 февраля 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы	задачи	
3	1.	На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?
4	2.	Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)
4	3.	Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.
5	4.	На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.
5	5.	В четырёхугольнике $ABCD$ угол B равен 150°, угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BC и прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 24 февраля 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
3	1.	Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)
4	2.	На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE — высота, опущенная на гипотенузу AB. Докажите, что угол LEM прямой.
4	3.	На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.
4	4.	Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать?
5	5.	Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни — целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
4	1. На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
4	2. Двадцать детей — десять мальчиков и десять девочек — встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка — сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.
5	3. Можно ли в клетках таблицы 19×19 отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах 10×10 было разное количество отмеченных клеток?
5	4. По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел?
6	5. Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
8	6. Пусть I — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC, касающейся катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_0 на прямую AI, и перпендикуляр, опущенный из B_0 на прямую BI, пересекаются в точке P. Докажите, что прямые CP и AB перпендикулярны.
9	7. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из m человек, команда математиков — из n, причем $m \neq n$, а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
4	2.	На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — отважным, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке?
6	3.	Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
6	4.	Числа 1, 2, . . . , 100 стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?
7	5.	На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну — в красный цвет, другую — в синий, третью — в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке «красный, синий, желтый» (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов.) Докажите, что сколько бы ходов ни было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой.
	6.	Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений.
4	а)	Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника.
5	б)	Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми).
	7.	Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать.
5	а)	Могут ли они гарантировать результат более 500?
7	б)	Могут ли они гарантировать результат не менее 999?

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 14 марта 2013 г.

---

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график ещё какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

2. В квадратной таблице 10×10 записано сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.

3. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

4. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?

5. У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо чёрная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)

6. Даны $1\,000\,000$ окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой.

---

1. *На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график еще какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?*

Решение 1. Мы будем пользоваться тем *фактом*, что любой многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом принимает минимальное значение в некоторой точке.

Обозначим данные многочлены через $Q_i(x)$. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^{2n}$, где $2n > \deg Q_i$ для всех i. Покажем, что к P можно прибавить константу c так, что график $P + c$ не пересечет ни одного из графиков Q_i. Для этого заметим, что $P - Q_i$ — многочлены четной степени, а, значит, достигают своих минимальных значений m_i. Но тогда, положив $c = \max_i(-m_i + 1)$, мы получим искомый многочлен.

Решение 2. В тех же обозначениях положим $P = Q_1^2 + \ldots + Q_n^2 + 1$. Заметим, что при любом i и любом x верно неравенство $Q_1^2(x) - Q_1(x) + 1 + Q_2^2(x) + \ldots + Q_n^2(x) > 0$, т.к. $a^2 - a + 1 > 0$ при любом a. Значит, $P(x) > Q_1(x)$. Аналогично, $P(x) > Q_i(x)$, и график P не пересекается ни с одним из графиков Q_i..

2. *В квадратной таблице* 10×10 *записано сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.*

Пусть Коля переставит числа в каждой строке в порядке невозрастания. Покажем, что эта перестановка — требуемая.

Рассмотрим i-й столбец. Пусть максимальное число в нём равно m_i; оно стоит в некоторой строке. Тогда в первых i клетках этой строки стоят числа, не меньшие m_i. Значит, сумма чисел в этой строке не меньше im_i; с другой стороны, она равна 100. Итак, $m_i \leq \dfrac{100}{i}$.

В итоге, можно оценить сумму найденных чисел как

$$\sum_{i=1}^{10} m_i \leq 100 \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = 100 \cdot \frac{7381}{2520} < 300,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Сумму обратных необязательно вычислять явно. Достаточно, например, заметить, что она равна

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3.$$

3. *В треугольник* ABC *вписана окружность, касающаяся сторон* BC, CA *и* AB *в точках* X, Y *и* Z *соответственно. На плоскости отметили точку* K. *Серединные перпендикуляры к отрезкам* KX, KY *и* KZ *пересекают прямые* BC, CA *и* AB *в точках* X_1, Y_1 *и* Z_1 *соответственно. Докажите, что точки* X_1, Y_1 *и* Z_1 *лежат на одной прямой.*

Пусть ℓ — радикальная ось вписанной окружности ω треугольника ABC и точки K (рассматриваемой как окружность нулевого радиуса). Заметим, что ℓ существует, поскольку K отлична от центра ω (в противном случае рассматриваемые перпендикуляры параллельны соответствующим сторонам). Тогда равенство $X_1X = X_1K$ означает, что X_1 лежит на ℓ; аналогично, точки Y_1 и Z_1 также лежат на ℓ.

4. *Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?*

Ответ. Бесконечно.

