Ристо Малчески
Самоил Малчески

ОСНОВИ НА ФИНАНСИСКА МАТЕМАТИКА

Скопје, 2020

Рецензенти:
Проф. д-р Благоја Спирковски, ФОН – Универзитет, Скопје
Доц. д-р Катерина Аневска, ФОН – Универзитет, Скопје

Издавач:
Компјутерска обработка: Ристо Малчески и Самоил Малчески

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51-75(035)
51-7:33(035)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Основи на финансиска математика / Ристо Малчески, Самоил Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 238 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 235-236. - Регистар

ISBN 978-608-4904-76-2
1. Малчески, Самоил [автор]
а) Математика, актуарска - Прирачници б) Математика, финансиска - Прирачници
COBISS.MK-ID 111972618

Ниту еден дел на оваа книга не смее да се умножува, фотокопира, ниту на било кој друг начин да се репродуцира без писмено одобрување на издавачот или авторот.

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР 7

ГЛАВА I
КАМАТА И КАМАТНИ ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Поим за камата. Видови камати 9
2. Проста камата 12
3. Номинална и реална каматна стапка. Ефект на Фишер 17
4. Декурзивно пресметување на сложената камата 19
5. Антиципативно пресметување на сложената камата 25
6. Непрекинато вкаматување 32
7. Терминска сметка 33

ГЛАВА II
ПЕРИОДИЧНИ ВЛОГОВИ

1. Поим за периодичен влог 39
2. Еднакви поединечни вложувања кај кои вложувањето се совпаѓа со вкаматувањето 39
   2.1. Антиципативно вложување 40
   2.2. Декурзивно вложување 44
3. Еднакви поединечни вложувања кај кои вкаматувањето е почесто од вложувањето 49
   3.1. Антиципативно вложување 49
   3.2. Декурзивно вложување 51
4. Еднакви поединечни вложувања кај кои вложувањето е почесто од вкаматувањето 53
5. Периодични влогови кои се менуваат по принципот на аритметичка прогресија 57
   5.1. Антиципативно вложување 57
   5.2. Декурзивно вложување 59
6. Периодични влогови кои се менуваат по принципот на геометриска прогресија 62
   7.1. Антиципативно вложување 62
   7.2. Декурзивно вложување 64

ГЛАВА III
ДИСКОНТНИ ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Поим за дисконтирање. Видови дисконтирања 67
2. Математички дисконт 68
3. Банкарски дисконт 70

4. Примена на дисконтните пресметувања 75
5. Доходовност при инвестирањето во благајнички записи 80

ГЛАВА IV
ПЕРИОДИЧНИ РЕНТИ

1. Поим за рента. Видови ренти 85
2. Периодични еднакви ренти кај кои примањето на рентата се совпаѓа со вкаматувањето 85
2.1. Антиципативна рента 86
2.2. Декурзивна рента 89
3. Периодични еднакви ренти кај кои вкаматувањето е почесто од примањето 93
3.1. Декурзивна рента 93
3.2. Антиципативна рента 97
4. Периодични еднакви ренти кај кои примањето е почесто од вкаматувањето 101
4.1. Декурзивна рента 102
4.2. Антиципативна рента 103
5. Вечна рента 105
5.1. Антиципативна рента 105
5.2. Декурзивна рента 108
6. Периодични ренти кои се менуваат по принципот на аритметичка прогресија 110
6.1. Антиципативна рента 110
6.2. Декурзивна рента 112
7. Периодични ренти кои се менуваат по принципот на геометриска прогресија 114
7.1. Антиципативна рента 115
7.2. Декурзивна рента 116
8. Рента откупена со премии 118
9. Прекината рента 120
9.1. Антиципативна рента 120
9.2. Декурзивна рента 121

ГЛАВА V
АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ

1. Поим за заем. Видови заеми 123
2. Амортизација на заеми со еднакви отплати и декурзивно пресметување на каматата 126
3. Амортизација на заеми со еднакви ануитети и декурзивно пресметување на каматата 128
4. Амортизација на заеми со заокружени ануитети и декурзивно пресметување на каматата 132
5. Амортизација на заеми со еднакви ануитети и

декурзивно пресметување на каматата кај кои плаќањето е почесто од вкаматувањето 136
6. Амортизација на заеми со декурзивно пресметување на каматата кај кои ануитетите се менуваат по принципот на аритметичка прогресија 138
7. Амортизација на заеми со декурзивно пресметување на каматата кај кои ануитетите се менуваат по принципот на геометриска прогресија 141
8. Конверзија на заеми со декурзивно пресметување на каматата 143
9. Консолидација на заеми со декурзивно пресметување на каматата 147
10. Амортизација на заеми со еднакви ануитети и антиципативно пресметување на каматата 151
11. Амортизација на заеми со еднакви отплати и антиципативно пресметување на каматата 154
12. Амортизација на заеми со заокружени ануитети и антиципативно пресметување на каматата 156
13. Белешка за конверзија и консолидација на заеми со антиципативно пресметување на каматата 161
14. Специјални случаи на финансиски пресметувања при необлигациони заеми 163
14.1. Амортизација на заеми со ажио 163
14.1.1. Заеми со еднакви отплати 164
14.1.2. Заеми со еднакви ануитети во кои не е вклучено ажиото 165
14.1.3. Заеми со еднакви ануитети во кои е вклучено ажиото 166
14.2. Амортизациони планови на привилегирани заеми 169
14.3. Заем при кој се формира амортизационен фонд 173
14.3.1. Формирање на амортизационен фонд при периодично плаќање на каматата 173
14.3.2. Формирање на амортизационен фонд без периодично плаќање на каматата 178
15. Облигациони заеми 181
15.1. Каматни облигациони заеми 182
15.2. Амортизација на облигациони заеми со заокружени ануитети 185
15.3. Амортизација на лотариски заеми 188

ГЛАВА VI
ОБВРЗНИЦИ И АКЦИИ

1. Обврзници 195
1.1. Видови обврзници 195
1.2. Оценка на обврзниците. Премија и дисконт 197
1.3. Пресметување на берзанскиот курс на обврзниците 203

1.4. Пресметување на тековниот приход и приходот до валутата на обврзниците 205
1.5. Пресметување на показателот "дурација" на обврзниците 208
2. Акции 213
2.1. Видови акции 216
2.2. Пресметување на приходи од акции 219
2.3. Оценка на акциите 222

ДОДАТОК
АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. Аритметичка прогресија 227
2. Геометриска прогресија 230

Литература 235
Индекс 237

ПРЕДГОВОР КОН ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Во оваа книга се разработени стандардните содржини од основите на финансиската математика. Делови од книгата се изучуваат во предметот Математика за бизнис, кој е застапен на факултетите за економски науки кај нас и во светот. Меѓутоа, одделни содржини од оваа книга, иако детално не се изучуваат во ниту една наставна дисциплина на економските факултети, сепак се користат како готови резултати во предметот Финансиски менаџмент. Затоа сметаме дека за успешно усвојување на содржините од наставната дисциплина Финансиски менаџмент, најпрво е неопходно во целост да се усвојат содржините кои се разработени во оваа книга.

Книгата е поделена на шест глави и тоа:

- Камати и каматни пресметувања,
- Периодични влогови,
- Дисконтни пресметувања,
- Периодични ренти,
- Амортизација на заеми и
- Обврзници и акции,

содржи додаток за аритметичка и геометриска прогресија и на крајот се поместени користената литература и индексот на обработените поими.

Како што рековме, во книгава се разработени елементарни содржини од финансиската математика, кои пред сè се темелат на геометриската прогресија и нејзините својства. Меѓутоа, иако станува збор за елементарни содржини, сепак сите алгоритми се детално докажани, а посебно внимание е посветено на примената на истите. За разлика од поголемиот број ракописи со слична содржина, при разработката на материјалот скоро и да не се користени

финансиските таблици. Имено, сметаме дека со масовната примена на информатичката технологија, истите стануваат беспредметни и дека многу поважно е логички да се усвојат одделните методи и модели, со што читателот ќе се оспособи да ги препознава и да ги определува параметрите кои ги детерминираат, а потоа да ги применува користејќи ги придобивките на современата технологија.

Усвојувањето на која било математичка дисциплина не е можно без решавање на поголем број примери. Затоа во сите делови на книгата теориските разгледувања се пропратени со повеќе решени примери, ги има вкупно 143, како и 199 задачи за самостојна работа.

За оформувањето на оваа книга особена заслуга имаат рецензентите проф. д-р Благоја Спирковски и доц. д-р Катерина Аневска, кои со своите сугестии влијаеја на конечното оформување на ракописот, за што им искажуваме посебна благодарност.

Се надеваме дека книгава ќе им биде од корист како на студените, за кои пред се истата е наменета, така и на поширок круг читатели, кои секојдневно се среќаваат со материјата која е предмет на разработка.

И покрај вложениот напор, свесни сме за можните подобрувања во изложувањето на разработуваниот материјал и за евентуалните пропусти кои ги содржи оваа книга. Затоа сме однапред благодарни на секоја добронамерна сугестија и критика, која ќе овозможи подобрување на книгава.

Јануари, 2020 година Авторите

ГЛАВА I
КАМАТА И КАМАТНИ ПРЕСМЕТУВАЊА

1. ПОИМ ЗА КАМАТА. ВИДОВИ КАМАТИ

Камата (*интерес*) е паричната сума, која се плаќа за користење на туѓи парични средства (капитал).

Оваа дефиниција на каматата се однесува и на вложените парични средства, при што институцијата, во која тие се вложени за определен временски период, ги користи средствата и на вложувачите, на кои како надомест, им плаќа камата.

Каматата е основна категорија во пазарната економија. Од една страна, таа ја изразува профитабилноста на финансискиот капитал, а од друга таа е цена на позајмениот капитал (заемот). Имајќи ја предвид оваа двојна улога на каматата, може да се каже дека таа претставува своевиден праг на профитабилност на финансискиот капитал. Понатаму, каматата го условува и регулира движењето и прелевањето на финансискиот капитал од една во друга дејност. Имено, капиталот се одлева од производството и дејностите во кои профитот е помал од обичната камата, и се насочува во производството и дејностите кои носат поголем профит. Економска логика е да се земе заем само во случај кога инвестициониот проект, за чие реализирање се зема заемот, гарантира профит поголем од цената на капиталот, т.е. каматата. Затоа, каматата и каматниот процент (каматната стапка) играат улога на своевиден економски филтер за ефективноста на инвестиционите решенија.

Каматата е резултат на кредитен однос, во кој учествуваат две страни: кредитобарател (должник) и кредитор (доверител). Притоа кредиторот му позајмува финансиски средства на кредитобарателот, со што всушност му прави еден вид услуга. Затоа, каматата која ја плаќа кредитобарателот можеме да ја разгледуваме како цена на претходно споменатата услуга.

Големината на каматата, која кредитобарателот треба да ја плати на кредиторот, е определена со големината на позајмената сума K и договорената каматна стапка. Најчесто каматната стапка се изразува во проценти, т.е. во стоти делови од едно цело. Така на пример, каматна стапка од 7% означува дека за користење на 100 денари се плаќа 7 денари камата, или што е исто $100 \cdot \frac{7}{100} = 7$. Каматната стапка може да се определи за период од една година или за период помал од една година: полугодие (семестар), тримесечие (квартал), месец итн. Притоа во зависност од периодот за кој е определена каматната стапка разликуваме *годишно* и *внатрегодишно вкаматување*. Понатаму,

на висината на пазарната каматна стапка влијаат повеќе фактори, од кои позначајни се:

- Соодносот меѓу побарувачката и понудата на средствата на пазарот на пари.
- Стапката на инфлација, т.е. очекуваната инфлација за периодот на вкаматување.
- Периодот на користење на финансиските средства, при што колку периодот е подолг, толку е повисока каматната стапка. Меѓутоа, иако поретко, можна е и обратната зависност, која е позната како каматна инверзија, при која каматната стапка се намалува со наголемување на периодот на користење на средствата. Последното е случај кога се очекува дефлација (намалување на цените) или ревалоризација (наголемување на курсот на валутата).
- Степенот на ризик на проектот, за чија оценка кредиторот од кредитобарателот бара технички и економски план за динамиката и начинот на користење на средствата, како и предвидување на очекуваните резултати од реализацијата на проектот. Понатаму, степенот на ризик се оценува и врз база на гаранциите на кредитот (хипотека, жиранти и слично).
- Степенот на ликвидност, т.е. можноста во секој момент да се наплатат вложените парични средства или истите да се искористат без притоа да имаме загуба во супстанца. При висок степен на ликвидност, т.е. кога веројатноста за наплата на вложените парични средства е голема, имаме ниска камата и обратно.

Во економската теорија, но и во практиката каматите се делат според неколку критериуми, како што се:

- начинот на пресметување и плаќање на каматата, и
- според моментот на пресметување на каматата и плаќањето на каматата и основата на која се пресметува каматата.

Според начинот на пресметување на каматата, таа може да биде: *проста* и *сложена*.

Простата камата се добива кога основата за нејзиното пресметување (вложените или позајмените средства) не се менува. Тоа значи, дека пресметаната камата во секој каматен период (година) не се додава на основицата (вложените или позајмените средства), туку таа се префрла на одделна бескаматна сметка. Најчесто простата камата се пресметува при краткорочни финансиски операции.

Сложена камата или *камата на камата* е онаа камата, која, откако ќе се пресмета, се додава на основицата (вложените или позајмените сред-

ства) за понатамошно вкаматување. Според тоа, сложената камата после секој период на вкаматување се додава на капиталот, за да во следниот период се пресмета камата и на каматата. Сложената камата најчесто се применува при долгорочните финансиски операции.

Според моментот на пресметувањето и на плаќањето на каматата и основата на која се пресметува каматата, таа може да биде: *антиципативна* и *декурзивна.*

Антиципативната камата се пресметува и се плаќа на почетокот на секој период на вкаматување. Притоа, основата за пресметување на антиципативната камата е капиталот на крајот од периодот на вкаматување. Во натамошните разгледувања процентот кај антиципативното вкаматување ќе го означуваме со буквата p.

Декурзивната камата се пресметува и плаќа на крајот од периодот на вкаматување. Притоа, основата за пресметување на декурзивната камата е капиталот на почетокот од периодот на вкаматување. Во натамошните разгледувања процентот кај декурзивното вкаматување ќе го означуваме со буквата p.

Од досега изнесеното следува, дека при означувањето на каматната стапка, покрај тоа што треба да се назначи начинот на вкаматување (декурзивен или антиципативен), потребно е да се каже и за кој период се однесува дадената каматна стапка. Во практиката за означување на:

- годишното декурзивно вкаматување со $p\%$ годишна каматна стапка се користи ознаката $p\%\text{p.a.(d)}, \text{v.g}$,
- полугодишното декурзивно вкаматување со $p\%$ годишна каматна стапка се користи ознаката $p\%\text{p.a.(d)}, \text{v.s.}$,
- тримесечното декурзивно вкаматување со $p\%$ годишна каматна стапка се користи ознаката $p\%\text{p.a.(d)}, \text{v.q.}$,
- месечното декурзивно вкаматување со $p\%$ годишна каматна стапка се користи ознаката $p\%\text{p.a.(d)}, \text{v.m}$,
- годишното антиципативно вкаматување со п% годишна каматна стапка се користи ознаката $\text{п\%p.a.(a)}, \text{v.g}$,
- полугодишното антицапативно вкаматување со п% годишна каматна стапка се користи ознаката $\text{п\%p.a.(a)}, \text{v.s}$,
- тримесечното антиципативно вкаматување со п% годишна каматна стапка се користи ознаката $\text{п\%p.a.(a)}, \text{v.q}$ и

- месечното антиципативно вкаматување со п% годишна каматна стапка се користи ознаката $\text{п\%p.a.(a), v.m.}$.

Така, на пример, ознаката $5\%\text{p.a.(d), v.s.}$ значи дека вкаматувањето е полугодишно и декурзивно со 5% каматна стапка на годишно ниво, а ознаката $7\%\text{p.a.(d), v.q.}$ значи дека вкаматувањето е тримесечно и декурзивно со 7% каматна стапка на годишно ниво.

2. ПРОСТА КАМАТА

При пресметување на каматите, како кај простата, така и кај сложената камата се среќаваме со следниве четири елементи:

а) *основната сума* (*основен капитал*), која е предмет на вкаматување и која може да биде:
   - *почетен капитал*, т.е. вложената или позајмената сума пари K_0,
   - *зголемена сума* (*зголемен капитал*), која е еднаква на збирот на основната сума и пресметаната камата L, т.е $K = K_0 + L$, и
   - *намалена сума* (*намален капитал*), која е еднаква на разликата меѓу основната сума и пресметаната камата L, т.е. $K' = K_0 - L$;

b) *каматна стапка* (p или p), која е еднаква на каматата исплатена за 100 денари за единица каматен период,

v) *каматен период*, кој е еднаков на времето за кое се вложуваат или користат паричните средства, и

g) *камата*, која е еднаква на сумата L која кредитобарателот треба да ја плати на кредиторот, пресметана според договорената каматна стапка и договорениот каматен период.

Ќе ги изведеме формулите за наоѓање проста камата во случај кога каматниот период е изразен во години, месеци и денови. Нека имаме годишна каматна стапка од $p\%$. Бидејќи 1% од почетниот капитал K_0 е еднаков на $\frac{1}{100}K_0$, во случајот каматата за една година добиена со каматна стапка од $p\%$ ја пресметуваме според формулата

$$L = \frac{K_0 p}{100}. \qquad (1)$$

Понатаму, ако каматниот период изнесува n години, тогаш од дефиницијата за проста камата добиваме, дека каматата L_n е дадена со формулата:

$$L_n = \frac{K_0 pn}{100}. \tag{2}$$

Од дефиницијата на проста камата следува, дека при дадена годишна каматна стапка од $p\%$, ако вкаматуваме месечно со $\frac{p}{12}\%$, тогаш после дванаесет вкаматувања ќе имаме ист финансиски ефект како да сме вкаматиле еднаш годишно со каматна стапка од $p\%$. Според тоа, во случај на месечно вкаматување, при каматен период од m месеци простата камата можеме да ја пресметаме според формулата

$$L_m = \frac{K_0 \frac{p}{12} m}{100} = \frac{K_0 pm}{12 \cdot 100}. \tag{3}$$

Со аналогни размислувања може да се докаже, дека во случај на дневно вкаматување, земајќи дека годината има 360 денови, при каматен период од d денови простата камата можеме да ја пресметаме според формулата

$$L_d = \frac{K_0 pd}{360 \cdot 100}. \tag{4}$$

Пример 1. Лицето A вложило во банка сума од 10000 денари со 9% проста годишна каматна стапка. Колку пари ќе поседува после 9 месеци?

Решение. Во случајов имаме $K_0 = 10000$ денари, $p = 9\%$, $m = 9$ месеци и ако ја искористиме формулата (3) добиваме дека каматата која лицето A ќе ја добие после 9 месеци е

$$L_9 = \frac{10000 \cdot 9 \cdot 9}{12 \cdot 100} = 675 \text{ денари.}$$

Според тоа, бараната сума која е еднаква на зголемениот капитал е еднаква на

$$K = K_0 + L_9 = 10000 + 675 = 10675 \text{ денари. } \blacksquare$$

Пример 2. На 1.12.2003 година лицето A вложило во банката извесна сума пари со 12% проста годишна каматна стапка, која на 14.01.2004 година му донесла камата од 900 денари. Колку пари вложило лицето A?

Решение. Во случајов имаме $K_0 = ?$, $p = 12\%$, $d = 45$ денови и $L_{45} = 900$ денари. Ако ја искористиме формулата (4) добиваме

$$900 = \frac{K_0 \cdot 12 \cdot 45}{360 \cdot 100}$$

од каде што наоѓаме

$$K_0 = \frac{900 \cdot 360 \cdot 100}{12 \cdot 45} = 60000 \text{ денари. } \blacksquare$$

Пример 3. Во банката службеникот ви соопштил дека за заем од 36000 денари, кој го добивате со проста каматна стапка на 1.06.2004 година, а треба да го вратите на 14.08.2004 година, треба да платите камата 945 денари. Колкава е каматната стапка за овој заем?

Решение. Во случајов имаме $K_0 = 36000$ денари, $d = 75$ денови, $L_{75} = 945$ денари и треба да се најде процентот p. Ако ја искористиме формулата (4) имаме:

$$975 = \frac{36000 \cdot 75 p}{360 \cdot 100}$$

од каде што наоѓаме

$$p = \frac{975}{75} = 13\% \,. \blacksquare$$

Пример 4. Во банка сте вложиле 32000 денари, кои се вкаматуваат со 15% проста годишна каматна стапка. После колку денови сумата ќе се зголеми на 32480 денари?

Решение. Во случајов имаме $K_0 = 32000$ денари, $K = 32480$ денари, $p = 15\%$ и се бара d. Од условот на задачата добиваме

$$L = K - K_0 = 32480 - 32000 = 480 \text{ денари}$$

и ако замениме во формулата (4) добиваме

$$480 = \frac{32000 \cdot 15 d}{360 \cdot 100} \,,$$

од каде што наоѓаме

$$d = \frac{480 \cdot 360 \cdot 100}{32000 \cdot 15} = 36 \text{ денови.} \blacksquare$$

Пример 5. Склучен е договор за тримесечен кредит со 20% проста годишна антиципативна каматна стапка. Откако банката ја задржала каматата на кредитобарателот му исплатила 33440 денари. Колку денари е каматата и на која сума е склучен договорот за кредит?

Решение. Во случајов имаме $p = 20\%$, $m = 3$ месеци и е исплатена сума $K' = 33440$ денари, која се добива кога од основната сума K_0 се одземе камата L. Според тоа, $K' = K_0 - L$ и ако ја искористиме формулата (3) наоѓаме

$$K' = K_0 - L_3 = K_0 - \frac{K_0 p m}{12 \cdot 100} \,,$$

т.е.

$$33440 = K_0 - \frac{K_0 \cdot 3 \cdot 20}{12 \cdot 100}$$

од каде наоѓаме

$$K_0 = \frac{33440 \cdot 12 \cdot 100}{12 \cdot 100 - 3 \cdot 20} = 35200 \text{ денари.}$$

Конечно, каматата на заемот изнесува

$$L = K_0 - K' = 35200 - 33440 = 1760 \text{ денари. } \blacksquare$$

Коментар. Забележуваме дека во формулата (4) е земено дека во текот на една година имаме 360 денови, што е резултат на договор секој месец да се смета дека има 30 денови, начин на кој се утврдува каматниот период во Германија. Оттука, следува дека кварталот има 90 денови и семестарот 180 денови. Поинаква е праксата во Франција, каде бројот на деновите во одделните месеци е фактичиот (календарски) број, а годината се зема дека има 360 денови, што е случај и во претходно разгледаните примери. Меѓутоа, во Велика Британија и во Белгија бројот на деновите во месецот, кварталот, семестарот и годината е фактичкиот (календарски) број.

Во многу случаи, како што се неорочените влогови, тековните сметки и слично, заради постојаното вложување и подигање на определени суми капиталот кој треба да се вкаматува е променлива величина. Во овие случаи каматата се пресметува со помош на таканаречените каматни броеви и каматен множител. Имено, при секоја промена на капиталот се определува каматниот број, кој се однесува на времето во кое капиталот останал непроменет. Имено, за каматните броеви k_b ја имаме формулата

$$k_b = \frac{Kd}{100} \tag{5}$$

каде d е бројот на деновите во кои соодветниот капитал K останува непроменет. Понатаму, кога треба да се изврши вкаматување, се собираат најдените каматни броеви и така добиената сума се множи со каматниот множител кој се пресметува според формулата

$$k_m = \frac{p}{360}, \tag{6}$$

со што се добива каматата за разгледуваниот период, т.е.

$$L = k_m \sum k_b . \tag{7}$$

Како резултат од вака реализираната пресметка, се добива простата камата за секој период во кој капиталот останал непроменет и вака пресметаните прости камати се сумираат во моментот кога треба да се изврши вкаматувањето (провери!).

Пример 6. На 1.10.2004 година господинот *М* отворил тековна сметка, на која му е префрлена плата во износ од 33000 денари. Во текот на месецот на тековната сметка се извршени следниве трансакции:

- на 5.10.2004 година *М* подигнал 5000 ден,
- на 13.10.2004 година подигнал 15000 ден,

- на 17.10.2004 година на тековната му е префрлен хонорар од 12500 ден,
- на 21.10.2004 година подигнал 15000 ден, и
- на 27.10.2004 година подигнал 7500 ден.

Во банката на тековните се врши месечно вкаматување со каматна стапка од 6%. Со колку средства располага господинот *M* на 30.10.2004 година.

Решение. Месецот ќе го поделиме на периоди во кои капиталот останува непроменет:

- од 1.10 до 5.10, т.е. за 5 денови, капиталот е 33000 денари, па каматниот број е $k_{b_1} = \frac{Kd}{100} = \frac{33000 \cdot 5}{100} = 1650$,
- од 5.10 до 13.10, т.е. за 8 денови, капиталот е 28000 денари, па каматниот број е $k_{b_2} = \frac{Kd}{100} = \frac{28000 \cdot 8}{100} = 2240$,
- од 13.10 до 17.10, т.е. за 4 денови, капиталот е 13000 денари, па каматниот број е $k_{b_3} = \frac{Kd}{100} = \frac{13000 \cdot 4}{100} = 520$,
- од 17.10 до 21.10, т.е. за 4 денови, капиталот е 25500 денари, па каматниот број е $k_{b_4} = \frac{Kd}{100} = \frac{25500 \cdot 4}{100} = 1020$,
- од 21.10 до 27.10, т.е. за 6 денови, капиталот е 10500 денари, па каматниот број е $k_{b_5} = \frac{Kd}{100} = \frac{10500 \cdot 6}{100} = 630$ и
- од 27.10 до 30.10, т.е. за 3 денови, капиталот е 3000 денари, па каматниот број е $k_{b_6} = \frac{Kd}{100} = \frac{3000 \cdot 3}{100} = 90$.

Понатаму, $\sum_{i=1}^{6} k_{b_i} = 6150$ и како $k_m = \frac{p}{360} = \frac{6}{360}$, ако ја искористиме формулата (7) за каматата во месец октомври добиваме

$$L = k_m \sum k_b = \frac{6}{360} \cdot 6150 = 102,5 .$$

Конечно, господинот *M* на крајот на месец октомври ќе располага со

$$3000 + 102,5 = 3102,5 \text{ денари. } \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

1. Лицето *A* вложило во банка сума од 25000 денари со 8% проста годишна каматна стапка. Колку пари ќе поседува после 7 месеци?
2. На 1.11.2004 година лицето *A* вложило во банката извесна сума пари со 9% проста годишна каматна стапка, која на 14.12.2004 година му донесла камата од 600 денари. Колку пари вложило лицето *A*?
3. Во рекламна понуда за доделување кредити банката соопштува дека за заем од 144000 денари, кој го добивате со проста каматна стапка на 1.01.2004 година, а

треба да го вратите на 31.03.2004 година, треба да платите камата 3780 денари. Колкава е каматната стапка за овој заем?

4. Во банка сте вложиле 60000 денари, кои се вкаматуваат со 12% проста годишна каматна стапка. После колку денови сумата ќе се зголеми на 75000 денари?

5. Склучен е договор за тримесечен кредит со 11% проста годишна антиципативна каматна стапка. Откако банката ја задржала каматата на кредитобарателот му исплатила 55000 денари. Колку денари е каматата и на која сума е склучен договорот за кредит?

6. На 1.1.2005 година на банкарската сметка на трговското друштво *X* имало 556000 денари. Во текот на месец јануари на сметката се извршени следниве трансакции:
   - на 5.1.2005 година е извршено плаќање од 150000 денари и е добиен прилив од 75000 денари,
   - на 11.1.2005 година е добиен прилив од 45000 денари,
   - на 19.1.2005 година е извршено плаќање од 214000 денари,
   - на 25.1.2005 година е добиен прилив од 125000 денари и е извршено плаќање од 136500 денари,
   - на 28.1.2005 година е добиен прилив од 12500 денари и
   - на 31.1.2005 година е добиен прилив од 47300 денари.

   Во банката на жиро сметките се врши месечно вкаматување со каматна стапка од 4%. Со колку средства располага трговското друштво *X* на 31.1.2005 год.

3. НОМИНАЛНА И РЕАЛНА КАМАТНА СТАПКА. ЕФЕКТ НА ФИШЕР

Зголемувањето на капиталот како резултат од неговото вкаматување не е секогаш доволно атрактивно за сопствениците на слободни парични средства. Имено, постојат периоди, кога каматните стапки се релативно високи, но сепак капиталот реално не нараснува. Последното е резултат на разликата меѓу декларираната (номиналната) и реалната каматна стапка.

Како што е познато, во пазарната економија секоја стока и услуга е сврзана со поимот цена, т.е. со парична оценка на стоката. Притоа, цените во пазарната економија се динамички елемент на рамнотежата на пазарот. Постојаната тенденција на зголемување на цените, со што имаме обезвреднување на паричната единица во економијата е позната како *инфлација*. Во економската теорија се разработени методи и постапки за борба против инфлацијата и нејзино сведување во нормални (допустливи) граници. Во оваа насока е и врската меѓу каматните стапки и стапката на инфлација. Имено, наједноставно кажано, реалното значење на каматата е да се зачува куповната моќ на вложениот капитал, па затоа природно е номиналната каматна стапка за неколку проценти да биде повисока од стапката на инфлација во разгледуваниот период.

Номиналната каматна стапка е еднаква на зголемувањето на сто парични единици дадени на заем во еден каматен период. Според тоа, номиналната каматна стапка го мери зголемувањето на почетниот капитал во парични единици (денари, евра, долари итн.).

Реалната каматна стапка се добива од номиналната каматана стапка, ако се земе предвид инфлацијата во соодветниот каматен период, т.е. намалувањето на куповната моќ на паричната единица. Според тоа, реалната каматна стапка го покажува реалното зголемување (намалување) на куповната моќ на почетниот капитал зголемен за номиналната каматна стапка.

Може да се помисли дека реалната каматна стапка е еднаква на разликата меѓу номиналната каматна стапка и стапката на инфлација. Меѓутоа, американскиот научник Фишер докажал, дека реалната каматна стапка не е еднаква на разликата меѓу номиналната каматна стапка и стапката на инфлација, туку дека оваа зависност е посложена, т.е. дека се јавува таканаречениот *ефект на Фишер*.

Во натамошните разгледувања ќе ја изведеме формулата на Фишер, која ја дава врската меѓу номиналната и реалната каматна стапка на годишно ниво. За таа цел ги воведуваме ознаките:

K - расположиви парични средства на почетокот на годината,
p - годишна номинална каматна стапка, изразена во проценти,
i - годишна стапка на инфлација, изразена во проценти,
g - годишна реална каматна стапка, изразена во проценти, и
c - ниво на цените на почетокот на годината.

Куповната сила на парите со кои располагаме на почетокот на годината може да се изрази со количеството стоки кое можеме да го купиме со овие пари, т.е. $q = \frac{K}{c}$. Понатаму, на крајот од годината имаме парични средства од $K' = K(1+\frac{p}{100})$ и покачување на цените за $i\%$, т.е. нивото на цените е $c' = c(1+\frac{i}{100})$, што значи дека можеме да купиме количество стоки

$$Q = \frac{K'}{c'} = \frac{K(1+\frac{p}{100})}{c(1+\frac{i}{100})} = \frac{K(100+p)}{c(100+i)}.$$

Како што рековме, реалната камата ја покажува реалната промена на куповната моќ на почетниот капитал зголемен за номиналната каматна стапка, која во случајот може да се добие како количник меѓу апсолутната промена на количеството стоки кое може да се купи на почетокот и на крајот од годината и количеството стоки кое може да се купи на почетокот на годината. Според тоа,

$$\frac{g}{100}=\frac{Q-q}{q}=\frac{\frac{K(100+p)}{c(100+i)}-\frac{K}{c}}{\frac{K}{c}}=\frac{\frac{K}{c}(\frac{100+p}{100+i}-1)}{\frac{K}{c}}=\frac{100+p}{100+i}-1=\frac{p-i}{100+i}\,. \qquad (1)$$

Формулата на Фишер (1) покажува, дека реалната каматна стапка е помала од разликата на номиналната каматна стапка и инфлацијата.

Пример 7. Во 2004 година, во земјата *X*, инфлацијата изнесувала $i=3\%$, а годишната каматна стапка на неорочените штедни влогови во деловните бакни изнесувала $p=4,2\%$. Ако ја искористиме формулата на Фишер, за реалната каматна стапка добиваме

$$\frac{g}{100}=\frac{p-i}{100+i}=\frac{4,2-3}{100+3}=0,01165,$$

што значи дека реалната каматна стапка е $g=1,165\%$. ■

ЗАДАЧИ

7. Во 2003 година, во земјата *X*, инфлацијата изнесувала $i=12\%$, а годишната каматна стапка на орочените штедни влогови во деловните бакни изнесувала $p=15,2\%$. Најдете ја реалната каматна стапка на орочените штедни влогови!

8. Во 2001 година, во земјата *X*, инфлацијата изнесувала $i=7\%$, а годишната каматна стапка на неорочените штедни влогови во деловните бакни изнесувала $p=8,2\%$, а на орочените штедни влогови изнесувала $p^*=10,8\%$. Најдете ги реалните каматни стапки на неорочените и орочените штедни влогови!

4. ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА СЛОЖЕНАТА КАМАТА

Како што веќе рековме, сложена камата или камата на камата е онаа камата, која, откако ќе се пресмета, се додава на основата (вложените или позајмените средства) за понатамошно вкаматување. Во овој дел ќе се осврнеме на декурзивното пресметување на сложената камата.

Нека имаме камата $p\%$. Почетниот капитал K_0, при декурзивното вкаматување после првиот период ќе се наголеми за $\frac{K_0 p}{100}$ и ќе се добие капитал

$$K_1=K_0+\frac{K_0 p}{100}=K_0(1+\frac{p}{100})\,.$$

Сега каматата треба да ја пресметуваме на капиталот K_1 и овој капитал после вториот период ќе изнесува

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1(1+\frac{p}{100}) = K_0(1+\frac{p}{100})^2 .$$

Забележуваме дека во случајот капиталот K_1 е вториот член на геометриската прогресија со прв член K_0 и количник $1+\frac{p}{100}$, а K_2 е нејзиниот трет член. Понатаму, од дефиницијата на сложениот интерес следува дека при декурзивното пресметување капиталот K_n кој се добива на крајот од n-от период е $(n+1)-$от член на геометриската прогресија со прв член K_0 и количник $1+\frac{p}{100}$, па затоа

$$K_n = K_0(1+\frac{p}{100})^n . \tag{1}$$

Притоа изразот $r = 1+\frac{p}{100}$ го нарекуваме *декурзивен каматен* (*интересен*) *фактор* и со негова помош формулата (1) можеме да ја запишеме во видот

$$K_n = K_0 r^n . \tag{2}$$

Вкаматувањето може да се врши не само на крајот на една година, туку и на крајот на $\frac{1}{m}$ години, каде m е природен број. Притоа, за период од $\frac{1}{m}$ години процентот се добива кога годишниот процент ќе се подели на бројот на периодите и тој ќе изнесува $\frac{p}{m}$. Понатаму, аналогно како и при годишното вкаматување за n периоди со должина $\frac{1}{m}$ години при декурзивното вкаматување ја добиваме формулата

$$K_n = K_0(1+\frac{\frac{p}{m}}{100})^n . \tag{3}$$

Пример 8. На која сума ќе нараснат 51400 ден. за 8 год. со $6\%\text{p.a.(d)}$, ако вкаматувањето е

а) годишно, б) тримесечно.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $K_0 = 51400,\ p = 6\%\text{p.a.(d)}$ и $n = 8$. Ако ја искористиме формулата (1) добиваме

$$K_8 = K_0(1+\frac{p}{100})^n = 51400\cdot(1+\frac{6}{100})^8 = 51400\cdot 1{,}06^8 = 81923{,}791 \text{ ден.}$$

б) Бидејќи во една година имаме 4 тримесечја, во период од 8 години вкупно имаме $8\cdot 4 = 32$ тримесечја. Значи, во случајов

$$K_0 = 51400,\ p = 6\%\text{p.a.(d)},\text{v.q.},\ m = 4 \text{ и } n = 32 .$$

Ако ја искористиме формулата (3) добиваме

$$K_{32} = 51400 \cdot (1 + \frac{\frac{6}{4}}{100})^{32} = 51400 \cdot 1,015^{32} = 82770,670 \text{ ден.} \blacksquare$$

Забелешка. За поедноставно пресметување на сложена камата од одделни автори се изработени таблици за сложено вкаматување. Притоа во првата таблица, која е означена со $I^n_{p\%}$, за даден процент $p\%\text{p.a.(d)}$ и n временски периоди всушност е пресметан $n-$от степен r^n на декурзивниот фактор r.

Пример 9. За колку години сумата 35000 денари со $4\%\text{p.a.(d)}\,\text{v.g.}$ ќе нарасне на 42000.

Решение. Од условот на задачата имаме $r = 1 + \frac{4}{100} = 1,04$ и ако ја користиме формулата (2) добиваме

$$42000 = 35000 \cdot 1,04^n \text{, т.е. } 1,04^n = \frac{42000}{35000} = 1,2 .$$

Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и добиваме

$$n \log 1,04 = \log 1,2 \text{ т.е. } n = \frac{\log 1,2}{\log 1,04} = \frac{0,079181246}{0,017033339} \approx 4,65 \text{ години.} \blacksquare$$

Пример 10. Со која годишна декурзивна интересна стапка p сумата од 150000 денари за 15 години ќе нарасне на 250000 денари ако вкаматувањето е полугодишно?

Решение. Бидејќи вкаматувањето е полугодишно за 15 години ќе имаме $n = 15 \cdot 2 = 30$ периоди. Дадени се почетната и крајната сума, бројот на периоди на вкаматување и треба да го определеиме декурзивниот фактор r. Ако ја искористиме формулата (2) добиваме

$$250000 = 150000 r^{30} \text{ т.е. } r^{30} = \frac{250000}{150000} = 1,666666667 .$$

Од последната равенка добиваме

$$r = \sqrt[30]{1,666666667} = 1,017173315 .$$

Бидејќи вкаматувањето е полугодишно имаме $m = 2$ и ако ја користиме формулата $r = 1 + \frac{\frac{p}{m}}{100}$ добиваме $1,017173315 = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{100}$, т.е.

$$\frac{p}{2} = (1,017173315 - 1) \cdot 100 = 1,7173315$$

односно

$$p = 3,43466307\%\text{p.a.(d)} . \blacksquare$$

Забелешка. Во претходните разгледувања рековме дека вкаматувањето може да биде за период од една година, но и за период помал од една година. Како што веќе рековме, во случај кога каматната стапка е дадена за период од една година велиме дека е зададена номиналната каматна стапка. Во случај кога периодот на вкаматување е помал од една година во формулата (1) наместо каматната стапка p ја искористивме каматната стапка $\frac{p}{m}$ и ја добивме формулата (3). Во овој случај велиме дека станува збор за *релативна каматна стапка*, која се добива кога номиналната каматна стапка p се подели со бројот на вкаматувања за една година m.

Во практиката се среќава и таканаречената *ефективна каматна стапка*, која е еднаква на каматната стапка која се остварува при дадена номинална каматна стапка со даден период на вкаматување. Јасно, ако временскиот период на вкаматување е ист со периодот за кој е позната номиналната каматна стапка, тогаш номиналната, ефективната и релативната каматна стапка се меѓусебно еднакви. Меѓутоа, ако временскиот период на вкаматување не е еднаков со периодот за кој е позната номиналната каматна стапка, тогаш како што видовме декурзивните номинална и релативна каматна стапка не се еднакви меѓу себе. Се разбира, нас не интересира каква е врската меѓу номиналната и ефективната декурзивна каматна стапка.

Нека со $p_n = p$ ја означиме номиналната декурзивна годишна каматна стапка и нека имаме m вкаматувања во текот на една година. Тогаш, релативната декурзивна каматна стапка е $p_r = \frac{p}{m}$. Ако со p_e ја означиме ефективната декурзивна каматна стапка на годишно ниво, тогаш очигледно

$$K_0(1+\frac{\frac{p}{m}}{100})^m = K_0(1+\frac{p_e}{100}),$$

од каде наоѓаме

$$p_e = 100\cdot[(1+\frac{\frac{p}{m}}{100})^m - 1]. \qquad (4)$$

Пример 11. Разликата меѓу номиналната и ефективната декурзивна каматна стапка во зависност од бројот вкаматувања, при фиксирана номинална декурзивна каматна стапка од $p = 8\%\,\text{p.a.(d)}$ може да се види во следнава табела:

Вкаматување	**Номинална**	**Релативна**	**Ефективна**
Годишно	8%	8%	8%
Полугодишно	8%	4%	8,16%
Тримесечно	8%	2%	8,243216%
Месечно	8%	$\frac{2}{3}\% \approx 0,666667\%$	8,299951%

што значи дека со зголемувањето на бројот на периодите на вкаматувања, при иста номинална каматна стапка ефективната каматна стапка се зголемува, па затоа при одредувањето на номиналната каматна стапка пожелно е одделно да се пресмета и ефективната каматна стапка, бидејќи таа е онаа која го дава крајниот резултат. ■

Како што видовме примената на релативната декурзивна каматна стапка доведува до ефективна декурзивна каматна стапка која е поголема од номиналната декурзивна каматна стапка. За да се избегне оваа недоследност ќе ја користиме таканаречената *конформна декурзивна каматна стапка*, која всушност е модификација на релативната декурзивна каматна стапка и со нејзината примена, во случај кога периодот на вкаматување е помал од една година, се добива ист интерес како и при примената на номиналната декурзивна каматна стапка.

Нека со $p_n = p$ ја означиме номиналната декурзивна годишна каматна стапка и нека имаме m вкаматувања во текот на една година. Ако со p_k ја означиме конформната декурзивна каматна стапка, тогаш од нејзината дефиниција следува дека

$$K_0(1+\frac{p_k}{100})^m = K_0(1+\frac{p}{100}),$$

односно

$$(1+\frac{p_k}{100})^m = 1+\frac{p}{100}.$$

Ако во последната равенка коренуваме со m, добиваме

$$1+\frac{p_k}{100} = \sqrt[m]{1+\frac{p}{100}},$$

од каде наоѓаме

$$p_k = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1). \qquad (5)$$

Пример 12. Ако номиналната каматна стапка е $p = 8\,\text{p.a.(d)}$, тогаш користејќи ја формулата (5) за конформната каматна стапка при полугодишно вкаматување добиваме

$$p_k = 100(\sqrt[2]{1+\frac{8}{100}}-1) = 3,923048;$$

а при тримесечно вкаматување добиваме

$$p_k = 100(\sqrt[4]{1+\frac{8}{100}}-1) = 1,942655. \blacksquare$$

Пример 13. На која сума ќе нараснат 2000 денари за време од 10 години со $p = 8\%\,\text{p.a.(d)}$ интерес на интерес, ако вкаматувањето е:

а) годишно,
b) тримесечно со примена на релативната каматна стапка и
v) тримесечно со примена на конформната каматна стапка.

Решение. а) Ако ја искористиме формулата (1) добиваме

$$K = 2000 \cdot (1 + \frac{8}{100})^{10} = 4317,85 \text{ денари.}$$

б) Имаме $m = 4$ и $n = 4 \cdot 10 = 40$ и ако замениме во формулата (3) добиваме

$$K = 2000 \cdot (1 + \frac{\frac{8}{4}}{100})^{40} = 4416,08 \text{ денари.}$$

в) Според пример 12 имаме дека во дадениот случај конформната стапка е $p_k = 1,942655$ и ако ја искористиме релацијата (1), при што $n = 4 \cdot 10 = 40$ добиваме

$$K = 2000 \cdot (1 + \frac{1,942655}{100})^{40} = 4317,85 \text{ денари. } \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

9. Со која годишна каматна стапка треба да се вложи сума од 14400 денари за да истата после 8 години и 9 месеци нарасне на 21600 денари, ако вкаматувањето е декурзивно и тримесечно?
10. Во банка се вложени 30000 денари, а по 8 години се подигнати 40000 денари. Со која сума ќе се располага 15 години од денот на вложувањето, ако банката пресметува $8\%\text{p.a.(d)}$ годишна сложена камата, а вкаматувањето е шестмесечно?
11. Сума од 300000 денари е вложена со $8\%\text{p.a.(d)}$ годишна сложена камата, а потоа уште неколку години со $6,5\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата. После колку години, сметајќи од промената на каматната стапка, ќе се добијат 500000 денари? Вкаматувањето е семестрално.
12. Во штедилница се вложени 3000 денари, а по 5 години се вложени уште 2000 денари. Кога крајната вредност на овие вложувања заедно со добиениот интерес ќе биде 12000 денари, ако вкаматувањето е годишно со $4,5\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата?
13. Пред 20 години од денес се вложени 2000 денари, а пред 8 години уште 10000 денари. Со која сума ќе располагаме денес, ако вложувањата се $8\%\text{p.a.(d)}$ годишна сложена камата и тримесечно вкаматување? Уште колку години треба да биде вложена добиената сума, од денес, со $5\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата и годишно вкаматување за да истата нарасне на 200000 денари?
14. Со која годишна каматна стапка било која сума заедно со интересот за време од 15 години и 6 месеци ќе се зголеми 3,5 пати? Вкаматувањето е полугодишно и декурзивно.

15. Едно лице вложило 10000 денари со $5\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата и 12500 денари со $4{,}5\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата. За колку години при годишно вкаматување двете суми ќе бидат еднакви?
16. Пред 25 години се вложени две различни суми: 100000 и 120000 денари. Првата сума е вложена со $6\%\text{p.a.(d)}$ годишна сложена камата. Со која годишна декурзивна каматна стапка треба да се вложи втората сума ако се знае дека до денес и двете суми се изедначиле? Вкаматувањето е тримесечно.
17. Во банка се вложени 20000 денари за време 5 години и 3 месеци со $2\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата, а во наредните 3 години и 4 месеци со стапка $3\%\text{p.a.(d)}$. Колкав е наголемениот капитал, ако вкаматувањето е годишно?
18. Пред 8 години се вложени 20000 денари, а пред 6 години уште 15000 денари со $4\%\text{p.a.(d)}$ сложена камата. Уште колку денари треба да се вложат денес, за да по 10 години од денес располагаме со 80000 денари? Вкаматувањето е годишно.

5. АНТИЦИПАТИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА СЛОЖЕНА КАМАТА

Претходно антиципативното пресметување на каматата го дефинираме како пресметување на каматата на почетокот на временскиот период. Ќе ја објасниме разликата меѓу декурзивното и антиципативното пресметување на каматата. Нека претпоставиме дека банката одобрила заем со $\text{п}\%\text{p.a.(a)}$, кој треба да се врати за една година и со K да ја означиме сумата која ќе ја прими клиентот после антиципативното пресметување на каматата, а со K_1 сумата која треба да ја врати на крајот од годината. Од дефиницијата на антиципативното пресметување на каматата следува дека сумата K се добива кога од сумата K_1 ќе ја одземеме каматата, т.е. ќе го одземеме износот $\frac{K_1\text{п}}{100}$. Значи,

$$K = K_1 - \frac{K_1\text{п}}{100} = K_1(1-\frac{\text{п}}{100}) = K_1\frac{100-\text{п}}{100}, \qquad (1)$$

од што следува

$$K_1 = K\frac{100}{100-\text{п}} = K(1+\frac{\text{п}}{100-\text{п}}). \qquad (2)$$

Величината $\rho = \frac{100}{100-\text{п}}$, ја нарекуваме *антиципативен каматен фактор*.

