

Решенија на задачите

Задача 1.

Определи ги сите цели броеви $n, n \geq 1$ за кои што бројот $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ е прост број.

Решение. Ќе ја употребиме факторизацијата на изразот $n^8 + n^6 + n^4 + 4$,

$$\begin{aligned}n^8 + n^6 + n^4 + 4 &= (n^8 + 2n^6 + 5n^4 + 4n^2 + 4) - (n^6 + 4n^4 + 4n^2) = \\&= (n^4 + n^2 + 2)^2 - (n^3 + 2n)^2 = \\&= (n^4 + n^3 + n^2 + 2n + 2)(n^4 - n^3 + n^2 - 2n + 2)\end{aligned}$$

Вториот множител можеме да го запишеме во облик

$$f(n) = n^4 - n^3 + n^2 - 2n + 2 = n^3(n-1) + (n-1)^2 + 1,$$

и јасно е дека $f(n) \geq 2$ кога $n \geq 2$.

Првиот множител

$$f(n) = n^4 + n^3 + n^2 + 2n + 2 \geq 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7,$$

за секој $n \in \mathbb{N}$.

Според тоа, за $n \geq 2$ добиваме дека $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ е сложен број.

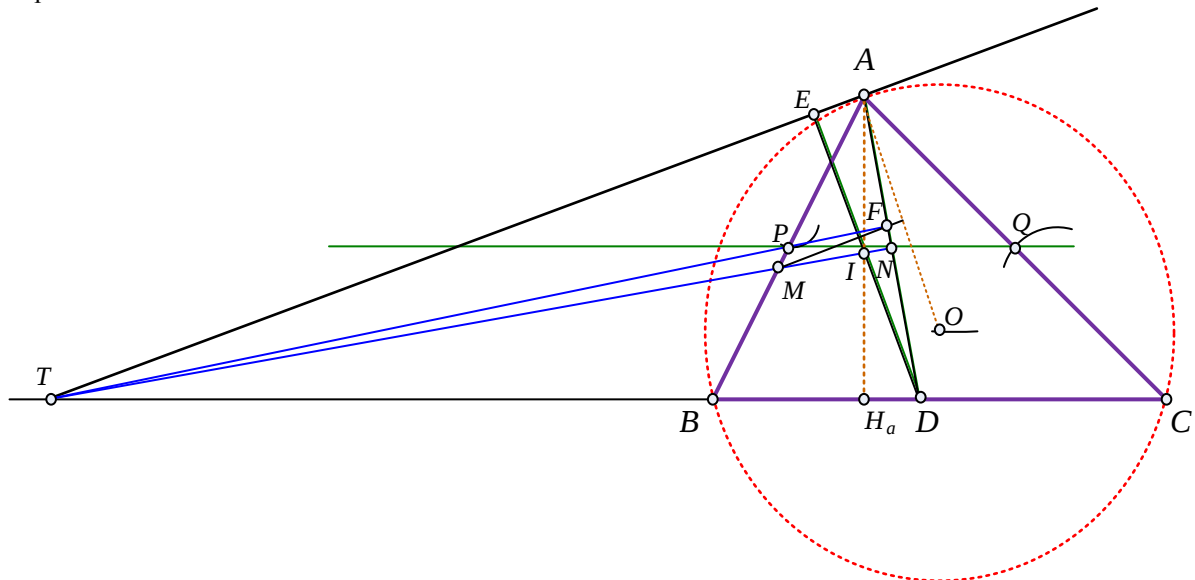
За $n=1$ добиваме дека $f(1)g(1) = 1^8 + 1^6 + 1^4 + 4 = 7$, т.е. $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ е прост број.

Значи, $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ е прост број само за $n=1$.

Задача 2

Нека ABC е триаголник. Нека D е подножје на симетралата на внатрешниот агол кај темето A . Нормалата од точката D кон тангентата AT (T припаѓа на BC) на опишаната кружница околу триаголникот ABC ја сече висината AH_a во точката I (H_a припаѓа на BC).

Ако P е средна точка на страната AB а O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC , правата TI ја сече AB во точката M а правата PT ја сече AD во точката F , докажи дека MF е нормална на AO .



Решение. Нека Q е средна точка на AC а N е пресек на AD и PQ . Тогаш N е средна точка на AD . Бидејќи DE е нормална на AT , E е пресечна точка на DI и AT , и како OA е нормална на AT , добиваме дека DE е паралелна со OA , па според тоа аглите $\angle OAN$ и $\angle ADE$ се еднакви. Сега е јасно дека триаголниците $\triangle ADE$ и $\triangle DAN$ се складни.

Но тогаш, аголот $\angle DAT$ е еднаков на аголот $\angle H_aAD$, па според тоа $\triangle ATD$ е рамнокрак и точката I е ортоцентар на триаголникот ATD .