При любом натуральном n положим $a_n = 7^n + 7^{n-1} + \cdots + 7 + 1$. Покажем, что к a_n можно прибавить несколько различных степеней семёрки, не превосходящих 7^n, чтобы получилось число b_n без нулей в десятичной записи. Тогда семеричная запись b_n будет состоять из единиц и двоек. Ясно, что таким образом мы построим бесконечно много различных чисел b_n, удовлетворяющих условию.

Итак, рассмотрим десятичную запись числа a_n; рассмотрим первый *слева* ноль в ней (если он есть). Пусть он стоит в i-м разряде *справа* (разряд единиц считаем нулевым). Найдётся степень семёрки 7^k, лежащая между 10^i и $7 \cdot 10^i$; заметим, что она меньше a_n, и поэтому меньше 7^{n+1}. После прибавления её к a_n перехода из i-го разряда не произойдёт (так как первая цифра 7^k меньше 9), при этом в i-м разряде окажется не ноль.

Значит, в полученном числе первый слева ноль в десятичной записи (если он есть) расположен правее, чем в a_n; применим к этому нулю то же действие (при этом мы прибавим меньшую степень семёрки, чем в предыдущий раз). Продолжая так дальше, в результате мы построим требуемое число b_n.

5. *У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо чёрная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)*

Ответ. $2n$ бусинок.

Покажем сначала, что всегда возможно перекрасить не более $2n$ бусинок. Пусть в испорченных бусах w белых и $b = 4n - w$ чёрных бусинок. Мысленно наложим исходные бусы на испорченные $4n$ способами, отличающимися поворотами. Тогда каждая бусинка исходных бус по одному разу наложится на каждую бусинку испорченных. Значит, всего будет b^2 наложений чёрной бусинки на чёрную и w^2 наложений белой на белую. Тогда в каком-то из $4n$ способов будет не меньше, чем $\dfrac{b^2+w^2}{4n} \geq \dfrac{(b+w)^2}{8n} = 2n$ наложений одноцветных бусинок. Теперь достаточно перекрасить все бусинки испорченных бус, на которые в этом наложении накладываются бусинки другого цвета.

Осталось привести пример, когда не удастся обойтись меньшим числом перекрашиваний. Пусть исходные бусы выглядели как ···–○–●–●–○–○–●–●–○–○–●–···, а Карл их переставил в порядке ···–○–●–○–●–○–●–○–●–○–●–···. Легко видеть, что для получения исходных бус среди любых четырёх бусинок подряд надо перекрасить не меньше двух, значит, всего потребуется не менее $2n$ перекрашиваний.

Замечание. Из оценки видно, что в любом экстремальном примере должно быть $2n$ чёрных и $2n$ белых бусинок.

6. *Даны 1 000 000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой. Пусть все окружности проходят через точку O. Проведём через O четыре прямых, разбивающих плоскость на 8 углов по $45°$, так, чтобы ни один центр окружности не лежал на этих прямых. Мы разобьём окружности, центры которых лежат в двух вертикальных углах, на три группы, удовлетворяющие условию; сделав так с каждой парой вертикальных углов, получим требуемое.*

Разобьём всю плоскость, кроме точки O, на такие кольца с центром в O, что отношение внешнего и внутреннего радиусов каждого кольца равно $\sqrt{2}$. Будем считать, что внешняя окружность каждого кольца принадлежит ему, а внутренняя — нет. Занумеруем все кольца последовательно целыми числами: $\ldots, R_{-1}, R_0, R_1, \ldots$. Поместим в первую, вторую и третью группы все окружности, центры которых лежат в кольцах R_{3i+1}, R_{3i+2} и R_{3i} соответственно (при целых i); напомним, что мы имеем дело лишь с окружностями, центры которых лежат в двух вертикальных углах. Мы утверждаем, что это разбиение — искомое.

Пусть A и B — центры двух окружностей ω_A и ω_B, причём A лежит на ω_B, то есть $OB = AB$. В частности, это значит, что $\angle AOB$ острый, поэтому точки лежат в одном угле, и $\angle AOB < 45°$. Значит, $\angle ABO = 180° - 2\angle AOB > 90°$; Отсюда $OA^2 > AB^2 + OB^2 = 2OB^2$, и точка A лежит в кольце с бо́льшим номером, чем B. С другой стороны, $OA \leq OB + AB = (\sqrt{2})^2 AB$; значит, эти номера различаются не более, чем на 2. Поэтому A и B попали в разные группы, что и требовалось.

Замечание. Можно проделать аналогичную процедуру, разбив плоскость на 12 углов по $30°$ и объединив их в группы по три, как показано на рисунке справа. В этом случае отношение радиусов колец может быть любым в пределах от $\sqrt{2}$ до $\sqrt{3}$.