Пример 14. Банката на клиентот му одобрила едногодишен заем со $5\%\text{p.a.(a)}$ и му исплатила 95000 денари. Колку денари треба да врати клиентот на крајот од годината? Вкаматувањето е годишно.

Решение. Бидејќи вкаматувањето е на годишно ниво со $5\%\text{p.a.(a)}$ и се исплатени $K = 95000$ денари, за да ја пресметаме сумата K_1 која клиентот треба да ја врати ќе ја искористиме формулата (2). Имаме,

$$K_1 = K\frac{100}{100-\text{п}} = 95000 \cdot \frac{100}{100-5} = 100000 \text{ денари.} \blacksquare$$

Често пати, сме во ситуација да имаме две или повеќе понуди за добивање заем. Притоа, ако едната каматна стапка е дадена декурзивно, а другата антиципативно, тогаш за да донесеме одлука која понуда ќе ја прифатиме потребно е да ги изразиме и двете каматни стапки како декурзивни или како антиципативни. Притоа, за нас е важно на иста сума за една година да платиме иста камата, т.е. да вратиме ист износ K_1. Затоа ако имаме каматна стапка $\text{п}\%\text{p.a.(a)}$ и каматна стапка $p\%\text{p.a.(d)}$, тогаш за сума од K денари ќе биде вратена сума $K_1 = K\frac{100}{100-\text{п}}$ и сума $K_1 = K(1+\frac{p}{100})$, соодветно. Според тоа, $K\frac{100}{100-\text{п}} = K(1+\frac{p}{100})$ од што следува $\frac{100}{100-\text{п}} = 1+\frac{p}{100}$, односно $\frac{\text{п}}{100-\text{п}} = \frac{p}{100}$. Конечно, ако ни е позната каматната стапка $\text{п}\%\text{p.a.(a)}$, тогаш соодветната декурзивна каматна стапка можеме да ја пресметаме според формулата

$$p = \frac{100\text{п}}{100-\text{п}}, \tag{3}$$

а ако ни е дадена каматната стапка $p\%\text{p.a.(d)}$, тогаш соодветната антиципативна каматна стапка можеме да ја пресметаме според формулата

$$\text{п} = \frac{100p}{100+p}. \tag{4}$$

Пример 15. Ист износ на кредит може да се користи од две банки. Банката A дава кредит со камата $6\%\text{p.a.(d)}$, а банката $Б$ со камата $5{,}5\%\text{p.a.(a)}$. Кај која банка условите се поповолни ако рокот за враќање на кредитот е една година.

Решение. Ако ја искористиме формулата (3), ќе ја претвориме дадената антиципативна каматна стапка во декурзивна. Имаме

$$p = \frac{100\text{п}}{100-\text{п}} = \frac{100\cdot 5{,}5}{100-5{,}5} = 5{,}82010582\,.$$

Според тоа, кредитот што го дава банката $Б$ е со $5{,}82010582\%\text{p.a.(d)}$ и тој е поповолен од кредитот што го дава банката A каде каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$. $\blacksquare$

Забелешка. Во пример 15 можевме, користејќи ја формулата (4) каматната стапка на банката A од $6\%\text{p.a.(d)}$ да ја претвориме во антиципативна каматна стапка и со тоа да го добиеме одговорот на поставеното прашање. Обиди се истото самостојно да го направиш.

Како што видовме, ако имаме капитал K кој се оплодува со каматна стапка $\text{п}\%\text{р.а.(а)}$, тогаш на крајот од првиот период имаме капитал $K_1 = K(1+\frac{\text{п}}{100-\text{п}})$. Понатаму, на крајот од вториот период ќе имаме капитал

$$K_2 = K_1(1+\tfrac{\text{п}}{100-\text{п}}) = K(1+\tfrac{\text{п}}{100-\text{п}})^2.$$

Забележуваме дека, во случајот, капиталот K_1 е вториот член на геометриската прогресија со прв член K и количник $1+\frac{\text{п}}{100-\text{п}}$, а K_2 е нејзиниот трет член. Понатаму, од дефиницијата на сложената камата следува дека при антиципативното пресметување капиталот K_n кој се добива на крајот од n-от период е $(n+1)-$от член на геометриската прогресија со прв член K и количник $1+\frac{\text{п}}{100-\text{п}}$, па затоа

$$K_n = K(1+\tfrac{\text{п}}{100-\text{п}})^n. \tag{5}$$

Притоа ако го искористиме антиципативниот каматен фактор

$$\rho = \frac{100}{100-\text{п}} = 1+\frac{\text{п}}{100-\text{п}},$$

тогаш формулата (5) можеме да ја запишеме во видот

$$K_n = K\rho^n, \tag{6}$$

кој е аналоген на видот на формулата при декурзивното вкаматување.

Како и декурзивното, така и антиципативното вкаматување може да се врши и на почетокот на $\frac{1}{m}$ години, каде m е природен број. Притоа, за период од $\frac{1}{m}$ години процентот се добива кога годишниот процент ќе се подели на бројот на периодите и тој ќе изнесува $\frac{\text{п}}{m}$. Понатаму, аналогно како и при годишното вкаматување за n периоди со должина $\frac{1}{m}$ години при антиципативното вкаматување ја добиваме формулата

$$K_n = K(1+\frac{\frac{\text{п}}{m}}{100-\frac{\text{п}}{m}})^n. \tag{7}$$

Пример 16. На која сума ќе нараснат 50000 денари за 8 години со $6\%\text{р.а.(а)}$, ако вкаматувањето е

а) годишно, б) тримесечно.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $K = 50000, \text{п} = 6\%\text{р.а.(а)}$ и $n = 8$. Ако ја искористиме формулата (5) добиваме

$$K_8 = K(1+\frac{\text{п}}{100-\text{п}})^8 = 50000\cdot(1+\frac{6}{100-6})^8$$
$$= 50000\cdot 1,063829787^8 = 82025,17687 \text{ den.}$$

б) Бидејќи во една година имаме 4 тримесечја, во период од 8 години вкупно имаме $8\cdot 4 = 32$ тримесечја. Значи, во случајов

$$K = 50000, \text{п} = 6\%\text{p.a.(a)}, , \ m = 4 \text{ и } n = 32 .$$

Ако ја искористиме формулата (7) добиваме

$$K_{32} = K(1+\frac{\frac{\text{п}}{m}}{100-\frac{\text{п}}{m}})^{32} = 50000\cdot(1+\frac{\frac{6}{4}}{100-\frac{6}{4}})^{32} = 81098,09047 \text{ денари. } \blacksquare$$

Пример 17. За колку години сума од 40000 денари со $4\%\text{p.a.(a)v.g.}$ ќе нарасне на 50000.

Решение. Од условот на задачата имаме $\rho = 1+\frac{4}{100-4} = 1,041666667$ и ако ја искористиме формулата (6) добиваме

$$50000 = 40000\cdot 1,041666667^n \text{, т.е. } 1,04166667^n = \frac{50000}{40000} = 1,25 .$$

Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и добиваме

$$n\log 1,041666667 = \log 1,25 \text{, т.е. } n = \frac{\log 1,25}{\log 1,041666667} = \frac{0,096910013}{0,017728766} \approx 5,47 \text{ год. } \blacksquare$$

Пример 18. Со која годишна антиципативна каматна стапка р сума од 150000 денари за 15 години ќе нарасне на 250000 денари ако вкаматувањето е полугодишно?

Решение. Бидејќи вкаматувањето е полугодишно за 15 години ќе имаме $n = 15\cdot 2 = 30$ периоди. Дадени се почетната и крајната сума, бројот на периоди на вкаматување и треба да го определиме антиципативниот каматен фактор ρ. Ако ја искористиме формулата (6) добиваме

$$250000 = 150000\rho^{30} \text{ т.е. } \rho^{30} = \frac{250000}{150000} = 1,666666667 .$$

Од последната равенка добиваме $\rho = \sqrt[30]{1,666666667} = 1,017173315$.

Бидејќи вкаматувањето е полугодишно, имаме $m = 2$ и ако ја искористиме формулата $\rho = 1+\frac{\frac{\text{п}}{m}}{100-\frac{\text{п}}{m}}$ добиваме

$$1,017173315 = 1+\frac{\frac{\text{п}}{2}}{100-\frac{\text{п}}{2}} \text{, т.е. } 1,017173315 = \frac{100-\frac{\text{п}}{2}+\frac{\text{п}}{2}}{100-\frac{\text{п}}{2}} ,$$

па затоа

$$\frac{\text{п}}{2} = 100 - \frac{100}{1{,}017173315} = 1{,}688337154,$$

односно

$$\text{п} = 3{,}376674308\%\text{p.a.(a), v.s.}. \blacksquare$$

Забелешка. Како и кај декурзивното вкаматување, така и кај антиципативното вкаматување разликуваме: номинална, релативна и ефективна антиципативна каматна стапка, кои се аналогно дефинирани. И во овој случај ќе не интересира врската меѓу номиналната, релативната и ефективната каматна стапка. За таа цел ги воведуваме ознаките:

- $\text{п}_n = \text{п}$ - *номиналната антиципативна каматна стапка,*
- п_r - *релативна антиципативна каматна стапка* и
- п_e - *ефективна антиципативна каматна стапка*.

Од претходно изнесеното непосредно следува дека $\text{п}_r = \frac{\text{п}}{m}$, каде m е бројот на вкаматувањата за една година.

Понатаму, за релативната и ефективната антиципативна каматна стапка очигледно важи $K(1+\frac{\frac{\text{п}}{m}}{100-\frac{\text{п}}{m}})^m = K(1+\frac{\text{п}_e}{100-\text{п}_e})$, од каде наоѓаме:

$$\text{п}_e = 100(1-\frac{1}{(\frac{100}{100-\frac{\text{п}}{m}})^m}). \tag{8}$$

Пример 19. Разликата меѓу номиналната и ефективната антиципативна каматна стапка во зависност од бројот вкаматувања, при фиксирана номинална каматна стапка од $\text{п} = 8\%\text{p.a.}(a)$ може да се види во следнава табела:

Вкаматување	**Номинална**	**Релативна**	**Ефективна**
Годишно	8%	8%	8%
Полугодишно	8%	4%	7,84%
Тримесечно	8%	2%	7,763184%
Месечно	8%	$\frac{2}{3}\% \approx 0{,}666667\%$	7,71308848%

што значи дека со зголемувањето на бројот на периодите на вкаматувања, при иста номинална антиципативна каматна стапка ефективната антиципативна каматна стапка се намалува, па затоа при одредувањето на номиналната каматна стапка пожелно е одделно да се пресмета и ефективната каматна стапка, бидејќи таа е онаа која го дава крајниот резултат. ■

Како што видовме примената на релативната антиципативна каматна стапка доведува до ефективна антиципативна каматна стапка која е помала од номиналнатата антиципативна каматна стапка. За да се избегне оваа недо-

следност ќе ја користиме таканаречената *конформна антиципативна каматна стапка*, која всушност е модификација на релативната антиципативна каматна стапка и со нејзината примена, во случај кога периодот на вкаматување е помал од една година, се добива ист интерес како и при примената на номиналната антиципативна каматна стапка.

Нека со $\mathrm{p}_n = \mathrm{p}$ ја означиме номиналната антиципативна годишна каматна стапка и нека имаме m вкаматувања во текот на една година. Ако со p_k ја означиме конформната антиципативна каматна стапка, тогаш од нејзината дефиниција следува дека

$$K(1+\frac{\mathrm{п}}{100-\mathrm{п}}) = K(1+\frac{\mathrm{п}_k}{100-\mathrm{п}_k})^m \text{, т.е } 1+\frac{\mathrm{п}}{100-\mathrm{п}} = (1+\frac{\mathrm{п}_k}{100-\mathrm{п}_k})^m .$$

Ако во последната равенка коренуваме со m, добиваме $\sqrt[m]{\frac{100}{100-\mathrm{п}}} = \frac{100}{100-\mathrm{п}_k}$, од каде наоѓаме

$$\mathrm{п}_k = 100(1-\sqrt[m]{1-\frac{\mathrm{п}}{100}}) . \qquad (9)$$

Пример 20. Ако номиналната антиципативна каматна стапка е $\mathrm{п} = 8\mathrm{р.а.(а)}$, тогаш користејќи ја формулата (9) за конформната антиципативна каматна стапка при полугодишно вкаматување добиваме

$$\mathrm{п}_k = 100(1-\sqrt[2]{1-\frac{8}{100}}) = 4,0833695 ,$$

а при тримесечно вкаматување добиваме

$$\mathrm{п}_k = 100(1-\sqrt[4]{1-\frac{8}{100}}) = 2,062963866. \blacksquare$$

Пример 21. На која сума ќе нараснат 2000 денари за време од 10 години со $\mathrm{п} = 8\mathrm{р.а.(а)}$ сложена камата, ако вкаматувањето е:

а) годишно,
b) тримесечно со примена на релативната каматна стапка и
v) тримесечно со примена на конформната каматна стапка.

Решение. а) Ако ја искористиме формулата (5) добиваме

$$K = 2000(1+\frac{8}{100-8})^{40} = 4604,173938 \text{ денари.}$$

б) Имаме $m = 4$ и $n = 4 \cdot 10 = 40$ и ако замениме во формулата (7) добиваме

$$K = 2000 \cdot (1+\frac{\frac{8}{4}}{100-\frac{8}{4}})^{40} = 4487,319245 \text{ денари.}$$

в) Според пример 20 имаме дека во дадениот случај конформната стапка е $\text{п}_k = 2,062963866$ и ако ја искористиме формулата (5), при што $n = 4 \cdot 10 = 40$ добиваме

$$K = 2000(1 + \frac{2,062963866}{100 - 2,062963866})^{40} = 4604,173938 \text{ денари. } \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

19. Со која годишна интересна стапка треба да се вложи сума од 14400 денари за да истата после 8 години и 9 месеци нарасне на 21600 денари, ако вкаматувањето е антиципативно и тримесечно?
20. Во банка се вложени 30000 денари, а по 8 години се подигнати 40000 денари. Со која сума ќе се располага 15 години од денот на вложувањето, ако банката пресметува $8\%\text{р.а.(а)}$ годишна сложена камата, а вкаматувањето е шестмесечно?
21. Сума од 300000 денари е вложена со $8\%\text{р.а.(а)}$ годишна сложена камата, а потоа уште неколку години со $6,5\%\text{р.а.(а)}$ сложена камата. После колку години, сметајќи од промената на каматната стапка, ќе се добијат 500000 денари? Вкаматувањето е семестрално.
22. Во штедилница се вложени 3000 денари, а по 5 години се вложени уште 2000 денари. Кога крајната вредност на овие вложувања заедно со добиениот интерес ќе биде 12000 денари, ако вкаматувањето е годишно со $4,5\%\text{р.а.(а)}$ годишна сложена камата?
23. Пред 20 години од денес се вложени 2000 денари, а пред 8 години уште 10000 денари. Со која сума ќе располагаме денес, ако вложувањата се со $8\%\text{р.а.(а)}$ годишна сложена камата и тримесечно вкаматување? Уште колку години треба да биде вложена добиената сума, од денес, со $5\%\text{р.а.(а)}$ сложена камата и годишно вкаматување за да истата нарасне на 200000 денари?
24. Со која годишна каматна стапка било која сума заедно со интересот за време од 15 години и 6 месеци ќе се зголеми 3,5 пати? Вкаматувањето е полугодишно и антиципативно.
25. Едно лице вложило 10000 денари со $5\%\text{р.а.(а)}$ сложена камата и 12500 денари со $4,5\%\text{р.а.(а)}$ сложена камата. За колку години при годишно вкаматување двете суми ќе бидат еднакви?
26. Пред 25 години се вложени две различни суми: 100000 и 120000 денари. Првата сума е вложена со $6\%\text{р.а.(а)}$ годишна сложена камата. Со која антиципативна каматна стапка треба да се вложи втората сума ако се знае дека до денес и двете суми се изедначиле? Вкаматувањето е тримесечно.
27. Во банка се вложени 20000 денари за време 5 години и 3 месеци со $2\%\text{р.а.(а)}$ сложена камата, а во наредните 3 години и 4 месеци со стапка $3\%\text{р.а.(а)}$ сложена камата. Колкав е наголемениот капитал, ако вкаматувањето е годишно?

28. Пред 8 години се вложени 20000 денари, а пред 6 години уште 15000 денари со $4\%\text{p.a.(a)}$ сложена камата. Уште колку денари треба да се вложат денес, за да после 10 години од денес располагаме со 80000 денари? Вкаматувањето е годишно.

6. НЕПРЕКИНАТО ВКАМАТУВАЊЕ

Во претходните разгледувања видовме дека при декурзивното вкаматување, при дадена номинална каматна стапка, ако се користи релативната каматна стапка, со зголемувањето на бројот на вкаматувањата се зголемува ефективната каматна стапка, а додека кај антиципативното вкаматување истата се намалува. Логично е да се запрашаме: што се случува со вредноста на каматниот фактор, т.е. со ефективната каматна стапка, ако бројот на вкаматувањата неограничено расте, т.е. ако $m \to \infty$, при што велиме дека имаме *непрекинато* (*континуирано*) *вкаматување*.

Нека имаме номинална каматна стапка $p\%\text{p.a.(d)}$ и нека бројот на вкаматувањата за периодот за кој е дадена номиналната каматна стапка е m. Притоа, ефективниот каматен фактор r_e е даден со формулата:

$$r_e = 1 + \frac{p_e}{100} = (1 + \frac{\frac{p}{m}}{100})^m ,$$

па затоа кога $m \to \infty$ се добива следниов ефективен каматен фактор:

$$r = \lim_{m\to\infty} r_e = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{\frac{p}{m}}{100})^m = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{\frac{100m}{p}})^{\frac{100m}{p}\cdot\frac{p}{100}} = e^{\frac{p}{100}} .$$

Значи, во случај на декурзивно непрекинато вкаматување со каматна стапка $p\%\text{p.a.(d)}$ каматниот фактор кој важи за периодот во кој е дадена номиналната каматна стапка е $r = e^{\frac{p}{100}}$.

Нека имаме номинална каматна стапка $\text{п}\%\text{p.a.(a)}$ и нека бројот на вкаматувањата за периодот за кој е дадена номиналната каматна стапка е m. Притоа, ефективниот каматен фактор ρ_e е даден со формулата:

$$\rho_e = \frac{100}{100 - \text{п}_e} = (\frac{100}{100 - \frac{\text{п}}{m}})^m ,$$

па затоа кога $m \to \infty$ се добива следниов ефективен каматен фактор:

$$\rho = \lim_{m\to\infty} \rho_e = \lim_{m\to\infty} (\frac{100}{100 - \frac{\text{п}}{m}})^m = \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{1}{\frac{100m - \text{п}}{\text{п}}})^{\frac{100m-\text{п}}{\text{p}}\cdot\frac{m\text{п}}{100m-\text{п}}} = e^{\frac{\text{п}}{100}} .$$

Значи, во случај на антиципативно непрекинато вкаматување со каматна стапка п%р.а.(а) каматниот фактор кој важи за периодот во кој е дадена номиналната каматна стапка е $\rho = e^{\frac{п}{100}}$.

Како што можеме да забележиме, при непрекинатото вкаматување за дадена каматна стапка резултатот е идентичен без разлика дали станува збор за декурзивно или антиципативно пресметување на каматата, што е и логично (зошто?). Така, на пример, ако сума од $K_0 = 10000$ денари е вложена со $7\%\text{р.а.(d)}$, односно со $7\%\text{р.а.(а)}$, тогаш $r = \rho = e^{\frac{7}{100}}$, па затоа истата за една година при непрекинато вкаматување ќе нарасне на

$$K_1 = K_0\rho = 10000e^{\frac{7}{100}} = 10000e^{0,07} = 10725,08181 \text{ денари,}$$

а за период од 4 години ќе нарасне на

$$K_4 = K_0\rho^4 = 10000(e^{\frac{7}{100}})^4 = 10000(e^{0,07})^4 = 13231,29812 \text{ денари.}$$

Забелешка. Како што видовме, при непрекинатото вкаматување со $p\%\text{р.а.(d)}$ каматниот фактор е $r = e^{\frac{p}{100}}$, а со п%р.а.(а) тој е $\rho = e^{\frac{п}{100}}$. Затоа, при сите пресметки во случај на непрекинато вкаматување доволно е да се најде соодветниот каматен фактор, а потоа истиот да се користи како и при обичното вкаматување. Имајќи го предвид претходно кажаното во натамошните разгледувања нема посебно да се задржуваме на примери со непрекинато вкаматување.

7. ТЕРМИНСКА СМЕТКА

На крајот од оваа глава ќе се задржиме на таканаречената *терминска сметка*, која ни овозможува плаќањето на сумите $K_i, i = 1,2,...,n$, на кои треба да се пресметаат камати $p_i, i = 1,2,...,n$ и кои треба да се платат за временски периоди $t_i, i = 1,2,...,n$ да се изврши за време t_s, со камата p_s, но притоа ниту должникот ниту доверителот да не бидат оштетени.

Нека во еден ист временски период треба да се изврши плаќање на суми $K_i, i = 1,2,...,n$ денари на кои се пресметуваат камати $p_i, i = 1,2,...,n$, соодветно. Според тоа, во овој временски период се плаќа камата $\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i p_i}{100}$ денари.

Понатаму, бидејќи во дадениот временски период вкупно се плаќаат $\sum_{i=1}^{n} K_i$ денари, на оваа сума е платена просечна каматна стапка

$$p_s = 100 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i p_i}{100}}{\sum_{i=1}^{n} K_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i}. \qquad (1)$$

Нека, сега сумите $K_i, i = 1,...,n$ на кои се пресметуваат камати $p_i, i = 1,...,n$, соодветно, треба да се платат за временските периоди $t_i, i = 1,...,n$, соодветно, изразени во исти временски единици. Како што видовме, просечната каматна стапка за овие суми можеме да ја пресметаме според формулата (1). Понатаму, ако вкупната сума $\sum_{i=1}^{n} K_i$, со каматната стапка (1) се плаќа одеднаш за време t_s денови, но притоа да не биде оштетен ниту должникот, ниту доверителот, тогаш ја добиваме равенката

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i p_i t_i}{36000} = \frac{p_s \sum_{i=1}^{n} K_i}{36000} t_s .$$

Ако во последната равенка, за просечната каматна стапка замениме од (1), после средувањето ја добиваме равенката

$$\sum_{i=1}^{n} K_i p_i t_i = t_s \sum_{i=1}^{n} K_i p_i ,$$

од каде за времето t_s добиваме:

$$t_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i p_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i p_i}. \qquad (2)$$

Пример 22. Господинот *A* на банката *B* треба да исплати четири долгови и тоа:

- 45000 денари со 6%p.a.(d) треба да плати на 10.04;
- 10000 денари со 8%p.a.(d) треба да плати на 25.04;
- 70000 денари со 9%p.a.(d) треба да плати на 20.05; и
- 100000 денари со 4%p.a.(d) треба да плати на 31.05.

На кој ден и со која каматна стапка господинот *A* може да ги исплати сите долгови, но така што ниту тој ниту банката да не бидат оштетени.

Решение. За да ги извршиме потребните пресметувања, условно ќе земеме дека сумата која најрано треба да се плати се плаќа веднаш, т.е. $t_1 = 0$ денови. Според тоа, $t_2 = 15$, $t_3 = 40$ и $t_4 = 51$ денови. Пресметувањето на сумите кои фигурираат во формулите (1) и (2) можеме да го направиме користејќи ја табелата

i	K_i	t_i	p_i	$K_i p_i$	$K_i p_i t_i$
1	45000	0	6	270000	0
2	10000	15	8	80000	1200000
3	70000	40	9	630000	25200000
4	100000	51	4	400000	20400000
Сума	225000	-----	----	1380000	46800000

Конечно, ако замениме во (1) и (2), добиваме

$$p_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} = 6\frac{2}{15}\% \text{ и } t_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i p_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i p_i} = 33,913 \approx 34 \text{ денови.}$$

Според тоа, господинот *A* треба сите долгови да ги плати со камата $6\frac{2}{15}\%$ и тоа по 34 денови сметајќи од 10.04, т.е. плаќањето треба да се изврши на 14.05. ■

Пример 23. Трговското друштво *ТГ* од банката *B* зело три заеми, за кои висината, каматата и денот на отплатата се:

- 60000 денари со $6\%\text{p.a.(d)}$ треба да плати на 3.04;
- 60000 денари со $8\%\text{p.a.(d)}$ треба да плати на 23.04; и
- 60000 денари со $9\%\text{p.a.(d)}$ треба да плати на 27.05.

На кој ден и со која каматна стапка трговското друштво може да ги исплати сите долгови, но така што ниту тоа ниту банката да не бидат оштетени.

Решение. Прво да забележиме дека во случајов $K_i = K$, $i = 1,2,...,n$, па ако замениме во (1) и (2) ги добиваме формулите

$$p_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n}, \text{ и} \tag{3}$$

$$t_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{4}$$

Понатаму, $n=3$, $t_1=0, t_2=20, t_3=54$, $p_1=6$, $p_2=8$, $p_3=9$ и ако замениме во (3) и (4) добиваме:

$$p_s=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}{n}=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}\% \text{ и } t_s=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}=\frac{646}{23}\approx 28 \text{ денови.}$$

Според тоа, трговското друштво треба сите долгови да ги плати со камата $7\frac{2}{3}\%$ и тоа по 28 денови сметајќи од 3.04, т.е. плаќањето треба да се изврши на 1.05. ■

Пример 24. Трговецот *T* на добавувачот *X* одложено треба да му плати за три доставувања на стока, за кои висината, каматата и денот на плаќањето се:

- 60000 денари со $6\%\text{p.a.(d)}$ на 3.04;
- 80000 денари со $6\%\text{p.a.(d)}$ на 24.04; и
- 100000 денари со $6\%\text{p.a.(d)}$ на 26.05.

На кој ден и со која каматна стапка трговецот треба да ги плати сите набавки на стока, но така што ниту тој ниту добавувачот да не бидат оштетени.

Решение. Прво да забележиме дека во случајов $p_i=p$, $i=1,2,...,n$, па ако замениме во (1) и (2) добиваме формулите $p_s=p$ и

$$t_s=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}K_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}K_i}. \tag{5}$$

Понатаму,

$$t_1=0, t_2=21, t_3=53, K_1=60000, K_2=80000, K_3=100000$$

и ако замениме во (5) добиваме:

$$t_s=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}K_it_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}K_i}=\frac{6980000}{240000}\approx 29 \text{ денови.}$$

Според тоа, трговското друштво треба сите долгови да ги плати со камата 6% и тоа по 29 денови сметајќи од 3.04, т.е. плаќањето треба да се изврши на 2.05. ■

Пример 25. Господинот *A* на банката *B* треба да исплати четири долгови и тоа:

- 45000 денари со $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 10.04;
- 45000 денари со $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 28.04;
- 45000 денари со $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 20.05; и
- 45000 денари со $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 30.05.

На кој ден и со која каматна стапка господинот A може да ги исплати сите долгови, но така што ниту тој ниту банката да не бидат оштетени.

Решение. Прво да забележиме дека во случајов $p_i = p$ и $K_i = K$, $i = 1,\ldots,n$, па ако замениме во (1) и (2) добиваме формулите $p_S = p$ и

$$t_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}. \tag{6}$$

Понатаму, $t_1 = 0, t_2 = 18, t_3 = 40, t_4 = 50$ и ако замениме во (6) добиваме:

$$t_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{108}{4} = 27 \text{ денови.}$$

Според тоа, господинот A треба сите долгови да ги плати со камата 6% и тоа по 27 денови сметајќи од 10.04, т.е. плаќањето треба да се изврши на 7.05. ■

ЗАДАЧИ

29. Господинот A на банката B треба да исплати четири долгови и тоа: 55000 денари со $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 5.04; 65000 денари со $8\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 22.04; 88000 денари со $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 13.05; и 920000 денари со $5\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 27.05. На кој ден и со која каматна стапка господинот A може да ги исплати сите долгови, но така што ниту тој ниту банката да не бидат оштетени.
30. Трговското друштво T од банката B зело три заеми, за кои висината, каматата и денот на отплатата се: 200000 денари со $10\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 7.04; 200000 денари со $9\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 29.04; 200000 денари со $8\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ треба да плати на 21.05. На кој ден и со која каматна стапка трговското друштво може да ги исплати сите долгови, но така што ниту тоа ниту банката да не бидат оштетени.
31. Трговецот T на добавувачот X одложено треба да му плати за три доставувања на стока, за кои висината, каматата и денот на плаќањето се: 160000 денари со $7\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ на 3.04; 180000 денари со $7\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ на 22.04; 220000 денари со $7\%\,\mathrm{p.a.(d)}$ на 21.05. На кој ден и со која каматна стапка трговецот треба да ги плати сите набавки на стока, но така што ниту тој ниту добавувачот да не бидат оштетени.

32. Господинот *A* на банката *B* треба да исплати четири долгови и тоа: 55400 денари со 5,5%p.a.(d) треба да плати на 1.04; 55400 денари со 5,5%p.a.(d) треба да плати на 22.04; 55400 денари со 5,5%p.a.(d) треба да плати на 12.05; и 55400 денари со 5,5%p.a.(d) треба да плати на 19.05. На кој ден и со која каматна стапка господинот *A* може да ги исплати сите долгови, но така што ниту тој ниту банката да не бидат оштетени.

ГЛАВА II
ПЕРИОДИЧНИ ВЛОГОВИ

1. ПОИМ ЗА ПЕРИОДИЧЕН ВЛОГ

Финансиските средстсва што се вложуваат во еднакви временски интервали за одреден број периоди ги нарекуваме *периодични влогови*.

Да забележиме дека кај периодичните влогови поединечните вложувања можат да бидат меѓусебно еднакви, но истите може и да се разликуваат. Кога поединечните вложувања меѓусебно се разликуваат можни се два случаи и тоа:

- поединечните вложувања се менуваат според некоја законитост и
- промената на периодичните вложувања е случајна.

При разгледувањето на променливите периодични вложувања ќе се задржиме на случајот кога поединечните вложувања се членови или на аритметичка или на геометриска прогресија.

Претходно рековме дека временските интервали меѓу поединечните вложувања мора да се еднакви и бројот на вложувањата е ограничен. Исто така, вложувањата можат да бидат на почетокот и на крајот на временскиот интервал, па според тоа разликуваме:

- антиципативно и
- декурзивно вложување.

Како што знаеме вкаматувањето може да биде годишно, шестмесечно, тримесечно, месечно итн. Од друга страна рековме дека поединечните вложувања мораат да бидат во еднакви временски интервали и тие можат да се совпаѓаат со интервалите на вкаматувања или да не се совпаѓаат со интервалите на вкаматување, што значи во овој случај имаме периодични влогови кај кои:

- вложувањето се совпаѓа со вкаматувањето,
- вложувањето е почесто од вкаматувањето и
- вкаматувањето е почесто од вложувањето.

2. ЕДНАКВИ ПОЕДИНЕЧНИ ВЛОЖУВАЊА КАЈ КОИ ВЛОЖУВАЊЕТО СЕ СОВПАЃА СО ВКАМАТУВАЊЕТО

Во овој дел ќе ги разгледаме влоговите со еднакви поединечни вложувања кај кои вложувањето се совпаѓа со вкаматувањето, кои можат да бидат со:

- антиципативно и
- декурзивно вложување.

2.1.АНТИЦИПАТИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Како што веќе рековме антиципативното вложување подразбира поединечните вложувања да бидат на почетокот на секој интервал. При проучувањето на овие влогови ќе ги користиме следниве ознаки:

- V - сума која се вложува на еднакви временски интервали,
- n - број на поединечните вложувања,
- p - декурзивна каматна стапка,
- п - антиципативна каматна стапка и
- S_n - збир на сите влогови на крајот од $n-$от период.

Јасно, збирот на сите влогови S_n е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметана сложена камата. Понатаму, првото вложување заедно со пресметаната сложена камата ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за n периоди, второто вложување заедно со пресметаната сложена камата ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $n-1$ периоди итн., последното вложување заедно со пресметаната сложена камата ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за еден период. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^n, Vr^{n-1}, ..., Vr,$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + ... + Vr^2 + Vr = Vr(1 + r + ... + r^{n-2} + r^{n-1}) = Vr\frac{r^n - 1}{r-1}. \qquad (1)$$

Ако имаме антиципативна каматна стапка п, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$V\rho^n, V\rho^{n-1}, ..., V\rho,$$

каде ρ е соодветниот антиципативен фактор. Затоа,

$$S_n = V\rho^n + V\rho^{n-1} + ... + V\rho^2 + V\rho = V\rho(1 + \rho + ... + \rho^{n-2} + \rho^{n-1}) = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}. \quad (2)$$

Пример 1. На која сума ќе нарасне годишен антиципативен влог од 10000 денари за 4 години ако вкаматувањето е годишно со сложена камата од:

a) 6% p.a.(d); b) 6% p.a.(a).

Решение. а) Од условот на задачата имаме

$$V=10000,\ n=4\ \text{ и }\ r=1+\frac{6}{100}=1,06.$$

Ако замениме во формулата (1) добиваме

$$S_4=10000\cdot 1,06\cdot\frac{1,06^4-1}{1,06-1}=46370,9296.$$

б) Од условот на задачата имаме

$$V=10000,\ n=4\ \text{ и }\ \rho=\frac{100}{100-6}=1,063829787.$$

Ако замениме во формулата (2) добиваме

$$S_4=10000\cdot 1,063829787\cdot\frac{1,063829787^4-1}{1,063829787-1}=46803,57195\ .\ \blacksquare$$

Пример 2. По колку денари треба да се вложува полугодишно анципативно во текот на 5 години и полугодишно вкаматување, ако се сака на крајот од шестата година, заедно со сложена камата од:

a) 5% р.а. (d) да се добие 114835 денари;
b) 5% р.а. (a) да се добие 11525 денари.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $n=5\cdot 2=10,\ S_{10}=114835$ и $r=1+\frac{\frac{5}{2}}{100}=1,025$. Ако замениме во формулата (1) добиваме

$$114835=V\cdot 1,025\cdot\frac{1,025^{10}-1}{1,025-1},\ \text{т.е. } 114835=11,4835V$$

што значи V=10000 денари.

б) Од условот на задачата добиваме

$$n=5\cdot 2=10,\ S_{10}=11525\ \text{ и }\ \rho=\frac{100}{100-\frac{5}{2}}=1,025641026.$$

Ако замениме во формулата (2) добиваме

$$11525=V\cdot 1,025641026\cdot\frac{1,025641026^{10}-1}{1,025641026-1},\ \text{т.е. } 11525=11,525V,$$

што значи V=1000 денари. ■

Пример 3. а) Колку пати треба на секои три месеци да се вложува по 10000 денари анципативно со годишна стапка 8% р.а. (d) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 136800? Вакаматувањето е тримесечно.

б) Колку пати треба на секои три месеци да се вложува по 1000 денари анципативно со годишна стапка 8% р.а. (a) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 13720 денари? Вкаматувањето е тримесечно.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $V=10000$, $S_n=136800$ и $r=1+\frac{\frac{8}{4}}{100}=1,02$. Ако замениме во формулата (1) добиваме:

$$136800=10000\cdot 1,02\cdot\frac{1,02^n-1}{1,02-1}$$

од каде наоѓаме

$$1,02^n=1+\frac{136800\cdot 0,2}{10000\cdot 1,02}=1,268235294.$$

Последното равенство го логаритмираме за основа 10 и добиваме

$$n\log 1,02=\log 1,268235294\text{, т.е. } n=\frac{\log 1,268235294}{\log 1,02}=\frac{0,103199835}{0,008600171}=12.$$

б) Од условот на задачата имаме

$$V=1000,\ S_n=13720 \text{ и } r=\frac{100}{100-\frac{8}{4}}=1,020408163.$$

Ако замениме во формулата (2) добиваме:

$$13720=1000\cdot 1,020408163\cdot\frac{1,020408163^n-1}{1,020408163-1}$$

од каде наоѓаме

$$1,020408163^n=1+\frac{13720\cdot 0,020408163}{1000\cdot 1,020408163}=1,274399996.$$

Последното равенство го логаритмираме за основа 10 и добиваме

$$n\log 1,020408163=\log 1,274399996\text{, т.е. } n=\frac{\log 1,274399996}{\log 1,020408163}=\frac{0,105305761}{0,008773924}=12.\ \blacksquare$$

Пример 4. Со која каматна стапка шестмесечниот антиципативен влог од 2000 денари ќе нарасне на крајот на шеснаесеттата година на 125000 денари, ако вкаматувањето е полугодишно и декурзивно?

Решение. Од условот на задачата имаме

$n=2\cdot 16=32$, $S_{32}=125000$ денари, $V=2000$ денари и $r=?$.

Од формулата (1) добиваме $\frac{S_n}{V}=r\frac{r^n-1}{r-1}$, т.е. $\frac{r^{n+1}-r}{r-1}=\frac{S_n}{V}=a$, од каде наоѓаме

$$r^{n+1}-r(a+1)+a=0. \tag{3}$$

Постојат повеќе начини за решавање на равенката (3) и ние ќе го примениме *методот на делење на сегмент* кој се состои во следново:

1. земаме функција $f(r)=r^{n+1}-r(a+1)+a$,

2. наоѓаме два броја c и d такви, што $f(c)>0$ и $f(d)<0$,
3. ја наоѓаме средината на овие броеви, т.е. го наоѓаме бројот $\frac{c+d}{2}$ и пресметуваме $f(\frac{c+d}{2})$.
4. а) Ако $f(\frac{c+d}{2})<0$, тогаш на местото на бројот c го ставаме бројот $\frac{c+d}{2}$ и се враќаме на чекорот 3.

   б) Ако $f(\frac{c+d}{2})>0$, тогаш на местото на бројот d го ставаме бројот $\frac{c+d}{2}$ и се враќаме на чекорот 3.
5. Постапката ја прекинуваме во моментот кога краевите на интервалот се совпаѓаат до однапред зададено децимално место.

За нашите податоци имаме $n=32$ и $a=\frac{S_{32}}{V}=\frac{125000}{2000}=62,5$ и равенката (3) го добива видот

$$r^{33}-63,5r+62,5=0. \tag{4}$$

Во случајов за функцијата f добиваме:

$$f(r)=r^{33}-63,5r+62,5.$$

Во општ случај наоѓањето на c и d не е едноставно, но бидејќи $r>1$ логично е овие броеви да ги побараме да се блиски до 1.

- Земаме $c=1,01$ и $d=1,04$ и пресметуваме

  $$f(1,01)=-0,2463096<0 \text{ и } f(1,04)=0,108381096>0,$$

  што значи дека изборот е коректен.
- Наоѓаме $\frac{c+d}{2}=1,025$ и пресметуваме $f(1,025)=-0,328649138<0$ па затоа на местото на c ставаме $c=1,025$, а за d немаме промена, т.е. $d=1,04$.
- Наоѓаме $\frac{c+d}{2}=1,0325$ и пресметуваме $f(1,0325)=-0,190509424<0$ па затоа на местото на c ставаме $c=1,0325$, а за d немаме промена, т.е. $d=1,04$.
- Наоѓаме $\frac{c+d}{2}=1,03625$ и пресметуваме $f(1,03625)=-0,063479126<0$ па затоа на местото на c ставаме $c=1,03625$, а за d немаме промена, т.е. $d=1,04$.
- Наоѓаме $\frac{c+d}{2}=1,038125$ и пресметуваме

$$f(1,038125) = +0,016528753 > 0$$

па затоа на местото на d ставаме $d = 1,038125$, а за c немаме промена, т.е. $c = 1,03625$.

- Наоѓаме $\frac{c+d}{2} = 1,0371875$ и пресметуваме

$$f(1,0371875) = -0,024914579 < 0$$

па затоа на местото на c ставаме $c = 1,0371875$, а за d немаме промена, т.е. $d = 1,038125$.

- Наоѓаме $\frac{c+d}{2} = 1,03765625$ и пресметуваме

$$f(1,03765625) = -0,0045578 < 0$$

па затоа на местото на c ставаме $c = 1,03765625$, а за d немаме промена, т.е. $d = 1,038125$.

- Наоѓаме $\frac{c+d}{2} = 1,037890625$ и пресметуваме

$$f(1,037890625) = 0,005893 > 0$$

па затоа на местото на d ставаме $d = 1,037890625$, а за c немаме промена, т.е. $c = 1,03765625$.

- Наоѓаме $\frac{c+d}{2} = 1,037773438$ и пресметуваме

$$f(1,037773438) = 0,000645 > 0$$

па затоа на местото на d ставаме $d = 1,037773438$, а за c немаме промена, т.е. $c = 1,03765625$.

Забележуваме дека разликата $d - c = 0,000117188$, што значи дека броевите c и d се еднакви со точност до третото децимално место. Затоа со точност до третото децимално место решението на равенката (4) е $r = 1,037773438$. Според тоа,

$$1 + \frac{\frac{p}{2}}{100} = 1,037773438 \text{ т.е. } p = 7,5546876.$$

Навистина, за најдениот декурзивен фактор $r = 1,037773438$ со замена во формулата (1) добиваме

$$125000 = S_{32} \approx 125034,15 = 2000 \cdot 1,037773438 \cdot \frac{1,037773438^{32} - 1}{1,037773438 - 1}. \blacksquare$$

2.2.ДЕКУРЗИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Како што веќе рековме декурзивното вложување подразбира поединечните вложувања да бидат на крајот на секој интервал. При проучувањето на овие влогови ќе ги користиме следниве ознаки:

- V - сума која се вложува на еднакви временски интервали,
- n - број на поединечните вложувања,
- p - декурзивна каматна стапка,
- п - антиципативна каматна стапка и
- S_n - збир на сите влогови на крајот од $n-$от период.

Јасно, збирот на сите влогови S_n е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметана сложена камата. Понатаму, првото вложување заедно со пресметаната сложена камата ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $n-1$ период (бидејќи вложувањето е на крајот од првиот период), второто вложување заедно со пресметаната сложена камата ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $n-2$ периоди (бидејќи вложувањето е на крајот од вториот период) итн., претпоследното вложување заедно со пресметаната сложена камата ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за еден период и конечно на последното вложување нема да се пресметува камата бидејќи тоа е на крајот од последниот период. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^{n-1}, Vr^{n-2}, ..., Vr, V,$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$S_n = Vr^{n-1} + Vr^{n-2} + ... + Vr^2 + Vr + V = V(1 + r + ... + r^{n-2} + r^{n-1}) = V\frac{r^n - 1}{r-1}. \quad (5)$$

Ако имаме антиципативна каматна стапка п, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$V\rho^n, V\rho^{n-1}, ..., V\rho, V,$$

каде ρ е соодветниот антиципативен фактор. Затоа,

$$S_n = V\rho^{n-1} + V\rho^{n-2} + ... + V\rho^2 + V\rho + V = V(1 + \rho + ... + \rho^{n-2} + \rho^{n-1}) = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}. \quad (6)$$

Пример 5. На која сума ќе нарасне годишен декурзивен влог од 10000 денари за 4 години ако вкаматувањето е годишно со:

a) 6% р.а.(d) интерес на интерес;

b) 6% р.а.(a) интерес на интерес.

Решение. а) Од условот на задачата имаме:

$$V = 10000, n = 4 \text{ и } r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06.$$

Ако замениме во формулата (5) добиваме:

$$S_4 = 10000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 43746{,}16 .$$

б) Од условот на задачата имаме:

$$V = 10000,\ n = 4 \text{ и } \rho = \frac{100}{100 - 6} = 1{,}063829787.$$

Ако замениме во формулата (6) добиваме:

$$S_4 = 10000 \cdot \frac{1{,}063829787^4 - 1}{1{,}063829787 - 1} = 4399{,}535 . \blacksquare$$

Пример 6. По колку денари треба да се вложува полугодишно декурзивно во текот на 5 години и полугодишно вкаматување, ако се сака на крајот од шестата година заедно со:

а) 5% р.а. (d) интерес на интерес да се добие 112040 денари;

b) 5% р.а. (a) интерес на интерес да се добие 11240 денари.

Решение. а) Од условот на задачата имаме:

$$n = 5 \cdot 2 = 10,\ S_{10} = 112040 \text{ и } r = 1 + \frac{\frac{5}{2}}{100} = 1{,}025 .$$

Ако замениме во формулата (1) добиваме:

$$112040 = V \cdot \frac{1{,}025^{10} - 1}{1{,}025 - 1}$$, т.е. 112040=11,20338177V

што значи V=10000,55183≈10000 денари.

б) Од условот на задачата добиваме:

$$n = 5 \cdot 2 = 10,\ S_{10} = 11240 \text{ и } \rho = \frac{100}{100 - \frac{5}{2}} = 1{,}025641026.$$

Ако замениме во формулата (6) имаме:

$$11240 = V \cdot \frac{1{,}025641026^{10} - 1}{1{,}025641026 - 1}$$, т.е. 11240=11,23639293V

што значи V=1000,321≈1000 денари. ■

Пример 7. а) Колку пати треба на секои три месеци да се вложува по 10000 денари декурзивно со годишна стапка 8% р.а. (d) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 134120? Вкаматувањето е тримесечно.

б) Колку пати треба на секои три месеци да се вложува по 1000 денари декурзивно со годишна стапка 8% р.а. (a) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 13440 денари? Вкаматувањето е тримесечно.

Решение. а) Од условот на задачата имаме:

$$V=10000,\ S_n=134120 \text{ и } r=1+\frac{\frac{8}{4}}{100}=1,02.$$

Ако замениме во формулата (5) добиваме:

$$134120=10000\cdot\frac{1,02^n-1}{1,02-1},$$

од каде наоѓаме:

$$1,02^n=1+\frac{134120\cdot 0,2}{10000}=1,26824.$$

Последното равенство го логаритмираме за основа 10 и добиваме:

$$n\log 1,02=\log 1,2624 \text{ т.е. } n=\frac{\log 1,26824}{\log 1,02}=\frac{0,103201446}{0,008600171}=11.9999296\approx 12.$$

б) Од условот на задачата имаме:

$$V=1000,\ S_n=13440 \text{ и } r=\frac{100}{100-\frac{8}{4}}=1,020408163.$$

Ако замениме во формулата (6) добиваме:

$$13440=1000\cdot\frac{1,020408163^n-1}{1,020408163-1},$$

од каде наоѓаме:

$$1,020408163^n=1+\frac{13440\cdot 0,020408163}{1000}=1,27428571.$$

Последното равенство го логаритмираме за основа 10 и добиваме:

$$n\log 1,020408163=\log 1,27428571,$$

т.е.

$$n=\frac{\log 1,27428571}{\log 1,020408163}=\frac{0,105266813}{0,008773924}=11,99768919\approx 12. \blacksquare$$

Пример 8. Со која каматна стапка шестмесечниот декурзивен влог од 2000 денари ќе нарасне на крајот на шеснаесеттата година на 125400 денари, ако вкаматувањето е полугодишно и декурзивно?

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$r=?,\ n=2\cdot 16=32,\ S_{32}=125400 \text{ и } V=2000.$$

Од формулата (5) добиваме:

$$\frac{S_n}{V}=\frac{r^n-1}{r-1}, \text{ т.е. } \frac{r^n-1}{r-1}=\frac{S_n}{V}=a,$$

од каде наоѓаме:

$$r^n-ra+a-1=0. \qquad (7)$$

Сега, постапуваме на ист начин како во пример 4, т.е. наоѓаме нули на функцијата $f(r)=r^n-ra+a-1$.