Значи, TI е нормално на AD , и пресечната точка на TI и AD е средна точка на AD (веќе е означена со N).

Четириите точки M, N, T, I се колинеарни. Ќе ја примениме теоремата на Чева за триаголникот APT со чевиани PN, AD и TM , при што добиваме дека

$$\frac{FP}{FT} \cdot \frac{MA}{PM} = 1 \Leftrightarrow \frac{PF}{TF} = \frac{MP}{MA}$$

(да забележиме дека NP ја сече AT во нејзината средна точка).

Сега, MF е паралелна со AT , од каде добиваме дека MF е нормална на AO , што требаше да се докаже.

Задача 3

Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c = 3$. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{b}{a^2+3}} + \sqrt{\frac{c}{b^2+3}} + \sqrt{\frac{a}{c^2+3}} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{abc}}.$$

Решение. За подредените тројки $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}, \frac{1}{\sqrt{b^2+3}}, \frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\right)$ и $(\sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{a})$ од неравенството

на Коши-Буњаковски-Шварц и од условот на задачата $a + b + c = 3$, добиваме

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{b}{a^2+3}} + \sqrt{\frac{c}{b^2+3}} + \sqrt{\frac{a}{c^2+3}}\right)^2 &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3}}\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{b^2+3}}\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\sqrt{a}\right)^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3}\right)(a+b+c) = \\ &= 3\left(\frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

при што од условот на задачата искористивме дека $a + b + c = 3$.

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за четири реални броеви имаме

$$a^2 + 3 = a^2 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4\sqrt{a}. \quad (2)$$

Потполно аналогно, се докажува дека се исполнети неравенствата

$$b^2 + 3 \geq 4\sqrt{b} \quad (2')$$

$$c^2 + 3 \geq 4\sqrt{c}. \quad (2'')$$

Сега од неравенствата (2), (2') и (2'') и со повторна примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{1}{c^2+3} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{4\sqrt{abc}} \leq \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}}{4\sqrt{abc}} \leq \\ &= \frac{a+b+c}{4\sqrt{abc}} \end{aligned} \quad (3)$$

Ако ги искомбинираме (1) и (3) добиваме дека

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a^2+3}} + \sqrt{\frac{c}{b^2+3}} + \sqrt{\frac{a}{c^2+3}}\right)^2 \leq 3 \frac{a+b+c}{4\sqrt{abc}} = \frac{9}{4\sqrt{abc}},$$

од каде се добива бараното неравенство.

Јасно е дека равенство во (2), (2') и (2'') важи ако и само ако

$$a^2 = 1$$

$$b^2 = 1$$

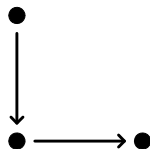
$$c^2 = 1,$$

од каде заради ненегативноста на a, b, c добиваме $a = b = c = 1$.

Задача 4

Дадена е 25×25 шаховска табла составена од единечни квадрати $C(i, j)$ за $1 \leq i, j \leq 25$. Да се најде најмалиот број n од различни бои со кои единечните квадрати може да бидат обоени (секој квадрат се бои во една боја) за да биде исполнет условот: за $1 \leq i < j \leq 25$ и за $1 \leq s < t \leq 25$, трите единечни квадрати $C(i, s), C(j, s)$ и $C(j, t)$ се обоени во најмалку две различни бои.

Решение. Конфигурација на бои не смее да ги има во распоредот на боите е дадена со цртежот, при што стрелките се во насока на растење на индексите и тоа вертикалната е во насока на растење на првиот индекс а хоризонталната е во растење на вториот индекс.



За 3×3 шаховска табла, минималниот број на бои е 2. Навистина, таков распоред е даден со цртежот.

1	1	2
1	2	2
2	2	1

Ако разгледуваме 5×5 шаховска табла, доволно е да разгледуваме 3 бои. Еден таков распоред со три бои е даден на шаховската табла дадена на цртежот.

1	1	2	2	3
1	2	2	3	3
2	2	3	3	1
2	3	3	1	1
3	3	1	1	2

Како што гледаме од претходните примери, се чини дека за да обоиме шаховска табла со димензии $n \times n$ каде n е непарен природен број, доволни би биле $m_n = \frac{n+1}{2}$ боја. Сега ќе покажеме дека 13 бои се доволни за да се бои шаховска табла со димензии 25×25 . Ќе ги разгледаме боите $\{1, 2, 3, \dots, 12, 0\}$ и боење кое е дадено на шаховската табла како на цртежот.