За нашите податоци имаме $n=32$ и $a=\frac{S_{32}}{V}=\frac{125400}{2000}=62,7$ и равенката (7) го добива видот:

$$r^{32}-62,7r+61,7=0. \tag{4}$$

Во случајот функцијата f е $f(r)=r^{32}-62,7r+61,7$.

- Земаме $c=1,01$ и $d=1,05$ и пресметуваме

  $$f(1,01)=-0,25205932<0 \text{ и } f(1,05)=0,62994147>0,$$

  што значи дека изборот е коректен.

- Наоѓаме $\frac{c+d}{2}=1,03$ и пресметуваме $f(1,03)=-0,305917244<0$ па затоа на местото на c ставаме $c=1,03$, а за d немаме промена, т.е. $d=1,05$.

- Наоѓаме $\frac{c+d}{2}=1,04$ и пресметуваме $f(1,04)=0,0000587>0$ па затоа на местото на c ставаме $c=1,04$, а за d немаме промена, т.е. $d=1,05$.

Забележуваме дека разликата $d-c=0,01$, што значи дека броевите c и d се еднакви со точност до првото децимално место. Меѓутоа,

$$f(1,04)=0,0000587$$

е еднаков на нула со точност до четвртото децимално место, па затоа $r=1,04$. Навистина, за $r=1,04$ имаме

$$125400=S_{32}\approx 125402,9373=2000\cdot\frac{1,04^{32}-1}{1,04-1},$$

што значи дека можеме да ги прекинеме натамошните пресметувања. Имаме:

$$1+\frac{\frac{p}{2}}{100}=1,04, \text{ т.е. } p=8. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

1. На која сума ќе нарасне тримесечен антиципативен влог од 10000 денари за 6 години ако вкаматувањето е тримесечно со:
   a) 6% р.а.(d) интерес на интерес;
   b) 6% р.а.(a) интерес на интерес.

2. По колку денари треба да се вложува полугодишно антиципативно во текот на 5 години и шестмесечно вкаматување, ако се сака на крајот од шестата година, заедно со:
   a) 9% р.а. (d) интерес на интерес да се добие 300000 денари;
   b) 9% р.а. (a) интерес на интерес да се добие 500000 денари.
3. Колку пати треба на секои шест месеци да се вложува по 10000 денари антиципативно со годишна стапка 8% р.а. (d) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 190235? Вкаматувањето е полугодишно.
4. Колку пати треба на секои шест месеци да се вложува по 10000 денари антиципативно со годишна стапка 8% р.а. (a) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 31560? Вкаматувањето е полугодишно.
5. На која сума ќе нарасне годишниот декурзивен влог од 10000 денари за 4 години со 8% интерес на интерес, ако вкаматувањето е годишно и
   a) декурзивно,
   b) антиципативно.
6. По колку денари тримесечно декурзивно едно лице треба да вложува од неговата 25-та до 40-та година, за да крајот на 50-тата година располага со 500000 денари. Интересната стапка е 6% р.а. (d), а вкаматувањето е тримесечно декурзивно.
7. Колку пати треба на секои три месеци да се вложува по 11000 денари антиципативно со годишна стапка 10% р.а. (d) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 280990? Вкаматувањето е тримесечно.
8. Колку пати треба на секои шест месеци да се вложува по 25000 денари антиципативно со годишна стапка 10% р.а. (a) интерес на интерес, ако се сака да се располага со 404000? Вкаматувањето е полугодишно.

3. ЕДНАКВИ ПОЕДИНЕЧНИ ВЛОЖУВАЊА КАЈ КОИ ВКАМАТУВАЊЕТО Е ПОЧЕСТО ОД ВЛОЖУВАЊЕТО

Во овој дел ќе ги разгледаме влоговите со еднакви поединечни вложувања кај кои вкаматувањето е почесто од вложувањето, кои можат да бидат со:

- антиципативно и
- декурзивно вложување.

3.1.АНТИЦИПАТИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Нека имаме n еднакви антиципативни влогови и меѓу секои два влога нека имаме k периоди на вкаматување. Тогаш вкупниот број на периоди на вкаматување е nk и ако ги воведеме ознаките:

- V - сума која се вложува на еднакви временски интервали,

- p - декурзивна каматна стапка,

- п - антиципативна каматна стапка и

- S_{nk} - збир на сите влогови на крајот од сите nk периоди на вкаматување,

збирот S_{nk} е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметан интерес на интерес. Понатаму, првото вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за nk периоди, второто вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $(n-1)k$ периоди итн., последното вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за k -периоди. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^{nk}, Vr^{k(n-1)}, ..., Vr^{k},$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$\begin{aligned} S_{nk} &= Vr^{nk} + Vr^{k(n-1)} + ... + Vr^{2k} + Vr^{k} \\ &= Vr^{k}[1 + r^{k} + ... + (r^{k})^{n-2} + (r^{k})^{n-1}] = Vr^{k}\,\frac{(r^{k})^{n}-1}{r^{k}-1}, \end{aligned}$$

што значи

$$S_{nk} = Vr^{k}\,\frac{r^{nk}-1}{r^{k}-1}. \tag{1}$$

Ако имаме антиципативна каматна стапка р, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$V\rho^{nk}, V\rho^{(n-1)k}, ..., V\rho^{k},$$

каде ρ е соодветниот антиципативен фактор. Затоа,

$$S_{nk} = V\rho^{k}\,\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{k}-1}. \tag{2}$$

Пример 9. Едно претпријатие вложува на почетокот на секоја година во текот на 8 години по 100000 денари и тримесечно вкаматување. Со која сума ќе располага претпријатието, ако годишната каматна стапка е

a) 6% р.а.(d) интерес на интерес,
b) 6% р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Имаме V=100000, $n=8$ и $k=4$, па затоа $nk=32$.

а) Бидејќи $p=6\%\,\text{р.а.(d)}$ и вкаматувањето е тримесечно, за декурзивниот фактор имаме:

$$r = 1 + \frac{\frac{6}{4}}{100} = 1,015$$

и ако ја искористиме формулата (1) добиваме:

$$S_{nk} = Vr^k \frac{r^{nk}-1}{r^k-1} = 100000 \cdot 1,015^4 \cdot \frac{1,015^{32}-1}{1,015^4-1} = 1055636,417 .$$

б) Бидејќи $\text{п} = 6\%\text{р.а.}$(а) и вкаматувањето е тримесечно, за декурзивниот фактор имаме: $\rho = \frac{100}{100-\frac{6}{4}} = 1,015228426$ и ако ја искористиме формулата (2) добиваме:

$$S_{nk} = V\rho^k \frac{\rho^{nk}-1}{\rho^k-1} = 100000 \cdot 1,015228426^4 \cdot \frac{1,015228426^{32}-1}{1,015228426^4-1} = 1060220,324 . \blacksquare$$

3.2.ДЕКУРЗИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Нека имаме n еднакви декурзивни влогови и меѓу секои два влога нека имаме k периоди на вкаматување. Тогаш вкупниот број на периоди на вкаматување е $(n-1)k$ и ако ги воведеме ознаките:

- V - сума која се вложува на еднакви временски интервали,
- p - декурзивна каматна стапка,
- п - антиципативна каматна стапка и
- S_{nk}^* - збир на сите влогови на крајот од сите nk периоди на вкаматување,

збирот S_{nk}^* е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметан интерес на интерес. Понатаму, првото вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $(n-1)k$ периоди, второто вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $(n-2)k$ периоди итн., последното вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на влогот V. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш овие вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^{(n-1)k}, Vr^{k(n-2)}, ..., Vr^k, V ,$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$S_{nk}^* = Vr^{k(n-1)} + Vr^{k(n-2)} + ... + Vr^k + V$$
$$= V[1 + r^k + ... + (r^k)^{n-2} + (r^k)^{n-1}] = V\frac{(r^k)^n - 1}{r^k - 1},$$

што значи

$$S_{nk}^{*} = V\frac{r^{nk}-1}{r^{k}-1}. \tag{3}$$

Ако имаме антиципативна каматна стапка п, тогаш претходно споменатите вложувања ќе бидат еднакви на

$$V\rho^{(n-1)k}, V\rho^{(n-2)k}, ..., V\rho^{k}, V,$$

каде ρ е соодветниот антиципативен фактор. Затоа,

$$S_{nk}^{*} = V\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{k}-1}. \tag{4}$$

Пример 10. Едно претпријатие вложува на крајот на секоја година во текот на 5 години по 200000 денари и шестмесечно вкаматување. Со која сума ќе располага претпријатието, ако годишната каматна стапка е

a) 8% р.а.(d) интерес на интерес и

b) 8% р.а.(a) интерес на интерес.

Решение. Имаме *V*=200000, $n=5$ и $k=2$, па затоа $nk=10$.

а) Бидејќи $p=8\%$ р.а.(d) и вкаматувањето е шестмесечно, за декурзивниот фактор имаме $r=1+\frac{\frac{8}{2}}{100}=1,04$ и ако ја искористиме формулата (1) добиваме:

$$S_{nk}^{*} = V\frac{r^{nk}-1}{r^{k}-1} = 200000\cdot 1,04^{2}\cdot\frac{1,04^{10}-1}{1,04^{2}-1} = 1273118,183.$$

б) Бидејќи $п=8\%$ р.а.(a) и вкаматувањето е шестмесечно, за декурзивниот фактор имаме $\rho=\frac{100}{100-\frac{8}{2}}=1,041666667$ и ако ја искористиме формулата (4) добиваме:

$$S_{nk}^{*} = V\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{k}-1} = 200000\cdot 1,041666667^{2}\cdot\frac{1,041666667^{10}-1}{1,041666667^{2}-1} = 1286066,194. \blacksquare$$

Забелешка. Во примерите 4 и 8 ја разработивме постапката за наоѓање на непознатата каматна стапка. Овде ќе забележиме дека во овој случај ако каматната стапка е непозната, тогаш постапуваме аналогно како во наведените примери, со таа разлика што во формулите (1) и (3) ја воведуваме смената $r^{k}=t$ и потоа, откако ќе го најдеме t, декурзивниот фактор го наоѓаме од формулата $r=\sqrt[k]{t}$, а во случај на формулите (2) и (4) ја воведуваме смената

$\rho^k = t$ и потоа откако ќе го најдеме t антиципативен фактор го наоѓаме од формулата $\rho = \sqrt[k]{t}$.

Да забележиме дека непознатиот влог, односно непознатиот број на вложувања се определуваат исто како и примерите 16 и 20, односно 17 и 21.

ЗАДАЧИ

9. Едно претпријатие вложува на почетокот на секоја година во текот на 3 години по 50000 денари и месечно вкаматување. Со која сума ќе располага претпријатието, ако годишната каматна стапка е
   а) 9% р.а.(d) интерес на интерес, б) 9% р.а.(а) интерес на интерес.
10. Едно претпријатие вложува на крајот на секоја година во текот на 4 години по 150000 денари и тримесечно вкаматување. Со која сума ќе располага претпријатието, ако годишната каматна стапка е
    а) 12% р.а.(d) интерес на интерес, б) 12% р.а.(а) интерес на интерес.

4. ЕДНАКВИ ПОЕДИНЕЧНИ ВЛОЖУВАЊА КАЈ КОИ ВЛОЖУВАЊЕТО Е ПОЧЕСТО ОД ВКАМАТУВАЊЕТО

Чести се случаите кога имаме еднакви периодични поединечни вложувања кои се почести од периодот на вкаматување. Параметрите со кои е определен овој вид на влогови се:

- V - сума која се вложува на еднакви временски интервали,
- p - декурзивна каматна стапка,
- п - антиципативна каматна стапка,
- k - бројот на вкаматувањата за дадената каматна стапка,
- m - бројот на вложувања во еден период на вкаматување и
- n - број на периоди со дадена каматна стапка.

Прво ќе го разгледаме случајот кога имаме декурзивна каматна стапка p. Како што знаеме, во еден период на вкаматување каматната стапка е $\frac{p}{k}$ и имаме m вложувања. На секое поединечно вложување треба да пресметаме интерес на интерес, но така да за него важи каматната стапка $\frac{p}{k}$. Како што знаеме ова може да го направиме со наоѓање на соодветната конформна каматна стапка p'. Од дадените услови имаме

$$V(1+\frac{p'}{100})^m = V(1+\frac{\frac{p}{k}}{100})$$

од каде наоѓаме:

$$p' = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100k}} - 1).$$

Според тоа, имаме поединечно вложување V, kmn периоди на вкаматување и за секој период важи каматна стапка p', т.е. декурзивен фактор $r' = 1+\frac{p'}{100}$. Ако вложувањето е антиципативно, тогаш од формулата (1) во точка 2.1 за збирот S на сите вложувања добиваме:

$$S = Vr'\frac{r'^{kmn}-1}{r'-1}, \tag{1}$$

а ако вложувањето е декурзивно, тогаш од формулата (5) во точка 2.2 добиваме:

$$S = V\frac{r'^{kmn}-1}{r'-1}. \tag{2}$$

Пример 11. На која сума ќе нарасне месечниот

а) антиципативен, б) декурзивен влог

од 3000 денари за 20 години со 5%p.a.(d) интерес на интерес, ако вкаматувањето е семестрално (полугодишно).

Решение. Од условот на задачата имаме

$$V = 3000,\ n = 20,\ k = 2,\ m = 6 \text{ и } p = 5\%\text{p.a.(d)}.$$

Соодветната конформна каматна стапка е

$$p' = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100k}} - 1) = 100(\sqrt[6]{1+\frac{5}{100\cdot 2}} - 1) = 0,412391546,$$

а декурзивниот фактор е

$$r' = 1+\frac{p'}{100} = 1+\frac{0,412391546}{100} = 1,004123915$$

и истиот треба да го примениме на $kmn = 2\cdot 6\cdot 20 = 240$ поединечни вложувања.

а) Во случај на антиципативно вложување ја користиме формулата (1) и добиваме:

$$S = Vr'\frac{r'^{kmn}-1}{r'-1} = 3000\cdot 1,004123915\cdot\frac{1,004123915^{240}-1}{1,004123915-1} = 1230878,878591 \text{ денари}.$$

б) Во случај на декурзивно вложување ја применуваме формулата (2) и добиваме:

$$S = V\frac{r'^{kmn}-1}{r'-1} = 3000\cdot\frac{1{,}004123915^{240}-1}{1{,}004123915-1} = 1225823{,}4 \text{ денари. } \blacksquare$$

Ќе го разгледаме случајот кога имаме антиципативна каматна стапка п. Како што знаеме, во еден период на вкаматување каматната стапка е $\frac{\text{п}}{k}$ и имаме m вложувања. На секое поединечно вложување треба да пресметаме интерес на интерес, но така да за него важи каматната стапка $\frac{\text{п}}{k}$. Како што знаеме ова може да го направиме со наоѓање на соодветната конформна каматна стапка $\text{р}'$, која во случајов е дадена со формулата

$$\text{п}' = 100(1-\sqrt[m]{1-\frac{\text{п}}{100k}}).$$

Според тоа, имаме поединечно вложување V, kmn периоди на вкаматување и за секој период важи каматна стапка $\text{п}'$, т.е. антиципативен фактор $\rho' = 1+\frac{\text{п}'}{100-\text{п}'}$. Ако вложувањето е антиципативно, тогаш од формулата (2) во точка 2.1 за збирот S на сите вложувања добиваме:

$$S = V\rho'\frac{\rho'^{kmn}-1}{\rho'-1}, \tag{3}$$

а ако вложувањето е декурзивно, тогаш од формулата (6) во точка 2.2 добиваме:

$$S = V\frac{\rho'^{kmn}-1}{\rho'-1}. \tag{4}$$

Пример 12. На која сума ќе нарасне месечниот

а) антиципативен, б) декурзивен влог

од 3000 денари за 20 години со 6%р.а.(а) интерес на интерес, ако вкаматувањето е квартално (тримесечно).

Решение. Од условот на задачата имаме

$$V = 3000,\ n = 20,\ k = 4,\ m = 3 \text{ и } p = 6\%\text{р.а.(а)}.$$

Соодветната конформна каматна стапка е

$$\text{п}' = 100(1-\sqrt[m]{1-\frac{\text{п}}{100k}}) = 100(1-\sqrt[3]{1-\frac{6}{100\cdot 4}}) = 0{,}502521042,$$

а антиципативниот фактор е

$$\rho' = 1+\frac{\text{п}'}{100-\text{п}'} = 1{,}005050591$$

и истиот треба да го примениме на $kmn = 4\cdot 3\cdot 20 = 240$ поединечни вложувања.

а) Во случај на антиципативно вложување ја користиме формулата (3) и добиваме:

$$S = V\rho' \frac{\rho'^{kmn} - 1}{\rho' - 1} = 3000 \cdot 1{,}005050591 \cdot \frac{1{,}005050591^{240} - 1}{1{,}005050591 - 1} = 1403187{,}609 \text{ денари.}$$

б) Во случај на декурзивно вложување ја применуваме формулата (4) и добиваме:

$$S = V \frac{\rho'^{kmn} - 1}{\rho' - 1} = 3000 \cdot \frac{1{,}005050591^{240} - 1}{1{,}005050591 - 1} = 1396136{,}295 \text{ денари.} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

11. По колку денари е вложувано на почетокот на секој месец, ако тие влогови на крајот од 10-та година со 6% р.а.(d) интерес на интерес и при годишно вкаматување нараснале на 146979 денари.
12. На која сума за 20 години ќе нарасне месечниот

    а) антиципативен, б) декурзивен влог,
    од 400 денари со 6% р.а.(d) интерес на интерес и при семестрално вкаматување.
13. На која сума за 20 години ќе нарасне месечниот

    а) антиципативен, б) декурзивен влог,
    од 400 денари со 6% р.а.(a) интерес на интерес и при семестрално вкаматување.
14. Едно лице од својата 30-та до 40-та година вложувало по 3000 денари месечно антиципативно, а од 45-та до 50-та година по 6000 денари тримесечно антиципативно. Со која сума лицето ќе располага на крајот од 50-та година, ако притоа се смета

    а) 6% р.а.(d), б) 6% р.а.(a),
    интерес на интерес, а вкаматувањето е семестрално.
15. Едно лице сака на крајот на својата 60-та година да располага со 2000000 денари. Од својата 30-та година до 35-та тоа вложувало месечно декурзивно по 2000 денари. Колку треба да вложува лицето од 35-та до 50-та година, за да ја постигне целта, ако каматната стапка е 6% р.а.(d) интерес на интерес, а вкаматувањето е семестрално.
16. По колку денари месечно

    а) антиципативно, б) декурзивно,
    треба да се вложува во период од 10 години со 6% р.а.(d) интерес на интерес и годишно вкаматување, ако се сака на крајот од 10-та година да се располага со 163310 денари?
17. По колку денари месечно

    а) антиципативно, б) декурзивно,
    треба да се вложува во период од 10 години со 6% р.а.(a) интерес на интерес и тримесечно вкаматување, ако се сака на крајот од 10-та година да се располага со 1000000 денари?

5. ПЕРИОДИЧНИ ВЛОГОВИ КОИ СЕ МЕНУВААТ ПО ПРИНЦИПОТ НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Како што рековме, кога поединечните вложувања меѓусебно се разликуваат можни се два случаи и тоа:

- поединечните вложувања се менуваат според некоја законитост и
- промената на периодичните вложувања е случајна.

Во оваа точка ќе го разгледаме случајот кога поединечните вложувања се членови на аритметичка прогресија.

5.1.АНТИЦИПАТИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Нека имаме n поединечни антиципативни влогови кои се менуваат по принципот на аритметичка прогресија

$$V+id\ ,\ i=0,1,2,...,n-1$$

и нека истите се вложуваат на еднакви временски интервали. Притоа, збирот S_n е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметан интерес на интерес при што имаме декурзивна или антиципативна каматна стапка, т.е. каматен фактор r или ρ.

Понатаму, првото вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за n периоди, второто вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот $V+d$ за $n-1$ период итн., $i-$то вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот $V+(i-1)d$ за $n-i+1$ периоди, итн. последното вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот $V+(n-1)d$ за еден период. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш овие вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^n,(V+d)r^{n-1},...,[V+(i-1)d]r^{n-i+1},...,[V+(n-1)d]r\ ,$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$\begin{aligned}S_n &= Vr^n+(V+d)r^{n-1}+...+[V+(i-1)d]r^{n-i+1}+...+[V+(n-2)d]r^2+[V+(n-1)d]r\\ &= V(r^n+r^{n-1}+...+r^{n-i+1}+...+r)+d[r^{n-1}+...+(i-1)r^{n-i+1}+...+(n-2)r^2+(n-1)r] \quad (1)\\ &= Vr\frac{r^n-1}{r-1}+d[r^{n-1}+...+(i-1)r^{n-i+1}+...+(n-2)r^2+(n-1)r].\end{aligned}$$

Да означиме

$$A = r^{n-1} + 2r^{n-2} ... + (n-3)r^3 + (n-2)r^2 + (n-1)r \,. \qquad (2)$$

Равенството (2) го множиме со r и го добиваме равенството

$$rA = r^n + 2r^{n-1} + ... + (n-3)r^4 + (n-2)r^3 + (n-1)r^2 \,. \qquad (3)$$

Ако од равенството (3) го одземеме равенството (2) добиваме:

$$rA - A = r^n + 2r^{n-1} - r^{n-1} + ... + (n-2)r^3 - (n-3)r^3 + (n-1)r^2 - (n-2)r^2 - (n-1)r$$
$$= r^n + r^{n-1} + ... + r^3 + r^2 + r - nr = r(r^{n-1} + ... + r^3 + r^2 + r + 1 - n) = r(\frac{r^n - 1}{r-1} - n),$$

т.е. равенството $A(r-1) = r(\frac{r^n - 1}{r-1} - n)$, од каде следува $A = \frac{r}{r-1}(\frac{r^n - 1}{r-1} - n)$. Конечно, од последното равенство и од равенството (1) добиваме:

$$S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r-1} + d\frac{r}{r-1}(\frac{r^n - 1}{r-1} - n) \,. \qquad (4)$$

Аналогно, ако ни е дадена антиципативна каматна стапка, тогаш антиципативниот фактор е ρ и за S_n добиваме:

$$S_n = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} + d\frac{\rho}{\rho - 1}(\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} - n) \,. \qquad (5)$$

Пример 13. На почетокот на годината едно лице вложило 20000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 10 години вложувало 1500 денари повеќе во однос на претходното вложување. Колкава е крајната вредност на влоговите на крајот од десеттатата година, ако вкаматувањето е годишно со

a) 6% р.а.(d) интерес на интерес,
b) 6% р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Во дадениот случај станува збор за антиципативен периодичен влог кој го следи принципот на аритметичка прогресија. Притоа имаме: $V = 20000$, $n = 10$ и $d = 1500$.

а) Ако $p = 6\%\text{р.а.(d)}$, тогаш $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$ и ако замениме во формулата (4) за вкупната вредност на влоговите добиваме :

$$S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r-1} + d\frac{r}{r-1}(\frac{r^n - 1}{r-1} - n) = 20000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} + 1500 \cdot \frac{1,06}{1,06 - 1} \cdot (\frac{1,06^{10} - 1}{1,06 - 1} - 10)$$
$$= 363723,92 \text{ denari} \,.$$

б) Ако $\text{п} = 6\%\text{р.а.(а)}$, тогаш декурзивниот фактор е

$$\rho = 1 + \frac{\text{п}}{100\text{-п}} = 1,063829787$$

и ако замениме во формулата (5) за вкупната вредност добиваме:

$$S_n = V\rho\frac{\rho^n-1}{\rho-1} + d\frac{\rho}{\rho-1}\left(\frac{\rho^n-1}{\rho-1}-n\right)$$

$$= 20000\cdot 1,063829787\cdot\frac{1,063829787^{10}-1}{1,063829787-1} + 1500\cdot\frac{1,063829787}{1,063829787-1}\cdot\left(\frac{1,063829787^{10}-1}{1,063829787-1}-10\right)$$

$$= 371044,66 \text{ денари. } \blacksquare$$

Пример 14. На почетокот на годината едно лице вложило 20000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 10 години вложувало 1500 денари помалку во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од десеттатата година, ако вкаматувањето е годишно со

a) 6% р.а.(d) интерес на интерес,
b) 6% р.а.(a) интерес на интерес.

Решение. Во даденият случај станува збор за антиципативен периодичен влог кој го следи принципот на аритметичка прогресија. Притоа, $V = 20000$, $n = 10$ и бидејќи влогот секое наредно вложување опаѓа за 1500 денари имаме $d = -1500$.

а) Ако $p = 6\%\text{р.а.(d)}$, тогаш $r = 1+\frac{p}{100} = 1+\frac{6}{100} = 1,06$ и ако замениме во формулата (4) за вкупната вредност на влоговите добиваме:

$$S_n = Vr\frac{r^n-1}{r-1} + d\frac{r}{r-1}\left(\frac{r^n-1}{r-1}-n\right) = 20000\cdot 1,06\cdot\frac{1,06^{10}-1}{1,06-1} - 1500\cdot\frac{1,06}{1,06-1}\cdot\left(\frac{1,06^{10}-1}{1,06-1}-10\right)$$

$$= 195141,79 \text{ denar i .}$$

б) Ако $\text{п} = 6\%\text{р.а.(а)}$, , тогаш антиципативниот фактор е

$$\rho = 1+\frac{\text{п}}{100\text{-п}} = 1,063829787$$

и ако замениме во формулата (5) за вкупната вредност добиваме:

$$S_n = V\rho\frac{\rho^n-1}{\rho-1} + d\frac{\rho}{\rho-1}\left(\frac{\rho^n-1}{\rho-1}-n\right)$$

$$= 20000\cdot 1,063829787\cdot\frac{1,063829787^{10}-1}{1,063829787-1} - 1500\cdot\frac{1,063829787}{1,063829787-1}\cdot\left(\frac{1,063829787^{10}-1}{1,063829787-1}-10\right)$$

$$= 200030,89 \text{ . } \blacksquare$$

5.2.ДЕКУРЗИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Нека имаме n поединечни декурзивни влогови кои се менуваат по принципот на аритметичка прогресија $V + id$, $i = 0,1,2,...,n-1$ и нека истите се вложуваат на еднакви временски интервали. Притоа, збирот S_n е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметан интерес на интерес

при што имаме декурзивна или антиципативна каматна стапка, т.е. каматен фактор r или ρ.

Понатаму, првото вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за $n-1$ период, второто вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот $V+d$ за $n-2$ период итн., $i-$то вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот $V+(i-1)d$ за $n-i$ периоди, итн. последното вложување ќе биде еднакво на влогот $V+(n-1)d$. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш овие вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^{n-1},(V+d)r^{n-2},...,[V+(i-1)d]r^{n-i},...,[V+(n-2)d]r,V+(n-1)d\ ,$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$\begin{aligned}S_n &= Vr^{n-1}+(V+d)r^{n-2}+...+[V+(i-1)d]r^{n-i}+...+[V+(n-2)d]r+[V+(n-1)d]\\ &= V(r^{n-1}+r^{n-2}+...+r+1)+d[r^{n-2}+...+(n-3)r^2+(n-2)r+(n-1)],\end{aligned}$$

т.е.

$$S_n = V\frac{r^n-1}{r-1}+d[r^{n-2}+...+(n-3)r^2+(n-2)r+(n-1)]\,. \tag{6}$$

Да означиме

$$B = r^{n-2}+2r^{n-3}...+(n-3)r^2+(n-2)r+(n-1)\,. \tag{7}$$

Равенството (7) го множиме со r и го добиваме равенството

$$rB = r^{n-1}+2r^{n-2}+...+(n-3)r^3+(n-2)r^2+(n-1)r\,. \tag{8}$$

Ако од равенството (7) го одземеме равенството (8) добиваме:

$$\begin{aligned}rB-B &= r^{n-1}+2r^{n-2}-r^{n-2}+...+(n-2)r^2-(n-3)r^2+(n-1)r-(n-2)r-(n-1)\\ &= r^{n-1}+r^{n-2}+...+r^2+r+1-n = \frac{r^n-1}{r-1}-n,\end{aligned}$$

т.е. равенството

$$B(r-1) = \frac{r^n-1}{r-1}-n\,,$$

од каде следува

$$B = \frac{1}{r-1}\left(\frac{r^n-1}{r-1}-n\right).$$

Конечно, од последното равенство и од равенството (6) добиваме:

$$S_n = V\frac{r^n-1}{r-1}+\frac{d}{r-1}\left(\frac{r^n-1}{r-1}-n\right). \tag{9}$$

Аналогно, ако ни е дадена антиципативна каматна стапка, тогаш антиципативниот фактор е ρ и за S_n добиваме:

$$S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} + \frac{d}{\rho - 1}\left(\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} - n\right). \tag{10}$$

Пример 15. На крајот на годината едно лице вложило 10000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 5 години вложувало 1000 денари повеќе во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од петтата година, ако вкаматувањето е годишно со

а) 8% р.а.(d) интерес на интерес, б) 8% р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Во дадениот случај станува збор за декурзивен периодичен влог кој го следи принципот на аритметичка прогресија. Притоа имаме: $V = 10000$, $n = 5$ и $d = 1000$.

а) Ако $p = 8\%\text{р.а.(d)}$, тогаш $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$ и ако замениме во формулата (9) за вкупната вредност на влоговите добиваме:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{d}{r - 1}\left(\frac{r^n - 1}{r - 1} - n\right) = 10000 \cdot \frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} + \frac{1000}{1{,}08 - 1} \cdot \left(\frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} - 5\right) = 69498{,}52.$$

б) Ако п=8% р.а.(а), тогаш $\rho = 1 + \frac{\text{п}}{100 - \text{п}} = 1{,}086956522$ и ако замениме во формулата (10) за вкупната вредност добиваме:

$$S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} + \frac{d}{\rho - 1}\left(\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} - n\right) = 10000 \cdot \frac{1{,}086956522^5 - 1}{1{,}086956522 - 1} + \frac{1000}{1{,}086956522 - 1} \cdot \left(\frac{1{,}086956522^5 - 1}{1{,}063829787 - 1} - 5\right)$$
$$= 70393{,}27. \blacksquare$$

Пример 16. На крајот на годината едно лице вложило 15000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 5 години вложувало 2000 денари помалку во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од петтата година, ако вкаматувањето е годишно со

а) 5% р.а.(d) интерес на интерес, б) 7% р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Во дадениот случај станува збор за декурзивен периодичен влог кој го следи принципот на аритметичка прогресија. Притоа имаме: $V = 15000$, $n = 5$ и $d = -2000$.

а) Ако $p = 5\%\text{р.а.(d)}$, тогаш

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$$

и ако замениме во формулата (9) за вкупната вредност на влоговите добиваме:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{d}{r - 1}\left(\frac{r^n - 1}{r - 1} - n\right) = 15000 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05 - 1} - \frac{2000}{1{,}05 - 1} \cdot \left(\frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05 - 1} - 5\right) = 61859{,}22 \text{ ден.}$$

б) Ако п=7% р.а.(а), тогаш $\rho = 1 + \frac{\text{п}}{100-\text{п}} = 1,075268817$ и ако замениме во формулата (10) за вкупната вредност добиваме:

$$S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} + \frac{d}{\rho - 1}\left(\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} - n\right) = 15000 \cdot \frac{1,075268817^5 - 1}{1,075268817 - 1} - \frac{2000}{1,075268817 - 1} \cdot \left(\frac{1,075268817^5 - 1}{1,075268817 - 1} - 5\right)$$
$$= 65609,71. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

18. На почетокот на годината едно лице вложило 40000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 7 години вложувало 5000 денари повеќе во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од седмата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 9% р.а.(d) интерес на интерес, б) 8% р.а.(а) интерес на интерес.
19. На почетокот на годината едно лице вложило 17000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 8 години вложувало 1700 денари помалку во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од осмата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 4,8% р.а.(d) интерес на интерес, б) 4,7% р.а.(а) интерес на интерес.
20. На крајот на годината едно лице вложило 12000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 6 години вложувало 2000 денари повеќе во однос на претходното вложување. Колкава е крајната вкупната на влоговите на крајот од шестата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 6,8% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6,7% р.а.(а) интерес на интерес.
21. На крајот на годината едно лице вложило 55000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 5 години вложувало 5000 денари помалку во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од петтата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 5,9% р.а.(d) интерес на интерес, б) 7,1% р.а.(а) интерес на интерес.

6. ПЕРИОДИЧНИ ВЛОГОВИ КОИ СЕ МЕНУВААТ ПО ПРИНЦИПОТ НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Во овој дел ќе ги разгледаме променливите периодични влогови, кои се менуваат по принципот на геометриска прогресија.

6.1.АНТИЦИПАТИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Нека имаме n поединечни антиципативни влогови кои се менуваат по принципот на геометриска прогресија Vq^i, каде $i = 0,1,2,...,n-1$ и нека истите се вложуваат на еднакви временски интервали. Притоа, збирот S_n е еднаков

на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметан интерес на интерес при што имаме декурзивна или антиципативна каматна стапка, т.е. каматен фактор r или ρ.

Понатаму, првото вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V за n периоди, второто вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот Vq за $n-1$ период итн., $i-$то вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот Vq^{i-1} за $n-i+1$ периоди, итн. последното вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот Vq^{n-1} за еден период. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш овие вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^n, Vqr^{n-1}, ..., Vq^{i-1}r^{n-i+1}, ..., Vq^{n-1}r,$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$\begin{aligned} S_n &= Vr^n + Vqr^{n-1} + ... + Vq^{i-1}r^{n-i+1} + ... + Vq^{n-1}r \\ &= Vr^n[1 + \frac{q}{r} + (\frac{q}{r})^2 + ... + (\frac{q}{r})^{n-1}] \\ &= Vr^n \frac{(\frac{q}{r})^n - 1}{\frac{q}{r} - 1} = Vr\frac{q^n - r^n}{q - r}. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогно, ако ни е дадена антиципативна каматна стапка, тогаш антиципативниот фактор е ρ и за S_n добиваме:

$$S_n = V\rho\frac{q^n - \rho^n}{q - \rho}. \tag{2}$$

Пример 17. На почетокот на годината едно лице вложило 20000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 10 години го зголемувало влогот за 10% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од десеттатата година, ако вкаматувањето е годишно со

а) 6% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6%р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Бидејќи секој наредден влог се зголемувал за 10% во однос на претходниот влог имаме периодичен влог кој се менува по принципот на геометриска прогресија. Притоа $V = 20000$, $n = 10$ и $q = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.

а) Во случајот декурзивниот фактор е $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$ и ако замениме во формулата (1) добиваме:

$$S_n = Vr\frac{q^n - r^n}{q-r} = 20000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,10^{10} - 1,06^{10}}{1,1-1,06} = 425534,22 \text{ денари.}$$

б) Во случајот $\rho = 1 + \frac{\text{п}}{100-\text{п}} = 1,063829787$ и ако замениме во формулата (2) добиваме:

$$S_n = V\rho\frac{q^n - \rho^n}{q-\rho} = 20000 \cdot 1,063829787 \cdot \frac{1,1^{10} - 1,063829787^{10}}{1,1-1,063829787} = 433605,37 \text{ денари.} \blacksquare$$

Пример 18. На почетокот на годината едно лице вложило 20000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 10 години го намалувало влогот за 5% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од десеттатата година, ако вкаматувањето е годишно со:

а) 7% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6%р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Бидејќи секој наредеден влог се намалувал за 5% во однос на претходниот влог имаме периодичен антиципативен влог кој се менува по принципот на геометриска прогресија. Притоа

$$V = 20000,\ n = 10 \text{ и } q = 1 - \frac{5}{100} = 0,95.$$

а) Во случајот декурзивниот фактор е $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1,07$ и ако замениме во формулата (1) добиваме:

$$S_n = Vr\frac{q^n - r^n}{q-r} = 20000 \cdot 1,07 \cdot \frac{0,95^{10} - 1,07^{10}}{0,95-1,07} = 244033,90 \text{ денари.}$$

б) Во случајот $\rho = 1 + \frac{\text{п}}{100-\text{п}} = 1,063829787$ и ако замениме во формулата (2) добиваме:

$$S_n = V\rho\frac{q^n - \rho^n}{q-\rho} = 20000 \cdot 1,063829787 \cdot \frac{0,95^{10} - 1,063829787^{10}}{0,95-1,063829787} = 235117,08 \text{ денари.} \blacksquare$$

6.2.ДЕКУРЗИВНО ВЛОЖУВАЊЕ

Нека имаме n поединечни декурзивни влогови кои се менуваат по принципот на геометриска прогресија Vq^i, каде $i = 0,1,2,...,n-1$ и нека истите се вложуваат на еднакви временски интервали. Притоа, збирот S_n е еднаков на збирот на поединечните вложувања на кои е пресметан интерес на интерес при што имаме декурзивна или антиципативна каматна стапка, т.е. каматен фактор r или ρ.

Понатаму, првото вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот V

за $n-1$ период, второто вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот Vq за $n-2$ периоди итн., $i-$то вложување заедно со пресметаниот интерес на интерес ќе биде еднакво на сумата која се добива со вкаматување на влогот Vq^{i-1} за $n-i$ периоди, итн. последното вложување ќе биде еднакво на влогот Vq^{n-1}. Ако имаме декурзивна каматна стапка p, тогаш овие вложувања ќе бидат еднакви на

$$Vr^{n-1}, Vqr^{n-2}, ..., Vq^{i-1}r^{n-i}, ..., Vq^{n-1},$$

каде r е соодветниот декурзивен фактор. Затоа,

$$\begin{aligned} S_n &= Vr^{n-1} + Vqr^{n-2} + ... + Vq^{i-1}r^{n-i} + ... + Vq^{n-1} \\ &= Vr^{n-1}[1 + \frac{q}{r} + (\frac{q}{r})^2 + ... + (\frac{q}{r})^{n-1}] \\ &= Vr^{n-1}\frac{(\frac{q}{r})^n - 1}{\frac{q}{r} - 1} = V\frac{q^n - r^n}{q - r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогно, ако ни е дадена антиципативна каматна стапка, тогаш антиципативниот фактор е ρ и за S_n добиваме:

$$S_n = V\frac{q^n - \rho^n}{q - \rho}. \tag{4}$$

Пример 19. На крајот на годината едно лице вложило 10000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 8 години го зголемувало влогот за 15% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од осмата година, ако вкаматувањето е годишно со:

а) 8% р.а.(d), б) 7,5% р.а.(а).

Решение. Бидејќи секој наредден влог се зголемува за 15% во однос на претходниот влог имаме периодичен декурзивен влог кој се менува по принципот на геометриска прогресија. Притоа $V = 10000$, $n = 8$ и $q = 1{,}15$.

а) Во случајот декурзивниот фактор е $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$ и ако замениме во формулата (3) добиваме:

$$S_n = V\frac{q^n - r^n}{q - r} = 10000 \cdot \frac{1{,}15^8 - 1{,}08^8}{1{,}15 - 1{,}08} = 172584{,}66 \text{ денари.}$$

б) Во случајот $\rho = 1 + \frac{п}{100 - п} = 1{,}081081081$ и ако замениме во формулата (4) добиваме

$$S_n = V\frac{q^n - \rho^n}{q - \rho} = 10000 \cdot \frac{1{,}15^8 - 1{,}081081081^8}{1{,}15 - 1{,}081081081} = 173133{,}64 \text{ денари.} \blacksquare$$

Пример 20. На крајот на годината едно лице вложило 25000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 8 години го намалувало влогот 8% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од осмата година, ако вкаматувањето е годишно со

а) 7% р.а.(d) интерес на интерес,

б) 6,6%р.а.(а) интерес на интерес.

Решение. Бидејќи секој нареден влог се намалува за 8% во однос на претходниот влог имаме периодичен декурзивен влог кој се менува по принципот на геометриска прогресија. Притоа

$$V = 25000,\ n = 8 \text{ и } q = 1 - \frac{8}{100} = 0,92 .$$

а) Во случајот декурзивниот фактор е $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1,07$ и ако замениме во формулата (3) добиваме:

$$S_n = V\frac{q^n - r^n}{q - r} = 25000 \cdot \frac{0,92^8 - 1,07^8}{0,92 - 1,07} = 200827,88 \text{ денари.}$$

б) Во случајот $\rho = 1 + \frac{\text{п}}{100 - \text{п}} = 1,070663812$ и ако замениме во формулата (4) добиваме:

$$S_n = V\frac{q^n - \rho^n}{q - \rho} = 25000 \cdot \frac{0,92^8 - 1,070663812^8}{0,92 - 1,070663812} = 201361,12 \text{ денари. } \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

22. На почетокот на годината едно лице вложило 15000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 7 години го зголемувало влогот за 12% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од седмата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 7% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6,6% р.а.(а) интерес на интерес.
23. На почетокот на годината едно лице вложило 22000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 12 години го намалувало влогот за 7% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од дванаесеттата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 7,1% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6,2% р.а.(а) интерес на интерес.
24. На крајот на годината едно лице вложило 9000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 6 години го зголемувало влогот за 9% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од шестата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 7,4% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6,7% р.а.(а) интерес на интерес.
25. На крајот на годината едно лице вложило 13000 денари, а потоа секоја наредна година во период од 4 години го намалувало влогот 11% во однос на претходното вложување. Колкава е вкупната вредност на влоговите на крајот од четвртата година, ако вкаматувањето е годишно со
    а) 7% р.а.(d) интерес на интерес, б) 6,6% р.а.(а) интерес на интерес.

ГЛАВА III
ДИСКОНТНИ ПРЕСМЕТУВАЊА

1. ПОИМ ЗА ДИСКОНТИРАЊЕ. ВИДОВИ ДИСКОНТИРАЊА

Во практиката се појавуваат случаи кога една сума пари, земена на заем за определен временски период, се исплаќа предвремено. Во овие случаи треба да се пресмета делот од каматата, за кој треба да се намали крајната сума која се должи и кој го нарекуваме дисконт. Според тоа, ако имаме дадено номинално задолжување, кое треба да се плати после определен период, и ако истото го плаќаме пред истекот на рокот, тогаш сумата за која се намалува номиналното задолжување во моментот на предвремено плаќање на долгот ја нарекуваме *дисконт*. Постапката на претворање на едно задолжение кое треба да се плати на определена дата, во задолжение кое предвремено се плаќа на определена дата, т.е. наоѓањето на сегашната вредност се нарекува *дисконтирање* (*есконтирање*). Суштината на дисконтирањето се состои во извршување на дисконтните пресметувања.

При реализирање на дисконтните пресметувања ќе ги користиме следниве ознаки:

- N - *номинална сума* (*вредност*) *на задолжението*, т.е. сумата која треба да се плати после определено време,
- p - каматна стапка која се користи при дисконтирањето,
- d - *дисконтна* (*есконтна*) *стапка*, сума која се одобрува при предвремено плаќање на 100 денари номинална вредност,
- D - *дисконт* (*есконт*), кој е еднаков на сумата за која се намалува номиналната вредност на задолжувањето,
- *дисконтен* (*есконтен*) *рок*, кој е еднаков на времето изразено во денови t, месеци m или години n, на предвремено плаќање на долгот, и
- E - *реалната* (*ефективната*) *сума* со која се отплаќа номиналното задолжение во моментот на предвремено плаќање.

Пресметувањето на дисконтот може да се изврши на два начини, што значи постојат и два вида дисконти и тоа:

- *банкарски* или *трговски* (*практичен*) *дисконт*, кај кој за основа на пресметувањата на дисконтот се зема номиналната вредност, а ефективната вредност се добива како разлика на номиналната вредност и досконтот, и

- *математички* (*точен*) *дисконт*, кај кој номиналната вредност се добива како збир на ефективната вредност и соодветната камата, која се пресметува за ефективната вредност.

2. МАТЕМАТИЧКИ ДИСКОНТ

Како што рековме, кај математичкиот дисконт се оперира со ефективната вредност на која се пресметува соодветна камата. Вака пресметаната камата всушност е еднаква на дисконтот, што значи дека номиналната вредност се добива како збир на ефективната вредност и пресметаната камата, т.е. $N = E + D$. Според тоа, ако дисконтниот рок е даден во денови, тогаш во случај на проста камата дисконтот ќе го пресметаме според формулата $D = \frac{Ept}{360 \cdot 100}$ и ако замениме во формулата $N = E + D$ добиваме $N = E + \frac{Ept}{36000}$, од каде наоѓаме

$$E = \frac{N}{1 + \frac{pt}{36000}}. \tag{1}$$

Аналогно, во случаите кога дисконтниот рок е даден во месеци, односно во години, за пресметување на ефективната сума важат формулите:

$$E = \frac{N}{1 + \frac{pm}{1200}}, \tag{2}$$

$$E = \frac{N}{1 + \frac{pn}{100}}, \tag{3}$$

соодветно.

Пример 1. Компанијата *X* и должи на банката *B* сума од 250000 денари, која треба да се плати на 15.05. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 6.04 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 6.04 се отплаќа долгот, ако банката применува проста годишна каматна стапка од 8% .

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е даден во денови ќе ја користиме формулата (1). Во случајов имаме $N = 250000$ денари, $t = 40$ денови и $p = 8\%$, па затоа

$$E = \frac{N}{1 + \frac{pt}{36000}} = \frac{250000}{1 + \frac{8 \cdot 40}{36000}} = 247797{,}36 \text{ денари. } \blacksquare$$

На прв поглед изгледа дека дисконтните пресметувања се непотребно оптеретување, меѓутоа следниов пример покажува дека тоа не е така.

Пример 2. На 1.01 лицето *A* му дава на лицето *B* заем од 100000 денари за период од една година со проста годишна каматна стапка од 12%. Но, на 1.07 истата година лицето *A* решава да купи автомобил од салонот на лицето *B*. После пресметката лицето *A* заклучува дека му недостасуваат средства, па решава да ја искористи позајмицата која му ја дал на лицето *B* и која на крајот на годината треба да се валозира на 112000 денари. За таа цел му предлага на лицето *B* позајмицата да ја врати со дисконт. Лицето *B* се согласува позајмицата да ја врати со дисконт, но само ако тој му обезбедува проста годишна камата од 16%, на што лицето *A* се согласува, т.е. разликата од 4% ја прифаќа како свој трошок. Колкава е ефективната вредност!

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е даден во месеци ќе ја користиме формулата (2). Во случајов имаме $N = 112000$ денари, $m = 6$ месеци и $p = 16\%$, па затоа

$$E = \frac{N}{1+\frac{pm}{1200}} = \frac{112000}{1+\frac{16\cdot 6}{1200}} = 103703{,}70 \text{ денари.}$$

Да забележиме дека, ако лицето *B*, по истекот на шесте месеци, заедно со пристигнатата камата му ги вратеше парите на лицето *A*, тогаш сумата ќе изнесуваше

$$100000 \cdot (1+\frac{6\cdot 12}{1200}) = 106000 \text{ денари. } \blacksquare$$

Од претходниот пример, станува јасно дека дисконтните пресметувања ни овозможуваат да извршиме пресметки кај кредитните процеси кои на друг начин не сме во состојба да ги направиме.

Во случај кога нараснувањето на капиталот е според условите на сложена камата, тогаш природно е неговото намалување (дисконтирање) да се реализира со сложен дисконт.

Ако ја искористиме формулата за нараснување на капиталот при сложена каматна стапка, тогаш во случај кога дисконтниот рок е даден во години добиваме $N = E(1+\frac{p}{100})^n$, т.е.

$$E = \frac{N}{(1+\frac{p}{100})^n}. \tag{4}$$

Аналогно, кога дисконтниот рок е даден во месеци, односно во денови ги добиваме формулите:

$$E = \frac{N}{(1+\frac{p}{1200})^m}, \tag{5}$$

$$E = \frac{N}{(1+\frac{p}{36000})^t}, \tag{6}$$

соодветно. Изразите

$$\frac{1}{(1+\frac{p}{100})^n}, \quad \frac{1}{(1+\frac{p}{1200})^m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1+\frac{p}{36000})^t},$$

со едно име ги нарекуваме *дисконтни фактори*, при што истите се користат кога дисконтниот рок е зададен во години, месеци и денови, соодветно.

Пример 3. Компанијата X и должи на банката B сума од 250000 денари, која треба да се плати на 15.05. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 6.04 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 6.04 се отплаќа долгот, ако банката применува сложена каматна стапка од 8%.

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е даден во денови ќе ја искористиме формулата (6). Во случајов имаме $N = 250000$ денари, $t = 40$ денови и $p = 8\%$, па затоа

$$E = \frac{N}{(1+\frac{p}{36000})^t} = \frac{250000}{(1+\frac{8}{36000})^{40}} = 247787{,}87 \text{ денари. } \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

1. Компанијата X и должи на банката B сума од 360000 денари, која треба да се плати на 15.07. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 12.04 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 12.04 се отплаќа долгот, ако банката применува проста годишна каматна стапка од 9% .
2. Компанијата X и должи на банката B сума од 150000 денари, која треба да се плати на 15.07. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 15.03 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 15.03 се отплаќа долгот, ако банката применува проста годишна каматна стапка од 12% .
3. Компанијата X и должи на банката B сума од 1200000 денари, која треба да се плати на 15.09. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 10.07 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 10.07 се отплаќа долгот, ако банката применува сложена годишна каматна стапка од 9% .
4. Компанијата X и должи на банката B сума од 1200000 денари, која треба да се плати на 15.09. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 15.04 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 15.04 се отплаќа долгот, ако банката применува сложена годишна каматна стапка од 12% .

3. БАНКАРСКИ ДИСКОНТ

Како што рековме, кај банкарскиот дисконт за основа на пресметувањата на дисконтот се зема номиналната вредност, а ефективната вредност се добива како разлика на номиналата и дисконтот, т.е. $E = N - D$. Притоа, за

пресметување на дисконтот се користи дисконтната стапка. Според тоа, ако дисконтниот рок е даден во денови, тогаш во случај на проста дисконтна стапка дисконтот ќе го пресметаме според формулата $D=\frac{Ndt}{360\cdot 100}$ и ако замениме во формулата $E=N-D$ добиваме

$$E=N(1-\frac{dt}{36000}). \tag{1}$$

Аналогно, во случаите кога дисконтниот рок е даден во месеци, односно во години за пресметување на ефективната сума важат формулите

$$E=N(1-\frac{dm}{1200}), \tag{2}$$

$$E=N(1-\frac{dn}{100}), \tag{3}$$

соодветно.

Пример 4. Компанијата X и должи на банката B сума од 250000 денари, која треба да се плати на 15.05. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 6.04 истата година. Користејќи го банкарскиот дисконт пресметајте ја ефективната вредност со која на 6.04 се отплаќа долгот, ако банката одобрува проста дисконтна стапка 8%.

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е даден во денови ќе ја искористиме формулата (1). Во случајов имаме $N=250000$ денари, $t=40$ денови и $d=8\%$, па затоа

$$E=N(1-\frac{dt}{36000})=250000\cdot(1-\frac{8\cdot 40}{36000})=247777,78 \text{ денари. } \blacksquare$$

Ако ги споредиме резултатите од примерите 1 и 4, во кои каматната и дисконтната стапка се еднакви, ќе забележиме дека банкарскиот дисконт е поповолен за клиентот. Ќе докажеме дека последното важи и во општ случај. Имено, ако $p=d$, и дисконтниот рок е даден во денови, тогаш од последователно наоѓаме

$$1-(\frac{pt}{36000})^2<1,$$

$$(1-\frac{pt}{36000})(1+\frac{pt}{36000})<1,$$

$$1-\frac{pt}{36000}<\frac{1}{1+\frac{pt}{36000}},$$

$$N(1-\frac{dt}{36000})<\frac{N}{1+\frac{pt}{36000}},$$

што и требаше да се покаже. Во случај кога дисконтниот рок е даден во месеци, односно години тврдењето се докажува на потполно аналоген начин.

Природно се поставува прашањето, која е врската меѓу дисконтната и каматната стапка, за да при дадени номинална вредност и дисконтен рок се постигне иста ефективна вредност. Во случај кога дисконтниот рок е зададен во денови имаме:

$$N(1-\frac{dt}{36000})=\frac{N}{1+\frac{pt}{36000}},$$

од што со елементарни трансформации наоѓаме:

$$d=\frac{p}{1+\frac{pt}{36000}} \text{ и } p=\frac{d}{1-\frac{dt}{36000}}. \tag{4}$$

Понатаму, ако дисконтниот рок е зададен во месеци, ги добиваме релациите

$$d=\frac{p}{1+\frac{pm}{1200}} \text{ и } p=\frac{d}{1-\frac{dm}{1200}}, \tag{5}$$

а ако е зададен во години релациите

$$d=\frac{p}{1+\frac{pn}{100}} \text{ и } p=\frac{d}{1-\frac{dn}{100}}. \tag{6}$$

Како што можеме да видиме, дисконтната стапка е секогаш помала од каматната стапка која овозможува да се добие иста ефективна вредност.

Пример 5. Банката X на своите едногодишни кредитни пласмани засметува проста камата од 20%. Компанијата A и нуди да го отплати својот долг кој достасува после една година. Колкава треба да биде дисконтната стапка, која на банката ќе и овозможи остварување на зацртаната кредитна политика?

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е една година, т.е. $n=1$ и каматата е $p=20\%$, со замена во првата формула во (6) добиваме

$$d=\frac{p}{1+\frac{pn}{100}}=\frac{20}{1+\frac{20\cdot 1}{100}}=16,66667\%. \blacksquare$$

Како и каматната стапка, така и дисконтната стапка може да биде и сложена. Во случај кога имаме сложена дисконтна стапка, а дисконтниот рок е зададен во години, тогаш номиналната вредност во првата година се намалува за сума $\frac{Nd}{100}$, па значи сумата која треба да се дисконтира една година порано од денот на доспевањето на долгот изнесува $N-\frac{Nd}{100}=N(1-\frac{d}{100})$. Понатаму, последната се намалува за сума $\frac{N(1-\frac{d}{100})d}{100}$, па значи сумата која треба да се дисконтира две години порано од денот на доспевањето на долгот изнесува

$$N(1-\frac{d}{100})-\frac{N(1-\frac{d}{100})d}{100}=N(1-\frac{d}{100})^2.$$

Продолжувајќи ја постапката добиваме дека сумата која треба да се дисконтира n години порано од денот на доспевањето на долгот и која е еднаква на ефективната сума е еднаква на

$$E=N(1-\frac{d}{100})^n, \tag{7}$$

(зошто?). Со аналогни размислувања се покажува дека во случај кога дисконтниот рок е зададен во месеци, односно денови, тогаш ефективната сума се пресметува според формулата

$$E=N(1-\frac{d}{1200})^m, \tag{8}$$

односно

$$E=N(1-\frac{d}{36000})^t, \tag{9}$$

соодветно.

Изразите

$$(1-\frac{d}{100})^n,\ (1-\frac{d}{1200})^m \text{ и } (1-\frac{d}{36000})^t$$

ги нарекуваме *дисконтни множители*, при што истите се користат кога дисконтниот рок е зададен во години, месеци и денови, соодветно.

Пример 6. Компанијата X и должи на банката B сума од 250000 денари, која треба да се плати на 15.05. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 6.04 истата година. Користејќи го банкарскиот дисконт, пресметајте ја ефективната вредност со која на 6.04 се отплаќа долгот, ако банката применува сложена дисконтна стапка од 8%.

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е даден во денови ќе ја користиме формулата (9). Во случајов имаме $N=250000$ денари, $t=40$ денови и $d=8\%$, па затоа

$$E=N(1-\frac{d}{36000})^t=250000(1-\frac{8}{36000})^{40}=247787,38 \text{ денари.} \blacksquare$$

Ако ги споредиме резултатите од примерите 3 и 6, во кои каматната и дисконтната стапка се еднакви, ќе забележиме дека банкарскиот дисконт е поповолен за клиентот. Ќе докажеме дека последното важи и во општ случај. Имено, ако $p=d$, и дисконтниот рок е даден во денови, тогаш од последователно наоѓаме

$$1-(\frac{p}{36000})^2<1,$$

$$(1-\frac{p}{36000})(1+\frac{p}{36000})<1,$$

$$(1-\frac{p}{36000})^t < \frac{1}{(1+\frac{p}{36000})^t},$$

$$N(1-\frac{d}{36000})^t < \frac{N}{(1+\frac{p}{36000})^t},$$

што и требаше да се покаже. Во случај кога дисконтниот рок е даден во месеци, односно години тврдењето се докажува на потполно аналоген начин.

Природно се поставува прашањето, која е врската меѓу дисконтната и каматната стапка, за да при дадени номинална вредност и дисконтен рок се постигне иста ефективна вредност. Лесно се покажува дека и во овој случај важат формулите:

$$d = \frac{p}{1+\frac{p}{36000}}, \quad p = \frac{d}{1-\frac{d}{36000}}, \tag{10}$$

$$d = \frac{p}{1+\frac{p}{1200}}, \quad p = \frac{d}{1-\frac{d}{1200}}, \text{ и} \tag{11}$$

$$d = \frac{p}{1+\frac{p}{100}}, \quad p = \frac{d}{1-\frac{d}{100}}. \tag{12}$$

Пример 7. Банката X на своите едногодишни кредитни пласмани засметува сложена камата од 20%. Компанијата A нуди да го отплати својот долг кој доспева после две години. Колкава треба да биде дисконтната стапка, која на банката ќе и овозможи остварување на зацртаната кредитна политика?

Решение. Бидејќи дисконтниот рок е две години, т.е. $n = 2$ и каматата е $p = 20\%$, со замена во првата формула во (6) добиваме

$$d = \frac{p}{1+\frac{pn}{100}} = \frac{20}{1+\frac{20\cdot 2}{100}} = 14,2857\%. \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

5. Компанијата X и должи на банката B сума од 360000 денари, која треба да се плати на 15.07. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 12.04 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 12.04 се отплаќа долгот, ако банката применува проста годишна дисконтна стапка од 9% .
6. Компанијата X и должи на банката B сума од 150000 денари, која треба да се плати на 15.07. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 15.03 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 15.03 се отплаќа долгот, ако банката применува проста годишна дисконтна стапка од 12% .
7. Компанијата X и должи на банката B сума од 1200000 денари, која треба да се плати на 15.09. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 10.07 истата

година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 10.07 се отплаќа долгот, ако банката применува сложена годишна дисконтна стапка од 9% .

8. Компанијата *X* и должи на банката *B* сума од 1200000 денари, која треба да се плати на 15.09. Компанијата ја исплаќа сумата предвремено, на 15.04 истата година. Пресметајте ја ефективната вредност со која на 15.04 се отплаќа долгот, ако банката применува сложена годишна дисконтна стапка од 12% .

4. ПРИМЕНА НА ДИСКОНТНИТЕ ПРЕСМЕТУВАЊА

а) *Меница* е хартија од вредност, издадена во строго пропишана законска форма, со која едно лице го задолжува или му наредува на друго лице да му ја исплати на трето лице назначената (*номиналната*) вредност на меницата во *определен рок* (на *определена дата, валута*). Лицето кое ја издава меницата се нарекува *издавач* (*трасант*), лицето кое е овластено да го добие износот на меницата се нарекува *реминент* (*бенифициент*), а лицето кое ја плаќа номиналната вредност на меницата се нарекува *трасат*. Реминентот може да побара издадената меница да биде претходно потврдена (*акцептирана*) од трасатот. Затоа, во повеќето случи издавачот ја испраќа меницата кај трасатот на акцептирање. Всушност, акцептирањето е писмена потврда на трасатот за плаќање на меницата во предвидениот рок.

Во многу случаи, реминентот има потреба побрзо да дојде до пари, па затоа тој до денот на плаќањето сопственоста на меницата може да ја префрли на други лица. Јасно, последниот сопственик на меницата ја наплатува нејзината номинална вредност од трасатот. Притоа, можно е трасатот да го откаже плаќањето на меницата и тогаш меницата се протестира. При протестирањето на меницата, нејзиниот сопственик има право да побара номиналната вредност да биде платена од било кој од претходните сопственици. На тој начин, по обратен редослед една протестирана меница може да стигне до издавачот, кој е должен да ја плати номиналната вредност заедно со каматите и трошоците за протестирање (постапка која е предмет на разработка на трговското право).

Комерцијален запис е хартија од вредност, со која едно лице се задолжува самото себе на друго лице да ја исплати номиналната вредност на записот во определен рок (на *определена дата, валута*). Според тоа, кај комерцијалниот запис трасантот и трасатот се едно исто лице.

Причина за издавање на меница или комерцијален запис е следнава ситуација: лицето *A* нема доволно готови пари за да набави некоја стока, но има одлични деловни врски со своите доставувачи и сигурни пазари, па затоа моменталниот недостиг на готови пари за плаќање на доставената стока се надминува со склучување на кредитна зделка. Имено, доставувачот на стоки се јавува како кредитор на лицето *A*, со тоа што на лицето *A* му ги доставува

потребните стоки кои заедно со соодветна камата треба да се платат во определен рок (на определена дата). Притоа, лицето A издава меница или комерцијален запис, со што обврзува трето лице или се обврзува самиот себе дека на наведената дата ќе биде платен износот кој се должи.

За сопственикот на меницата (комерцијалниот запис) е важно дека тој не е должен да го чека рокот на нејзино доспевање. Имено, тој може меницата да ја достави на исплаќање на својата банка или на друга специјализирана установа. Притоа, операцијата која ја извршува банката се нарекува дисконтирање на меницата (комерцијалниот запис). Во оваа операција, всушност стоковиот кредит се трансформира во банкарски, со што банката се јавува во улога на кредитор. Јасно, банката на реминентот му ја исплаќа ефективната сума, а не номиналната сума на меницата, со што всушност остварува право да ја наплати главницата на заемот и камата од денот на дисконтирањето на меницата (комерцијалниот запис) до денот на нејзиното доспевање.

При дисконтирањето, банката на номиналната вредност пресметува определена провизија, а исто така наплатува и манипулативни трошоци. Провизијата и манипулативните трошоци на крајот се одземаат од пресметаната ефективна вредност. Понатаму, банките дисконтирањето го вршат користејќи го банкарскиот дисконт, т.е. според кој како што знаеме, ако дисконтниот рок е зададен во денови, тогаш ефективната сума која ја добива сопственикот на меницата се пресметува според формулата

$$E = N(1-\frac{dt}{36000}), \tag{1}$$

а дисконтот според формулата

$$D = \frac{Ndt}{36000}. \tag{2}$$

Пример 8. Трговското друштво А продало стока и за тоа добило меница во висина од 3000000 денари, која треба да ја наплати на 20.04. Во меѓувреме трговското друштво има потреба од средства, па затоа одлучило на 21.03 истата година да ја продаде на банката В со дисконтна стапка од 6%. Притоа банката наплатува 0,025% провизија и 50 денари манипулативни трошоци. Колку банката му исплатила на трговското друштво?

Решение. Според условот на задачата имаме

$$N = 3000000 \text{ денари, } d = 6\% \text{ и } t = 30 \text{ денови.}$$

Ако ја искористиме формулата (1), добиваме дека ефективната сума е

$$E = N(1-\frac{dt}{36000}) = 3000000(1-\frac{6\cdot 30}{36000}) = 2985000 \text{ денари,}$$

што значи дисконтот е $D = 3000000 - 2985000 = 15000$ денари. Понатаму, банката ќе наплати провизија

$$3000000 \cdot \frac{0{,}025}{100} = 750 \text{ денари},$$

и 50 денари манипулативни трошоци, кои се одземаат од ефективната сума. Според тоа, трговското друштво ќе добие $2985000 - 750 - 50 = 2984200$ денари.

Вообичаено е претходните пресметки да се запишуваат на следниов начин:

***Дисконтирано на* 21.03**

Номинална вредност	3000000 денари на 20.04
1. Дисконт од 6% за 30 денови	15000 денари
2. Провизија од 0,025%	750 денари
3. Манипулативни трошоци	50 денари
Ефективна сума исплатена на 21.03:	2984200 денари. ■

Нека имаме n меници со номинални вредности $N_i, i = 1, 2, ..., n$, кои треба да се дисконтираат за периоди $t_i, i = 1, 2, ..., n$ со дисконтни стапки $d_i, i = 1, 2, ..., n$. Аналогно, како и во случај на терминската сметка, се покажува дека ако сакаме истите да ги дисконтираме истовремено во време t_S, со заедничка дисконтна стапка d_S, но притоа добиениот дисконт да биде еднаков на збирот на поединечните дисконти, тогаш тоа можеме да го направиме користејќи ги формулите:

$$d_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i} \text{ и } t_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i d_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i d_i}. \tag{3}$$

Понатаму, ако сите меници се дисконтираат во една банка, логично е за сите меници да имаме иста дисконтна стапка, па ако замениме во втората формула во (3) за периодот на дисконтирање, кој го нарекуваме среден рок (средна дата), ја добиваме формулата

$$t_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}. \tag{4}$$

Пример 9. Лицето *X* во својата банка на 15.12 приложува меница *A* со номинална вредност од 300000 денари со дата на плаќање 25.12 и меница *B* со номинална вредност 500000 денари и дата на плаќање 20.03 следната година, со барање дисконтираните вредности на мениците да се префрлат на неговата сметка на средна дата, т.е. на ист ден да располага со двете суми, но притоа ниту банката ниту лицето *X* да не се оштетени. Која е таа дата?

Решение. Од условот на задачата добиваме:

- за меницата А важи $N_1 = 300000$ денари и $t_1 = 10$ денови, и
- за меницата В важи $N_2 = 500000$ денари и $t_2 = 95$ денови.

Ако замениме во формулата (4) за средниот рок на дисконтирање добиваме

$$t_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i} = \frac{10 \cdot 300000 + 95 \cdot 500000}{300000 + 500000} \approx 63 \text{ денови.} \blacksquare$$

б) *Благајничките записи* се хартии од вредност кои во големи серии ги емитува државата и воглавно се користат за покривање на буџетскиот дефицит. По правило рокот за кој се издаваат благајничките записи не е поголем од една година, а најчесто се работи за периоди од три, шест или девет месеци.

Благајничките записи се емитираат со дисконт од номиналната вредност, по која се откупуваат на денот на достасување за наплата на записите. Според тоа, доходот од инвестирањето во благајничките записи е еднаков на разликата меѓу *номиналната вредност* (цената по која ќе бидат исплатени на денот на достасување за наплата) и *дисконтираната вредност* (цената по која се откупени). Понатаму, краткиот рок на благајничките записи и гарантираниот бонитет (платноспособноста) на емитерот (државата) се фактори, кои влијаат купувањето на благајничките записи да е една од најсигурните инвестиции на финансискиот пазар.

Благајничките записи најчесто се продаваат на аукции, каде учествуваат банки и други инвестициони посредници. Притоа, на аукциите најчесто се учествува со два вида порачки: конкурентски и неконкурентски. При конкурентските порачки секој учесник на аукцијата нуди цена (процент од номиналната вредност со точност до две децимали) и количество благајнички записи (по номинал) кои сака да ги купи од соодветната емисија. Комисијата која ја спроведува аукцијата ги рангира понудите во опаѓачки редослед, при што ги наоѓа кумулативните вредности на количеството благајнички записи. Потоа, почнувајќи од најдобрата понуда се задоволуваат порачките на учесниците на аукцијата. Доколку имаме неконкурентски порачки, тогаш тие се исполнуваат според постигната средна цена на конкурентските порачки.

Пример 10. На 25.01 е објавена аукција за продажба на тримесечни благајнички записи со достасување за исплата на 26.04, со вкупна номинална вредност од 150000000 денари. На аукцијата се добиени следниве конкурентски порачки:

- банката $B1$ сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 35000000 по цена од 89,81,

- банката $B2$ сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 55000000 по цена од 89,83,
- банката $B3$ сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 15000000 по цена од 89,79,
- банката $B4$ сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 41000000 по цена од 89,75, и
- банката $B5$ сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 55000000 по цена од 89,69.

Освен тоа, пристигната е и една неконкурентска порачка на мали инвеститори кои сакаат да купат благајнички записи во номинална вредност од 7000000 денари.

Како ќе ја реализирате продажбата на благајничките записи понудени на оваа аукција? Колкава е цената на благајничките записи која ќе важи за неконкурентската понуда?

Решение. Според претходно опишаниот начин ги подредуваме пристигнатите порачки во следнава табела, при што почнуваме од неконкурентската порачка, која ќе ја задоволиме според постигнатата просечна цена формирана од конкурентските порачки:

Клиент	Цена	Количина	Кумулирана вредност
Неконкурентска порачка	---	7000000	7000000
Банка $B2$	89,83	55000000	62000000
Банка $B1$	89,81	35000000	97000000
Банка $B3$	89,79	15000000	112000000
Банка $B4$	89,75	41000000	153000000
Банка $B5$	89,69	55000000	205000000

Од податоците во претходната табела се гледа дека:

- порачките на банките $B2$, $B1$ и $B3$ ќе бидат целосно задоволени,
- порачката на банката $B4$ ќе биде делумно задоволена, т.е. таа ќе купи благајнички записи во номинална вредност од 38000000 денари, а не како што е нејзината понуда за 41000000 денари и
- порачката на банката $B5$ во целост нема да биде задоволена.

Притоа, неконкурентската понуда ќе биде задоволена и за истата цена на благајничките записи ќе изнесува

$$\frac{89,83+89,81+89,79+89,75}{4} = 89,79 \,. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

9. Едно трговско друштво продало стока и за тоа добило меница со номинална вредност 300000 денари и дата на плаќање 20.05. Но, трговското друштво не

може да чека наплата на меницата, па затоа истата на 23.03 ја продава на својата банка со дисконтна стапка од 8%, провизија 0,045% и 100 денари манипулативни трошоци. Колку банката му исплатила на трговското друштво?

10. На 17.04 дисконтирани се три меници со номинални вредности и валути: 400000 денари на 20.06, 900000 денари на 21.08 и 700000 денари на 24.09 со дисконтна стапка од 5%, провизија 0,035% и манипулативен трошок по менича 75 денари. Колку денари е исплатено за трите меници?
11. Лицето А издало комерцијален запис со номинална вредност од 150000 денари и валута на 16.08, кој не може во целост да го плати на денот на валутата. Затоа дало нов комерцијален запис со номинална вредност 90000 денари и валута на 15.10 истата година. Разликата (неплатената сума) лицето А ја платило на 16.08 со дисконтна стапка 12%. Колку пари вкупно платило лицето А?
12. Лицето *X* во својата банка на 15.10 приложува меница А со номинална вредност од 200000 денари со валута на 25.12 и меница В со номинална вредност 600000 денари и валута на 20.02 следната година, со барање дисконтираните вредности на мениците да се префрлат на неговата сметка на средна дата, т.е. на ист ден да располага со двете суми, но притоа ниту банката ниту лицето *X* да не се оштетени. Која е таа дата?
13. На 25.01 е објавена аукција за продажба на тримесечни благајнички записи со достасување за исплата на 26.04, со вкупна номинална вредност од 40000000 денари. На аукцијата се добиени следниве конкурентски порачки:
    - банката В1 сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 5000000 по цена од 89,66,
    - банката В2 сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 5000000 по цена од 89,73,
    - банката В3 сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 22000000 по цена од 89,68,
    - банката В4 сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 14000000 по цена од 89,75, и
    - банката В5 сака да купи благајнички записи во номинална вредност од 5000000 по цена од 89,65.

    Освен тоа, пристигнати се и две неконкурентски порачки на мали инвеститори кои сакаат да купат благајнички записи во номинална вредност од 100000 и 2000000 денари, соодветно. Кои порачки ќе бидат задоволени и по која цена ќе бидат задоволени неконкурентските порачки?

5. ДОХОДОВНОСТ ПРИ ИНВЕСТИРАЊЕ ВО БЛАГАЈНИЧКИ ЗАПИСИ

Со оглед на тоа дека купувањето на благајнички записи е инвестиционен потфат, природно е да се запрашаме каков е ефектот од оваа инвестиција, т.е. каква е нејзината доходовност. Постојат повеќе показатели на доходовноста, од кои овде ќе ги разгледаме:

- доходовноста до денот на исплата,

- годишната доходовност и
- ефективната годишна доходовност.

Доходовноста до денот на исплата R се пресметува според формулата:

$$R = \frac{100D}{K}, \tag{5}$$

каде D е дисконтот изразен во проценти и K е цената на благајничкиот запис. Всушност, доходовноста е остварената добивка, изразена во проценти, која инвеститорот ќе ја добие од вложувањето во благајничките записи во периодот на траење на благајничките записи. Доходовноста до денот на исплата е добар показател за споредување на доходовноста на благајничките записи од различни емисии со ист рок. Меѓутоа, истиот скоро и да не може да се користи за поопшти анализи.

Пример 11. Доходовноста до денот на исплатата на купените благајнички записи од страна на банките од претходниот пример е:

- банката $B1$: $R = \frac{100D}{K} = \frac{100 \cdot 10{,}19}{89{,}81} = 11{,}346\%$,
- банката $B2$: $R = \frac{100D}{K} = \frac{100 \cdot 10{,}17}{89{,}83} = 11{,}321\%$,
- банката $B3$: $R = \frac{100D}{K} = \frac{100 \cdot 10{,}21}{89{,}79} = 11{,}371\%$ и
- банката $B4$: $R = \frac{100D}{K} = \frac{100 \cdot 10{,}25}{89{,}75} = 11{,}421\%$.

Понатаму, доходовноста на вложувањето на малите инвеститори ќе биде еднаква на доходовноста на банката $B3$ (зошто?). ■

Годишната доходовност (*инвестиционата доходовност*) $R_{p.a.}$ се пресметува според формулата

$$R_{p.a.} = \frac{36000D}{Kt}, \tag{6}$$

каде D е дисконтот изразен во проценти, K е цената на благајничкиот запис и t е рокот на траење на благајничките записи, изразен во денови. Годишната доходовност е еднаква на простата годишна камата, која инвеститорот ќе ја добие од вложувањето во благајничките записи.

Пример 12. Годишната доходовност од вложувањето во благајнички записи од страна на банките од претходниот пример е:

- банката $B1$: $R_{p.a.} = \frac{36000D}{Kt} = \frac{36000 \cdot 10{,}19}{90 \cdot 89{,}81} = 45{,}385\%$,
- банката $B2$: $R_{p.a.} = \frac{36000D}{Kt} = \frac{36000 \cdot 10{,}17}{90 \cdot 89{,}83} = 45{,}286\%$,

- банката $B3$: $R_{p.a.} = \frac{36000D}{Kt} = \frac{36000 \cdot 10,21}{90 \cdot 89,79} = 45,484\%$ и
- банката $B4$: $R_{p.a.} = \frac{36000D}{Kt} = \frac{36000 \cdot 10,25}{90 \cdot 89,75} = 45,682\%$.

Понатаму, годишната доходовност на вложувањето на малите инвеститори ќе биде еднаква на годишната доходовност на банката $B3$ (зошто?). ♦

Ефективната годишна доходовност $ER_{p.a.}$ се пресметува според формулата

$$ER_{p.a.} = 100 \cdot [(1 + \frac{R}{100})^n - 1] \tag{7}$$

каде R е доходовноста до денот на исплатата и n бројот на можните инвестирања во текот на една година. Всушност, ефективната доходовност е еднаква на сложената годишна каматна стапка која се остварува од вложувањето во благајничките записи, ако вложувањето се реинвестира определен број пати во текот на годината при непроменети услови за инвестирање.

Пример 13. Брокерското друштво A е убедено, дека на претстојната аукција на тримесечни и шестмесечни благајнички записи ќе може да постигне цена од 90,45 и 83,23 на сто денари номинална вредност, соодветно. Кај кои благајнички записи имаме поголема ефективна годишна доходовност?

Решение. Ако ја искористиме формулата (5), тогаш за доходовноста на денот на исплатата добиваме:

- за тримесечните благајнички записи:

$$R_1 = \frac{100D}{K} = \frac{100 \cdot 9,55}{90,45} = 10,5583\% \text{ и}$$

- за шестмесечните благајнички записи

$$R_2 = \frac{100D}{K} = \frac{100 \cdot 16,77}{83,23} = 20,149\%.$$

Понатаму, во случај на тримесечните благајнички записи бројот на реинвестирањата е $n = 4$ и ако замениме во формулата (7) добиваме:

$$ER_{p.a.} = 100 \cdot [(1 + \frac{R_1}{100})^n - 1] = 100 \cdot [(1 + \frac{10,5583}{100})^4 - 1] = 49,4051\%.$$

Во случај на шестмесечни благајнички записи бројот на реинвестирањата е $n = 2$ и ако замениме во формулата (7) добиваме:

$$ER_{p.a.} = 100 \cdot [(1 + \frac{R_2}{100})^n - 1] = 100 \cdot [(1 + \frac{20,149}{100})^n - 1] = 44,3578\%.$$

Според тоа, купувањето на тримесечните благајнички записи овозможува поголема ефективна годишна доходовност за 5,0473%. ■

Ефективноста на враќање на инвестицијата се пресметува според формулата

$$ER = \frac{36000}{t} \cdot [(1 + \frac{R_{p.a.}}{100n})^m - 1] \tag{8}$$

каде $R_{p.a.}$ е годишната доходовност, n е бројот на реинвестирањата во текот на годината, m е бројот на реинвестирањата во базичниот инвестиционен период и t е бројот на деновите во базичниот инвестиционен период.

Пример 14. Брокерското друштво *A* има можност да купи тримесечни и шестмесечни благајнички записи по цена од 90,45 и 83,23 на сто денари номинална вредност, соодветно. Ако инвестициониот период е 180 денови, која инвестиција е подобра?

Решение. Ако ја искористиме формулата (6), тогаш за годишната доходовност добиваме:

- за тримесечните благајнички записи:

$$R_{p.a.} = \frac{36000D}{Kt} = \frac{36000 \cdot 9{,}55}{90{,}45 \cdot 90} = 42{,}2332\% \text{ и}$$

- за шестмесечните благајнички записи

$$R_2 = \frac{36000D}{Kt} = \frac{36000 \cdot 16{,}77}{83{,}23 \cdot 180} = 40{,}298\% .$$

Понатаму, во случај на тримесечните благајнички записи бројот на реинвестирањата е $n = 4$ и бројот на реинвестирањата во базниот период е $m = 2$, па ако замениме во формулата (8) добиваме

$$ER = \frac{36000}{t} \cdot [(1 + \frac{R_{p.a.}}{100n})^m - 1] = \frac{36000}{180} \cdot [(1 + \frac{42{,}2332}{100 \cdot 4})^2 - 1] = 44{,}4628 .$$

Во случај на шестмесечни благајнички записи бројот на реинвестирањата е $n = 2$ и бројот на реинвестирањата во базниот период е $m = 1$, па ако замениме во формулата (8) добиваме

$$ER = \frac{36000}{t} \cdot [(1 + \frac{R_{p.a.}}{100n})^m - 1] = \frac{36000}{180} \cdot [(1 + \frac{40{,}298}{100 \cdot 2})^1 - 1] = 40{,}298\% .$$

Според тоа, и според овој показател купувањето на тримесечните благајнички записи е подобра инвестиција (види пример 13). ■

ЗАДАЧИ

14. Во задача 13 пресметајте ги доходовноста до денот на исплатата и годишната доходовност на купените благајнички записи од страна на банките.
15. Брокерското друштво А е убедено, дека на претстојната аукција на тримесечни и шестмесечни на благајнички записи ќе може да постигне цена од 90,86 и 82,32 на

сто денари номинална вредност, соодветно. Кај кои благајнички записи имаме поголема ефективна годишна доходовност?

16. Брокерското друштво *A* има можност да купи тримесечни и шестмесечни благајнички записи по цена од 90,86 и 82,32 на сто денари номинална вредност, соодветно. Ако инвестициониот период е 180 денови, која е подобра инвестиција?

ГЛАВА IV
ПЕРИОДИЧНИ РЕНТИ

1. ПОИМ ЗА РЕНТА. ВИДОВИ РЕНТИ

Сумата која едно лице ја прима во еднакви временски интервали ја нарекуваме *рента*. Ако оваа сума се исплаќа во еднакви големини, тогаш велиме дека рентата е *постојана*, а ако секој нареден период таа расте или опаѓа велиме дека рентата е *променлива*.

Рентата која се прима одреден број периоди, ќе ја нарекуваме *времена* (*темпоерна*). Ако примањето на рентата не престанува никогаш, тогаш истата ќе ја нарекуваме *вечна*. Рентата која се прима до крајот на животот на лицето ќе ја нарекуваме *доживотна*.

Примањето на рентата може да биде на почетокот на временскиот периодот и оваа рента ја нарекуваме *антиципативна* или на крајот од временскиот периодот и во овој случај велиме дека станува збор за *декурзивна* рента.

Правото на примање рента се стекнува врз основа на претходно вложени средства. Ако капиталот потребен за исплата на рентата се внесува одеднаш, тогаш тој се нарекува *миза*, а ако потребниот капитал се внесува по делови, тогаш одделните делови ги нарекуваме *премии*.

Што се однесува до временскиот период за кој се прима рентата, таа може да биде *годишна*, *шестмесечна*, *тримесечна*, *месечна* итн. Понатаму, вкаматувањето на мизата може да биде годишно, шестмесечно, тримесечно, месечно итн., па затоа примањето на рентата може да биде заедно со вкаматувањето на мизата, почесто или поретко од вкаматувањето на мизата. Што се однесува на примањето на рентата, тоа може да започне веднаш после вложувањето на мизата или после определен временски период, што значи дека имаме *непосредна* или *одложена* рента, соодветно. Јасно, во случај кога имаме одложена рента, тогаш пресметувањето на нејзините елементи може да се сведе на пресметување на елементите на непосредната рента, со тоа што почетната миза ја вкаматуваме со интерес на интерес за периодот на одложување, со што добиваме нова миза со која натаму работиме. Затоа во нашите разгледувања ќе се осврнеме само на еднаквите периодични непосредни ренти.

2. ПЕРИОДИЧНИ ЕДНАКВИ РЕНТИ КАЈ КОИ ПРИМАЊЕТО НА РЕНТАТА СЕ СОВПАЃА СО ВКАМАТУВАЊЕТО

Како што рековме, во нашите разгледувања ќе се задржиме на еднаквите непосредни периодични ренти. Во оваа точка ќе ги разгледаме антицип-

тивните и декурзивните ренти, кај кои примањето на рентата се совпаѓа со вкаматувањето.

2.1.АНТИЦИПАТИВНА РЕНАТА

Нека имаме миза M, која во n еднакви периоди треба да овозможи исплата на постојана антиципативна рента со големина R, при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_1,V_2,...,V_n$ да ги означиме деловите на мизата кои условно обезбедуваат исплата на рента со големина R во првиот, вториот, итн. $n-$от период и нека каматната стапка е $p\%\text{a.d.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно,

$$M = V_1 + V_2 + ... + V_n . \tag{1}$$

Но, рентата е непосредна и антиципативна, па затоа сумата V_1 е еднаква на рентата R. Понатаму, рентата R која се исплаќа на почетокот од вториот период се добива од сумата V_2, што значи V_2 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за еден дисконтен период, т.е. $V_2 = \frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, V_3 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за два дисконтна периода, т.е. $V_3 = \frac{R}{r^2}$. На сличен начин добиваме $V_i = \frac{R}{r^{i-1}}$, $i = 4,...,n$ и ако замениме во (1) наоѓаме

$$M = R + \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + ... + \frac{R}{r^{n-1}} = R[1 + \frac{1}{r} + (\frac{1}{r})^2 + ... + (\frac{1}{r})^{n-1}] = R\frac{1-(\frac{1}{r})^n}{1-\frac{1}{r}} = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)} . \tag{2}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $\text{п\%a.d.(a)}$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R\frac{\rho^n-1}{\rho^{n-1}(\rho-1)} . \tag{3}$$

Пример 1. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима годишна антиципативна рента од 10000 денари. Притоа вкаматувањето е годишно, а каматната стапка е

а) $6\%\text{p.a.(d)}$

б) $6\%\text{p.a.(a)}$

Решение. Од условот на задачата имаме $n = 4$, $R = 10000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата треба да ја определиме мизата M.

а) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$, па затоа за каматниот фактор добиваме $r=1+\frac{6}{100}=1,06$ и ако замениме во (2) имаме:

$$M=R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}=10000\cdot\frac{1,06^4-1}{1,06^3(1,06-1)}=36730,12\,.$$

б) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(a)}$, па затоа за каматниот фактор добиваме $\rho=\frac{100}{100-6}=1,063829787$ и ако замениме во (3) имаме:

$$M=R\frac{\rho^n-1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}=10000\cdot\frac{1,063829787^4-1}{1,063829787^3(1,063829787-1)}=36541,84\,.\ \blacksquare$$

Пример 2. Денес се вложени 200000 денари со

а) $6\%\text{p.a.(d)}$ б) $6\%\text{p.a.(a)}$

и семестрално вкаматување. Колкава семестрална антиципативна рента ќе може да се прима во следните 20 години.

Решение. Од условот на задачата имаме $n=2\cdot 20=40$, $M=200000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето е семестрално и се совпаѓа со примањето на рентата, треба да ја определиме големината на рентата, т.е. $R=?$

а) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$ и како вкаматувањето е семестрално, за соодветниот каматен фактор наоѓаме

$$r=1+\frac{\frac{p}{2}}{100}=1,03\,.$$

Ако замениме во (2) добиваме:

$$200000=R\frac{1,03^{40}-1}{1,03^{39}(1,03-1)}\ \text{т.е.}\ R=8400,46\,.$$

б) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(a)}$ и како вкаматувањето е семестрално за соодветниот каматен фактор наоѓаме $\rho=\frac{100}{100-3}=1,030927835$ и ако замениме во (3) добиваме:

$$200000=R\frac{1,030927835^{40}-1}{1,030927835^{39}(1,030927835-1)}\ \text{т.е.}\ R=8519,25\,.\ \blacksquare$$

Пример 3. Колку пати може да се прима семестрална антиципативна рента од 5000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 50000 денари со годишна каматна стапка

а) $7\%\text{p.a.(d)}$ б) $7\%\text{p.a.(a)}$

а вкаматувањето е семестрално?

Решение. Од условот на задачата имаме $M = 50000, R = 5000$ и треба да се најде бројот на периодите n при дадена каматна стапка.

а) Ако во формулата (2) на десната стана во броителот и именителот помножиме со r ја добиваме формулата $M = R\frac{r(r^n-1)}{r^n(r-1)}$ од каде последователно наоѓаме $Mr^n(r-1) = rRr^n - rR$, т.е. $r^n[rR - M(r-1)] = rR$, па затоа

$$r^n = \frac{rR}{rR - M(r-1)}.$$

Бидејќи каматната стапка е $7\%\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето е семестрално за декурзивниот фактор добиваме $r = 1,035$ и ако замениме во последната формула наоѓаме:

$$1,035^n = \frac{5000 \cdot 1,035}{5000 \cdot 1,035 - 50000 \cdot (1,035-1)}$$

односно

$$1,035^n = 1,510948905.$$

Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и добиваме

$$n \log 1,035 = \log 1,510948905$$

односно

$$n = \frac{\log 1,510948905}{\log 1,035} = 11,9976962 \text{ семестри.}$$

Според тоа, при дадените услови ќе се примат 11 ренти по 5000 денари, а дванаесеттата рента ќе биде во помал износ. Како да ја пресметаме последната рента R_1. Ако во формулата (2) на местото на последната рента наместо R ставиме R_1 добиваме:

$$M = R + \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^{n-2}} + \frac{R_1}{r^{n-1}} = R[1 + \frac{1}{r} + (\frac{1}{r})^2 + \ldots + (\frac{1}{r})^{n-2}] + \frac{R_1}{r^{n-1}}$$

$$= R\frac{1-(\frac{1}{r})^{n-1}}{1-\frac{1}{r}} + \frac{R_1}{r^{n-1}} = R\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-2}(r-1)} + \frac{R_1}{r^{n-1}},$$

односно

$$R_1 = r^{n-1}(M - R\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-2}(r-1)}). \qquad (4)$$

Со замена во формулата (4) за последната рента R_1 добиваме:

$$R_1 = r^{n-1}(M - R\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-2}(r-1)}) = 1,035^{n-1}(50000 - 5000 \cdot \frac{1,035^{n-1}-1}{1,035^{n-2}(1,035-1)}) = 4988,68.$$

б) Аналогно, како во задачата под а) од формулата (3) наоѓаме

$$\rho^n = \frac{\rho R}{\rho R - M(\rho - 1)},$$

каде $\rho = \frac{100}{96,5} = 1,03626943$ односно

$$1,03626943^n = \frac{1,03626943 \cdot 5000}{1,03626943 \cdot 5000 - 50000 \cdot (1,03626943 - 1)}.$$

Според тоа,

$$1,03626943^n = 1,538461539$$

од каде наоѓаме

$$n = 12,88427696 \text{ семестри.}$$

Според тоа, при дадените услови ќе се примат 12 ренти по 5000 денари, а тринаесеттата рента ќе биде во помал износ. Аналогно како во случајот под а) можеме да покажеме дека последната рента R_1 се пресметува според формулата:

$$R_1 = \rho^{n-1}(M - R\frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho^{n-2}(\rho - 1)}), \tag{5}$$

каде $n = 13$. Замени во формулата (5) и најди ја рентата R_1. ■

Забелешка. Ако ја разгледаме функцијата $f(r) = r^n - \frac{rR}{rR - M(r-1)}$, односно функцијата $f(\rho) = \rho^n - \frac{\rho R}{\rho R - M(\rho - 1)}$, тогаш користејќи го методот на делење на сегменти, ако се дадени мизата, рентата и бројот на периодите можеме да ја пресметаме каматната стапка кога вкаматувањето е декурзивно, односно антиципативно.

2.2.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во n еднакви периоди треба да овозможи исплата на постојана декурзивна рента со големина R, при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_1, V_2, ..., V_n$ да ги означиме деловите на мизата кои условно обезбедуваат исплата на рента со големина R во првиот, вториот, итн. $n-$от период и нека каматната стапка е $p\%$р.а.(d), а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно,

$$M = V_1 + V_2 + ... + V_n. \tag{6}$$

Но, рентата е непосредна и декурзивна, па затоа рентата R која се исплаќа на крајот на првиот период се добива од сумата V_1, што значи V_1 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за еден дискон-

тен период, т.е. $V_1 = \frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, V_2 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за два дисконтна периода, т.е. $V_2 = \frac{R}{r^2}$. На сличен начин добиваме $V_i = \frac{R}{r^i}$, $i = 3,4,...,n$ и ако замениме во (6) наоѓаме

$$M = \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + ... + \frac{R}{r^{n-1}} + \frac{R}{r^n} = \frac{R}{r}[1 + \frac{1}{r} + (\frac{1}{r})^2 + ... + (\frac{1}{r})^{n-1}] = \frac{R}{r} \cdot \frac{1-(\frac{1}{r})^n}{1-\frac{1}{r}} = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}. \quad (7)$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е п%р.а.(а), тогаш за пресметување на мизата во формулата (7) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)}. \quad (8)$$

Пример 4. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима годишна декурзивна рента од 10000 денари. Притоа вкаматувањето е годишно, а каматната стапка е

а) 6%р.а.(d) б) 6%р.а.(а)

Решение. Од условот на задачата имаме $n = 4$, $R = 10000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата треба да ја определиме мизата, т.е. $M = ?$.

а) Каматната стапка е 6%р.а.(d), па затоа за каматниот фактор добиваме $r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$ и ако замениме во (7) добиваме:

$$M = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = 10000 \cdot \frac{1,06^4 - 1}{1,06^4(1,06-1)} = 34651,06.$$

б) Каматната стапка е 6%р.а.(а), па затоа за каматниот фактор добиваме $\rho = \frac{100}{100-6} = 1,063829787$ и ако замениме во (8) добиваме:

$$M = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)} = 10000 \cdot \frac{1,063829787^4 - 1}{1,063829787^4(1,063829787-1)} = 34349,33. \blacksquare$$

Пример 5. Денес се вложени 200000 денари со

а) 6%р.а.(d) б) 6%р.а.(а)

и семестрално вкаматување. Колкава семестрална декурзивна рента ќе може да се прима во следните 20 години.

Решение. Од условот на задачата имаме $n = 2 \cdot 20 = 40$, $M = 200000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето е семестрално и се совпаѓа со примањето на рентата треба да ја определиме големината на рентата, т.е. $R = ?$

а) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$ и како вкаматувањето е семестрално, за соодветниот каматен фактор наоѓаме $r = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{100} = 1,03$. Ако замениме во (7) добиваме $200000 = R\frac{1,03^{40} - 1}{1,03^{40}(1,03-1)}$, т.е. $R = 8652,47$.

б) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(a)}$ и како вкаматувањето е семестрално за соодветниот каматен фактор наоѓаме $\rho = \frac{100}{100-3} = 1,030927835$ и ако замениме во (8) добиваме:

$$200000 = R\frac{1,030927835^{40} - 1}{1,030927835^{40}(1,030927835-1)}, \text{ т.е. } R = 8782,73. \blacksquare$$

Пример 6. Колку пати може да се прима семестрална декурзивна рента од 5000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 50000 денари со каматна стапка

а) $7\%\text{p.a.(d)}$ б) $7\%\text{p.a.(a)}$

а вкаматувањето е семестрално?

Решение. Од условот на задачата имаме $M = 50000, R = 5000$ и треба да се најде бројот на периодите n при дадена каматна стапка.

а) Од формулата (7) наоѓаме $r^n = \frac{R}{R - M(r-1)}$. Бидејќи каматната стапка е $7\%\text{p.a.(d)}$ за декурзивниот фактор добиваме $r = 1,035$ и ако замениме во последната формула наоѓаме

$$1,035^n = \frac{5000}{5000 - 50000 \cdot (1,035-1)}$$

односно $1,035^n = 1,538461538$. Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и добиваме:

$$n = \frac{\log 1,538461538}{\log 1,035} = 12,52 \text{ семестри.}$$

Според тоа, при дадените услови ќе се примат 12 ренти по 5000 денари, а тринаесеттата рента ќе биде во помал износ. Како да ја пресметаме последната рента R_1. Ако во формулата (7) на местото на последната рента наместо R ставиме R_1 добиваме:

$$M = \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^{n-2}} + \frac{R}{r^{n-1}} + \frac{R_1}{r^n} = \frac{R}{r}[1 + \frac{1}{r} + (\frac{1}{r})^2 + \ldots + (\frac{1}{r})^{n-2}] + \frac{R_1}{r^n}$$

$$= \frac{R}{r}\frac{1-(\frac{1}{r})^{n-1}}{1-\frac{1}{r}} + \frac{R_1}{r^n} = R\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)} + \frac{R_1}{r^n},$$

односно

$$R_1 = r^n(M - R\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}). \tag{9}$$

Со замена во формулата (9) за последната рента R_1 добиваме:

$$R_1 = r^n(M - R\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}) = 1,035^{13}(50000 - 5000 \cdot \frac{1,035^{12}-1}{1,035^{12}(1,035-1)}) = 2632,65.$$

б) Аналогно, како во задачата под а) од формулата (8) наоѓаме:

$$\rho^n = \frac{R}{R - M(\rho - 1)},$$

каде $\rho = \frac{100}{96,5} = 1,03626943$ односно

$$1,075268817^n = \frac{5000}{5000 - 50000 \cdot (1,03626943 - 1)}.$$

Значи, $1,03626943^n = 1,569105691$ од каде наоѓаме:

$$n = 12,64500482 \text{ семестри.}$$

Според тоа, при дадените услови ќе се примат 12 ренти по 5000 денари, а тринаесеттата рента ќе биде во помал износ. Аналогно како во случајот под а) можеме да покажеме дека последната рента R_1 се пресметува според формулата:

$$R_1 = \rho^n(M - R\frac{\rho^{n-1}-1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}), \tag{10}$$

каде $n = 13$. Замени во формулата (10) и најди ја рентата R_1. ♦

Забелешка. Ако ја разгледаме функцијата

$$f(r) = r^n - \frac{R}{R - M(r-1)},$$

односно функцијата

$$f(\rho) = \rho^n - \frac{R}{R - M(\rho - 1)},$$

тогаш користејќи го методот на делење на сегментот, ако се дадени мизата, рентата и бројот на периодите можеме да ја пресметаме каматната стапка кога вкаматувањето е декурзивно, односно антиципативно.