1	1	2	2	3		11	11	12	12	0
1	2	2	3	3		11	12	12	0	0
2	2	3	3	4		12	12	0	0	1
2	3	3	4	4		12	0	0	1	1
.....										
11	12	12	0	0		8	9	9	10	10
12	12	0	0	1		9	9	10	10	11
12	0	0	1	1		9	10	10	11	11
0	0	1	1	2		10	10	11	11	12

која го задоволува условот на прв поглед. Тоа и ќе го покажеме. Не е тешко да се види дека $C[i, j] = \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor \pmod{13}$, за $1 \leq i, j \leq 25$, каде $C[i, j]$ е бојата со која е обоен единечниот квадрат $C(i, j)$.

Сега, ќе претпоставиме дека за оваа конфигурација, т.е. за овој распоред не е исполнет условот на задачата, т.е. $C[i, s] = C[j, s] = C[j, t]$, за некои $1 \leq i < j \leq 25$ и $1 \leq s < t \leq 25$. Според тоа

$$\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor \pmod{13} = \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor \pmod{13} = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor \pmod{13}.$$

Од равенството $C[i, s] = C[j, s]$ лесно се добива дека $\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor$. Навистина, јасно е дека

$$0 \leq \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor < \frac{j+s}{2} - \left(\frac{i+s}{2} - 1 \right) = \frac{j-i}{2} + 1 \leq \frac{24}{2} + 1 = 13,$$

односно $0 \leq \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor \leq 12$. Од друга страна, од равенството $C[i,s]=C[j,s]$ и од равенствата

$$\left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor = 13k + C[j,s]$$

$$\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor = 13p + C[i,s]$$

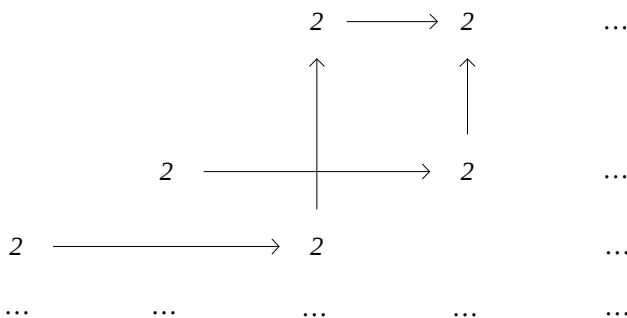
непосредно следува $k = p$, што е доволно за точноста на равенството $\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor$.

Од друга страна, на потполно ист начин од равенството $C[j,s]=C[j,t]$ се добива точноста на равенството $\left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor$. Но, тогаш $\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor$, што не е можно, бидејќи

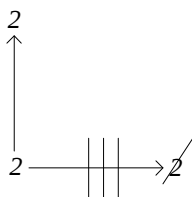
$$\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor \leq \frac{i+s}{2} \leq \frac{j+t}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor.$$

Заради добиената контрадикција, добиваме дека даденото боење со 13 бои го задоволува условот на задачата.

Сега ќе покажеме дека се потребни најмалку 13 бои. Нека е дадена шаховска табла со димензии 25×25 за која е дадена конфигурација за која е задоволен условот од задачата. Ќе фиксираме било која боја, да речеме бојата со број 2. Сите единечни квадрати кои што се обоени со бојата со број 2 ќе ги наречеме 2-квадрати. Вкупниот број на 2-квадрати ќе го означиме со c_2 . Понатаму ќе ја разгледуваме само бојата со број 2. За секој 2-квадрат ќе нацртаме хоризонтална стрелка од лево кон десно и вертикална стрелка од долу нагоре кои спојуваат два последователни 2-квадрати. Ваквите стрелки ќе ги нарекуваме 2-стрелки.



Од било кој 2-квадрат не може да излегуваат две стрелки, бидејќи во тој случај би добиле конфигурација, т.е. боење спротивно на претпоставката како на цртежот.



Заради тоа, вкупниот број на 2-стрелки a_2 го задоволува условот $c_2 \geq a_2$. Јасно е дека во секој ред, ако има k 2-квадрати, тогаш бројот на 2-стрелки во тој ред е $k-1$, па според тоа, вкупниот број на хоризонтални 2-стрелки е $c_2 - 25$, бидејќи имаме 25 редици. Аналогно, ако ги разгледуваме колоните, тогаш вкупниот број на вертикални стрелки е $c_2 - 25$. Значи вкупниот број на 2-стрелки нацртани на таблата е $a_2 = 2(c_2 - 25)$. Но сега

$$c_2 \geq a_2 \geq 2c_2 - 50, \text{ т.е. } c_2 \leq 50.$$

Вкупниот број на квадрати на шаховската табла е 625. Ако имаме боење со 12 бои, и за секоја боја i нека вкупниот број на i -квадрати е c_i , тогаш

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{12} \leq 12 \cdot 50 = 600 < 625.$$

Според тоа боење со 12 бои не е можно бидејќи шаховската табла е обоена. Значи најмалиот потребен број на бои е 13.