ЗАДАЧИ

1. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима семестрална антиципативна рента од 10000 денари. Притоа вкаматувањето е семестрално, а годишната каматна стапка е
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $7\%p.a.(a)$.
2. Денес се вложени 300000 денари со годишната каматна стапка
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
   и тримесечно вкаматување. Колкава тримесечна антиципативна рента ќе може да се прима во следните 20 години?
3. Колку пати може да се прима тримесечна антиципативна рента од 6000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 120000 денари со годишна каматна стапка
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
   и вкаматувањето е тримесечно.
4. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима семестрална декурзивна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е семестрално, а годишната каматна стапка е
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $7\%p.a.(a)$.
5. Денес се вложени 300000 денари со годишна каматна стапка
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
   и тримесечно вкаматување. Колкава тримесечна декурзивна рента ќе може да се прима во следните 20 години?
6. Колку пати може да се прима тримесечна декурзивна рента од 6000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 120000 денари со годишна каматна стапка
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$.
   и вкаматувањето е тримесечно.

3. ПЕРИОДИЧНИ ЕДНАКВИ РЕНТИ КАЈ КОИ ВКАМАТУВАЊЕТО Е ПОЧЕСТО ОД ПРИМАЊЕТО

Овој начин на примање рента се карактеризира со тоа што во рамките на примање на рентата имаме повеќе периоди на вкаматување. Имено, примањето може да биде годишно, а вкаматувањето семестрално, квартално или месечно. Како и во претходниот случај и овде разликуваме два вида ренти и тоа: декурзивни и антиципативни.

3.1.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во n еднакви периоди треба да овозможи исплата на постојана декурзивна рента со големина R, при што мизата се

сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_1, V_2, ..., V_n$ да ги означиме деловите на мизата кои условно обезбедуваат исплата на рента со големина R во првиот, вториот, итн. $n-$от период и нека каматната стапка е $p\%$р.а.(d), а вкаматувањето е почесто од исплатата на рентата, т.е. меѓу две исплати на рентата имаме k вкаматувања. Јасно,

$$M = V_1 + V_2 + ... + V_n. \tag{1}$$

Но, рентата е непосредна и декурзивна, па затоа рентата R која се исплаќа на крајот на првиот период се добива од сумата V_1, што значи V_1 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за k дисконтни рокови, т.е. $V_1 = \frac{R}{r^k}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, V_2 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за $2k$ дисконтни рокови, т.е. $V_2 = \frac{R}{r^{2k}}$. На сличен начин добиваме $V_i = \frac{R}{r^{ik}}$, $i = 3, 4, ..., n$ и ако замениме во (1) наоѓаме

$$\begin{aligned} M &= \frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^{2k}} + \frac{R}{r^{3k}} + ... + \frac{R}{r^{(n-1)k}} + \frac{R}{r^{nk}} = \frac{R}{r^k}[1 + \frac{1}{r^k} + (\frac{1}{r^k})^2 + ... + (\frac{1}{r^k})^{n-1}] \\ &= \frac{R}{r^k} \cdot \frac{1-(\frac{1}{r^k})^n}{1-\frac{1}{r^k}} = R\frac{r^{nk}-1}{r^{nk}(r^k-1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е п%р.а.(а), тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{nk}(\rho^k-1)}. \tag{3}$$

Пример 7. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима годишна декурзивна рента од 10000 денари. Притоа вкаматувањето е тримесечно, а годишната каматна стапка е

а) 8%р.а.(d), б) 8%р.а.(а).

Решение. Од условот на задачата имаме $n = 4$, $k = 4$, $R = 10000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето е почесто од примањето на рентата треба да ја определиме мизата M.

а) Каматната стапка е 8%р.а.(d) и вкаматувањето е тримесечно, па затоа за каматниот фактор добиваме $r = 1 + \frac{\frac{8}{4}}{100} = 1,02$ и ако замениме во (2) добиваме:

$$M = R\frac{r^{nk}-1}{r^{nk}(r^k-1)} = 10000\cdot\frac{1{,}02^{16}-1}{1{,}02^{16}(1{,}02^4-1)} = 32942{,}75\,.$$

б) Каматната стапка е $8\%\text{p.a.(a)}$ и вкаматувањето е тримесечно, па затоа за каматниот фактор добиваме $\rho = \frac{100}{100-\frac{8}{4}} = 1{,}020408163$ и ако замениме во (3) имаме:

$$M = R\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{nk}(\rho^k-1)} = 10000\cdot\frac{1{,}020408163^{16}-1}{1{,}020408163^{16}(1{,}020408163^4-1)} = 32816{,}46\,. \blacksquare$$

Пример 8. Денес се вложени 200000 денари со годишна каматна стапка

а) $6\%\text{p.a.(d)}$, б) $6\%\text{p.a.(a)}$.

и месечно вкаматување. Колкава семестрална декурзивна рента ќе може да се прима во следните 20 години.

Решение. Од условот на задачата имаме $n = 2\cdot 20 = 40$, $M = 200000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето е месечно и е почесто од примањето на рентата, т.е. $k = 6$ треба да ја определиме големината на рентата R

а) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$ и како вкаматувањето е месечно, за соодветниот каматен фактор наоѓаме $r = 1+\frac{\frac{p}{12}}{100} = 1{,}005$. Ако замениме во (2) добиваме:

$$200000 = R\frac{1{,}005^{240}-1}{1{,}005^{240}(1{,}005^6-1)}\text{, т.е. } R = 8705{,}36\,.$$

б) Каматната стапка е $6\%\text{p.a.(a)}$ и како вкаматувањето е месечно за соодветниот каматен фактор наоѓаме $\rho = \frac{100}{100-0{,}5} = 1{,}005025126$ и ако замениме во (3) добиваме:

$$200000 = R\frac{1{,}005025126^{240}-1}{1{,}005025126^{240}(1{,}005025126^6-1)}\text{, т.е. } R = 8727{,}26\,. \blacksquare$$

Пример 9. Колку пати може да се прима семестрална декурзивна рента од 5000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 50000 денари со годишна каматна стапка

а) $8\%\text{p.a.(d)}$, б) $8\%\text{p.a.(a)}$

а вкаматувањето е тримесечно?

Решение. Од условот на задачата имаме $M = 50000, R = 5000, k = 2$ и треба да се најде бројот на периодите n, при дадената каматна стапка.

а) Од формулата (2) наоѓаме $r^{nk} = \frac{R}{R - M(r^k - 1)}$. Бидејќи каматната стапка е $8\%\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето и тримесечно за декурзивниот фактор добиваме $r = 1,02$ и ако замениме во последната формула наоѓаме:

$$1,02^{2n} = \frac{5000}{5000 - 50000 \cdot (1,02^2 - 1)}$$

односно $1,02^{2n} = 1,677852349$. Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и добиваме:

$$2n = \frac{\log 1,677852349}{\log 1,02} = 26,14$$, т.е. $n = 13,07$ семестри.

Според тоа, при дадените услови ќе се примат 13 ренти по 5000 денари, а четиринаесеттата рента ќе биде во помал износ. Како да ја пресметаме последната рента R_1. Ако во формулата (2) на местото на последната рента наместо R ставиме R_1 добиваме:

$$M = \frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^{2k}} + \frac{R}{r^{3k}} + \ldots + \frac{R}{r^{(n-1)k}} + \frac{R_1}{r^{nk}} = \frac{R}{r^k}[1 + \frac{1}{r^k} + (\frac{1}{r^k})^2 + \ldots + (\frac{1}{r^k})^{n-2}] + \frac{R_1}{r^{nk}}$$

$$= \frac{R}{r^k} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{r^k})^{n-1}}{1 - \frac{1}{r^k}} + \frac{R_1}{r^{nk}} = R\frac{r^{(n-1)k} - 1}{r^{(n-1)k}(r^k - 1)} + \frac{R_1}{r^{nk}},$$

односно

$$R_1 = r^{nk}(M - R\frac{r^{(n-1)k} - 1}{r^{(n-1)k}(r^k - 1)}). \qquad (4)$$

Конечно, од формулата (4) може да се пресмета остаточната рента R_1, $n = 14$. Замени во формулата (4) и најди ја рентата R_1.

б) Аналогно, како во задачата под а) од формулата (3) наоѓаме $\rho^{nk} = \frac{R}{R - M(\rho^k - 1)}$, каде $\rho = \frac{100}{98} = 1,020408163$ односно

$$1,020408163^{2n} = \frac{5000}{5000 - 50000 \cdot (1,020408163^2 - 1)}.$$

Според тоа,

$$1,020408163^{2n} = 1,70163005$$

од каде наоѓаме $n = 13,16$ семестри. Значи, при дадените услови ќе се примат 13 ренти по 5000 денари, а четиринаесеттата рента ќе биде во помал износ. Аналогно како во случајот под а) можеме да покажеме дека последната рента R_1 се пресметува според формулата:

$$R_1 = \rho^{nk}(M - R\frac{\rho^{(n-1)k} - 1}{\rho^{(n-1)k}(\rho^k - 1)}), \qquad (5)$$

каде $n=14$. Замени во формулата (5) и најди ја рентата R_1. ■

Забелешка. Ако ја разгледаме функцијата $f(r)=r^{nk}-\frac{R}{R-M(r^k-1)}$, односно функцијата $f(\rho)=\rho^{nk}-\frac{R}{R-M(\rho^k-1)}$, тогаш користејќи го методот на делење на сегментот, ако се дадени мизата, рентата и бројот на периодите можеме да ја пресметаме каматната стапка кога вкаматувањето е декурзивно, односно антиципативно. Јасно, во случајов прво треба да ги воведеме смените $r^k=t$ и $\rho^k=v$, соодветно при што ги добиваме равенките

$$f(t)=t^n-\frac{R}{R-M(t-1)} \text{ и } f(v)=v^n-\frac{R}{R-M(v-1)}$$

и откако ќе ги определиме t и v, користејќи ги формулите $r=\sqrt[k]{t}$ и $\rho=\sqrt[k]{v}$ ги наоѓаме соодветните декурзивни фактори.

3.2.АНТИЦИПАТИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во n еднакви периоди треба да овозможи исплата на постојана антиципативна рента со големина R, при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_1,V_2,...,V_n$ да ги означиме деловите на мизата кои условно обезбедуваат исплата на рента со големина R во првиот, вториот, итн. $n-$от период и нека каматна стапка е $p\%$р.а.(d), а вкаматувањето е почесто од исплатата на рентата, т.е. меѓу две исплати на ренатата имаме k вкаматувања. Јасно

$$M=V_1+V_2+...+V_n. \tag{6}$$

Но, рентата е непосредна и антиципативна, па затоа сумата V_1 е еднаква на рентата R. Понатаму, втората рента R која се исплаќа на почетокот на вториот период се добива од сумата V_2, што значи V_2 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за k дисконтни периоди, т.е. $V_2=\frac{R}{r^k}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, V_3 е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на R за $2k$ дисконтни периоди, т.е. $V_3=\frac{R}{r^{2k}}$. На сличен начин добиваме $V_i=\frac{R}{r^{(i-1)k}}$, $i=4,...,n$ и ако замениме во (6) наоѓаме:

$$\begin{aligned} M &= R+\frac{R}{r^k}+\frac{R}{r^{2k}}+...+\frac{R}{r^{(n-1)k}}=R[1+\frac{1}{r^k}+(\frac{1}{r^k})^2+...+(\frac{1}{r^k})^{n-1}] \\ &= R\frac{1-(\frac{1}{r^k})^n}{1-\frac{1}{r^k}}=R\frac{r^{nk}-1}{r^{(n-1)k}(r^k-1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е п%р.а.(а), тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{(n-1)k}(\rho^{k}-1)}. \tag{8}$$

Пример 10. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима годишна антиципативна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е семестрално, а годишната каматна стапка е

а) 6%р.а.(d), б) 6%р.а.(а),

Решение. Од условот на задачата имаме $n=4$, $R=10000$, $k=2$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето е почесто од примањето на рентата треба да ја определиме мизата M.

а) Каматната стапка е 6%р.а.(d), па затоа за каматниот фактор добиваме $r=1+\frac{\frac{6}{2}}{100}=1,03$ и ако замениме во (7) имаме:

$$M = R\frac{r^{nk}-1}{r^{(n-1)k}(r^{k}-1)} = 10000\cdot\frac{1,03^{8}-1}{1,03^{6}(1,03^{2}-1)} = 36685,67.$$

б) Каматната стапка е 6%р.а.(а), па затоа за каматниот фактор добиваме $\rho=\frac{100}{100-\frac{6}{3}}=1,030927835$ и ако замениме во (8) имаме:

$$M = R\frac{\rho^{nk}-1}{\rho^{(n-1)k}(\rho^{k}-1)} = 10000\cdot\frac{1,030927835^{8}-1}{1,030927835^{6}(1,030927835^{2}-1)} = 36591,46. \blacksquare$$

Пример 11. Денес се вложени 200000 денари со годишна каматна стапка

а) 6%р.а.(d), б) 6%р.а.(а),

и тримесечно вкаматување. Колкава семестрална антиципативна рента ќе може да се прима во следните 20 години?

Решение. Од условот на задачата имаме $n=2\cdot 20=40$, $M=200000$, $k=2$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето е тримесечно и е почесто од примањето на рентата треба да ја определиме големината на рентата R.

а) Каматната стапка е 6%р.а.(d) и како вкаматувањето е тримесечно, за соодветниот каматен фактор наоѓаме $r=1+\frac{\frac{p}{4}}{100}=1,015$. Ако замениме во (7) добиваме:

$$200000 = R\frac{1{,}015^{80}-1}{1{,}015^{78}(1{,}015^2-1)}\text{, т.е. } R = 8429{,}20\,.$$

б) Каматната стапка е 6%р.а.(а) и како вкаматувањето е тримесечно за соодветниот каматен фактор наоѓаме $\rho = \frac{100}{100-1{,}5} = 1{,}015228426$ и ако замениме во (8) добиваме

$$200000 = R\frac{1{,}015228426^{80}-1}{1{,}015228426^{78}(1{,}015228426^2-1)}\text{, т.е. } R = 8488{,}57\,.\ \blacksquare$$

Пример 12. Колку пати може да се прима годишна антиципативна рента од 5000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 50000 денари со годишна каматна стапка

а) 8%р.а.(d), б) 8%р.а.(а),

а вкаматувањето е семестрално?

Решение. Од условот на задачата имаме $M = 50000, R = 5000$, $k = 2$ и треба да се најде бројот на периодите n при дадена каматна стапка.

а) Ако во формулата (7) на десната стана во броителот и именителот помножиме со r^k ја добиваме формулата $M = R\frac{r^k(r^{nk}-1)}{r^{nk}(r^k-1)}$ од каде последователно наоѓаме

$$Mr^{nk}(r^k-1) = r^kRr^{nk} - r^kR\,,$$

т.е.

$$r^{nk}[r^kR - M(r^k-1)] = r^kR\,,$$

па затоа

$$r^{nk} = \frac{r^kR}{r^kR - M(r^k-1)}\,.$$

Бидејќи каматната стапка е 8%р.а.(d) и вкаматувањето е семестрално за декурзивниот фактор добиваме $r = 1{,}04$ и ако замениме во последната формула наоѓаме

$$1{,}04^{2n} = \frac{5000\cdot 1{,}04^2}{5000\cdot 1{,}04^2 - 50000\cdot(1{,}04^2-1)}\,,$$

односно

$$1{,}04^{2n} = 4{,}072289157\,.$$

Последната равенка ја логаритмираме и добиваме:

$$2n\log 1{,}04 = \log 4{,}072289157\,,$$

односно $n=17,9013227$ години. Според тоа, при дадените услови ќе се примат 17 ренти по 5000 денари, а осумнаесеттата рента ќе биде во помал износ. Како да ја пресметаме последната рента R_1. Ако во формулата (7) на местото на последната рента наместо R ставиме R_1 добиваме:

$$M = R + \frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^{2k}} + \ldots + \frac{R}{r^{(n-2)k}} + \frac{R_1}{r^{(n-1)k}} = R[1 + \frac{1}{r^k} + (\frac{1}{r^k})^2 + \ldots + (\frac{1}{r^k})^{n-2}] + \frac{R_1}{r^{(n-1)k}}$$

$$= R\frac{1-(\frac{1}{r^k})^{n-1}}{1-\frac{1}{r^k}} + \frac{R_1}{r^{(n-1)k}} = R\frac{r^{(n-1)k}-1}{r^{(n-2)k}(r^k-1)} + \frac{R_1}{r^{(n-1)k}},$$

односно

$$R_1 = r^{(n-1)k}(M - R\frac{r^{(n-1)k}-1}{r^{(n-2)k}(r^k-1)}). \quad (9)$$

Со замена во формулата (9) може да се пресмета последната рента R_1. Најди ја R_1 за дадените податоци.

б) Аналогно, како во задачата под а) од формулата (3) наоѓаме

$$\rho^{nk} = \frac{\rho^k R}{\rho^k R - M(\rho^k - 1)},$$

каде $\rho = \frac{100}{96} = 1,041666667$. За дадените податоци пресметај го бројот на рентите, а потоа користејќи ја формулата

$$R_1 = \rho^{(n-1)k}(M - R\frac{\rho^{(n-1)k}-1}{\rho^{(n-2)k}(\rho^k-1)}), \quad (10)$$

пресметај ја остаточната (последната) рента R_1, доколку истата постои. ■

Забелешка. Ако ја разгледаме функцијата $f(r) = r^{nk} - \frac{r^k R}{r^k R - M(r^k-1)}$, односно функцијата $f(\rho) = \rho^{nk} - \frac{\rho^k R}{\rho^k R - M(\rho^k-1)}$, тогаш користејќи го методот на делење на сегментот, ако се дадени мизата, рентата и бројот на периодите можеме да ја пресметаме каматната стапка кога вкаматувањето е декурзивно, односно антиципативно. Јасно, во случајот прво треба да ги воведеме смените $r^k = t$ и $\rho^k = v$, при што ги добиваме равенките

$$f(t) = t^n - \frac{tR}{tR - M(t-1)} \text{ и } f(v) = v^n - \frac{vR}{vR - M(v-1)}$$

и откако ќе ги определиме t и v, користејќи ги формулите $r = \sqrt[k]{t}$ и $\rho = \sqrt[k]{v}$ ги наоѓаме соодветните каматни фактори.

ЗАДАЧИ

7. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима семестрална антиципативна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е тримесечно, а годишната каматна стапка е
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $7\%p.a.(a)$.

8. Денес се вложени 300000 денари со годишна каматна стапка
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
   и месечно вкаматување. Колкава тримесечна антиципативна рента ќе може да се прима во следните 20 години?

9. Колку пати може да се прима шестмесечна антиципативна рента од 6000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 120000 денари со годишна каматна стапка
   а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
   и вкаматувањето е тримесечно.

10. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима семестрална декурзивна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е месечно, а годишната каматна стапка е
    а) $7\%p.a.(d)$, б) $7\%p.a.(a)$.

11. Денес се вложени 300000 денари со годишна каматна стапка
    а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
    и месечно вкаматување. Колкава тримесечна декурзивна рента ќе може да се прима во следните 20 години?

12. Колку пати може да се прима годишна декурзивна рента од 6000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 120000 денари со годишна каматна стапка
    а) $7\%p.a.(d)$, б) $6{,}2\%p.a.(a)$,
    и вкаматувањето е тримесечно.

4. ПЕРИОДИЧНИ ЕДНАКВИ РЕНТИ КАЈ КОИ ПРИМАЊЕТО Е ПОЧЕСТО ОД ВКАМАТУВАЊЕТО

Чести се случаите кога имаме повеќекратно примање на рента за еден период на вкаматување. Параметрите со кои е определен овој вид на ренти се:

- R - рентата која се прима на еднакви временски интервали,
- p - декурзивна каматна стапка,
- п - антиципативна каматна стапка,
- k - бројот на вкаматувањата за дадената каматна стапка,
- m - бројот на примените ренти во еден период на вкаматување и
- n - број на периоди со дадена каматна стапка во кои треба да се исплаќа рента со големина R.

Прво ќе го разгледаме случајот кога имаме декурзивна каматна стапка p. Како што знаеме, во еден период на вкаматување каматната стапка е $\frac{p}{k}$ и имаме m примања на рента R. За секое поединечно примање на рентата треба да пресметаме интерес на интерес, но така да за него важи каматната стапка $\frac{p}{k}$. Јасно, ова може да го направиме со наоѓање на соодветната конформна каматна стапка p'. Притоа, ако вкаматувањето е декурзивно, тогаш за m-тата примена рента, која се исплаќа на крајот од првиот период на вкаматување ќе важи

$$\frac{R}{(1+\frac{p'}{100})^m} = \frac{R}{1+\frac{\frac{p}{k}}{100}}$$

од каде наоѓаме

$$p' = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100k}} - 1). \tag{1}$$

Понатаму, ако вкаматувањето е антиципативно, тогаш соодветната антиципативна конформна каматна стапка ја пресметуваме според формулата:

$$п' = 100(1 - \sqrt[m]{1-\frac{п}{100k}}). \tag{2}$$

4.1.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која треба да овозможи исплата на рентата со големина R во n еднакви периоди, во кои имаме k периоди на вкаматување и во секој период по m исплати на рентата. Според тоа, ако ја земеме конформната каматна стапка имаме kmn еднакви периодични рента, кај кои примањето на рентата се совпаѓа со вкаматувањето. Ако вкаматувањето е декурзивно, тогаш од точка 2 следува дека

$$M = R\frac{r_1^{kmn}-1}{r_1^{kmn}(r_1-1)}, \tag{3}$$

каде $r_1 = 1+\frac{p'}{100}$, а ако вкаматувањето е антиципативно, тогаш повторно од точка 2 следува дека

$$M = R\frac{\rho_1^{kmn}-1}{\rho_1^{kmn}(\rho_1-1)}. \tag{4}$$

каде $\rho_1 = 1+\frac{п'}{100-п'}$.

Пример 13. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 5 години да се прима месечна декурзивна рента од 10000 денари, ако вкаматувањето е полугодишно, а годишната каматна стапка е

а) $8\%\text{p.a.(d)}$, б) $8\%\text{p.a.(a)}$.

Решение. Од условот на задачата имаме $n=5,\ k=2,\ m=6$ и $R=10000$. Во случајов станува збор за декурзивна рента во која исплатата е почеста од вкаматувањето, па затоа треба да ја определиме соодветната конформна стапка.

а) Од условот на задачата имаме $p=8\%\text{p.a.(d)}$ и ако замениме во формулата (1) за конформната каматна стапка наоѓаме:

$$p'=100\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100k}}-1\right)=100\left(\sqrt[6]{1+\frac{8}{100\cdot 2}}-1\right)=0,655819693.$$

Понатаму, $kmn=60$, $r_1=1+\frac{0,655819693}{100}=1,00655819693$ и ако замениме во формулата (3) добиваме:

$$M=R\frac{r_1^{kmn}-1}{r_1^{kmn}(r_1-1)}=10000\cdot\frac{1,00655819693^{60}-1}{1,00655819693^{60}(1,00655819693-1)}=494702,80.$$

б) Од условот на задачата имаме $\text{п}=8\%\text{p.a.(a)}$ и ако замениме во формулата (2) за конформната каматна стапка наоѓаме:

$$\text{п}'=100\left(1-\sqrt[m]{1-\frac{\text{п}}{100k}}\right)=100\left(1-\sqrt[6]{1-\frac{8}{100\cdot 2}}\right)=0,678057321.$$

Понатаму,

$$kmn=60,\ \rho_1=1+\frac{0,678057321}{100-0,678057321}=1,006826863$$

и ако замениме во формулата (3) добиваме:

$$M=R\frac{\rho_1^{kmn}-1}{\rho_1^{kmn}(\rho_1-1)}=10000\cdot\frac{1,006826863^{60}-1}{1,006826863^{60}(1,006826863-1)}=490953,70.\ \blacksquare$$

4.2.АНТИЦИПАТИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која треба да овозможи исплата на рентата со големина R во n еднакви периоди, во кои имаме k периоди на вкаматување и во секој период по m исплати на рентата. Според тоа, ако ја земеме конформната каматна стапка имаме kmn еднакви периодични рента, кај кои примањето на рентата се совпаѓа со вкаматувањето. Ако вкаматувањето е декурзивно, тогаш од точка 2 следува дека

$$M=R\frac{r_1^{kmn}-1}{r_1^{kmn-1}(r_1-1)},\qquad(5)$$

каде $r_1=1+\frac{p'}{100}$, а ако вкаматувањето е антиципативно, тогаш повторно од точка 2 следува дека

$$M = R\frac{\rho_1^{kmn}-1}{\rho_1^{kmn-1}(\rho_1-1)}, \qquad (6)$$

каде $\rho_1 = 1+\frac{\text{п}'}{100-\text{п}'}$.

Пример 14. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 5 години да се прима месечна антиципативна рента од 10000 денари, ако вкаматувањето е полугодишно, а годишната каматна стапка е

а) 8%p.a.(d) б) 8%p.a.(a)

Решение. Од условот на задачата имаме $n=5, k=2, m=6$ и $R=10000$. Во случајов станува збор за антиципативна рента во која исплатата е почеста од вкаматувањето, па затоа треба да ја определиме соодветната конформна стапка.

а) Од пример 13 а) имаме

$$p' = 100(\sqrt[6]{1+\frac{8}{100\cdot 2}}-1) = 0,655819693,\ kmn = 60,$$

$$r_1 = 1+\frac{0,655819693}{100} = 1,00655819693$$

и ако замениме во формулата (5) добиваме:

$$M = R\frac{r_1^{kmn}-1}{r_1^{kmn-1}(r_1-1)} = 10000\cdot\frac{1,00655819693^{60}-1}{1,00655819693^{59}(1,00655819693-1)} = 497947,16.$$

б) Од пример 13 б) имаме:

$$\text{п}' = 100(1-\sqrt[6]{1-\frac{8}{100\cdot 2}}) = 0,678057321,\ kmn = 60,$$

$$\rho_1 = 1+\frac{0,678057321}{100-0,678057321} = 1,006826863$$

и ако замениме во формулата (6) добиваме:

$$M = R\frac{\rho_1^{kmn}-1}{\rho_1^{kmn}(\rho_1-1)} = 10000\cdot\frac{1,006826863^{60}-1}{1,006826863^{60}(1,006826863-1)} = 494305,37. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

13. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима тримесечна антиципативна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е семестрално, а годишната каматна стапка е
    а) 9%p.a.(d), б) 9%p.a.(a).

14. Денес се вложени 300000 денари со годишна каматна стапка
    а) 7%p.a.(d), б) 6,2%p.a.(a),

и тримесечно вкаматување. Колкава месечна антиципативна рента ќе може да се прима во следните 20 години?

15. Колку пати може да се прима тримесечна антиципативна рента од 6000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 120000 денари со годишна каматна стапка
    а) $8\%\text{p.a.(d)}$, б) $6{,}8\%\text{p.a.(a)}$,
    и вкаматувањето е годишно.
16. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме во следните 4 години да се прима месечна декурзивна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е шестмесечно, а годишната каматна стапка е
    а) $8\%\text{p.a.(d)}$, б) $7{,}6\%\text{p.a.(a)}$.
17. Денес се вложени 300000 денари со годишна каматна стапка
    а) $7\%\text{p.a.(d)}$, б) $6{,}6\%\text{p.a.(a)}$,
    и тримесечно вкаматување. Колкава месечна декурзивна рента ќе може да се прима во следните 20 години?
18. Колку пати може да се прима месечна декурзивна рента од 6000 денари почнувајќи од денес па натаму, ако денес се вложени 120000 денари со годишна каматна стапка
    а) $7{,}4\%\text{p.a.(d)}$, б) $6{,}8\%\text{p.a.(a)}$,
    и вкаматувањето е шестмесечно.

5. ВЕЧНА РЕНТА

Во претходните разгледувања, без разлика каков е односот на периодот на исплата на рентата и периодот на вкаматување, во сите случаи бројот на исплатените ренти беше конечен. Природно е да се запрашаме дали е можно при дадена миза M бројот на исплатените ренти да биде неограничен, односно дали мизата M може да се подели на бесконечно многу суми $V_i, i=1,2,3,...$ кои ќе овозможат исплатување на бесконечен број еднакви периодични ренти, т.е. исплата на таканаречената вечна рента. Одговорот на ова прашање е позитивен и ние ќе го разгледаме само случајот на периодични еднакви ренти кај кои примањето на рентата се совпаѓа со вкаматувањето.

5.1.АНТИЦИПАТИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која треба да овозможи исплата на вечна постојана антиципативна рента со големина R. Со $V_i, i=1,2,3,...$ да ги означиме деловите на мизата кои условно обезбедуваат исплата на рента со големина R во првиот, вториот, итн. $i-$от период итн., и нека каматна стапка е $p\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно,

$$M = V_1 + V_2 + ... + V_i + ... \qquad (1)$$

Но, рентата е непосредна и антиципативна, па затоа сумата V_1 е еднаква на рентата R. Понатаму, рентата R која се исплаќа на почетокот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2 = \frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, рентата R која се исплаќа на почетокот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3 = \frac{R}{r^2}$. На сличен начин добиваме $V_i = \frac{R}{r^{i-1}}$, $i = 4,5,...$ и ако замениме во (1) добиваме

$$M = R + \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \frac{R}{r^3} + ... + \frac{R}{r^{i-1}} + ... = R[1 + \frac{1}{r} + (\frac{1}{r})^2 + ... + (\frac{1}{r})^{i-1} + ...] . \qquad (2)$$

Во средната заграда на десната страна во (2) имаме геометриски ред со $q = \frac{1}{r} < 1$, што значи дека тој конвергира и притоа важи

$$M = R\frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{Rr}{r-1} . \qquad (3)$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $п\%р.а.(а)$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (3) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = \frac{R\rho}{\rho-1} . \qquad (4)$$

Пример 15. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме да се прима вечна годишна антиципативна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е годишно, а годишната каматна стапка е

а) $6\%р.а.(d)$, б) $6\%а.d.(а)$.

Решение. Од условот на задачата имаме $R = 10000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата треба да ја определиме мизата M.

а) Каматната стапка е $6\%р.а.(d)$, па затоа за каматниот фактор добиваме $r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$ и ако замениме во (3) добиваме:

$$M = \frac{Rr}{r-1} = \frac{10000 \cdot 1,06}{1,06-1} = 176666,67 .$$

б) Каматната стапка е $6\%р.а.(а)$, па затоа за каматниот фактор добиваме $\rho = \frac{100}{100-6} = 1,063829787$ и ако замениме во (4) добиваме:

$$M = \frac{R\rho}{\rho-1} = \frac{10000 \cdot 1,063829787}{1,063829787-1} = 166666,67 . \blacksquare$$

Пример 16. Колкава шестмесечна антиципативна вечна рента ќе се прима ако денес е вложена миза од 200000 денари, со годишна каматна стапка

а) $8\%\text{p.a.(d)}$, б) $8\%\text{p.a.(a)}$,

и шестмесечно вкаматување.

Решение. Од условот на задачата имаме $M = 200000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата треба да го определиме R.

а) Каматната стапка е $8\%\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето е шестмесечно, па затоа $r = 1 + \frac{\frac{8}{2}}{100} = 1,04$. Ако замениме во (3) добиваме:

$$200000 = \frac{R \cdot 1,04}{1,04-1} \text{ т.е. } R = 7692,31.$$

б) Каматната стапка е $8\%\text{p.a.(a)}$ и вкаматувањето е шестмесечно, па затоа $r = \frac{100}{100-4} = 1,041666667$. Ако замениме во (4) добиваме:

$$200000 = \frac{R \cdot 1,04666667}{1,04666667-1} \text{ т.е. } R = 7961,78. \blacksquare$$

Пример 17. Со која

а) декурзивна, б) антиципативна

каматна стапка, при годишно вкаматување треба да се вложат 300000 денари за да се добива годишна антиципативна вечна рента од 15000 денари.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $M = 300000$, $R = 15000$ и треба да се најде r. Од формулата (3) имаме $Mr - M = Rr$, па затоа

$$r(M - R) = M,$$

т.е.

$$r = \frac{M}{M-R} = \frac{300000}{300000-15000} = 1,052631579$$

што значи $p = 100 \cdot (r - 1) = 5,2631579\%$.

б) Од условот на задачата имаме $M = 300000$, $R = 15000$ и треба да се најде ρ. Од формулата (4) имаме $M\rho - M = R\rho$, па затоа

$$\rho(M - R) = M,$$

т.е.

$$\rho = \frac{M}{M-R} = \frac{300000}{300000-15000} = 1,052631579$$

што значи $\text{п} = \frac{100 \cdot (\rho - 1)}{\rho} = 5\%$. $\blacksquare$

5.2.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која треба да обезбеди исплата на вечна постојана декурзивна рента со големина R. Со $V_i, i=1,2,3,...$ да ги означиме деловите на мизата кои условно обезбедуваат исплата на рента со големина R во првиот, вториот, итн. $i-$от период итн., и нека каматна стапка е $p\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно, важи равенството (1). Но, рентата е непосредна и декурзивна, што значи рентата R која се исплаќа на крајот на првиот период се добива од сумата V_1 па затоа $V_1=\frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Понатаму, рентата R која се исплаќа на крајот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{R}{r^2}$. Слично, рентата R која се исплаќа на крајот од третиот период се добива од сумата V_3, т.е. $V_3=\frac{R}{r^3}$. Аналогно добиваме $V_i=\frac{R}{r^i}$, $i=4,5,6,...$ и ако замениме во (1) добиваме:

$$M=\frac{R}{r}+\frac{R}{r^2}+\frac{R}{r^3}+...+\frac{R}{r^i}+...=\frac{R}{r}[1+\frac{1}{r}+(\frac{1}{r})^2+...+(\frac{1}{r})^{i-1}+...]=\frac{R}{r}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{r}}=\frac{R}{r-1}. \quad (5)$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $\text{п\%p.a.(a)}$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (5) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M=\frac{R}{\rho-1}. \quad (6)$$

Пример 18. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме да се прима вечна годишна декурзивна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е годишно, а годишната каматна стапка е

а) $9\%\text{p.a.(d)}$, б) $9\%\text{p.a.(a)}$.

Решение. Од условот на задачата имаме $R=10000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата треба да ја определиме мизата, т.е. $M=?$.

а) Каматната стапка е $9\%\text{p.a.(d)}$, па затоа за каматниот фактор добиваме $r=1+\frac{9}{100}=1,09$ и ако замениме во (5) имаме:

$$M=\frac{R}{r-1}=\frac{10000}{1,09-1}=111111,11.$$

б) Каматната стапка е $9\%\text{p.a.(a)}$, па затоа за каматниот фактор добиваме $\rho=\frac{100}{100-9}=1,098901099$ и ако замениме во (6) имаме:

$$M = \frac{10000}{1{,}098901099-1} = 101111{,}11\,. \blacksquare$$

Пример 19. Колкава тримесечна декурзивна вечна рента ќе се прима ако денес е вложена миза од 250000 денари, со годишна каматна стапка

а) $8\%\text{p.a.(d)}$, б) $8\%\text{p.a.(a)}$,

и тримесечно вкаматување.

Решение. Од условот на задачата имаме $M = 250000$ и при дадена каматна стапка, при што вкаматувањето се совпаѓа со примањето на рентата треба да го определиме R.

а) Каматната стапка е $8\%\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето е тримесечно, па затоа $r = 1 + \frac{\frac{8}{4}}{100} = 1{,}02$. Ако замениме во (5) добиваме $250000 = \frac{R}{1{,}02-1}$, т.е. $R = 5000$.

б) Каматната стапка е $8\%\text{p.a.(a)}$ и вкаматувањето е шестмесечно, па затоа $\rho = \frac{100}{100-2} = 1{,}020408163$. Ако замениме во (6) добиваме:

$$250000 = \frac{R}{1{,}0020408163-1}\text{, т.е. } R = 5102{,}04\,. \blacksquare$$

Пример 20. Со која

а) декурзивна, б) антиципативна

каматна стапка, при годишно вкаматување треба да се вложат 280000 денари за да се добива годишна декурзивна вечна рента од 14000 денари.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $M = 280000$, $R = 14000$ и треба да се најде r. Од формулата (5) имаме $Mr - M = R$, па затоа

$$r = 1 + \frac{R}{M} = 1 + \frac{14000}{280000} = 1 + 0{,}05,$$

што значи $p = 5\%$.

б) Од условот на задачата имаме $M = 280000$, $R = 14000$ и треба да се најде ρ. Од формулата (4) имаме $M\rho - M = R$, па затоа $\rho = 1 + \frac{R}{M} = 1{,}05$ што значи

$$\text{п} = \frac{100\cdot(\rho-1)}{\rho} = 4{,}761904762\%\,. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

19. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме да се прима вечна шестмесечна антиципативна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е шестмесечно, а годишната каматна стапка е

а) 9%р.а.(d), б) 9%р.а.(а).

20. Колкава тримесечна антиципативна вечна рента ќе се прима ако денес е вложена миза од 400000 денари, со годишна каматна стапка
а) 6%р.а.(d), б) 6%р.а.(а),
и тримесечно вкаматување?

21. Со која
а) декурзивна, б) антиципативна
каматна стапка, при шестмесечно вкаматување треба да се вложат 350000 денари за да се добива шестмесечна антиципативна вечна рента од 15000 денари?

22. Колку денари треба да се вложат денес, ако сакаме да се прима вечна тримесечна декурзивна рента од 10000 денари? Притоа вкаматувањето е тримесечно, а годишната каматна стапка е
а) 12%р.а.(d), б) 12%р.а.(а).

23. Колкава тримесечна декурзивна вечна рента ќе се прима ако денес е вложена миза од 400000 денари, со годишна каматна стапка
а) 11%р.а.(d), б) 10%р.а.(а),
и тримесечно вкаматување?

24. Со која
а) декурзивна, б) антиципативна
каматна стапка, при тримесечно вкаматување треба да се вложат 500000 денари за да се добива тримесечна декурзивна вечна рента од 15000 денари?

6. ПЕРИОДИЧНИ РЕНТИ КОИ СЕ МЕНУВААТ ПО ПРИНЦИПОТ НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Овие ренти се карактеризираат со тоа што последователните исплати се членови на аритметичка прогресија со прв член R и разлика d. Притоа, како и останатите ренти тие можат да бидат декурзивни и антиципативни.

6.1.АНТИЦИПАТИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во $i-$от период од n-те еднакви периоди треба да овозможи исплата на антиципативна рента со големина $R+(i-1)d$, $i=1,2,...,n$ при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_i, i=1,2,...,n$ да го означиме делот на мизата кој условно во $i-$от период ја обезбедува исплата на рентата со големина $R+(i-1)d$, $i=1,2,...,n$ и нека каматна стапка е $p\%$р.а.(d), а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно,

$$M=V_1+V_2+...+V_n. \qquad (1)$$

Но, рентата е непосредна и антиципативна, па затоа сумата V_1 е еднаква на рентата R. Понатаму, рентата $R+d$ која се исплаќа на почетокот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{R+d}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, рентата $R+2d$ која се исплаќа на почетокот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3=\frac{R+2d}{r^2}$. Аналогно, добиваме $V_i=\frac{R+(i-1)d}{r^{i-1}}$, $i=4,...,n$ и ако замениме во (1) добиваме

$$\begin{aligned} M &= R+\frac{R+d}{r}+\frac{R+2d}{r^2}+\frac{R+3d}{r^3}+...+\frac{R+(n-1)d}{r^{n-1}} \\ &= R[1+\frac{1}{r}+(\frac{1}{r})^2+...+(\frac{1}{r})^{n-1}]+\frac{d}{r}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}] \\ &= R\frac{1-(\frac{1}{r})^n}{1-\frac{1}{r}}+\frac{d}{r}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}]=R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{d}{r}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Да означиме

$$S=1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}.$$

Ако последното равенство го помножиме со $\frac{1}{r}$ го добиваме равенството

$$\frac{S}{r}=\frac{1}{r}+\frac{2}{r^2}+\frac{3}{r^3}+...+\frac{n-1}{r^{n-1}}.$$

Последните две равенства ги одземаме и наоѓаме

$$S-\frac{S}{r}=1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{n-2}}+\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{n}{r^{n-1}}=\frac{1-(\frac{1}{r})^n}{1-\frac{1}{r}}-\frac{n}{r^{n-1}}=\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}-\frac{n}{r^{n-1}}$$

од каде наоѓаме

$$S(1-\frac{1}{r})=\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}-\frac{n}{r^{n-1}},$$

односно

$$S=\frac{r}{r-1}[\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}-\frac{n}{r^{n-1}}].$$

Конечно, ако замениме во равенството (2) добиваме:

$$\begin{aligned} M &= R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{d}{r}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}] \\ &= R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{d}{r}\cdot\frac{r}{r-1}[\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}-\frac{n}{r^{n-1}}] \\ &= R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}+\frac{d}{r-1}[\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}-\frac{n}{r^{n-1}}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $п\%р.а.(а)$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)} + \frac{d}{\rho - 1}\left[\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)} - \frac{n}{\rho^{n-1}}\right]. \qquad (4)$$

Пример 21. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 10 години да се прима полугодишна антиципативна рента кај која првата рента е 5000 денари, а секоја наредна е поголема за 200 денари од претходната? Годишната каматна стапка е

а) $12\%р.а.(d)$, б) $12\%р.а.(а)$,

и вкаматувањето е полугодишно.

Решение. Во случајот имаме периодична антиципативна рента која се менува по принципот на аритметичка прогресија. Притоа, $n = 20$, $R = 5000$, $d = 200$ и при дадена каматна стапка се бара мизата M.

а) Бидејќи годишната каматна стапка е $12\%р.а.(d)$ и вкаматувањето е шестмесечно за декурзивниот фактор имаме $r = 1,06$ и ако замениме во формулата (3) добиваме:

$$M = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} + \frac{d}{r - 1}\left[\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} - \frac{n}{r^{n-1}}\right]$$

$$= 5000 \cdot \frac{1,06^{20} - 1}{1,06^{19}(1,06 - 1)} + \frac{200}{1,06 - 1} \cdot \left[\frac{1,06^{20} - 1}{1,06^{19}(1,06 - 1)} - \frac{20}{1,06^{19}}\right] = 79283,44.$$

б) Во случајот каматниот фактор е $\rho = 1,063829787$ и треба да замениме во формулата (4). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

6.2.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во $i-$от период од n-те еднакви периоди треба да овозможи исплата на декурзивна рента со големина $R + (i-1)d$, $i = 1,2,...,n$ при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_i, i = 1,2,...,n$ да го означиме делот на мизата кој условно во $i-$от период ја обезбедува исплата на рентата со големина $R + (i-1)d$, $i = 1,2,...,n$ и нека каматна стапка е $p\%р.а.(d)$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно, за сумите $V_i, i = 1,2,...,n$ и мизата M важи (1). Но, рентата е непосредна и декурзивна, па затоа првата рента R која се исплаќа на крајот од првиот период се добива од сумата V_1, т.е. $V_1 = \frac{R}{r}$, каде r е соодветниот

декурзивен фактор. Понатаму, рентата $R+d$ која се исплаќа на крајот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{R+d}{r^2}$. Слично, рентата која се исплаќа на почетокот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3=\frac{R+2d}{r^3}$. На сличен начин добиваме:

$$V_i=\frac{R+(i-1)d}{r^i},\ i=4,...,n$$

и ако замениме во (1) добиваме:

$$\begin{aligned}M&=\frac{R}{r}+\frac{R+d}{r^2}+\frac{R+2d}{r^3}+...+\frac{R+(n-2)d}{r^{n-1}}+\frac{R+(n-1)d}{r^n}\\&=\frac{R}{r}[1+\frac{1}{r}+(\frac{1}{r})^2+...+(\frac{1}{r})^{n-1}]+\frac{d}{r^2}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}]\\&=\frac{R}{r}\cdot\frac{1-(\frac{1}{r})^n}{1-\frac{1}{r}}+\frac{d}{r^2}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}]=R\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}+\frac{d}{r^2}[1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}].\end{aligned}\tag{5}$$

Претходно видовме дека

$$S=1+\frac{2}{r}+\frac{3}{r^2}+...+\frac{n-1}{r^{n-2}}=\frac{r}{r-1}[\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}-\frac{n}{r^{n-1}}]$$

и ако замениме во (5) добиваме:

$$M=R\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}+\frac{d}{r-1}[\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}-\frac{n}{r^n}].\tag{6}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е п%р.а.(а), тогаш за пресметување на мизата во формулата (6) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M=R\frac{\rho^n-1}{\rho^n(\rho-1)}+\frac{d}{\rho-1}[\frac{\rho^n-1}{\rho^n(\rho-1)}-\frac{n}{\rho^n}].\tag{7}$$

Пример 22. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 10 години да се прима полугодишна декурзивна рента кај која првата рента е 5000 денари, а секоја наредна е поголема за 200 денари од претходната? Годишната каматна стапка е:

а) 12%р.а.(d) б) 12%р.а.(а)

и вкаматувањето е полугодишно.

Решение. Во случајот имаме периодична декурзивна рента која се менува по принципот на аритметичка прогресија. Притоа, $n=20$, $R=5000$, $d=200$ и при дадена каматна стапка се бара мизата M.

а) Бидејќи годишната каматна стапка е $12\%\,\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето е шестмесечно за декурзивниот фактор имаме $r=1,06$ и ако замениме во формулата (6) добиваме:

$$M = R\frac{r^n-1}{r^n(r-1)} + \frac{d}{r-1}\left[\frac{r^n-1}{r^n(r-1)} - \frac{n}{r^n}\right]$$

$$= 5000\cdot\frac{1,06^{20}-1}{1,06^{20}(1,06-1)} + \frac{200}{1,06-1}\cdot\left[\frac{1,06^{20}-1}{1,06^{20}(1,06-1)} - \frac{20}{1,06^{20}}\right] = 74795,7.$$

б) Во случајот декурзивниот фактор е $\rho=1,063829787$ и треба да замениме во формулата (7). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

ЗАДАЧИ

25. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 16 години да се прима тримесечна антиципативна рента кај која првата рента е 25000 денари, а секоја наредна е поголема за 5000 денари од претходната? Годишната каматна стапка е
    а) $9\%\,\text{p.a.(d)}$, б) $9\%\,\text{p.a.(a)}$,
    и вкаматувањето е тримесечно.
26. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 12 години да се прима тримесечна антиципативна рента кај која првата рента е 100000 денари, а секоја наредна е помала за 2000 денари од претходната? Годишната каматна стапка е
    а) $12\%\,\text{p.a.(d)}$, б) $12\%\,\text{p.a.(a)}$,
    и вкаматувањето е тримесечно.
27. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 14 години да се прима тримесечна декурзивна рента кај која првата рента е 15000 денари, а секоја наредна е поголема за 5000 денари од претходната? Годишната каматна стапка е
    а) $9\%\,\text{p.a.(d)}$, б) $9\%\,\text{p.a.(a)}$,
    и вкаматувањето е тримесечно.
28. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 11 години да се прима тримесечна декурзивна рента кај која првата рента е 100000 денари, а секоја наредна е помала за 2000 денари од претходната? Годишната каматна стапка е
    а) $12\%\,\text{p.a.(d)}$, б) $12\%\,\text{p.a.(a)}$,
    и вкаматувањето е тримесечно.

7. ПЕРИОДИЧНИ РЕНТИ КОИ СЕ МЕНУВААТ ПО ПРИНЦИПОТ НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Овие ренти се карактеризираат со тоа што последователните исплати се членови на геометриска прогресија со прв член R и количник q. Притоа, како и останатите ренти тие можат да бидат декурзивни и антиципативни.

7.1.АНТИЦИПАТИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во $i-$от период од n-те еднакви периоди треба да овозможи исплата на антиципативна рента со големина Rq^{i-1}, $i=1,2,...,n$ при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_i, i=1,2,...,n$ да го означиме делот на мизата кој условно во $i-$от период обезбедува исплата на рента со големина Rq^{i-1}, $i=1,2,...,n$ и нека каматна стапка е $p\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно,

$$M=V_1+V_2+...+V_n. \tag{1}$$

Но, рентата е непосредна и антиципативна, па затоа сумата V_1 е еднаква на рентата R. Понатаму, рентата Rq која се исплаќа на почетокот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{Rq}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, рентата Rq^2 која се исплаќа на почетокот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3=\frac{Rq^2}{r^2}$. На сличен начин добиваме $V_i=\frac{Rq^{i-1}}{r^{i-1}}$, $i=4,...,n$ и ако замениме во (1) добиваме:

$$\begin{aligned} M &= R+\frac{Rq}{r}+\frac{Rq^2}{r^2}+\frac{Rq^3}{r^3}+...+\frac{Rq^{n-1}}{r^{n-1}} \\ &= R[1+\frac{q}{r}+(\frac{q}{r})^2+...+(\frac{q}{r})^{n-1}] \\ &= R\frac{1-(\frac{q}{r})^n}{1-\frac{q}{r}}=R\frac{r^n-q^n}{r^{n-1}(r-q)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $п\%\text{p.a.(a)}$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M=R\frac{\rho^n-q^n}{\rho^{n-1}(\rho-q)}. \tag{3}$$

Пример 23. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 10 години да се прима полугодишна антиципативна рента кај која првата рента е 5000 денари, а секоја наредна е за 5% поголема од претходната? Каматната стапка е:

а) $12\%\text{p.a.(d)}$ б) $12\%\text{p.a.(a)}$

и вкаматувањето е полугодишно.

Решение. Во случајот имаме периодична антиципативна рента која се менува по принципот на геометриска прогресија. Притоа,

$$n=20,\ R=5000,\ q=1+\frac{5}{100}=1,05$$

и при дадена каматна стапка се бара мизата M.

а) Бидејќи годишната каматна стапка е $12\%\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето е шестмесечно за декурзивниот фактор имаме $r=1,06$ и ако замениме во формулата (3) добиваме

$$M=R\frac{r^n-q^n}{r^{n-1}(r-q)}=5000\cdot\frac{1,06^{20}-1,05^{20}}{1,06^{19}(1,06-1,05)}=91525,29$$

б) Во случајот каматниот фактор е $\rho=1,063829787$ и треба да замениме во формулата (3). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

7.2.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во $i-$от период од n-те еднакви периоди треба да овозможи исплата на декурзивна рента со големина Rq^{i-1}, $i=1,2,...,n$ при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_i, i=1,2,...,n$ да го означиме делот на мизата кој условно во $i-$от период обезбедува исплата на рента со големина Rq^{i-1}, $i=1,2,...,n$ и нека каматна стапка е $p\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно, и во овој случај точна е формулата (1). Но, рентата е непосредна и декурзивна, па затоа рентата R која се исплаќа на крајот од првиот период се добива од сумата V_1, т.е. $V_1=\frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Понатаму, рентата Rq која се исплаќа на крајот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{Rq}{r^2}$. Слично, рентата Rq^2 која се исплаќа на крајот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3=\frac{Rq^2}{r^3}$. На сличен начин добиваме $V_i=\frac{Rq^{i-1}}{r^i}$, $i=4,...,n$ и ако замениме во (1) добиваме:

$$\begin{aligned}M&=\frac{R}{r}+\frac{Rq}{r^2}+\frac{Rq^2}{r^3}+...+\frac{Rq^{n-1}}{r^n}\\&=\frac{R}{r}[1+\frac{q}{r}+(\frac{q}{r})^2+...+(\frac{q}{r})^{n-1}]\\&=\frac{R}{r}\cdot\frac{1-(\frac{q}{r})^n}{1-\frac{q}{r}}=R\frac{r^n-q^n}{r^n(r-q)}.\end{aligned}\qquad(4)$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $п\%р.а.(а)$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R\frac{\rho^n - q^n}{\rho^n(\rho - q)}. \qquad (5)$$

Пример 24. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 10 години да се прима полугодишна декурзивна рента кај која првата рента е 5000 денари, а секоја наредна е за 5% поголема од претходната. Каматната стапка е

а) $12\%р.а.(d)$ б) $12\%р.а.(а)$

и вкаматувањето е полугодишно.

Решение. Во случајот имаме периодична антиципативна рента која се менува по принципот на геометриска прогресија. Притоа,

$$n = 20,\ R = 5000,\ q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

и при дадена каматна стапка се бара мизата M.

а) Бидејќи годишната каматна стапка е $12\%р.а.(d)$ и вкаматувањето е шестмесечно за декурзивниот фактор имаме $r = 1,06$ и ако замениме во формулата (4) добиваме:

$$M = R\frac{r^n - q^n}{r^n(r - q)} = 5000 \cdot \frac{1,06^{20} - 1,05^{20}}{1,06^{20}(1,06 - 1,05)} = 86344,61$$

б) Во случајот декурзивниот фактор е $\rho = 1,063829787$ и треба да замениме во формулата (5). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

ЗАДАЧИ

29. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 16 години да се прима тримесечна антиципативна рента кај која првата рента е 25000 денари, а секоја наредна е поголема за 2% од претходната? Годишната каматна стапка е
а) $9\%р.а.(d)$, б) $9\%р.а.(а)$,
и вкаматувањето е тримесечно.

30. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 12 години да се прима тримесечна антиципативна рента кај која првата рента е 150000 денари, а секоја наредна е помала за 5% денари од претходната? Годишната каматна стапка е
а) $12\%р.а.(d)$, б) $12\%р.а.(а)$,
и вкаматувањето е тримесечно.

31. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 14 години да се прима тримесечна декурзивна рента кај која првата рента е 15000 денари, а секоја наредна е поголема за 3% од претходната? Годишната каматна стапка е
а) $9\%p.a.(d)$, б) $9\%p.a.(a)$,
и вкаматувањето е тримесечно.

32. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 11 години да се прима тримесечна декурзивна рента кај која првата рента е 100000 денари, а секоја наредна е помала за 4% од претходната. Годишната каматна стапка е
а) $12\%p.a.(d)$, б) $12\%p.a.(a)$,
и вкаматувањето е тримесечно.

8. РЕНТА ОТКУПЕНА СО ПРЕМИИ

Во практиката имаме случаи кога едно лице сака да си обезбеди рента, но не е во состојба одеднаш да ја уплати мизата. Во ваков случај, може да се постапи така што исплаќањето на рентата да отпочне после определен период, при што лицето на почетокот или на крајот на секој период ќе внесува определен капитал, премија, со што до денот на започнување на отплатата на рентата ќе ја обезбеди потребната миза. Ваквиот вид ренти, во кој уплатата на мизата се врши по пат на премии ги нарекуваме *ренти откупени со премии*.

Кај рентите откупени со премии, основна задача на финансиските пресметувања е да се определи каква премија треба да се внесува на почетокот на секој период, во текот на определен број периоди при дадена каматна стапка, за да се обезбеди исплата на определен вид рента. Во претходните точки разгледавме различни видови ренти, а како уплаќањето на премиите може да се изврши на различни начини, во случајот можни се повеќе варијанти на поставениот проблем. Меѓутоа, решавањето на проблемот генерално се сведува на следниве постапки:

- за определениот вид рента, согласно претходните разгледувања ја определуваме висината на мизата,
- уплаќањето на премиите го третираме како периодичен влог со еднакви уплати и ја наоѓаме неговата сума,
- ги изедначуваме најдената миза и сумата на премиите, од каде ја наоѓаме висината на премијата.

Пример 25. Колкава годишна премија треба да внесуваме во текот на 10 години, на почетокот на секоја година со годишна сложена камата од $8\%p.a.(d)$, за да во следните 15 години се прима годишна рента од 12000 денари, при што првото примање на рентата е на почетокот на единаесеттата година, т.е. исплаќањето е една година после уплатата на последната премија?

Решение. Од условот на задачата гледаме дека станува збор за годишна антиципативна рента со параметри: $n=15$, $r=1,08$ и $R=12000$. Според тоа, потребната миза можеме да ја пресметаме користејќи ја формулата (2) од точка 2.1, т.е. формулата

$$M = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}$$

Понатаму, како што рековме уплаќањето на премиите можеме да го третираме како периодичен влог со висина P. Од условот на задачата следува дека вложувањето е антиципативно, имаме $m=10$ вложувања и $r=1,08$. Според тоа, на крајот од m-тата година на овој начин сумата со која располагаме можеме да ја пресметаме според формулата (1) од точка II.2.1, т.е. формулата

$$S_m = Pr\frac{r^m-1}{r-1}.$$

Понатаму, бидејќи сумата S_m е еднаква на мизата M добиваме:

$$Pr\frac{r^m-1}{r-1} = R\frac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}, \text{ т.е. } P = R\frac{r^n-1}{r^n(r^m-1)}.$$

Со замена во претходната формула добиваме

$$P = 12000\cdot\frac{1,08^{15}-1}{1,08^{15}(1,08^{10}-1)} = 7090,28.\blacksquare$$

ЗАДАЧИ

33. Колкава годишна премија треба да внесуваме во текот на 15 години, на почетокот на секоја година со годишна сложена камата од $6\%\,\text{p.a.(d)}$, за да во следните 20 години се прима семестрална рента од 40000 денари, при што првото примање на рентата е на почетокот на шеснаесеттата година, т.е. исплаќањето е една година после уплатата на последната премија?
34. Колкава годишна премија треба да внесуваме во текот на 10 години, на почетокот на секоја година со годишна сложена камата од $8\%\,\text{p.a.(d)}$, за да во следните 15 години се прима квартална рента од 25000 денари, при што првото примање на рентата е на почетокот на шеснаесеттата година, т.е. исплаќањето е една година после уплатата на последната премија?
35. Колкава годишна премија треба да внесуваме во текот на 15 години, на почетокот на секоја година со годишна сложена камата од $9\%\,\text{p.a.(d)}$, за да во следните 20 години се прима месечна рента од 16000 денари, при што првото примање на рентата е на почетокот на шеснаесеттата година, т.е. исплаќањето е една година после уплатата на последната премија?

9. ПРЕКИНАТА РЕНТА

Нека имаме исплата на периодична рента која се исплаќа во првите m периоди, за да потоа во следните k периоди рентата се прекинува и нејзиното исплаќање продолжува во следните $n-m-k$ периоди. Ваквата рента ја нарекуваме *прекината рента*. Јасно, таа може да биде декурзивна и антиципативна.

9.1.АНТИЦИПАТИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во првите m и последните $n-m-k$ периоди треба да овозможи исплата на антиципативна рента со големина R, при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_i, i=1,2,...,m,m+k+1,...,n$ да го означиме делот на мизата кој условно во $i-$ от период ја обезбедува исплата на рентата со големина R и нека каматна стапка е $p\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно,

$$M=V_1+V_2+...+V_m+V_{m+k+1}+...+V_n. \tag{1}$$

Но, рентата е непосредна и антиципативна, па затоа сумата V_1 е еднаква на рентата R. Понатаму, рентата R која се исплаќа на почетокот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Слично, рентата R која се исплаќа на почетокот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3=\frac{R}{r^2}$. На сличен начин добиваме $V_i=\frac{R}{r^{i-1}}$, $i=4,...,m,m+k+1,...,n$ и ако замениме во (1) имаме:

$$\begin{aligned} M &= R+\frac{R}{r}+\frac{R}{r^2}+...+\frac{R}{r^{m-1}}+\frac{R}{r^{m+k}}+...+\frac{R}{r^{n-1}} \\ &= R[1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{m-1}}]+\frac{R}{r^{m+k}}[1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{n-m-k-1}}] \\ &= R\frac{1-(\frac{1}{r})^m}{1-\frac{1}{r}}+\frac{R}{r^{m+k}}\frac{1-(\frac{1}{r})^{n-m-k}}{1-\frac{1}{r}}=R[\frac{r^m-1}{r^{m-1}(r-1)}+\frac{r^{n-m-k}-1}{r^{n-1}(r-1)}]. \end{aligned} \tag{2}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $п\%\text{p.a.(a)}$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (2) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M=R[\frac{\rho^m-1}{\rho^{m-1}(\rho-1)}+\frac{\rho^{n-m-k}-1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}]. \tag{3}$$

Пример 26. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните шест години да се прима годишна антиципативна рента од 45000 денари, па

две години рентата да не се прима, за потоа истата да се прима како годишна антиципативна рента уште осум години? Годишната каматна стапка е

а) $9\%\text{p.a.(d)}$, б) $9\%\text{p.a.(a)}$,

и вкаматувањето е годишно.

Решение. а) Од условот на задачата имаме:

$$R=45000,\ m=6,\ k=2,\ n=6+2+8=16 \text{ и } r=1{,}09.$$

Заменуваме во (2) и добиваме:

$$M=R[\frac{r^m-1}{r^{m-1}(r-1)}+\frac{r^{n-m-k}-1}{r^{n-1}(r-1)}]=45000[\frac{1{,}09^6-1}{1{,}09^{6-1}(1{,}09-1)}+\frac{1{,}09^{16-6-2}-1}{1{,}09^{16-1}(1{,}09-1)}]$$

$$=45000[\frac{1{,}09^6-1}{1{,}09^5(1{,}09-1)}+\frac{1{,}09^8-1}{1{,}09^{15}(1{,}09-1)}]=356282{,}41\,\text{denar i}.$$

б) Во случајот каматниот фактор е $\rho=1{,}098901099$ и треба да замениме во формулата (3). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

9.2.ДЕКУРЗИВНА РЕНТА

Нека имаме миза M, која во првите m и последните $n-m-k$ периоди треба да овозможи исплата на декурзивна рента со големина R, при што мизата се сведува на нула со последната исплата на рентата. Со $V_i, i=1,2,...,m,m+k+1,...,n$ да го означиме делот на мизата кој условно во $i-$ от период ја обезбедува исплата на рентата со големина R и нека каматна стапка е $p\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето се совпаѓа со исплатата на рентата. Јасно, и во овој случај важи формулата (1). Но, рентата е непосредна и декурзивна, па затоа рентата R која се исплаќа на крајот од првиот период се добива од сумата V_1 , т.е. $V_1=\frac{R}{r}$, каде r е соодветниот декурзивен фактор. Понатаму, рентата R која се исплаќа на крајот од вториот период се добива од сумата V_2, па затоа $V_2=\frac{R}{r^2}$. Слично, рентата R која се исплаќа на крајот од третиот период се добива од сумата V_3, па затоа $V_3=\frac{R}{r^3}$. На сличен начин добиваме $V_i=\frac{R}{r^i}$, $i=4,...,m,m+k+1,...,n$ и ако замениме во (1) добиваме:

$$\begin{aligned} M&=\frac{R}{r}+\frac{R}{r^2}+...+\frac{R}{r^m}+\frac{R}{r^{m+k+1}}+...+\frac{R}{r^n}\\ &=\frac{R}{r}[1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{m-1}}]+\frac{R}{r^{m+k+1}}[1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{n-m-k-1}}] \qquad (4)\\ &=\frac{R}{r}\frac{1-(\frac{1}{r})^m}{1-\frac{1}{r}}+\frac{R}{r^{m+k+1}}\frac{1-(\frac{1}{r})^{n-m-k}}{1-\frac{1}{r}}=R[\frac{r^m-1}{r^m(r-1)}+\frac{r^{n-m-k}-1}{r^n(r-1)}]. \end{aligned}$$

Јасно, доколку вкаматувањето е антиципативно, т.е. доколку каматната стапка е $п\%р.а.(а)$, тогаш за пресметување на мизата во формулата (4) каматниот фактор r треба да се замени со соодветниот каматен фактор ρ, со што ја добиваме формулата

$$M = R[\frac{\rho^m - 1}{\rho^m(\rho - 1)} + \frac{\rho^{n-m-k} - 1}{\rho^n(\rho - 1)}]. \qquad (5)$$

Пример 27. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните шест години да се прима годишна декурзивна рента од 45000 денари, па две години рентата да не се прима, за потоа истата да се прима како годишна декурзивна рента уште осум години. Годишната каматна стапка е

а) $9\%р.а.(d)$, б) $9\%р.а.(а)$,

и вкаматувањето е годишно.

Решение. а) Од условот на задачата имаме:

$$R = 45000,\ m = 6,\ k = 2,\ n = 6 + 2 + 8 = 16 \text{ и } r = 1{,}09.$$

Заменуваме во (4) и добиваме:

$$M = R[\frac{r^m - 1}{r^m(r-1)} + \frac{r^{n-m-k} - 1}{r^n(r-1)}] = 45000[\frac{1{,}09^6 - 1}{1{,}09^6(1{,}09-1)} + \frac{1{,}09^{16-6-2} - 1}{1{,}09^{16}(1{,}09-1)}]$$

$$= 45000[\frac{1{,}09^6 - 1}{1{,}09^6(1{,}09-1)} + \frac{1{,}09^8 - 1}{1{,}09^{16}(1{,}09-1)}] = 326864{,}60 \text{ denari}.$$

б) Во случајот каматниот фактор е $\rho = 1{,}098901099$ и треба да замениме во формулата (5). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

ЗАДАЧИ

36. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 5 години да се прима тримесечна антиципативна рента од 25000 денари, па две години рентата да не се прима, за потоа истата да се прима како тримесечна антиципативна рента уште пет години? Годишната каматна стапка е
    а) $9\%р.а.(d)$, б) $9\%р.а.(а)$,
    и вкаматувањето е тримесечно.
37. Колку денари треба да се вложат денес, за во наредните 4 години да се прима месечна декурзивна рента од 10000 денари, па три години рентата да не се прима, за потоа истата да се прима како месечна декурзивна рента уште седум години? Годишната каматна стапка е
    а) $9\%р.а.(d)$, б) $9\%р.а.(а)$,
    и вкаматувањето е месечно.

ГЛАВА V
АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ

1. ПОИМ ЗА ЗАЕМ. ВИДОВИ ЗАЕМИ

Недостигот на финансиски средства најчесто се надополнува со користење на *заем* (*кредит*). Во нашите разгледувања нема да се задржуваме на економските причини кои доведуваат до користење на заеми, туку ќе се осврнеме само на квантитативното утврдување на обврските и нивното исполнување според условите дадени во договорот за заем на кој се пресметува и плаќа сложена камата.

Пред да преминеме на разгледување на заемите накратко ќе се осврнеме на поделбите на заемите, кои можеме да ги извршиме според различни критериуми како на пример:

- рокот на враќање,
- обезбедување со гаранција,
- давател на заемот,
- вид на камата,
- начин на отплатување итн.

Од аспект на рокот на враќање заемите можат да бидат *краткорочни, среднорочни и долгорочни*. Под краткорочни заеми ги подразбираме заемите кои имаат рок на враќање од најмногу една година, при што кај овие заеми се пресметува како проста, така и сложена камата. Среднорочните и долгорочните заеми имаат рок на отплата од две или повеќе години и за истите се пресметува сложена камата.

Од аспект на обезбедувањето со гаранција заемите можат да бидат *лични* и *реални*. Личните заеми се даваат без гаранција, односно врз основа на довербата која ја ужива барателот на заемот кај давателот на заемот. Реалните заеми се даваат врз основа на соодветно покритие, за што најчесто се користи хипотека, пренос на побарување и слично.

Од аспект на видот на давателот на заемот, заемите можат да бидат: *домашни* или *странски*, *јавни* (*комунални*) или *приватни*, *банкарски* или *небанкарски* итн.

Според начинот на отплаќање заемите можат да бидат: *рентни* и *амортизациони*. Амортизационите заеми можат да се враќаат на два начини и тоа:

- во текот на амортизациониот период заедно со каматата да се плаќа и дел од долгот или

- во текот на амортизациониот период (периодот на враќање) да се плаќа само каматата и на крајот од периодот да се плати целиот заем.

Од аспект дали на заемот се плаќа или не се плаќа камата, заемите можат да бидат *бескаматни* или *каматни*.

Според начинот на издавање на документот за задолжување, заемите можат да бидат *необлигациони* (*обични*) и *облигациони* (*заеми поделени на обврзници*). Кај обичните заеми должникот издава еден документ за задолжување на целиот износ, а додека кај облигационите заеми целиот заем се дели на повеќе документи со еднакви или различни номинални вредности, но нивниот збир треба да биде еднаков на целиот заем. Притоа, кај облигационите заеми имаме еден должник, а повеќе доверители, за што ќе говориме покасно.

Овде да споменеме, дека под *амортизирање на заем* ќе подразбираме негово постепено отплаќање според однапред утврден план. Отплаќањето на заемот најчесто се реализира на еден од следниве начини:

- Заемот да се отплати со еден износ, а каматата да се пресметува и плаќа за секој временски период. Притоа, ако висината на одобрениот заем е Z, декурзивниот каматен фактор за еден период е r, а заемот се враќа после n периоди, тогаш сумата која ќе се отплати е $Z_n = Z[1+n(r-1)]$.
- Заемот да се отплати со еден износ во кој е пресметан и интересот на интерес за периодот од одобрувањето до отплаќањето на заемот. Притоа, ако висината на одобрениот заем е Z, декурзивниот каматен фактор за еден период е r, а заемот се враќа после n периоди, тогаш сумата која ќе се отплати е $Z_n = Zr^n$.
- Заемот да се отплати со повеќе еднакви или различни суми во еднакви или различни временски интервали и пресметувањето на каматата за секоја сума да се врши одделно.
- Заемот да се отплати со повеќе еднакви или различни износи, кои се менуваат според некое правило и се на еднакви временски интервали. Износот кој се плаќа на еднакви временски интервали за намалување на заемот, а се состои од дел со кој се плаќа интересот на интерес и дел со кој се намалува заемот го нарекуваме *ануитет*. Делот со кој се намалува заемот го нарекуваме *отплата*. Притоа, ако заемот Z се враќа со плаќање на n ануитети, имаме n отплати $b_i, i=1,2,...,n$ за кои важи $Z=\sum_{i=1}^{n} b_i$. Во натамошните разгледување главно ќе се задржиме на овој вид заеми.

Како што веќе рековме, за секое задолжување мора да се оформи соодветен документ, односно да се склучи *должничко-доверителен договор*. Должничко-доверителниот договор за заем, покрај останатото треба да ги содржи следниве елементи:

- сумата на заемот Z,
- времето и начин на исполнување на обврските на доверителот (кредиторот),
- редовната каматна стапка,
- почетокот на отплаќање на заемот и должината на отплатување на заемот,
- начинот на отплаќање на заемот,
- обезбедување на вредноста на заемот од инфлација итн.

Што се однесува до одобрената сума, т.е. висината на заемот најчесто се практикува таа да може да се користи одеднаш или во делови (*транши*). Да споменеме, дека во практиката користењето на одделните транши е обусловено од динамиката на реализирање на инвестицијата за која се користи заемот (завршување на одделни фази на проектот, купување и монтирање опрема, реализирање на завршни работи на проектот и слично). Во случај кога заемот се реализира со одделни транши, тогаш најчесто од денот на користењето на првата транша, па до денот на започнувањето со отплата на камата на висината на искористените транши се плаќа камата, која ја нарекуваме *интеркаларна камата*. По правило интеркаларната камата се пресметува и плаќа на следниве начини:

- се пресметува и се плаќа за секој пресметковен период одделно и во овој случај имаме проста каматна стапка,
- се пресметува за секој пресметковен период, а се плаќа по истекот на вкупното време за кое се плаќа, при што каматата ќе изнесува $I = Z(r^n - 1)$ и
- се пресметува за секој пресметковен период и се додава кон основниот долг, па потоа заедно се отплаќа, при што новата сума која ќе треба да се отплати ќе биде $Z^* = Z + I = Zr^n$.

На крајот од овој дел да забележиме дека ануитетите може да се плаќаат на почетокот или на крајот од секој период. Понатаму, тие можат да бидат еднакви, заокружени или променливи и притоа може да растат или да опаѓаат. Што се однесува до пресметувањето и плаќањето на каматата, тоа може да биде антиципативно или декурзивно, т.е. на почетокот или на крајот од периодот.

2. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ ОТПЛАТИ И ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Нека имаме заем Z кој треба да се отплати со n еднакви отплати, каматна стапка p и декурзивно пресметување на каматата. Во случајот декурзивниот фактор r го пресметуваме според формулата $r = 1 + \frac{p}{100}$, а интересот според формулата $i = \frac{p}{100}$. Што се однесува до отплатите, бидејќи тие се еднакви, т.е.

$$b_k = b, k = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

а нивниот збир треба да е еднаков на заемот Z, од (1) следува

$$nb = Z, \text{ т.е. } b = \frac{Z}{n}. \tag{2}$$

Во практиката корисникот, но и давателот на заемот најчесто се заинтересирани да знаат колкав дел од заемот е отплатен после секој период и уште колку останува да се отплати. Притоа, ако ги воведеме ознаките:

- O_k - отплатениот дел од заемот заклучно со k – от ануитет и
- R_k - делот од заемот кој останува да се отплати после k – от ануитет,

добиваме:

$$O_k = kb = \frac{kZ}{n} \text{ и } R_k = (n-k)b = \frac{n-k}{n} Z. \tag{3}$$

Понатаму, бидејќи отплатите се еднакви и ануитетот е еднаков на збирот од отплатата и простата камата која се плаќа на остатокот од заемот за соодветниот период, добиваме дека ануитетите се променливи и тие можат да се пресметаат според формулата

$$a_k = b + I_k, \; k = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

каде $R_0 = Z$, I_k е каматата која се плаќа со k – от ануитет и

$$I_k = R_{k-1} i, \; R_k = R_{k-1} - b, \text{ за } k = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

Во практиката се составува таканаречениот амортизационен план, т.е табелата од која може да се види колкава се отплатата и каматата во секој ануитет и делот од заемот R_k кој треба да се отплатува после k – от ануитет. За наведениот модел обликот на амортизациониот план и постапката за негово составување се дадени во следнава табела.

период	отплата	камата	ануитет	остаток од заемот
0	0	0	0	$R_0 = Z$
1	b	$I_1 = iR_0$	$a_1 = b + I_1$	$R_1 = R_0 - b$
2	b	$I_2 = iR_1$	$a_2 = b + I_2$	$R_2 = R_1 - b$
...	...	...	...	...
$n-1$	b	$I_{n-1} = iR_{n-2}$	$a_{n-1} = b + I_{n-1}$	$R_{n-1} = R_{n-2} - b$
n	b	$I_n = iR_{n-1}$	$a_n = b + I_n$	$R_n = R_{n-1} - b = 0$

Пример 1. Заем од 100000 денари се амортизира за 5 години со еднакви полугодишни отплати и полугодишно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој семестар и годишната каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај ги отплатите и направи амортизационен план.

Решение. Во 5 години имаме 10 семестри, па затоа $b = \frac{100000}{10} = 10000$. Понатаму, бидејќи годишната каматна стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$ и вкаматувањето е семестрално добиваме $i = \frac{\frac{6}{2}}{100} = 0,03$. За амортизациониот план имаме:

период	отплата	камата	ануитет	остаток од заемот
0	0	0	0	100000
1	10000	3000	13000	90000
2	10000	2700	12700	80000
3	10000	2400	12400	70000
4	10000	2100	12100	60000
5	10000	1800	11800	50000
6	10000	1500	11500	40000
7	10000	1200	11200	30000
8	10000	900	10900	20000
9	10000	600	10600	10000
10	10000	300	10300	0

Притоа вкупната камата која ќе се плати е 16500 денари и истата е помала отколку при амортизацијата на заеми со еднакви ануитети и декурзивно пресметување на каматата (пресметај!). Последново се должи на фактот дека при еднакви отплати, првите неколку ануитети се поголеми отколку при еднакви ануитети, со што всушност се намалува каматата. ■

ЗАДАЧИ

1. Заем од 100000 денари се амортизира за 2 години со еднакви тримесечни отплати и тримесечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој квартал и годишната каматна стапка е $8\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај ја отплатата и направи амортизационен план.

2. Заем од 240000 денари се амортизира за 2 години со еднакви месечни отплати и месечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој квартал и годишната каматна стапка е $12\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај ја отплатата и направи амортизационен план.

3. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ АНУИТЕТИ И ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Нека имаме заем Z кој треба да се отплати со n еднакви ануитети, каматна стапка p и декурзивно пресметување на каматата. За декурзивниот фактор r имаме $r=1+\frac{p}{100}$, а интересот е $i=\frac{p}{100}$. Ако со $c_k, k=1,2,...,n$ го означиме делот од заемот кој условно учествува во отплатата на $k-$от ануитет, тогаш добиваме:

$$Z=c_1+c_2+...+c_n. \tag{1}$$

Понатаму, бидејќи сите ануитети се еднакви меѓу себе и се декурзивни добиваме дека c_k е ефективната вредност која се добива со математичко дисконтирање на ануитетот a за k периоди, т.е. $c_k=\frac{a}{r^k}, k=1,2,...,n$ и ако замениме во (1) добиваме:

$$Z=\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+...+\frac{a}{r^n}=\frac{a}{r}(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+...+\frac{1}{r^{n-1}})=a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)},$$

од каде наоѓаме:

$$a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}. \tag{2}$$

Како и во претходната точка ќе ги користиме ознаките:

- O_k - отплатениот дел од заемот заклучно со $k-$от ануитет и
- R_k - делот од заемот кој останува да се отплати после $k-$от ануитет.

Ќе докажеме дека поединечните отплати се членови на геометриска прогресија со прв член b_1 и количник r. За b_1 имаме:

$$b_1=a-iZ=Z[\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}-\frac{p}{100}]=Z[\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}-(r-1)]$$
$$=Z\frac{r^{n+1}-r^n-r^{n+1}+r^n+r-1}{r^n-1}=Z\frac{r-1}{r^n-1}.$$

Понатаму, нека претпоставиме дека за секој $m=1,2,...,k$ важи

$$b_m = b_1 r^{m-1}. \tag{3}$$

Ќе ја пресметаме отплатата b_{k+1}. Имаме:

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a - i(Z - b_1 - b_2 - ... - b_k) = a - iZ + i(b_1 + b_2 + ... + b_k) \\ &= a - iZ + i(b_1 + b_1 r + ... + b_1 r^{k-1}) = a - iZ + ib_1(1 + r + ... + r^{k-1}) \\ &= a - iZ + ib_1 \frac{r^k - 1}{r-1} = a - iZ + b_1(r^k - 1) = a - iZ + b_1 r^k - b_1 = b_1 r^k, \end{aligned}$$

па од принципот на математича индукција следува дека

$$b_k = b_1 r^{k-1}, k = 1,2,...,n.$$

Конечно, за отплатениот долг во првите k периоди наоѓаме:

$$O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k = b_1 + b_1 r + ... + b_1 r^{k-1} = b_1 \frac{r^k - 1}{r-1} = Z \frac{r^k - 1}{r^n - 1}, \tag{4}$$

од што следува дека остатокот од долгот после првите k периоди е

$$R_k = Z - O_k = Z - Z \frac{r^k - 1}{r^n - 1} = Z \frac{r^n - r^k}{r^n - 1}. \tag{5}$$

Формулите (4) и (5) ни овозможуваат непосредно пресметување на отплатениот дел O_k и делот од заемот R_k кој треба да се отплатува после k – от ануитет. Меѓутоа, при составување на амортизациониот план, т.е табелата од која може да се види колкава се отплатата и каматата во секој ануитет и делот од заемот R_k кој треба да се отплатува после k – от ануитет ќе ги користиме формулите:

$R_0 = Z$, $R_k = R_{k-1} - b_k$, $i = \frac{p}{100}$, $I_k = R_{k-1} i$ и $b_k = a - I_k$, за $k = 1,2,...,n$.

Така ја имаме следнава табела за амортизациониот план.

период	ануитет	камата	отплата	остаток од заемот
0	0	0	0	$R_0 = Z$
1	a	$I_1 = iR_0$	$b_1 = a - I_1$	$R_1 = R_0 - b_1$
2	a	$I_2 = iR_1$	$b_2 = a - I_2$	$R_2 = R_1 - b_2$
...	...	...	...	...
$n-1$	a	$I_{n-1} = iR_{n-2}$	$b_{n-1} = a - I_{n-1}$	$R_{n-1} = R_{n-2} - b_{n-1}$
n	a	$I_n = iR_{n-1}$	$b_n = a - I_n$	$R_n = R_{n-1} - b_n = 0$

Пред да преминеме на разгледување на примери да забележиме дека платената камата заклучно со исплатата на k – от ануитет можеме да ја пресметаме со формулата

$$J_k = I_1 + I_2 + ... + I_k = (a - b_1) + ... + (a - b_k)$$
$$= ka - (b_1 + ... + b_k) = Z\frac{kr^n(r-1) - r^k + 1}{r^n - 1}.$$

Ако во последното равенство ставиме $n = k$, тогаш за вкупната камата добиваме

$$J_n = Z\frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{r^n - 1}. \qquad (6)$$

Пример 2. Заем од 100000 денари се амортизира за 6 години со еднакви годишни ануитети и годишно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секоја година и годишната каматната стапка е $4\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.

Решение. Во случајов имаме $Z = 100000$, $n = 6$, $p = 4$, $i = \frac{4}{100} = 0,04$ и $r = 1,04$, што значи

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 100000 \cdot \frac{1,04^6(1,04-1)}{1,04^6 - 1} = 19076,19 \text{ денари.}$$

За амортизациониот план имаме:

период	ануитет	камата	отплата	остаток од заемот
0	0,00	0,00	0,00	100000,00
1	19076,19	4000,00	15076,19	84923,81
2	19076,19	3396,95	15679,24	69244,57
3	19076,19	2769,78	16306,41	52938,16
4	19076,19	2117,53	16958,66	35979,50
5	19076,19	1439,18	17637,01	18342,49
6	19076,19	733,70	18342,49	0,00

Да забележиме дека вкупната камата во случајот е

$$J_6 = 4000 + 3396,95 + 2769,78 + 2117,53 + 1439,18 + 733,70 = 14457,14$$

и истата директно може да се пресмета со помош на формулата (6). ■

Пример 3. Заем од 300000 денари се амортизира за 10 години со еднакви полугодишни ануитети и полугодишно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој семестар и годишната каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$.

а) Пресметај го ануитетот.

б) Пресметај го отплатениот дел и остатокот од заемот заклучно со шестата година.

Решение. Бидејќи заемот се амортизира со полугодишни ануитети и вкаматувањето е полугодишно имаме

$$Z = 300000,\ n = 10 \cdot 2 = 20,\ p = 6 \text{ и } r = 1 + \frac{\frac{6}{2}}{100} = 1,03.$$

а) За ануитетот добиваме:

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 300000 \cdot \frac{1,03^{20}(1,03-1)}{1,03^{20} - 1} = 20164,71 \text{ ден.}$$

б) На крајот од шестата година имаме $k = 6 \cdot 2 = 12$ полугодишни отплати и ако ја искористиме формулата (3) добиваме:

$$O_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = b_1 + b_1 r + \ldots + b_1 r^{k-1} = b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1} = Z\frac{r^k - 1}{r^n - 1}$$

$$O = O_{12} = 300000 \cdot \frac{1,03^{12} - 1}{1,03^{20} - 1} = 158449,71 \text{ денари,}$$

а останува да се отплатат уште

$$R = R_{12} = Z - O_{12} = Z - O = 300000 - 158449,71 = 141550,29 \text{ денари.} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

3. Заем од 100000 денари се амортизира за 2 години со еднакви месечни ануитети и месечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој месец и годишната каматна стапка е $9\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.
4. Заем од 600000 денари се амортизира за 3 години со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секои три месеци и годишна каматна стапка е $8\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.
5. Заем од 2500000 денари се амортизира за 10 години со еднакви месечни ануитети и месечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој месец и годишната каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$.
   a) Пресметај го ануитетот.
   b) Пресметај го отплатениот дел и остатокот од заемот заклучно со шестата година.
6. Заем од 1000000 денари се амортизира за 8 години со еднакви тримесечни ануитети и тримесечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секои три месеци и годишната каматната стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$.
   a) Пресметај го ануитетот.
   b) Пресметај го отплатениот дел и остатокот од заемот заклучно со шестата година.

4. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЗАОКРУЖЕНИ АНУИТЕТИ И ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Информатичката технологија овозможува брзо и прецизно составување на амортизационен план, при што може да се постигне секоја однапред зададена точност на пресметување. Сепак, во практиката постојат низа административни и финансиски причини кои наложуваат заокружување на ануитетите. Во овој дел ќе се осврнеме на моделот на амортизација на заеми со заокружени ануитети и декурзивно пресметување на каматата, кој во практиката најчесто се јавува во следниве два облика.

1) Дадени се: висината на заемот Z, каматната стапка на годишно ниво $p\%\text{p.a.(d)}$ и висината на ануитетот a која може да ја плаќа должникот. Треба да се определи бројот на периодите на амортизација, а потоа да се пресмета последниот ануитет a_1, кој најчесто е помал од дадениот ануитет a.

2) Дадени се: висината на заемот Z, каматната стапка на годишно ниво $p\%\text{p.a.(d)}$ и бројот на периодите на амортизација на заемот. Треба да се определи висината на ануитетот a, која потоа се заокружува заради поедноставни пресметувања, т.е. се зема заокружен ануитет a^*. Понатаму, за овој ануитет се наоѓа бројот на периодите на амортизација, а потоа да се пресмета последниот ануитет a_1, кој најчесто е помал од дадениот ануитет a^*.

Нека се дадени висината на заемот Z, каматната стапка на годишно ниво $p\%\text{p.a.(d)}$ и висината на ануитетот a која може да ја плаќа должникот и со a_1 да го означиме последниот ануитет. Притоа имаме, $i=\frac{\frac{p}{k}}{100}$, каде k е бројот на вкаматувањата и јасно треба да е исполнето $a>Zi$. За да го определиме бројот на периодите n од формулата (2) во точка 3 го изразуваме r^n. Значи, од $a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$ наоѓаме $r^n=\frac{a}{a-Z(r-1)}$. Последното равенство го логаритмираме и добиваме $n\log r=\log\frac{a}{a-Z(r-1)}$, т.е.

$$n_0=\frac{\log\frac{a}{a-Z(r-1)}}{\log r}. \qquad (1)$$

Ако n_0 е природен број, тогаш тој е еднаков на бројот на периодите на амортизација. Меѓутоа, најчесто n_0 не е природен број и тогаш бројот на периодите на амортизација е еднаков на $n=[n_0]+1$, при што во првите $n-1$ периоди ануитетите се еднакви на a, а во $n-$от период ануитетот е еднаков

на a_1 и истиот треба да го пресметаме. За да го пресметаме последниот ануитет a_1 постапуваме на следниов начин. Со $c_k, k=1,2,...,n$ го означиме делот од заемот кој условно учествува во отплатата на $k-$ от ануитет. Имаме:

$$Z = c_1 + c_2 + ... + c_{n-1} + c_n . \tag{2}$$

Понатаму, бидејќи првите $n-1$ ануитети се еднакви меѓу себе и се декурзивни имаме $c_k = \frac{a}{r^k}, k=1,2,...,n-1$ и уште $c_n = \frac{a_1}{r^n}$. Заменуваме во (2) и добиваме:

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + ... + \frac{a}{r^{n-1}} + \frac{a_1}{r^n} = \frac{a}{r}(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ... + \frac{1}{r^{n-2}}) + \frac{a_1}{r^n} = a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)} + \frac{a_1}{r^n},$$

од каде наоѓаме:

$$a_1 = [Z - a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}]r^n . \tag{3}$$

Како и во претходните модели не интересира што станува со отплатите. Ќе докажеме дека првите $n-1$ отплата се членови на геометриска прогресија со прв член b_1 и количник r. За b_1 имаме $b_1 = a - iZ$. Понатаму, нека претпоставиме дека за секој $m=1,2,...,k$ важи

$$b_m = b_1 r^{m-1}. \tag{4}$$

Ќе ја пресметаме отплатата b_{k+1}. Имаме:

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a - i(Z - b_1 - b_2 - ... - b_k) = a - iZ + i(b_1 + b_2 + ... + b_k) \\ &= a - iZ + i(b_1 + b_1 r + ... + b_1 r^{k-1}) = a - iZ + ib_1(1 + r + ... + r^{k-1}) \\ &= a - iZ + ib_1\frac{r^k - 1}{r-1} = a - iZ + b_1(r^k - 1) = a - iZ + b_1 r^k - b_1 = b_1 r^k, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека

$$b_k = b_1 r^{k-1}, k = 1,2,...,n-1 .$$

Конечно, за отплатениот долг во првите k периоди наоѓаме:

$$O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k = b_1 + b_1 r + ... + b_1 r^{k-1} = b_1\frac{r^k - 1}{r-1}, \tag{5}$$

од што следува дека остатокот од долгот после првите k периоди е

$$R_k = Z - O_k = Z - b_1\frac{r^k - 1}{r-1}, \tag{6}$$

што значи дека последната отплата е

$$b_n = R_{n-1} = Z - O_{n-1} = Z - b_1\frac{r^{n-1} - 1}{r-1} . \tag{7}$$

Пример 4. За кое време заем од 60000 денари ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 4000 денари со годишна каматна стапка $4\%\text{p.a.(d)}$ и годишно вкаматување. Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.

Решение. Во случајот имаме $Z = 60000, a = 4000$ и $r = 1,04$ и ако замениме во формулата (1) добиваме:

$$n_0 = \frac{\log \frac{a}{a - Z(r-1)}}{\log r} = \frac{\log 2,5}{\log 1,04} = 23,3624189\,,$$

што значи дека 23 (периоди) години ќе се плаќа полн ануитет од 4000 денари, а последната 24 година ќе се плати помал ануитет, т.е. $n = 24$.

Со замена во формулата (3) за последниот ануитет добиваме:

$$a_1 = [Z - a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}]r^n = [60000 - 4000 \cdot \frac{1,04^{23}-1}{1,04^{23}(1,04-1)}]1,04^{24} = 1467,83\,.$$

Понатаму, како $b_1 = a - iZ = 4000 - 0,04 \cdot 60000 = 1600$ за последната отплата наоѓаме

$$b_n = R_{n-1} = Z - O_{n-1} = Z - b_1 \frac{r^{n-1}-1}{r-1} = 60000 - 1600 \cdot \frac{1,04^{23}-1}{1,04-1} = 1411,38\,.$$

Конечно, амортизациониот план е даден во следнава табела:

период	камата	отплата	остаток од долгот
0	0,00	0,00	60000,00
1	2400,00	1600,00	58400,00
2	2336,00	1664,00	56736,00
3	2269,44	1730,56	55005,44
4	2200,22	1799,78	53205,66
5	2128,23	1871,77	51333,89
6	2053,36	1946,64	49387,25
7	1975,49	2024,51	47362,74
8	1894,51	2105,49	45257,25
9	1810,29	2189,71	43067,54
10	1722,70	2277,30	40790,24
11	1631,61	2368,39	38421,85
12	1536,87	2463,13	35958,72
13	1438,35	2561,65	33397,07
14	1335,88	2664,12	30732,95
15	1229,32	2770,68	27962,27
16	1118,49	2881,51	25080,76
17	1003,23	2996,77	22083,99
18	883,36	3116,64	18967,35
19	758,69	3241,31	17526,04
20	629,04	3370,96	12355,08
21	494,20	3505,80	8849,28
22	353,97	3646,03	5203,25
23	208,13	3791,87	1411,38
24	56,56	1411,38	0,00

Како што можеме да видиме последната камата е 56,56 денари. ■

Пример 5. Да се состави амортизационен план на заем $Z = 20000,$ со годишна каматна стапка од $6\%p.a.(d)$, кој се аморитизира за 4 години со полугодишни ануитети заокружени на илјада и полугодишно вкаматување.

Решение. Прво го определуваме ануитетот според формулата за амортизација на заеми со еднакви ануитети и декурзивно вкаматување. Бидејќи вкаматувањето е полугодишно добиваме $n = 4 \cdot 2 = 8,$ $i = \frac{\frac{p}{2}}{100} = 0,03$ и $r = 1 + i = 1,03$, па затоа

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 20000 \cdot \frac{1,03^8(1,03-1)}{1,03^8 - 1} = 2849,13.$$

Од условот на задачата имаме дека заокруженият ануитет ќе биде првата илјадарка поголема од 2849,13, т.е. $a^* = 3000$. Понатаму, со замена во формулата (3) за последниот ануитет наоѓаме

$$a_1 = [Z - a^* \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)}]r^n = [20000 - 3000 \cdot \frac{1,03^7 - 1}{1,03^7(1,03-1)}]1,03^8 = 1658,39,$$

и како тој е позитивен заклучуваме дека со заокружен ануитет $a^* = 3000$ заемот навистина ќе се амортизира за 4 години, т.е. за $n = 4 \cdot 2 = 8$ периоди.

За амортизациониот план во случајот добиваме

период	камата	отплата	остаток од долгот
0	0,00	0,00	20000,00
1	600,00	2400,00	17600,00
2	528,00	2472,00	15128,00
3	453,84	2546,16	12581,84
4	377,46	2622,54	9959,30
5	298,78	2701,22	7258,08
6	217,74	2782,26	4475,82
7	134,27	2865,73	1610,09
8	48,30	1610,09	0,00

Како што можеме да видиме последната камата е 48,30 денари, а последната отплата е 1610,09 денари. Пресметај ја отплатата користејќи ја формулата (7). ■

ЗАДАЧИ

7. За кое време заем од 60000 денари ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 5000 денари со годишна каматна стапка $5\%p.a.(d)$ и годишно вкамату-

вање? Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.

8. За кое време заем од 90000 денари ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 10000 денари со годишна каматна стапка $6\%\text{p.a.(d)}$ и годишно вкаматување? Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.
9. Да се состави амортизационен план на заем $Z = 40000$ со годишна каматна стапка од $6\%\text{p.a.(d)}$, кој се аморитизира за 5 години со полугодишни ануитети заокружени на стотки и полугодишно вкаматување.
10. Да се состави амортизационен план на заем $Z = 20000$, со годишна каматна стапка од $6\%\text{p.a.(d)}$, кој се аморитизира за 4 години со квартални ануитети заокружени на илјада и квартално вкаматување.

5. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ АНУИТЕТИ И ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА КАЈ КОИ ПЛАЌАЊЕТО Е ПОЧЕСТО ОД ВКАМАТУВАЊЕТО

Амортизацијата на заеми со еднакви ануитети кај кои плаќањето е почесто од вкаматувањето е доста често во практиката. Имено, станува збор за заеми кај кои ануитетите се плаќаат, на пример, месечно, а вкаматувањето е тримесечно и слично. Постојат повеќе методи за изработка на амортизационен план за ваквите заеми од кои овде ќе го разгледаме методот со користење на конформната стапка. Параметрите со кои е определен овој вид заеми се:

Z - заемот кој треба да се отплаќа со еднакви ануитети,
p - декурзивна каматна стапка,
k - бројот на вкаматувањата за дадената каматна стапка,
m - бројот на платени ануитети во еден период на вкаматување и
n - број на периоди со дадена каматна стапка во кои се отплаќа заемот.

Како што знаеме, во еден период на вкаматување каматната стапка е $\frac{p}{k}$ и имаме m плаќања на еднакви ануитети. За секое поединечно плаќање на ануитети треба да пресметаме интерес на интерес, но така да за него важи каматната стапка $\frac{p}{k}$. Јасно, ова може да го направиме со наоѓање на соодветната конформна каматна стапка p'. Притоа, бидејќи вкаматувањето е декурзивно, тогаш за m-от платен ануитет, кој се плаќа на крајот од првиот период на вкаматување ќе важи

$$\frac{a}{(1+\frac{p'}{100})^m} = \frac{a}{1+\frac{\frac{p}{k}}{100}}$$

од каде наоѓаме

$$p' = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100k}} - 1). \qquad (1)$$

Сега, најдената конформна каматна стапка ја применуваме на потполно ист начин како и во моделот од точка 3. Меѓутоа, бидејќи каматата се плаќа во $m-$тиот, $2m-$тиот, ..., $kmn-$тиот период, во сите останати периоди отплатата ќе биде еднаква на ануитетот, а во последниот период од секој циклус на вкаматување таа ќе биде еднаква на разликата на ануитетот и каматата. Во последниот период отплатата треба да биде еднаква на остатокот од долгот, па затоа ануитетот се добива како збир на каматите од последниот период на вкаматување и последната отплата.

Пример 6. Состави амортизационен план за заем $Z = 100000$ добиен со годишна каматна стапка $6\%\text{p.a.(d)}$, кој треба да се амортизира за три години со тримесечни ануитети, ако вкаматувањето е семестрално.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$Z = 100000,\ p = 6\%\text{p.a.(d)},\ n = 3,\ k = 2 \text{ и } m = 2,$$

т.е. станува збор за амортизација на заем со еднакви ануитети кај кои плаќањето е почесто од вкаматувањето. За конформната каматна стапка наоѓаме

$$p' = 100(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100k}} - 1) = 100(\sqrt[2]{1+\frac{6}{100\cdot 2}} - 1) = 1,488915651.$$

Според тоа, заемот $Z = 100000$, треба да се амортизира со еднакви ануитети за $kmn = 12$ периоди и каматна стапка $p' = 1,488915651.$ Соодветниот декурзивен фактор е $r = 1,014889157.$ Ако ја искористиме формулата (2) од точка 5.1 наоѓаме

$$a = Z\frac{r^{kmn}(r-1)}{r^{kmn}-1} = 100000 \cdot \frac{1,014889157^{12}(1,014889157-1)}{1,014889157^{12}-1} = 9161,67.$$

период шестмес.	период тримесеч.	тримесечна камата	шестмес. камата	отплата	остаток од долгот
	0	0,00	0,00	0,00	100000,00
	1	1488,92		9161,67	90838,33
1	2	1352,51	2841,43	6320,24	84518,09
	3	1258,40		9161,67	75356,42
2	4	1121,99	2380,39	6781,28	68575,14
	5	1021,03		9161,67	59413,47
3	6	884,62	1905,65	7256,02	52157,45
	7	776,58		9161,67	42995,78

4	8	640,17	1416,75	7744,92	35259,86
	9	524,99		9161,67	26098,19
5	10	388,58	913,57	8248,10	17850,09
	11	265,77		9161,67	8688,42
6	12	129,36	395,13	8688,42	0,00

Според тоа, последниот ануитет ќе биде еднаков на

395,13+8688,42=9083,55 денари. ■

ЗАДАЧИ

11. Состави амортизационен план за заем $Z = 150000$ добиен со годишна каматна стапка $8\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, кој треба да се амортизира за три години со тримесечни ануитети, ако вкаматувањето е годишно.
12. Состави амортизационен план за заем $Z = 120000$ добиен со годишна каматна стапка $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, кој треба да се амортизира за четири години со тримесечни ануитети, ако вкаматувањето е годишно.
13. Состави амортизационен план за заем $Z = 250000$ добиен со годишна каматна стапка $4\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, кој треба да се амортизира за две години со месечни ануитети, ако вкаматувањето е тримесечно.

6. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА КАЈ КОИ АНУИТЕТИТЕ СЕ МЕНУВААТ ПО ПРИНЦИПОТ НА АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Нека имаме заем Z, со декурзивна каматна стапка p и нека ануитетите се совпаѓаат со вкаматувањето. Должникот бара заемот да се амортизира за n периоди, при што првиот ануитет е еднаков на a, а потоа секој нареден ануитет во однос на претходниот се менува за константна вредност d, т.е. ануитетите се менуваат по принципот на аритметичка прогресија

$$a_k = a + (k-1)d,\ k = 1,2,...,n\,.$$

За да го изработиме амортизациониот план прво ќе го определиме декурзивниот фактор $r = 1 + \frac{p}{100}$ и интересот $i = \frac{p}{100}$. Ако со $c_k, k = 1,2,...,n$ го означиме делот од заемот кој условно учествува во отплатата на $k-$тиот ануитет добиваме:

$$Z = c_1 + c_2 + ... + c_n\,. \tag{1}$$

Понатаму, бидејќи

$$a_k = a + (k-1)d,\ k = 1, 2, ..., n$$

и ануитетите се декурзивни имаме:

$$c_k = \frac{a+(k-1)d}{r^k},\ k = 1, 2, ..., n,$$

и ако замениме во (1) добиваме:

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{a+d}{r^2} + ... + \frac{a+(n-1)d}{r^n} = \frac{a}{r}(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + ... + \frac{1}{r^{n-1}}) + \frac{d}{r^2}(1 + \frac{2}{r} + ... + \frac{n-1}{r^{n-2}})$$
$$= a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} + \frac{d}{r^2}S,$$

и како

$$S = 1 + \frac{2}{r} + \frac{3}{r^2} + ... + \frac{n-1}{r^{n-2}} = \frac{r}{r-1}[\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} - \frac{n}{r^{n-1}}]$$

со замена во горното равенство наоѓаме:

$$Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} + \frac{d}{r-1}[\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} - \frac{n}{r^n}]. \quad (2)$$

Конечно, од (2), ако се познати Z, n, p и d го наоѓаме првиот ануитет

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} - \frac{d}{r-1} + \frac{nd}{r^n - 1}, \quad (3)$$

после што едноставно можеме да го составиме амортизациониот план.

Понатаму, остатокот од заемот R_k, после плаќањето на $k-$тиот ануитет, е еднаков на неплатениот дел од заемот кој треба да се отплаќа во следните $n-k$ периоди, при што почетниот ануитет е $a_{k+1} = a + kd$. Според тоа, остатокот од заемот R_k е заем од истиот вид кај кој почетниот ануитет е еднаков на $a_{k+1} = a + kd$, и кој треба да се отплати $n-k$ за периоди, па затоа неговата големина можеме да ја добиеме ако во формулата (2) замениме: Z со R_k, a со $a_{k+1} = a + kd$ и n со $n-k$. Според тоа, за остатокот од заемот R_k после плаќањето на $k-$тиот ануитет точна е формулата

$$R_k = (a + kd)\frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)} + \frac{d}{r-1}[\frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)} - \frac{n-k}{r^{n-k}}]. \quad (4)$$

Конечно, отплатениот дел од заемот е еднаков на разликата меѓу заемот и остатокот од заемот, што значи

$$O_k = Z - R_k. \quad (5)$$

Пример 7. Заем од 100000 денари се амортизира за 3 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието. Ануитетите

секој следен период се зголемуваат за 3000 денари. Годишната каматна стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.

Решение. Од условот на задачата добиваме

$$Z=100000,\ d=3000,\quad p=6\%\text{p.a.(d)},\ n=2\cdot 3=6.$$

Според тоа, $r=1+\frac{\frac{6}{2}}{100}=1,03$ и $i=0,03$. Ако ја искористиме формулата (3) за првиот ануитет добиваме

$$a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}-\frac{d}{r-1}+\frac{nd}{r^n-1}=100000\cdot\frac{1,03^6(1,03-1)}{1,03^6-1}-\frac{3000}{1,03-1}+\frac{6\cdot 3000}{1,03^6-1}=11218,16.$$

За амортизациониот план имаме:

период	камата	ануитет	отплата	остаток од долгот
0	0,00	0,00	0,00	100000,00
1	3000,00	11218,16	8218,16	91781,84
2	2753,46	14218,16	11464,70	80317,14
3	2409,51	17218,16	14808,65	65508,49
4	1965,25	20218,16	18252,91	47255,58
5	1417,67	23218,16	21800,49	25455,09
6	735,65	26218,16	25454,51	0,58

Забележуваме дека на крајот од шестиот период се јавува остаток од долгот од 0,58 денари. Причината за појавата на овој остаток е заокружувањето при пресметувањата и во практиката најчесто истиот се додава во последниот ануитет кој наместо 26218,16 треба да изнесува 26218,74 денари. ■

ЗАДАЧИ

14. Заем од 100000 денари се амортизира за 3 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието. Ануитетите секој следен период се намалуваат за 3000 денари. Годишната каматна стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.
15. Заем од 200000 денари се амортизира за 6 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието. Ануитетите секој следен период се намалуваат за 6000 денари. Годишната каматна стапка е $4\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.
16. Заем од 100000 денари се амортизира за 3 години со тримесечни ануитети кои се плаќаат на крајот од кварталот. Ануитетите секој следен период се зголемуваат за 3000 денари. Годишната каматна стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето е квартално. Состави амортизационен план.

17. Заем од 200000 денари се амортизира за 6 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието. Ануитетите секој следен период се зголемуваат за 6000 денари. Годишната каматна стапка е $4\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.

7. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА КАЈ КОИ АНУИТЕТИТЕ СЕ МЕНУВААТ ПО ПРИНЦИПОТ НА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Нека имаме заем Z, со декурзивна каматна стапка p и нека ануитетите се совпаѓаат со вкаматувањето. Должникот бара заемот да се амортизира за n периоди, при што првиот ануитет е еднаков на a, а потоа секој нареден ануитет се менува за константен процент $p*$ во однос на претходниот. Притоа можни се два случаи: $p = p*$ и $p \neq p*$. Случајот $p = p*$ скоро и да не се среќава во практиката, па затоа истиот нема да го разгледуваме, т.е. ќе се осврнеме само на случајот кога $p \neq p*$. Според тоа,

$$a_1 = a \text{ и } a_{k+1} = a_k \pm \frac{p^*}{100} a_k = a_k (1 \pm \frac{p^*}{100}) = a_k q,\ k = 1,2,...,n-1,$$

каде во случај кога имаме зголемување на ануитетите за процент $p*$ имаме $q = 1 + \frac{p^*}{100}$, а во случај кога имаме намалување на ануитетите за процент $p*$ имаме $q = 1 - \frac{p^*}{100}$. Последното значи дека ануитетите се менуваат по принципот на геометриска прогресија, односно

$$a_k = aq^{k-1}, k = 1,2,...,n.$$

За да го изработиме амортизациониот план прво ќе го определиме декурзивниот фактор $r = 1 + \frac{p}{100}$ и интересот $i = \frac{p}{100}$. Ако со $c_k, k = 1,2,...,n$ го означиме делот од заемот кој условно учествува во отплатата на $k-$тиот ануитет, тогаш добиваме

$$Z = c_1 + c_2 + ... + c_n. \tag{1}$$

Понатаму, бидејќи

$$a_k = aq^{k-1}, k = 1,2,...,n$$

и ануитетите се декурзивни имаме:

$$c_k = a\frac{q^{k-1}}{r^k}, k = 1,2,...,n.$$

Ако замениме во (1) добиваме:

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{aq}{r^2} + \ldots + \frac{aq^{n-1}}{r^n} = \frac{a}{r}[1 + \frac{q}{r} + (\frac{q}{r})^2 + \ldots + (\frac{q}{r})^{n-1}] = a\frac{r^n - q^n}{r^n(r-q)}. \quad (2)$$

Од претходното равенство за првиот ануитет добиваме:

$$a = Z\frac{r^n(r-q)}{r^n - q^n}. \quad (3)$$

Понатаму, остатокот од заемот R_k, после плаќањето на $k-$тиот ануитет, е еднаков на неплатениот дел од заемот кој треба да се отплаќа во следните $n-k$ периоди, при што почетниот ануитет е $a_{k+1} = aq^k$. Според тоа, остатокот од заемот R_k е заем од истиот вид кај кој почетниот ануитет е еднаков на $a_{k+1} = aq^k$, и кој треба да се отплати за $n-k$ периоди, па затоа неговата големина можеме да ја добиеме ако во формулата (2) замениме: Z со R_k, a со $a_{k+1} = ar^k$ и n со $n-k$. Значи, за остатокот од заемот R_k после плаќањето на $k-$от ануитет точна е формулата

$$R_k = aq^k\frac{r^{n-k} - q^{n-k}}{r^{n-k}(r-q)}. \quad (4)$$

Конечно, отплатениот дел од заемот е еднаков на разликата меѓу заемот и остатокот од заемот, што значи

$$O_k = Z - R_k = a\frac{r^n - q^n}{r^n(r-q)} - aq^k\frac{r^{n-k} - q^{n-k}}{r^{n-k}(r-q)} = a\frac{r^n(1-q^k) + q^n(r^k - 1)}{r^n(r-q)}. \quad (5)$$

Пример 8. Заем од 600000 денари се амортизира за 3 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието, при што секој наредден ануитет се зголемува за 11% во однос на претходниот. Годишната каматна стапка е $6\%\text{p.a.(d)}$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.

Решение. Од условот на задачата добиваме

$$Z = 100000, q = 1 + \frac{11}{100} = 1{,}11 \quad p = 6\%\text{p.a.(d)}, \; n = 2 \cdot 3 = 6.$$

Според тоа,

$$r = 1 + \frac{\frac{6}{2}}{100} = 1{,}03 \text{ и } i = 0{,}03.$$

Ако ја искористиме формулата (2) за првиот ануитет добиваме:

$$a = Z\frac{r^n(r-q)}{r^n - q^n} = 600000 \cdot \frac{1{,}03^6(1{,}03 - 1{,}11)}{1{,}03^6 - 1{,}11^6} = 84739{,}37.$$

За амортизациониот план имаме:

период	камата	ануитет	отплата	остаток од долгот
0	0,00	0,00	0,00	600000,00
1	18000,00	84739,37	66739,37	533260,63
2	15997,82	94060,70	78062,88	455197,75
3	13655,93	104407,38	90751,45	364446,30
4	10933,39	115892,19	104958,80	259487,50
5	7784,63	128640,29	120855,66	138631,84
6	4158,96	142790,72	138631,76	0,08

Забележуваме дека на крајот од шестиот период се јавува остаток од долгот од 0,08 денари. Причината за појавата на овој остаток е заокружувањето при пресметувањата и во практиката најчесто истиот се додава во последниот ануитет кој наместо 138631,76 треба да изнесува 138631,84 денари. ■

ЗАДАЧИ

18. Заем од 600000 денари се амортизира за 3 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието, при што секој нареден ануитет се намалува за 11% во однос на претходниот. Годишната каматна стапка е $6\%p.a.(d)$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.
19. Заем од 400000 денари се амортизира за 3 години со квартални ануитети кои се плаќаат на крајот од кварталот, при што секој нареден ануитет се намалува за 5% во однос на претходниот. Годишната каматна стапка е $4\%p.a.(d)$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.
20. Заем од 600000 денари се амортизира за 3 години со квартални ануитети кои се плаќаат на крајот од кварталот, при што секој нареден ануитет се зголемува за 10% во однос на претходниот. Годишната каматна стапка е $4\%p.a.(d)$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.
21. Заем од 400000 денари се амортизира за 4 години со полугодишни ануитети кои се плаќаат на крајот од полугодието, при што секој нареден ануитет се зголемува за 12% во однос на претходниот. Годишната каматна стапка е $8\%p.a.(d)$, а вкаматувањето е полугодишно. Состави амортизационен план.

8. КОНВЕРЗИЈА НА ЗАЕМИ СО ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Под конверзија на заеми подразбираме промена на условите под кои се амортизираат заемите. Овие промени можат да настанат во врска со каматната стапка, времето на амортизација или промена на моделот на амортизација. Притоа, во практиката моделот на амортизација скоро и да не се менува, па затоа овде ќе ги разгледаме само случаите кога се менува каматата или

времето на амортизација. Во врска со промената на овие параметри, преку примери, ќе ги разгледаме следниве три случаи:

1) промена на времето на амортизација без да се менува каматната стапка,
2) промена на каматната стапка без да се менува времето на амортизација и
3) истовремена промена и на каматната стапка и на времето на амортизација.

Пример 9. Заем од 100000 денари треба да се амортизира за 20 години со годишна каматна стапка од $5\%\text{p.a.(d)}$, еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Откако се исплатени 25 ануитети предвиденото време на амортизација е продолжено уште за 10 години. Пресметај го ануитетот до и после промената на времето на амортизација, ако каматната стапка останува непроменета.

Решение. Прво ќе го пресметаме ануитетот до промената на времето на амортизација, потоа ќе го пресметаме остатокот од заемот после исплатените 25 ануитети и на крајот ќе го пресметаме ануитетот после промената на условите, т.е. после продолжувањето на времето на амортизација.

Во случајот имаме:

$$Z = 100000,\ n = 2 \cdot 20 = 40 \ \text{ и } \ r = 1 + \frac{p/2}{100} = 1,025 .$$

Ако ја искористиме формулата (2) од точка 3, за ануитетот пред промената на условите наоѓаме

$$a = Z\,\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 100000 \cdot \frac{1,025^{40}(1,025-1)}{1,025^{40}-1} = 3983,62 .$$

Понатаму, бидејќи се отплатени 25 периоди имаме $k = 25$, па затоа со замена во формулата (5) во точка 3, за остатокот од долгот наоѓаме

$$R_k = Z\,\frac{r^k(r^{n-k}-1)}{r^n-1} = 100000 \cdot \frac{1,025^{25}(1,025^{15}-1)}{1,025^{40}-1} = 49322,75 .$$

Сега остатокот од заемот во висина од $Z^* = 49322,75$ денари треба да се амортизира за $n^* = 15 + 2 \cdot 10 = 35$ периоди и $r = 1 + \frac{p/2}{100} = 1,025$. Ако ја искористиме формулата (2) од точка 3 за новиот ануитет имаме

$$a^* = Z^*\,\frac{r^{n^*}(r-1)}{r^{n^*}-1} = 49322,75 \cdot \frac{1,025^{35}(1,025-1)}{1,025^{35}-1} = 2131,02 . \ \blacksquare$$

Пример 10. Заем од 200000 денари треба да се амортизира за 25 години со годишна каматна стапка од $6\%\text{p.a.(d)}$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. По плаќањето на 20 ануитети каматната стап-

ка се намалува на $5\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, а времето на амортизација останува непроменето. Пресметај го ануитетот пред и после намалувањето на каматната стапка.

Решение. Прво ќе го пресметаме ануитетот до промената на каматната стапка, потоа ќе го пресметаме остатокот од заемот после исплатените 20 ануитети и на крајот ќе го пресметаме ануитетот после промената на условите, т.е. после промената на каматната стапка.

Пред намалувањето на каматната стапка имаме

$$Z = 200000,\ n = 2 \cdot 25 = 50 \ \text{ и } \ r = 1 + \frac{\frac{6}{2}}{100} = 1,03 .$$

Ануитетот ќе го пресметаме со замена во формулата (2) од точка 3. Добиваме

$$a = Z\,\frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} = 200000 \cdot \frac{1,03^{50}(1,03-1)}{1,03^{50}-1} = 7773,10 .$$

Понатаму, бидејќи се отплатени 20 периоди имаме $k = 20$, па затоа со замена во формулата (5) во точка 5.1 за остатокот од долгот наоѓаме

$$R_k = Z\,\frac{r^k (r^{n-k}-1)}{r^n - 1} = 200000 \cdot \frac{1,03^{20}(1,03^{30}-1)}{1,03^{50}-1} = 152356,17 \ \text{ денари.}$$

Сега остатокот од заемот во висина од $Z^* = 152356,17$ денари треба да се амортизира за $n^* = 50 - 20 = 30$ периоди и $r^* = 1 + \frac{p^*/2}{100} = 1,025$. Ако ја искористиме формулата (2) од точка 3 за новиот ануитет имаме

$$a^* = Z^* \frac{r^{*n^*}(r^*-1)}{r^{*n^*}-1} = 152356,17 \cdot \frac{1,025^{30}(1,025-1)}{1,025^{30}-1} = 7279,22 \ \text{ денари. } \blacksquare$$

Пример 11. Заем од 100000 денари треба да се амортизира за 10 години со годишна каматна стапка од $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Откако се платени 12 ануитети каматната стапка е намалена на $5\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, а рокот за амортизација е продолжен од предвидените 10 години уште за 5 години. Пресметај го ануитетот пред и после промената на условите за амортизација.

Решение. Прво ќе го пресметаме ануитетот до промената на времето на амортизација и каматната стапка, потоа ќе го пресметаме остатокот од заемот после исплатените 12 ануитети и на крајот ќе го пресметаме ануитетот после промената на условите, т.е. после промената на каматната стапка и времето на амортизација.

При дадените услови имаме:

$$Z = 100000,\ n = 2 \cdot 10 = 20 \ \text{ и } \ r = 1 + \frac{\frac{6}{2}}{100} = 1,03 .$$

Ако ја искористиме формулата (2) од точка 3 добиваме:

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 100000\cdot\frac{1{,}03^{20}(1{,}03-1)}{1{,}03^{20}-1} = 6721{,}57\,.$$

Понатаму, бидејќи се платени 12 ануитети имаме $k=12$, па затоа со замена во формулата (5) во точка 3 за остатокот од долгот наоѓаме:

$$R_k = Z\frac{r^k(r^{n-k}-1)}{r^n-1} = 100000\cdot\frac{1{,}03^{12}(1{,}03^{8}-1)}{1{,}03^{20}-1} = 47183{,}36 \text{ денари.}$$

Сега остатокот од заемот во висина од $Z^*=47183{,}36$ денари треба да се амортизира за

$$n^* = 20-12+5\cdot 2 = 18$$

периоди и

$$r^* = 1+\frac{p^*/2}{100} = 1{,}025\,.$$

Ако ја искористиме формулата (2) од точка 3 за новиот ануитет имаме:

$$a^* = Z^*\frac{r^{*n^*}(r^*-1)}{r^{*n^*}-1} = 47183{,}36\cdot\frac{1{,}025^{18}(1{,}025-1)}{1{,}025^{18}-1} = 3287{,}27 \text{ денари. } \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

22. Заем од 150000 денари треба да се амортизира за 10 години со годишна каматна стапка од $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Откако се исплатени 15 ануитети предвиденото време на амортизација е продолжено уште за 5 години. Пресметај го ануитетот до и после промената на времето на амортизација, ако каматната стапка останува непроменета.

23. Заем од 250000 денари треба да се амортизира за 20 години со годишна каматна стапка од $5\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. По плаќањето на 25 ануитети каматната стапка се зголемува на $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, а времето на амортизација останува непроменето. Пресметај го ануитетот пред и после намалувањето на каматната стапка.

24. Заем од 150000 денари треба да се амортизира за 12 години со годишна каматна стапка од $6\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Откако се платени 15 ануитети каматната стапка е зголемена на $7\%\,\mathrm{p.a.(d)}$, а рокот за амортизација е продолжен од предвидените 12 години уште за 3 години. Пресметај го ануитетот пред и после промената на условите за амортизација.

9. КОНСОЛИДАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ДЕКУРЗИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Под *консолидација на заеми* се подразбира спојување на повеќе заеми во еден, се со цел да се упрости обемот на сметководствените работи.

Нека имаме заеми Z_i, $i=1,2,...,k$ со каматни стапки $p_i, i=1,2,...,k$ и рокови на отплата $t_i, i=1,2,...,k$ соодветно, тогаш истите можат да се спојат во еден заем $Z=\sum_{i=1}^{k} Z_i$, кој ќе се отплаќа за време t_S, пресметано според формулата (2), со каматна стапка p_S, пресметана според формулата (1) од точка I.7.

При консолидацијата на заемите можат да се јават заеми со:

1. еднакви суми, еднакви каматни стапки и различни рокови,
2. еднакви суми, различни каматни стапки и еднакви рокови,
3. еднакви суми, различни каматни стапки и различни рокови,
4. различни суми, еднакви каматни стапки и еднакви рокови,
5. различни суми, различни каматни стапки и еднакви рокови,
6. различни суми, еднакви каматни стапки и различни рокови и
7. различни суми, различни каматни стапки и различни рокови.

Постапката на консолидација на заеми ќе ја прикажеме преку пример за последниот случај, кој најчесто се јавува во практиката.

Пример 12. Едно претпријатие користи три различни заеми со различни рокови на амортизација и различни интересни стапки. Притоа заемите се амортизираат со семестрални ануитети и вкаматувањето е семестрално. Имаме:

1. заем од 60000 денари со време на амортизација од 10 години, каматна стапка од 6%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.I и 1.VII и за овој заем е платен петтиот ануитет на 1.I.
2. заем од 30000 денари со време на амортизација од 8 години, каматна стапка од 5%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.II и 1.VIII и за овој заем е платен четвртиот ануитет на 1.II.
3. заем од 20000 денари со време на амортизација од 6 години, каматна стапка од 4%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.V и 1.XI и за овој заем е платен третиот ануитет на 1.V.

Корисникот на овие заеми сака истите да се спојат во еден кредит што ќе се амортизира со плаќање на семестрални ануитети на 1.III и 1.IX во годината. Пресметката да се изврши на 1.III, а првиот ануитет на споениот заем треба да се плати после шест месеци, т.е. на 1.IX.

Решение. При консолидацијата на овие заеми прво треба од секој заем да го пресметаме делот кој се јавува на ден 1.III.

За првиот заем имаме $Z=60000, n=2\cdot 10=20$ и $r=1+\frac{\frac{6}{2}}{100}=1,03$. Ако замениме во формулата (2) точка 3 за ануитетот наоѓаме:

$$a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}=60000\cdot\frac{1,03^{20}(1,03-1)}{1,03^{20}-1}=4032,94.$$

Понатаму, бидејќи се платени 5 ануитети имаме $k=5$, па затоа со замена во формулата (5) во точка 3 за остатокот од долгот наоѓаме:

$$R_k=Z\frac{r^k(r^{n-k}-1)}{r^n-1}=60000\cdot\frac{1,03^5(1,03^{15}-1)}{1,03^{20}-1}=48145,00 \text{ денари.}$$

Остатокот од заемот ја дава состојбата на 1.I и како денот на спојувањето на заемот е 1.III за да ја добиеме вистинската состојба треба да ја пресметаме каматата за следните два месеци. Притоа декурзивниот фактор го пресметуваме со помош на конформната каматна стапка

$$p'=100(\sqrt[6]{1+\frac{\frac{6}{2}}{100}}-1)$$

и добиваме:

$$r_1=1+\frac{p'}{100}=\sqrt[6]{1+\frac{\frac{6}{2}}{100}}=1,004938622.$$

Според тоа,

$$Z_1=48145,00r_1^2=48621,71.$$

За вториот заем имаме $Z=30000, n=2\cdot 8=16$ и $r=1+\frac{\frac{5}{2}}{100}=1,025$. Ако замениме во формулата (2) од точка 3, за ануитетот наоѓаме:

$$a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}=30000\cdot\frac{1,025^{16}(1,025-1)}{1,025^{16}-1}=2297,97.$$

Понатаму, бидејќи се платени 4 ануитети имаме $k=4$, па затоа со замена во формулата (5) во точка 3 за остатокот од долгот наоѓаме:

$$R_k=Z\frac{r^k(r^{n-k}-1)}{r^n-1}=30000\cdot\frac{1,025^4(1,025^{12}-1)}{1,025^{16}-1}=23572,03 \text{ денари.}$$

Остатокот од заемот ја дава состојбата на 1.II и како денот на спојувањето на заемот е 1.III за да ја добиеме вистинската состојба треба да ја пресметаме каматата за следниот месец. Притоа декурзивниот фактор го пресметуваме со помош на конформната каматна стапка

$$p''=100(\sqrt[6]{1+\frac{\frac{5}{2}}{100}}-1)$$

и добиваме:

$$r_2 = 1 + \frac{p''}{100} = \sqrt[6]{1 + \frac{\frac{5}{2}}{100}} = 1,004123915 .$$

Според тоа, $Z_2 = 23572,03 r_2 = 23669,24$.

За третиот заем имаме $Z = 20000, n = 2 \cdot 6 = 12$ и $r = 1 + \frac{\frac{4}{2}}{100} = 1,02$. Ако замениме во формулата (2) точка 3 за ануитетот наоѓаме:

$$a = Z \frac{r^n (r-1)}{r^n - 1} = 20000 \cdot \frac{1,02^{12}(1,02-1)}{1,02^{12} - 1} = 1891,19 .$$

Понатаму, бидејќи се платени 3 ануитети имаме $k = 3$, па затоа со замена во формулата (5) во точка 3 за остатокот од долгот наоѓаме:

$$R_k = Z \frac{r^k (r^{n-k} - 1)}{r^n - 1} = 20000 \cdot \frac{1,02^3 (1,02^9 - 1)}{1,02^{12} - 1} = 15436,36 \text{ денари.}$$

Остатокот од заемот ја дава состојбата на 1.V и како денот на спојувањето на заемот е 1.III за да ја добиеме вистинската состојба треба да ја одземеме каматата за претходните два месеци. Притоа декурзивниот фактор го пресметуваме со помош на конформната каматна стапка

$$p''' = 100(\sqrt[6]{1 + \frac{\frac{4}{2}}{100}} - 1)$$

и добиваме:

$$r_3 = 1 + \frac{p'''}{100} = \sqrt[6]{1 + \frac{\frac{4}{2}}{100}} = 1,00330589 .$$

Според тоа,

$$Z_3 = \frac{15436,36}{r_3^2} = 15334,80 .$$

Според тоа, имаме заеми:

$$Z_1 = 48621,71, \ p_1 = 3 \text{ и } t_1 = 15$$
$$Z_2 = 23669,24, \ p_2 = 2,5 \text{ и } t_2 = 12$$
$$Z_3 = 15334,80, \ p_3 = 2 \text{ и } t_3 = 9$$

па затоа

Z_i	p_i	t_i	$Z_i p_i$	$Z_i p_i t_i$
48621,71	3,0	15	145865,13	2187976,95
23669,24	2,5	12	59173,10	710077,20
15334,80	2,0	9	30669,60	276026,40
$\Sigma = 87625,75$			$\Sigma = 235707,83$	$\Sigma = 3174080,55$

што значи

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{k} Z_i p_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i p_i} = \frac{3174080,55}{235707,83} = 13,466 \text{ и } p = \frac{\sum_{i=1}^{k} Z_i p_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i} = 2,689937946.$$

Конечно, после направената консолидација должникот треба да отплати заем од 87625,75 денари со каматна стапка $2p = 5,379875893$, семестрално вкаматување и семестрално плаќање на ануитетите во следните 13,466 семестри, почнувајќи од 1.III. ■

ЗАДАЧИ

25. Едно претпријатие користи три различни заеми со различни рокови на амортизација и различни интересни стапки. Притоа заемите се амортизираат со семестрални ануитети и вкаматувањето е семестрално. Имаме:
    1) заем од 100000 денари со време на амортизација од 12 години, каматна стапка од 8%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.II и 1.VIII и за овој заем е платен седми ануитет на 1.II.
    2) заем од 80000 денари со време на амортизација од 14 години, каматна стапка од 7%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.IV и 1.X и за овој заем е платен десетти ануитет на 1.IV.
    3) заем од 90000 денари со време на амортизација од 6 години, каматна стапка од 4%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.V и 1.XI и за овој заем е платен петтиот ануитет на 1.V.

    Корисникот на овие заеми сака заемите да се спојат во еден заем што ќе се амортизира со плаќање на семестрални ануитети на 1.III и 1.IX во годината. Пресметката да се изврши на 1.III, а првиот ануитет на споениот заем треба да се плати после шест месеци, т.е. на 1.IX.

26. Едно претпријатие користи два различни заема со различни рокови на амортизација и различни интересни стапки. Притоа заемите се амортизираат со семестрални ануитети и вкаматувањето е семестрално. Имаме:
    1) заем од 250000 денари со време на амортизација од 8 години, каматна стапка од 9%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.I и 1.VII и за овој заем е платен трет ануитет на 1.I.
    2) заем од 180000 денари со време на амортизација од 11 години, каматна стапка од 7%p.a.(d) и ануитетите се плаќаат на 1.V и 1.XI и за овој заем е платен десетти ануитет на 1.V.

    Корисникот на овие заеми сака заемите да се спојат во еден кредит што ќе се амортизира со плаќање на семестрални ануитети на 1.II и 1.VIII во годината. Пресметката да се изврши на 1.II, а првиот ануитет на споениот кредит треба да се плати после шест месеци, т.е. на 1.VIII.

10. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ АНУИТЕТИ И АНТИЦИПАТИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Нека имаме заем Z кој треба да се отплати со n еднакви ануитети, каматна стапка п, антиципативно пресметување на каматата и декурзивно плаќање на ануитетите. Во случајот бидејќи пресметувањето на каматата е антиципативно корисникот на заемот во моментот на земањето на заемот, т.е. на почетокот на првиот период, кога и се плаќа првата камата, ќе прими заем намален за камата $I_0 = Zi = Z\frac{\text{п}}{100}$, т.е. ќе прими износ $Z - Z\frac{\text{п}}{100} = Z\frac{100-\text{п}}{100} = \frac{Z}{\rho}$. Понатаму, во следните n периоди должникот треба да врати сума од Z парични единици. Аналогно како и кај заемите со декурзивно пресметување на каматата, при антиципативен каматен фактор $\rho = \frac{100}{100-\text{п}}$ добиваме дека важи

$$\frac{Z}{\rho} = \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} + \ldots + \frac{a}{\rho^n} = \frac{a}{\rho}(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \ldots + \frac{1}{\rho^{n-1}}) = a\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)},$$

од каде наоѓаме:

$$Z = a\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)}, \tag{1}$$

па затоа

$$a = Z\frac{\rho^{n-1}(\rho - 1)}{\rho^n - 1}. \tag{2}$$

Во практиката корисникот, но и давателот на заемот најчесто се заинтересирани да знаат колкав дел од заемот е отплатен после секој период и уште колку останува да се отплати. За да ги изведеме формулите за пресметување на овие величини ќе ги воведеме ознаките:

- O_k - отплатениот дел од заемот заклучно со k – тиот ануитет и
- R_k - делот од заемот кој останува да се отплати после k – тиот ануитет.

Ќе докажеме дека поединечните отплати се членови на геометриска прогресија со прв член b_1 и количник ρ. Имаме $b_1 + I_1 = a = b_2 + I_2$, т.е.

$$b_1 = b_2 + I_2 - I_1 \tag{3}$$

и бидејќи $I_1 = (Z - b_1)i$ и $I_2 = (Z - b_1 - b_2)i$ ако замениме во равенството (3) добиваме:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 + I_2 - I_1 = b_2 + (Z - b_1 - b_2)i - (Z - b_1)i = b_2 - ib_2 \\ &= b_2(1 - i) = b_2(1 - \tfrac{\text{п}}{100}) = b_2\tfrac{100-\text{п}}{100}, \end{aligned}$$

од каде наоѓаме:

$$b_2 = b_1 \tfrac{100}{100-\text{п}} = b_1\rho .$$

Нека претпоставиме дека $b_k = b_1\rho^{k-1}$, за некој $k < n$. Понатаму, бидејќи

$$b_k + I_k = a = b_{k+1} + I_{k+1} \tag{4}$$

и $I_k = (Z - b_1 - ... - b_k)i$ и $I_{k+1} = (Z - b_1 - ... - b_k - b_{k+1})i$ ако замениме во (4) добиваме:

$$\begin{aligned} b_k &= b_{k+1} + I_{k+1} - I_k = b_{k+1} + (Z - b_1 - ... - b_k - b_{k+1})i - (Z - b_1 - ... - b_k)i \\ &= b_{k+1} - ib_{k+1} = b_{k+1}(1-i) = b_{k+1}(1 - \tfrac{\text{п}}{100}) = b_{k+1}\tfrac{100-\text{п}}{100}, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува:

$$b_{k+1} = b_k \tfrac{100}{100-\text{п}} = b_k\rho = b_1\rho^{k-1}\rho = b_1\rho^k .$$

Конечно, од досега изнесеното следува:

$$O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k = b_1 + b_1\rho + ... + b_1\rho^{k-1} = b_1\tfrac{\rho^k - 1}{\rho - 1}, \tag{5}$$

каде $b_1 = a - I_1$. За да ја пресметаме каматата I_1 ја користиме релацијата

$$Z - a = Z - b_1 - I_1 = R_1 - I_1 = R_1 - R_1 i = R_1(1-i) = \tfrac{R_1}{\rho},$$

што значи $R_1 = (Z - a)\rho$, па затоа

$$I_1 = R_1 i = (Z - a)\rho \cdot \tfrac{\rho - 1}{\rho} = (Z - a)(\rho - 1).$$

Конечно, за првата отплата добиваме:

$$b_1 = a - I_1 = a - (Z - a)(\rho - 1) = a\rho - Z(\rho - 1). \tag{6}$$

Што се однесува до остатокот од заемот после плаќањето на $k-$тиот ануитет добиваме

$$R_k = Z - O_k . \tag{7}$$

Пред да го разгледаме следниов пример за амортизација на заем со еднакви ануитети и антиципативно пресметување на каматата, да забележиме, дека за таа цел треба да ја најдеме врската меѓу последователните остатоци на заемот. За таа цел прво да забележиме дека $R_0 = Z$. Понатаму, за секој $k = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$R_{k-1} - a = R_{k-1} - b_k - I_k = R_k - R_k i = R_k(1-i) = R_k(1 - \tfrac{\text{п}}{100}) = R_k\tfrac{100-\text{п}}{100} = \tfrac{R_k}{\rho},$$

па затоа

$$R_k = (R_{k-1} - a)\rho \text{, за } k = 1, 2, ..., n \tag{8}$$

Бидејќи последниот остаток треба да биде еднаков на нула од равенствата (8) следува:

$$0 = R_n = (R_{n-1} - a)\rho$$

и како $\rho \neq 0$ добиваме дека $R_{n-1} = a$, т.е. претпоследниот остаток е еднаков на ануитетот.

На крајот користејќи ги претходно добиените резултати можеме да ја составиме табелата на амортизациониот план на разгледуваниот вид заем. Така ја добиваме следнава табела.

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата
0	$R_0 = Z$	$I_0 = R_0 i$	0
1	$R_1 = (R_0 - a)\rho$	$I_1 = R_1 i$	$b_1 = a - I_1$
2	$R_2 = (R_1 - a)\rho$	$I_2 = R_2 i$	$b_2 = a - I_2$
3	$R_3 = (R_2 - a)\rho$	$I_3 = R_3 i$	$b_3 = a - I_3$
...	...	...	...
$n-1$	$R_{n-1} = (R_{n-2} - a)\rho$	$I_{n-1} = R_{n-1} i$	$b_{n-1} = a - I_{n-1}$
n	$R_n = (R_{n-1} - a)\rho$	$I_n = R_n i = 0$	$b_n = a - I_n = a$

каде

$$i = \frac{\text{п}}{100}, \ \rho = \frac{100}{100 - \text{п}},$$

а ануитетот a и првата отплата b_1 се дадени со (2) и (6), соодветно.

Пример 13. Заем од 10000 денари се амортизира за 5 години со еднакви декурзивни годишни ануитети, каматна стапка 4%р.а.(а) и годишно вкаматување. Состави амортизационен план.

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$Z = 10000, n = 5, \text{п} = 4, i = \frac{4}{100} = 0,04 \text{ и } \rho = \frac{100}{100-4} = 1,041666667.$$

Со замена во (2) за ануитетот наоѓаме:

$$a = Z\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1} = 10000 \cdot \frac{1,041666667^4(1,041666667-1)}{1,041666667^5 - 1} = 2166,53.$$

Понатаму, со замена во (6) за првата отплата добиваме:

$$b_1 = a\rho - Z(\rho - 1) = 2166,52 \cdot 1,041666667 - 10000 \cdot (1,041666667 - 1) = 1840,14.$$

Сега можеме да ја пополниме табелата за амортизациониот план. Имаме:

Период	Остаток од заемот	Камата	Отплата
0	10000,00	400,00	0,00
1	8159,87	326,40	1840,14
2	6243,06	249,72	1916,81
3	4246,38	169,86	1996,67
4	2166,53	86,66	2079,87
5	0,00	0,00	2166,53

Овде да забележиме дека остатокот од заемот после исплатениот втор ануитет е 6243,06 денари и истиот може да се пресмета користејќи ги формулите (5) и (7). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

ЗАДАЧИ

27. Заем од 200000 денари се амортизира за 5 години со еднакви декурзивни семестрални ануитети, годишна каматна стапка 6%р.а.(а) и семестрално вкаматување. Состави амортизационен план.
28. Заем од 400000 денари се амортизира за 7 години со еднакви декурзивни семестрални ануитети, годишна каматна стапка 4%р.а.(а) и семестрално вкаматување. Состави амортизационен план.

11. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ ОТПЛАТИ И АНТИЦИПАТИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Во претходната точка ја разгледавме амортизацијата на заеми со еднакви ануитети и антиципативно пресметување на каматата. Нека сега имаме заем Z кој треба да се отплати со n еднакви отплати, каматна стапка п , антиципативно пресметување на каматата и декурзивно плаќање на ануитетите. Во случајот бидејќи пресметувањето на каматата е антиципативно корисникот на заемот во моментот на земањето на заемот, т.е. на почетокот на првиот период, кога и се плаќа првата камата, ќе прими заем намален за камата $I_0 = Zi = Z\frac{\text{п}}{100}$, т.е. ќе прими износ

$$Z - Z\frac{\text{п}}{100} = Z\frac{100-\text{п}}{100} = \frac{Z}{\rho}$$

и во следните n периоди должникот треба да врати сума од Z парични единици. Но, отплатите се еднакви, т.е.

$$b_k = b, k = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

па затоа важи

$$nb = Z \text{, т.е. } b = \frac{Z}{n},\ O_k = kb = \frac{kZ}{n} \text{ и } R_k = (n-k)b = \frac{n-k}{n}Z. \qquad (2)$$

Понатаму, бидејќи ануитетот е еднаков на збирот од отплатата и каматата која се плаќа на остатокот во соодветниот период добиваме дека ануитетите се променливи и тие можат да се пресметаат според формулата

$$a_k = b + I_k,\ k = 1,2,...,n \qquad (3)$$

каде $R_0 = Z$ и

$$I_k = R_{k-1}i,\ i = \frac{\text{п}}{100},\ R_k = R_{k-1} - b, \text{ за } k = 1,2,...,n. \qquad (4)$$

Според тоа, ја имаме следнава табела за амортизациониот план:

период	отплата	камата	ануитет	остаток од заемот
0	0	$I_0 = R_0 i$	0	$R_0 = Z$
1	b	$I_1 = R_1 i$	$a_1 = b + I_1$	$R_1 = R_0 - b$
2	b	$I_2 = R_2 i$	$a_2 = b + I_2$	$R_2 = R_1 - b$
3	b	$I_3 = R_3 i$	$a_3 = b + I_3$	$R_3 = R_2 - b$
...	...		...	...
$n-1$	b	$I_{n-1} = R_{n-1} i$	$a_{n-1} = b + I_{n-1}$	$R_{n-1} = R_{n-2} - b$
n	b	$I_n = R_n i = 0$	$a_n = b + I_n$	$R_n = R_{n-1} - b = 0$

Пример 13. Заем од 100000 денари се амортизира за 5 години со еднакви полугодишни отплати и полугодишно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој семестар и годишната каматната стапка е $6\%\text{р.а.(а)}$. Пресметај ги отплатите и направи амортизационен план.

Решение. Во 5 години имаме 10 семестри, па затоа $b = \frac{100000}{10} = 10000$. Понатаму, бидејќи годишната каматна стапка е $6\%\text{р.а.(а)}$ и вкаматувањето е семестрално добиваме $i = \frac{\frac{6}{2}}{100} = 0,03$. За амортизациониот план имаме:

период	отплата	камата	ануитет	остаток од заемот
0	0	3000	0	100000
1	10000	2700	12700	90000
2	10000	2400	12400	80000
3	10000	2100	12100	70000
4	10000	1800	11800	60000
5	10000	1500	11500	50000
6	10000	1200	11200	40000
7	10000	900	10900	30000
8	10000	600	10600	20000
9	10000	300	10300	10000
10	10000	0	10000	0

Притоа вкупната камата која ќе се плати е 16500 денари и истата е помала отколку при амортизацијата на заеми со еднакви ануитети и антиципативно пресметување на каматата (пресметај!). Последново се должи на фактот дека при еднакви отплати, првите неколку ануитети се поголеми отколку при еднакви ануитети, со што всушност се намалува каматата. ■

Забелешка. Ако ги споредиме амортизационите планови од примерите 1 и 13 забележуваме дека при еднакви отплати и во двата случаи корисникот на заемот во маса на пари плаќа еднаква камата. Меѓутоа, ова е само привидно, бидејќи при антиципативното вкаматување каматата се плаќа на почетокот на секој период, што значи дека во овој случај средствата добиени од каматата за еден период порано може да се реинвестираат, а тоа се разбира обезбедува и дополнителен профит. Обиди се да пресметаш колкава е разликата во остварениот профит ако добиената камата од примерите 1 и 13 еднаш се вложува со $5\%p.a.(d)$ и тримесечно вкаматување.

ЗАДАЧИ

29. Заем од 100000 денари се амортизира за 4 години со еднакви тримесечни отплати и тримесечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој квартал и годишна каматна стапка е $7\%p.a.(a)$. Пресметај ја отплатата и направи амортизационен план.
30. Заем од 240000 денари се амортизира за 4 години со еднакви месечни отплати и месечно вкаматување. Ануитетите се плаќаат на крајот од секој квартал и годишна каматна стапка е $12\%p.a.(a)$. Пресметај ја отплатата и направи амортизационен план.

12. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО ЗАОКРУЖЕНИ АНУИТЕТИ И АНТИЦИПАТИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Аналогно, како и во случајот кога каматата се пресметува декурзивно, така и кога каматата се пресметува антиципативно можно е заемот да се амортизира со заокружени ануитети, при што во практиката најчесто се јавуваат следниве два случаја:

1) Дадени се: висината на заемот Z , каматната стапка на годишно ниво $p\%p.a.(a)$ и висината на ануитетот a која може да ја плаќа должникот. Треба да се определи бројот на периодите на амортизација, а потоа да се пресмета последниот ануитет a_1 , кој најчесто е помал од дадениот ануитет a .

2) Дадени се: висината на заемот Z, каматната стапка на годишно ниво п%р.а.(а) и бројот на периодите на амотизација на заемот. Треба да се определи висината на ануитетот a, која потоа се заокружува заради поедноставни пресметувања, т.е. се зема заокружен ануитет a^*. Понатаму, за овој ануитет се наоѓа бројот на периодите на амортизација, а потоа да се пресмета последниот ануитет a_1, кој најчесто е помал од дадениот ануитет a^*.

Нека се дадени висината на заемот Z, каматната стапка на годишно ниво п%р.а.(а) и висината на ануитетот a која може да ја плаќа должникот и со a_1 да го означиме последниот ануитет. Притоа имаме, $i=\frac{\text{п}}{100}$, каде k е бројот на вкаматувањата и јасно треба да е исполнето $a>Zi$. За да го определиме бројот на периодите n од формулата (2) во точка 10 го изразуваме ρ^n. Значи, од $a=Z\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n-1}$ наоѓаме $\rho^n=\frac{a\rho}{a\rho-Z(\rho-1)}$. Последното равенство го логаритмираме и добиваме:

$$n\log\rho=\log\frac{a\rho}{a\rho-Z(\rho-1)},$$

т.е.

$$n_0=\frac{\log\frac{a\rho}{a\rho-Z(\rho-1)}}{\log\rho}. \qquad (1)$$

Ако n_0 е природен број, тогаш тој е еднаков на бројот на периодите на амортизација. Меѓутоа, најчесто n_0 не е природен број и тогаш бројот на периодите на амортизација е еднаков на $n=[n_0]+1$, при што во првите $n-1$ периоди ануитетите се еднакви на a, а во $n-$тиот период ануитетот е еднаков на a_1 и истиот треба да го пресметаме. За да го пресметаме последниот ануитет a_1 постапуваме на следниов начин. Аналогно како и кај заемите со декурзивно пресметување на каматата, при антиципативен каматен фактор $\rho=\frac{100}{100-\text{п}}$ добиваме дека важи

$$\frac{Z}{\rho}=\frac{a}{\rho}+\frac{a}{\rho^2}+\ldots+\frac{a}{\rho^{n-1}}+\frac{a_1}{\rho^n}=\frac{a}{\rho}(1+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+\ldots+\frac{1}{\rho^{n-2}})+\frac{a_1}{\rho^n}=\frac{a}{\rho}\frac{\rho^{n-1}-1}{\rho^{n-2}(\rho-1)}+\frac{a_1}{\rho^n},$$

од каде наоѓаме:

$$a_1=[Z-a\frac{\rho^{n-1}-1}{\rho^{n-2}(\rho-1)}]\rho^{n-1}. \qquad (2)$$

Како и во претходните модели не интересира што станува со отплатите. Ако ја искористиме формулата (6) во точка 5.9 и фактот дека

$$\rho = \frac{100}{100-\text{п}} = \frac{1}{1-\frac{\text{п}}{100}} = \frac{1}{1-i}$$

добиваме:

$$b_1 = a\rho - Z(\rho - 1) = a\rho - Z(\frac{1}{1-i} - 1) = a\rho - Z\frac{1-(1-i)}{1-i}$$
$$= a\rho - Z\frac{i}{1-i} = a\rho - Zi\rho = (a - Zi)\rho.$$

Понатаму, аналогно како во точка 10 се докажува дека за секој $k = 2,3,...,n-1$ важи

$$b_k = b_1\rho^{k-1}, \tag{3}$$

т.е. првите $n-1$ отплата се членови на геометриска прогресија со прв член b_1 и количник ρ. Конечно, за отплатениот долг во првите k периоди наоѓаме

$$O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k = b_1 + b_1\rho + ... + b_1\rho^{k-1} = b_1\frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}, \tag{4}$$

од што следува дека остатокот од долгот после првите k периоди е

$$R_k = Z - O_k = Z - b_1\frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}, \tag{5}$$

што значи дека последната отплата е

$$b_n = R_{n-1} = Z - O_{n-1} = Z - b_1\frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho - 1}. \tag{6}$$

Пример 14. За кое време заемот од 60000 денари ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 4000 денари со годишна каматна стапка $4\%\text{р.а.(а)}$ и годишно вкаматување. Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.

Решение. Во случајот имаме $Z = 60000, a = 4000$ и $\rho = 1,041666667$ и ако замениме во формулата (1) добиваме

$$n_0 = \frac{\log\frac{a\rho}{a\rho - Z(\rho-1)}}{\log\rho} = 22,44600591$$

што значи дека 22 (периоди) години ќе се плаќа полн ануитет од 4000 денари, а последната 23 година ќе се плати помал ануитет, т.е. $n = 23$.

Со замена во формулата (3) за последниот ануитет добиваме:

$$a_1 = [Z - a\frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho^{n-2}(\rho - 1)}]\rho^{n-1}$$
$$= [60000 - 4000 \cdot \frac{1,041666667^{22} - 1}{1,041666667^{21}(1,041666667 - 1)}]1,041666667^{22} = 1804,21.$$

Понатаму, како

$$b_1 = (a - iZ)\rho = (4000 - 0,04 \cdot 60000) \cdot 1,041666667 = 1666,67$$

за последната отплата наоѓаме:

$$b_n = R_{n-1} = Z - O_{n-1} = Z - b_1 \frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho - 1}$$

$$= 60000 - 1666,67 \cdot \frac{1,041666667^{22} - 1}{1,041666667 - 1} = 1804,21$$

т.е. таа е еднаква на последниот ануитет. Конечно, амортизациониот план е даден во следнава табела:

период	камата	отплата	остаток од долгот
0	2400,00	0,00	60000,00
1	2333,33	1666,67	58333,33
2	2263,89	1736,11	56597,22
3	2191,55	1808,45	54788,77
4	2166,20	1883,80	52904,97
5	2037,71	1962,29	50942,68
6	1955,94	2044,06	48898,62
7	1870,77	2129,23	46769,39
8	1782,05	2217,95	44551,44
9	1689,64	2310,36	42241,08
10	1593,37	2406,63	39834,45
11	1493,10	2506,90	37327,55
12	1388,64	2611,36	34716,19
13	1279,84	2720,16	31996,03
14	1166,50	2833,50	29162,53
15	1048,43	2951,57	26210,96
16	925,45	3074,55	23136,41
17	797,35	3202,65	19933,76
18	663,90	3336,10	16597,66
19	524,90	3475,10	13122,56
20	380,10	3619,90	9502,66
21	229,27	3770,73	5731,93
22	72,16	3927,84	1804,09
23	0,00	1804,21	-0,12

Како што можеме да видиме последната камата е 72,16 денари, а разликата од -0,12 денари се јавува заради грешката во заокружувањето.

Обиди се да ги анализираш разликите во амортизационите планови кои се јавуваат при декурзивното и антиципативното пресметување на камата, т.е разликата меѓу претходниот амортизационен план и оној во пример 4. ■

Пример 15. Да се состави амортизационен план на заем $Z = 20000,$ со годишна каматна стапка од $4\%\text{p.a.(a)}$, кој се аморитизира за 4 години со полугодишни ануитети заокружени на илјада и полугодишно вкаматување.

Решение. Прво го определуваме ануитетот според формулата за амортизација на заеми со еднакви ануитети и антиципативно вкаматување. Бидејќи вкаматувањето е полугодишно добиваме:

$$n = 4 \cdot 2 = 8,\ i = \frac{\frac{11}{2}}{100} = 0,03 \text{ и } \rho = \frac{100}{100-3} = 1,030927835,$$

па затоа

$$a = Z\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1} = 20000 \cdot \frac{1,030927835^7(1,030927835-1)}{1,030927835^8 - 1} = 2774,48.$$

Од условот на задачата имаме дека заокруженият ануитет ќе биде првата илјадарка поголема од 2774,48, т.е. $a^* = 3000$. Понатаму, со замена во формулата (3) за последниот ануитет наоѓаме:

$$a_1 = [Z - a\frac{\rho^{n-1}-1}{\rho^{n-2}(\rho-1)}]\rho^{n-1}$$

$$= [20000 - 3000 \cdot \frac{1,030927835^7 - 1}{1,030927835^6(1,030927835-1)}]1,030927835^7 = 822,97$$

и како тој е позитивен заклучуваме дека со заокружен ануитет $a^* = 3000$ заемот навистина ќе се амортизира за 4 години, т.е. за $n = 4 \cdot 2 = 8$ периоди.

Обиди се самостојно да го составиш амортизациониот план, а потоа добиениот резултат спореди го со пример 5. ■

ЗАДАЧИ

31. За кое време заемот од 60000 денари ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 5000 денари со годишна каматна стапка $5\%\text{p.a.(a)}$ и годишно вкаматување? Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.

32. За кое време заемот од 90000 денари ќе се амортизира со еднакви годишни ануитети од 10000 денари со годишна каматна стапка $6\%\text{p.a.(a)}$ и годишно вкаматување: Пресметај ги последниот ануитет и последната отплата, а потоа состави амортизационен план.

33. Да се состави амортизационен план на заем $Z = 40000,$ со годишна каматна стапка од $6\%\text{p.a.(a)}$, кој се аморитизира за 5 години со полугодишни ануитети заокружени на стотки и полугодишно вкаматување.

34. Да се состави амортизационен план на заем $Z = 20000,$ со годишна каматна стапка од $6\%\text{p.a.(a)}$, кој се аморитизира за 4 години со квартални ануитети заокружени на илјада и квартално вкаматување.

13. БЕЛЕШКА ЗА КОНВЕРЗИЈА И КОНСОЛИДАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО АНТИЦИПАТИВНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КАМАТАТА

Како и во случајот на заеми со декурзивно пресметување на каматата, така и во овој случај под конверзија на заеми подразбираме промена на условите под кои се амортизираат заемите. Притоа, овие промени можат да настанат во врска со каматната стапка, времето на амортизација или промена на моделот на амортизација. Во практиката моделот на амортизација скоро и да не се менува, па затоа овде ќе ги разгледаме само случаите кога се менува каматата или времето на амортизација, при што во практиката најчесто се присутни следниве случаи:

1) промена на времето на амортизација без да се менува каматната стапка,
2) промена на каматната стапка без да се менува времето на амортизација и
3) истовремена промена и на каматната стапка и на времето на амортизација.

Аналогно, како и при декурзивното пресметување на каматната стапка, под консолидација на заеми се подразбира спојување на повеќе заеми во еден, се со цел да се упрости обемот на сметководствените работи. Притоа, самата консолидација се базира на наоѓање на таканаречената пондерирана каматна стапка и средното време, кои повторно се пресметуваат со помош на терминската сметка. Имено, како и при декурзивното пресметување на каматата и во овој случај ако имаме заеми Z_i, $i=1,2,...,k$ со каматни стапки $\text{п}_i, i=1,2,...,k$ и рокови на отплата $t_i, i=1,2,...,k$ соодветно, тогаш истите можат да се спојат во еден заем $Z=\sum_{i=1}^{k} Z_i$, кој ќе се отплаќа за време $t=\frac{\sum_{i=1}^{k} Z_i \text{п}_i t_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i \text{п}_i}$ и каматна стапка $\text{п}=\frac{\sum_{i=1}^{k} Z_i \text{п}_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i}$, кои ги нарекуваме средно време и пондерирана каматна стапка.

При консолидацијата на заемите можат да се јават заеми со:

1. еднакви суми, еднакви каматни стапки и различни рокови,
2. еднакви суми, различни каматни стапки и еднакви рокови,
3. еднакви суми, различни каматни стапки и различни рокови,
4. различни суми, еднакви каматни стапки и еднакви рокови,
5. различни суми, различни каматни стапки и еднакви рокови,
6. различни суми, еднакви каматни стапки и различни рокови и
7. различни суми, различни каматни стапки и различни рокови.

Во нашите разгледувања, заради целосната аналогија со декурзивното пресметување на каматата, нема да се осврнеме на поединечни примери на конверзија и консолидација, но сепак на читателот му препорачуваме самостојно да ги реши задачите зададени на крајот од оваа точка и добиените резултати да ги спореди со резултатите од задачите после точките 8 и 9.

ЗАДАЧИ

35. Заем од 150000 денари треба да се амортизира за 10 години со годишна каматна стапка од 6%р.а.(а) , еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Откако се исплатени 15 ануитети предвиденото време на амортизација е продолжено уште за 5 години. Пресметај го ануитетот до и после промената на времето на амортизација, ако каматната стапка останува непроменета.
36. Заем од 250000 денари треба да се амортизира за 20 години со годишна каматна стапка од 5%р.а.(а) , со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. По плаќањето на 25 ануитети каматната стапка се зголемува на 6%р.а.(а) , а времето на амортизација останува непроменето. Пресметај го ануитетот пред и после намалувањето на каматната стапка.
37. Заем од 150000 денари треба да се амортизира за 12 години со годишна каматна стапка од 6%р.а.(а) , со еднакви семестрални ануитети и семестрално вкаматување. Откако се платени 15 ануитети каматната стапка е зголемена на 7%р.а.(а) , а рокот за амортизација е продолжен од предвидените 12 години уште за 3 години. Пресметај го ануитетот пред и после промената на условите за амортизација.
38. Едно претпријатие користи три различни заеми со различни рокови на амортизација и различни интересни стапки. Притоа заемите се амортизираат со семестрални ануитети и вкаматувањето е семестрално. Имаме:
    1. заем од 100000 денари со време на амортизација од 12 години, каматна стапка од 8%р.а.(а) и ануитетите се плаќаат на 1.II и 1.VIII и за овој заем е платен седмиот ануитет на 1.II.
    2. заем од 80000 денари со време на амортизација од 14 години, каматна стапка од 7%р.а.(а) и ануитетите се плаќаат на 1.IV и 1.X и за овој заем е платен десеттиот ануитет на 1.IV.
    3. заем од 90000 денари со време на амортизација од 6 години, каматна стапка од 4%р.а.(а) и ануитетите се плаќаат на 1.V и 1.XI и за овој заем е платен петтиот ануитет на 1.V.

    Корисникот на овие заеми сака заемите да се спојат во еден кредит што ќе се амортизира со плаќање на семестрални ануитети на 1.III и 1.IX во годината. Пресметката да се изврши на 1.III а првиот ануитет на споениот кредит треба да се плати после шест месеци, т.е. на 1.IX.
39. Едно претпријатие користи два различни заема со различни рокови на амортизација и различни интересни стапки. Притоа заемите се амортизираат со семестрални ануитети и вкаматувањето е семестрално. Имаме:

1. заем од 250000 денари со време на амортизација од 8 години, каматна стапка од 9%р.а.(а) и ануитетите се плаќаат на 1.I и 1.VII и за овој заем е платен третот ануитет на 1.I.
2. заем од 180000 денари со време на амортизација од 11 години, каматна стапка од 7%р.а.(а) и ануитетите се плаќаат на 1.V и 1.XI и за овој заем е платен десеттиот ануитет на 1.V.

Корисникот на овие заеми сака заемите да се спојат во еден кредит што ќе се амортизира со плаќање на семестрални ануитети на 1.II и 1.VIII во годината. Пресметката да се изврши на 1.II а првиот ануитет на споениот кредит треба да се плати после шест месеци, т.е. на 1.VIII.

14. СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАИ НА ФИНАНСИСКИ ПРЕСМЕТУВАЊА ПРИ НЕОБЛИГАЦИОНИ ЗАЕМИ

Како што рековме заемите можат да бидат облигациони и необлигациони. Во досегашните разгледувања се задржавме на необлигационите заеми. Досега изложеното ни овозможува да составиме амортизационен план на долгорочен заем во стандардните случаи. Меѓутоа, практиката обилува со низа специфични случаи. Во оваа точка ќе ги разгледаме случаите за кои сметаме дека се најраспространети во практиката. Притоа, да забележиме дека користејќи ги општите, стандардните постапки и најважните специфични случаи може да се реши секој конкретен проблем, дури истиот и значително да се разликува од веќе разгледаните.

14.1 АМОРТИЗАЦИЈА НА ЗАЕМИ СО АЖИО

Под *ажио* се подразбира доплата, поголема вредност на парите, хартиите од вредност и слично, од нивната номиналната вредност. Стандардно, во финансиските трансакции ажиото се изразува со процентот за кој се зголемува вредноста на парите.

Во практиката често пати имаме необлигационен кредитен однос во кој е вклучено и ажио. Вообичаено е пресметувањето на ажиото да се врши за секој период, па затоа истото се пресметува во отплатите. Имено, кредитобарателот во секој период заедно со каматата плаќа и $1+\frac{\alpha}{100}$ пати поголема вредност на отплатата, каде со α е изразен процентот на ажиото.

Како и претходно, и овде ќе разгледаме неколку случаи:

- ажио при заеми кои се отплаќаат со еднакви отплати,
- ажио при заеми кои се отплаќаат со еднакви ануитети и

- ажио при кое се запазува висината на ануитетот, независно од вклучувањето на ажиото во плаќањата.

Во нашите разгледувања ќе се задржиме само на заеми со декурзивно пресметување на каматата. Имено, во практиката, во случај кога имаме вклучено ажио, вообичаено имаме декурзивно пресметување на каматата.

14.1.1. ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ ОТПЛАТИ

Нека имаме заем Z кој треба да се плати со n еднакви отплати, декурзивна каматна стапка p и ажио α. Притоа,

$$b=\frac{Z}{n},\ a_k=b+I_k,\ R_0=Z,\ I_k=R_{k-1}i,$$
$$R_k=R_{k-1}-b,\ \text{за}\ k=1,2,...,n\ \text{и}\ A=\frac{\alpha b}{100}.$$

Амортизациониот план го составуваме користејќи ја табелата:

период	отплата	ажио	камата	ануитет	остат. од заем.
0	0	0	0	0	$R_0=Z$
1	b	$A=\frac{\alpha b}{100}$	$I_1=iR_0$	$a_1=b+I_1$	$R_1=R_0-b$
...	...	...	...	...	...
$n-1$	b	$A=\frac{\alpha b}{100}$	$I_{n-1}=iR_{n-2}$	$a_{n-1}=b+I_{n-1}$	$R_{n-1}=R_{n-2}-b$
n	b	$A=\frac{\alpha b}{100}$	$I_n=iR_{n-1}$	$a_n=b+I_n$	$R_n=R_{n-1}-b=0$

Пример 16. Да се состави амортизационен план за исплаќање на заем од 700000 денари кој се плаќа со еднакви отплати за 4 години, со каматна стапка 14% и ажио $3{,}5\%$.

Решение. Во случајов имаме:

$$b=\frac{700000}{4}=175000\ \text{и}\ A=\frac{3{,}5\cdot 175000}{100}=6125\ \text{денари.}$$

период	отплата	ажио	камата	ануитет	остаток од заемот
0	0	0	0	0	700000
1	175000	6125	98000	279125	525000
2	175000	6125	73500	254625	350000
3	175000	6125	49000	230125	175000
4	175000	6125	24500	205625	0

■

14.1.2. ЗАЕМИ СО ЕДНАКВИ АНУИТЕТИ, ВО КОИ НЕ Е ВКЛУЧЕНО АЖИОТО

Нека имаме заем Z кој треба да се отплати со n еднакви ануитети, каматна стапка p, декурзивно пресметување на каматата и ажио α. Ануитетот го пресметуваме на стандарден начин, т.е. според формулата $a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$, дадена во точка 3. Понатаму, $i = \frac{p}{100}$ и согласно точка 3 за отплатите имаме:

$$b_1 = Z\frac{r-1}{r^n-1} \text{ и } b_k = b_1 r^{k-1}, k = 2,...,n$$

и на секоја отплата според формулата

$$A_k = \frac{\alpha b_k}{100}, k = 1,2,...,n$$

пресметуваме ажио. Конечно, кредитобарателот секој месец треба да уплаќа сума $a + A_k, k = 1,2,...,n$. Амортизациониот план го составуваме користејќи ја табелата:

пер.	ануи.	камата	отплата	ажио	остат. од заемот
0	0	0	0	0	$R_0 = Z$
1	a	$I_1 = iR_0$	$b_1 = a - I_1$	$A_1 = \frac{\alpha b_1}{100}$	$R_1 = R_0 - b_1$
2	a	$I_2 = iR_1$	$b_2 = a - I_2$	$A_2 = \frac{\alpha b_2}{100}$	$R_2 = R_1 - b_2$
...	...	...	...	...	...
$n-1$	a	$I_{n-1} = iR_{n-2}$	$b_{n-1} = a - I_{n-1}$	$A_{n-1} = \frac{\alpha b_{n-1}}{100}$	$R_{n-1} = R_{n-2} - b_{n-1}$
n	a	$I_n = iR_{n-1}$	$b_n = a - I_n$	$A_n = \frac{\alpha b_n}{100}$	$R_n = R_{n-1} - b_n = 0$

Пример 17. Заем од 100000 денари се амортизира за 6 години со еднакви годишни ануитети, годишно вкаматување и ажио $\alpha = 2\%$ кое не е вклучено во ануитетите. Ануитетите се плаќаат на крајот од секоја година и годишната каматната стапка е $4\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.

Решение. Во случајов имаме:

$Z = 100000$, $\alpha = 2\%$, $n = 6$, $p = 4\%$, $i = \frac{4}{100} = 0,04$ и $r = 1,04$,

што значи

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 100000 \cdot \frac{1,04^6(1,04-1)}{1,04^6-1} = 19076,19.$$

За амортизациониот план имаме:

период	ануитет	камата	отплата	ажио	остаток од заемот
0	0	0	0	0	100000,00
1	19076,19	4000,00	15076,19	301,52	84923,81
2	19076,19	3396,95	15679,24	313,58	69244,57
3	19076,19	2769,78	16306,41	326,13	52938,16
4	19076,19	2117,53	16958,66	339,17	35979,50
5	19076,19	1439,18	17637,01	352,74	18342,49
6	19076,19	733,70	18342,49	366,85	0

Да забележиме дека заради заокружувањето при пресметките вкупно платеното ажио ќе биде

301,52+313,58+326,13+339,17+352,74+366,85=1999,99 денари.

Понатаму, во првата година кредитобарателот ќе плати

19076,19+301,52=19377,71 денар,

во втората година ќе плати

19076,19+313,58=19389,77 денари,

итн., во шестата година ќе плати

19076,19+366,85=19443,04 денари.

Значи, и покрај тоа што имаме еднакви ануитети, заради ажиото кое се плаќа на променливите отплати, кај овој модел, реално по години (периоди) имаме различни задолженија на кредитобарателот. ■

14.1.3. ЗАЕМ СО ЕДНАКВИ АНУИТЕТИ ВО КОИ Е ВКЛУЧЕНО АЖИОТО

Нека имаме заем Z кој треба да се отплати со ажио α, n еднакви ануитети во кои е вклучено ажиото, каматна стапка p и декурзивно пресметување на каматата. Ако со I_k и b_k ги означиме каматата (интересот) и отплатата во k – тиот период, тогаш при вклучување на ажиото во ануитетот, за да истиот остане константен ќе ја користиме формулата:

$$a = I_k + (1+\frac{\alpha}{100})b_k, k = 1,2,...,n . \quad (1)$$

Понатаму, бидејќи ануитетите се меѓусебно еднакви, независно од вклучувањето на ажиото во нив, добиваме:

$$I_k + (1+\frac{\alpha}{100})b_k = I_{k-1} + (1+\frac{\alpha}{100})b_{k-1}, k = 2,...,n , \quad (2)$$

т.е.

$$I_{k-1} - I_k = (1+\frac{\alpha}{100})b_k - (1+\frac{\alpha}{100})b_{k-1}, k = 2,...,n . \quad (3)$$

Но, како каматата во секоја година се пресметува на соодветниот остаток од заемот, добиваме дека разликата меѓу секои две последователни камати може да се изрази на следниов начин:

$$I_{k-1} - I_k = \frac{pR_{k-1}}{100} - \frac{pR_k}{100} = \frac{p}{100}(R_{k-1} - R_k),\ k = 2,...,n\,. \tag{4}$$

Од (3) и (4) добиваме

$$\frac{p}{100}(R_{k-1} - R_k) = (1+\frac{\alpha}{100})b_k - (1+\frac{\alpha}{100})b_{k-1},\ k = 2,...,n \tag{5}$$

т.е.

$$(1+\frac{\alpha}{100})b_k = \frac{p}{100}(R_{k-1} - R_k) + (1+\frac{\alpha}{100})b_{k-1},\ k = 2,...,n \tag{6}$$

Понатаму, за секој $k = 2,3,...,n$ важи $R_{k-1} - R_k = b_{k-1}$ и ако замениме во (6) добиваме

$$(1+\frac{\alpha}{100})b_k = \frac{p}{100}b_{k-1} + (1+\frac{\alpha}{100})b_{k-1},\ k = 2,...,n\,,$$

од што после средувањето наоѓаме

$$b_k = \frac{\frac{p}{100}+(1+\frac{\alpha}{100})}{1+\frac{\alpha}{100}}b_{k-1} = [1+\frac{\frac{p}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}]b_{k-1},\ k = 2,...,n\,.$$

Ставаме, $c = \frac{\frac{p}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}$ и со замена во претходната формула наоѓаме:

$$b_k = (1+c)b_{k-1},\ k = 2,...,n\,. \tag{7}$$

Од (7) следува дека

$$b_k = b_1(1+c)^{k-1},\ k = 1,2,...,n\,. \tag{8}$$

Според тоа, за да ги определиме отплатите, треба да ја најдеме првата отплата. Притоа, имаме $I_1 = \frac{pR_0}{100} = \frac{pZ}{100}$ и ако ја искористиме (1) наоѓаме:

$$a = I_1 + (1+\frac{\alpha}{100})b_1 = \frac{pZ}{100} + (1+\frac{\alpha}{100})b_1$$

т.е.

$$b_1 = \frac{a-\frac{pZ}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}\,.$$

Заменуваме во (8) и добиваме:

$$b_k = (1+c)^{k-1}\frac{a-\frac{pZ}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}},\ k = 1,2,...,n\,.$$

Понатаму, збирот на отплатите е еднаков на заемот, па затоа

$$Z=\sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{a-\frac{pZ}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}\sum_{k=1}^{n}(1+c)^{k-1}=\frac{a-\frac{pZ}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}\cdot\frac{(1+c)^n-1}{1+c-1}=\frac{a-\frac{pZ}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}\cdot\frac{(1+c)^n-1}{c},$$

што значи ануитетот е

$$a=\frac{Zp(1+c)^n}{100[(1+c)^n-1]}. \tag{9}$$

Откако ќе ги пресметаме наведените елементи, за амортизациониот план ја користиме табелата:

пер.	ануи.	камата	отплата	ажио	ост. од заем.
0	0	0	0	0	$R_0=Z$
1	a	$I_1=iR_0$	b_1	$A_1=a-b_1-I_1$	$R_1=R_0-b_1$
2	a	$I_2=iR_1$	$b_2=(1+c)b_1$	$A_2=a-b_2-I_2$	$R_2=R_1-b_2$
...	...	...	...	...	...
n	a	$I_n=iR_{n-1}$	$b_n=(1+c)b_{n-1}$	$A_n=a-b_n-I_n$	$R_n=R_{n-1}-b_n$

Пример 18. Заем од 300000 денари се амортизира за 5 години со годишна каматната стапка е $18\%\text{p.a.(d)}$ и еднакви годишни ануитети во кои е вклучено ажио од $\alpha=3\%$. Ануитетите се плаќаат на крајот од секоја година. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план.

Решение. Во случајов имаме:

$$Z=300000,\ \alpha=3\%,\ n=5,\ p=18\%,\ r=1{,}18\ \text{и}\ i=\frac{p}{100}=0{,}18,$$

што значи

$$c=\frac{\frac{p}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}=\frac{18}{103}.$$

Заменуваме во (9) и за ануитетот наоѓаме:

$$a=\frac{300000\cdot 18(1+\frac{18}{103})^5}{100\cdot[(1+\frac{18}{103})^5-1]}=97640{,}42\ \text{денари}.$$

Понатаму,

$$I_1=\frac{pR_0}{100}=\frac{pZ}{100}=\frac{18\cdot 300000}{100}=54000\ \text{ден. и}$$

$$b_1=\frac{a-\frac{pZ}{100}}{1+\frac{\alpha}{100}}=\frac{97640{,}42-54000}{1{,}03}=42369{,}34\ \text{ден.}$$

Конечно, амортизациониот план е даден во следнава табела:

пер.	ануитет	камата	отплата	ажио	остат. од зае.
0	0	0	0	0	300000,00
1	97640,42	54000,00	42369,34	1271,08	257630,66
2	97640,42	46373,52	49773,69	1493,21	207856,97
3	97640,42	37414,25	58472,00	1754,17	149384,97
4	97640,42	26889,29	68690,41	2060,72	80694,56
5	97640,42	14525,02	80694,56	2420,84	0,00

Да забележиме дека заради заокружувањето при пресметките вкупно платеното ажио ќе биде

1271,08+1493,21+1754,17+2060,72+2420,84=9000,02 денари. ■

ЗАДАЧИ

40. Да се состави амортизационен план за исплаќање на заем од 500000 денари кој се плаќа со еднакви годишни отплати за период од 10 години, со годишна каматна стапка 12%p.a.(d), годишно вкаматување и ажио 3%.

41. Заем од 500000 денари се амортизира за 10 години со еднакви годишни ануитети, годишна каматна стапка од 12%p.a.(d), годишно вкаматување и ажио 3%. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план, ако ажиото не е вклучено во ануитетот.

42. Заем од 500000 денари се амортизира за 10 години со еднакви годишни ануитети, годишна каматна стапка од 12%p.a.(d), годишно вкаматување и ажио 3%. Пресметај го ануитетот и направи амортизационен план, ако ажиото е вклучено во ануитетот.

14.2 АМОРТИЗАЦИОНИ ПЛАНОВИ НА ПРИВИЛЕГИРАНИ ЗАЕМИ

Заемите во кои кредитобарателот добива определени бенифиции ги нарекуваме привилегирани заеми. Најчесто привилегиите се однесуваат на:

- користење на каматна стапка пониска од важечката каматна стапка,
- користење на подолг период за отплата на заемот, во споредба со другите клиенти, и
- користење на грејс период, во кој или на заемот не се пресметува камата, или кредитобарателот ја плаќа само каматата од заемот, или не ја плаќа ниту каматата ниту заемот.

Јасно, во сите овие случаи имаме корист на кредитобарателот, што значи и загуба на кредиторот. Во натамошните разгледувања преку примери ќе разгледаме некои од наведените случаи, при што ќе се осврнеме на апсолутните загуби на кредиторот.

Пример 19. Заем од 1000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со привилегирана годишна каматна стапка $12\%\text{p.a.(d)}$, при што редовната каматна стапка е $16\%\text{p.a.(d)}$. Пресметај ги апсолутната и релативната загуба на кредиторот, ако ануитетите се плаќаат на крајот од секоја година.

Решение. Во случајов имаме $Z=1000000$, $n=6$, $p=12$ и $r=1{,}12$, што значи

$$a=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}=1000000\cdot\frac{1{,}12^6(1{,}12-1)}{1{,}12^6-1}=243225{,}72 \text{ денари.}$$

Од друга страна, доколку заемот беше одобрен без привилегирана каматна стапка, т.е. доколку каматната стапка останеше $16\%\text{p.a.(d)}$, тогаш имаме: $Z=1000000$, $n=6$, $p=16$ и $r=1{,}16$, што значи

$$a_1=Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}=1000000\cdot\frac{1{,}16^6(1{,}16-1)}{1{,}16^6-1}=271389{,}87 \text{ денари.}$$

Конечно, релативната загуба на кредиторот ќе биде

$$100\cdot(\frac{a_1}{a}-1)=100\cdot(\frac{271389{,}87}{243225{,}72}\text{-}1)=11{,}58\%,$$

а апсолутната загуба ќе биде еднаква на

$$1000000\cdot\frac{11{,}58}{100}=115800 \text{ денари. } \blacksquare$$

Пример 20. Заем од 1000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\text{p.a.(d)}$. Состави амортизационен план:

a) кредиторот дал грејс период од две години во кој не се пресметува каматата и не се отплаќа заемот,

b) кредиторот дал грејс период од две години во кој се отплаќа само пресметаната камата и

v) кредиторот дал грејс период од две години во кој се пресметува, но не се плаќа ниту каматата, ниту се отплаќа заемот.

Решение. Ако заемот не е даден по привилегирани услови, тогаш имаме

$$Z=1000000,\ n=6,\ p=12,\ i=0{,}12 \text{ и } r=1{,}12,$$

што значи

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 1000000\cdot\frac{1{,}12^6(1{,}12-1)}{1{,}12^6-1} = 243225{,}72 \text{ денари,}$$

а) Во случајов кредитот реално се амортизира за 4 години, почнувајќи од третата година, па затоа

$$Z = 1000000,\ n = 4,\ p = 12,\ i = 0{,}12 \text{ и } r = 1{,}12,$$

што значи

$$a_1 = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 1000000\cdot\frac{1{,}12^4(1{,}12-1)}{1{,}12^4-1} = 329234{,}44 \text{ денари.}$$

период	ануитет	камата	отплата	остаток од заемот
0	0,00	0,00	0,00	1000000,00
1	0,00	0,00	0,00	1000000,00
2	0,00	0,00	0,00	1000000,00
3	329234,44	120000,00	209234,44	790765,56
4	329234,44	94891,87	234342,57	556422,99
5	329234,44	66770,76	262463,68	293959,31
6	329234,44	35275,13	293959,31	0,00

б) Во случајов, во првите две години се плаќа само каматата, а потоа кредитот реално се амортизира за 4 години, почнувајќи од третата година, па затоа

$$Z = 1000000,\ n = 4,\ p = 12,\ i = 0{,}12 \text{ и } r = 1{,}12,$$

што значи

$$a_1 = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 1000000\cdot\frac{1{,}12^4(1{,}12-1)}{1{,}12^4-1} = 329234{,}44 \text{ денари.}$$

период	ануитет	камата	отплата	остаток од заемот
0	0,00	0,00	0,00	1000000,00
1	120000,00	120000,00	0,00	1000000,00
2	120000,00	120000,00	0,00	1000000,00
3	329234,44	120000,00	209234,44	790765,56
4	329234,44	94891,87	234342,57	556422,99
5	329234,44	66770,76	262463,68	293959,31
6	329234,44	35275,13	293959,31	0,00

в) Во случајов, во првите две години се пресметува каматата и како ништо не се плаќа заемот се зголемува за пресметаната камата, а потоа кредитот реално се амортизира за 4 години, почнувајќи од третата година, па затоа

$$Z = 1000000\cdot 1.12^2 = 1254400,\ n = 4,\ p = 12,\ i = 0{,}12 \text{ и } r = 1{,}12,$$

што значи

период	ануитет	камата	отплата	остаток од заемот
0	0,00	0,00	0,00	1000000,00
1	0,00	0,00	0,00	1120000,00
2	0,00	0,00	0,00	1254400,00
3	412991,72	150528,00	262463,72	991936,28
4	412991,72	119032,35	293959,37	697976,91
5	412991,72	83757,23	329234,49	368742,42
6	412991,72	44249,30	368742,42	0,00

$$a_1 = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 1254400\cdot\frac{1{,}12^4(1{,}12-1)}{1{,}12^4-1} = 412991{,}72 \text{ денари. } \blacksquare$$

Коментар. Како што можеме да забележиме, ако кредитот е даден без грејс период, тогаш кредиторот од каматата, без истата заедно со вратениот дел од кредитот да ја реинвестира остварува приход од

$$6\cdot 243225{,}72 - 1000000 = 459354{,}32 \text{ денари.}$$

Во случајот под а), при услови кога немаме реинвестирање на каматата и вратениот дел од кредитот, кредиторот остварува приход од

$$4\cdot 329234{,}44 - 1000000 = 316937{,}76 \text{ денари.}$$

Во случајот под b), при услови кога немаме реинвестирање на каматата и вратениот дел од кредитот, кредиторот остварува приход од

$$2\cdot 120000 + 4\cdot 329234{,}44 - 1000000 = 556937{,}76 \text{ денари,}$$

и во случајот под v), при услови кога немаме реинвестирање на каматата и вратениот дел од кредитот, кредиторот остварува приход од

$$4\cdot 412991{,}72 - 1000000 = 651966{,}88 \text{ денари,}$$

Ако вака ги гледаме презентираните показатели, тогаш излегува дека во случајот под в) кредиторот е во добивка во однос на редовното пласирање на средствата. Меѓутоа, ако се земе предвид дека вратените ануитети можат да бидат реинвестирани, тогаш лесно ќе се увериме дека за кредиторот најповолно е кога средствата ги дава без да одобрува грејс период. Во последново можеме да се увериме ако, на пример, вратените ануитети ги третираме како периодични декурзивни влогови со $12\%\text{p.a.(d)}$. На читателот, за вежба му препуштаме самостојно да ја направи оваа анализа.

ЗАДАЧИ

43. Заем од 600000 денари со рок на отплата 9 години е доделен со привилегирана годишна каматна стапка $8{,}5\%\text{p.a.(d)}$, при што редовната каматна стапка е

$11{,}5\%\,\text{p.a.(d)}$. Пресметај ги апсолутната и релативната загуба на кредиторот, ако ануитетите се плаќаат на крајот од секоја година.

44. Заем од 600000 денари со рок на отплата 9 години е доделен со годишна каматна стапка $8{,}5\%\,\text{p.a.(d)}$. Состави амортизационен план:
    a) кредиторот дал грејс период од три години во кој не се пресметува каматата и не се отплаќа заемот,
    b) кредиторот дал грејс период од три години во кој се отплаќа само пресметаната камата и
    v) кредиторот дал грејс период од три години во кој се пресметува, но не се плаќа ниту каматата, ниту се отплаќа заемот.

14.3 ЗАЕМ ПРИ КОЈ СЕ ФОРМИРА АМОРТИЗАЦИОНЕН ФОНД

Во одделни случаи кредиторот и кредитобарателот можат да договорат отплаќањето на заемот да биде одеднаш. Природно, во ваков случај кредиторот инсистира кредитобарателот да обезбеди паричен фонд за отплаќање на заемот. Еден од можните начини за обезбедување на средствата за отплаќање на заемот е формирањето на таканаречениот *амортизационен фонд*, во кој до денот на отплаќањето на заемот кредитобарателот во фондот внесува периодични еднакви влогови. Според тоа, сумата со која на денот на отплаќањето на заемот ќе располага амортизациониот фонд е еднаква на крајната сума која се добива со еднаквите периодични влогови. Притоа, создавањето на амортизациониот фонд генерира соодветни расходи за кредитобарателот, кои се разликуваат во зависност од начинот на формирање на фондот.

14.3.1. ФОРМИРАЊЕ НА АМОРТИЗАЦИОНЕН ФОНД ПРИ ПЕРИОДИЧНО ПЛАЌАЊЕ НА КАМАТАТА

Во овој случај расходите на кредитобарателот се еднакви на збирот на каматата I и периодичните вложувања a потребни за формирање на фондот. Притоа, ако каматната стапка на одобрениот заем Z е $p\%\,\text{p.a.(d)}$, тогаш расходите на кредитобарателот се

$$R = I + a = \frac{Zp}{100} + a\,. \tag{1}$$

Ќе разгледаме два случаи, и тоа:

а) рокот на формирање на амортизациониот фонд N се совпаѓа со рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $n = N$ и

б) рокот на формирање на амортизациониот фонд N е помал од рокот на отплаќање на заемот, т.е. $N < n$.

Нека рокот на формирање на амортизациониот фонд N се совпаѓа со рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $n=N$. Ако за периодичните влогови кои го формираат амортизациониот фонд е договорена каматна стапка p' и ако тие се вложуваат антиципативно, тогаш на крајот од $n-$от период нивната сума треба да биде еднаква на висината на заемот. Според тоа, $ar'\frac{r'^n-1}{r'-1}=Z$, $r'=1+\frac{p'}{100}$, од каде наоѓаме дека сумата која треба да се уплаќа за да се обезбеди потребниот амортизационен фонд е

$$a=Z\frac{r'-1}{r'(r'^n-1)}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека во случајов расходите на кредитобарателот се

$$R=Z\frac{r'-1}{r'(r'^n-1)}+\frac{Zp}{100}. \tag{3}$$

Пример 21. Заем од 6000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено истовремено формирање на амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се антиципативни со годишна каматна стапка $15\%\text{p.a.(d)}$. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$Z=6000000$ денари, $n=N=6$ години, $p=12\%$, $p'=15\%$ и $r'=1{,}15$.

Годишните расходи за каматата се

$$I=\frac{Zp}{100}=\frac{6000000\cdot 12}{100}=720000 \text{ денари.}$$

Според (2) годишните расходи за вложувањата во амортизациониот фонд се:

$$a=Z\frac{r'-1}{r'(r'^n-1)}=6000000\cdot\frac{1{,}15-1}{1{,}15(1{,}15^6-1)}=596018{,}64 \text{ денари.}$$

Конечно, вкупните годишни расходи се

$$720000+596018{,}64=1316018{,}64 \text{ денари.} \blacksquare$$

Нека рокот на формирање на амортизациониот фонд N се совпаѓа со рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $n=N$. Ако за периодичните влогови кои го формираат амортизациониот фонд е договорена каматна стапка p' и ако тие се вложуваат декурзивно, тогаш на крајот од $n-$от период нивната сума треба да биде еднаква на висината на заемот. Според тоа, $a\frac{r'^n-1}{r'-1}=Z$, $r'=1+\frac{p'}{100}$, од каде наоѓаме дека сумата која треба да се уплаќа за да се обезбеди потребниот амортизационен фонд е

$$a = Z\,\frac{r'-1}{r'^{n}-1}\,. \tag{4}$$

Од (1) и (4) следува дека во случајов расходите на кредитобарателот се

$$R = Z\,\frac{r'-1}{r'^{n}-1} + \frac{Zp}{100}\,. \tag{5}$$

Пример 22. Заем од 6000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\,\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено истовремено формирање на амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се декурзивни со годишна каматна стапка $15\%\,\text{p.a.(d)}$. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$Z = 6000000$ денари, $n = N = 6$ години, $p = 12\%$, $p' = 15\%$ и $r' = 1{,}15$.

Годишните расходи за каматата се

$$I = \frac{Zp}{100} = \frac{6000000 \cdot 12}{100} = 720000 \text{ денари.}$$

Според (4) годишните расходи за вложувањата во амортизациониот фонд се:

$$a = Z\,\frac{r'-1}{r'^{n}-1} = 6000000 \cdot \frac{1{,}15-1}{1{,}15^{6}-1} = 685421{,}44 \text{ денари.}$$

Конечно, вкупните годишни расходи се

$$720000 + 685421{,}44 = 1405421{,}44 \text{ денари. } \blacksquare$$

Нека рокот на формирање на амортизациониот фонд N е помал од рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $N < n$. Ако за периодичните влогови кои го формираат амортизациониот фонд е договорена каматна стапка p' и ако тие се вложуваат антиципативно, после $k = n - N$ периоди од земањето на заемот, тогаш на крајот од $N-$тиот период нивната сума треба да биде еднаква на висината на заемот. Според тоа,

$$ar'\,\frac{r'^{N}-1}{r'-1} = Z\,,\ r' = 1 + \frac{p'}{100}\,,$$

од каде наоѓаме дека сумата која треба да се уплаќа за да се обезбеди потребниот амортизационен фонд е

$$a = Z\,\frac{r'-1}{r'(r'^{N}-1)}\,. \tag{6}$$

Според тоа, во првите $k = n - N$ периоди расходите на кредитобарателот се еднакви на каматата, т.е. на $I = \frac{Zp}{100}$. Од (1) и (6) следува дека во следните N периоди расходите на кредитобарателот се

$$R = Z\frac{r'-1}{r'(r'^{N}-1)} + \frac{Zp}{100}. \tag{7}$$

Пример 23. Заем од 6000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено да се формира амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се антиципативни со годишна каматна стапка $15\%\text{p.a.(d)}$ и почнуваат две години по добивањето на заемот. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$Z = 6000000 \text{ денари, } n = 6, N = 4 \text{ и } k = 2 \text{ години,}$$
$$p = 12\%,\ p' = 15\% \text{ и } r' = 1{,}15.$$

Годишните расходи за каматата се

$$I = \frac{Zp}{100} = \frac{6000000\cdot 12}{100} = 720000 \text{ денари}$$

и тие во првите две години се еднакви на вкупните расходи на кредитобарателот. Според (6) годишните расходи за вложувањата во амортизациониот фонд се

$$a = Z\frac{r'-1}{r'(r'^{N}-1)} = 6000000\cdot\frac{1{,}15-1}{1{,}15(1{,}15^{4}-1)} = 1044862{,}70 \text{ денари.}$$

Конечно, вкупните годишни расходи во последните четири години се

$$720000 + 1044862{,}70 = 1764862{,}70 \text{ денари. } \blacksquare$$

Нека рокот на формирање на амортизациониот фонд N е помал од рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $N < n$. Ако за периодичните влогови кои го формираат амортизациониот фонд е договорена каматна стапка p' и ако тие се вложуваат декурзивно, после $k = n - N$ периоди од земањето на заемот, тогаш на крајот од N – от период нивната сума треба да биде еднаква на висината на заемот. Според тоа, $a\frac{r'^{N}-1}{r'-1} = Z$, $r' = 1 + \frac{p'}{100}$, од каде наоѓаме дека сумата која треба да се уплаќа за да се обезбеди потребниот амортизационен фонд е

$$a = Z\frac{r'-1}{r'^{N}-1}. \tag{8}$$

Според тоа, во првите $k = n - N$ периоди расходите на кредитобарателот се еднакви на каматата, т.е. на $I = \frac{Zp}{100}$. Од (1) и (8) следува дека во во следните N периоди расходите на кредитобарателот се

$$R = Z\frac{r'-1}{r'^{N}-1} + \frac{Zp}{100}. \tag{9}$$

Пример 24. Заем од 6000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\,\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено да се формира амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се декурзивни со годишна каматна стапка $15\%\,\text{p.a.(d)}$ и почнуваат две години по добивањето на заемот. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$Z = 6000000 \text{ денари, } n = 6, N = 4 \text{ и } k = 2 \text{ години,}$$
$$p = 12\%,\ p' = 15\% \text{ и } r' = 1{,}15.$$

Годишните расходи за каматата се

$$I = \frac{Zp}{100} = \frac{6000000 \cdot 12}{100} = 720000 \text{ денари}$$

и тие во првите две години се еднакви на вкупните расходи на кредитобарателот. Според (8) годишните расходи за вложувањата во амортизациониот фонд се

$$a = Z\,\frac{r'-1}{r'^{N}-1} = 6000000 \cdot \frac{1{,}15-1}{1{,}15^{4}-1} = 1201592{,}11 \text{ денари.}$$

Конечно, вкупните годишни расходи во последните четири години се

$$720000 + 1201592{,}11 = 1921592{,}11 \text{ денари.} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

45. Заем од 1500000 денари со рок на отплата 8 години е доделен со годишна каматна стапка $8\%\,\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено истовремено формирање на амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се антиципативни со годишна каматна стапка $8{,}5\%\,\text{p.a.(d)}$. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.
46. Заем од 1500000 денари со рок на отплата 8 години е доделен со годишна каматна стапка $8\%\,\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено истовремено формирање на амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се декурзивни со годишна каматна стапка $8{,}5\%\,\text{p.a.(d)}$. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.
47. Заем од 1500000 денари со рок на отплата 8 години е доделен со годишна каматна стапка $8\%\,\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено да се формира амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се антиципативни

со годишна каматна стапка $8{,}5\%\text{p.a.(d)}$ и почнуваат три години по добивањето на заемот. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

48. Заем од 1500000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $8\%\text{p.a.(d)}$ и периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено да се формира амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се декурзивни со годишна каматна стапка $8{,}5\%\text{p.a.(d)}$ и почнуваат три години по добивањето на заемот. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

14.3.2. ФОРМИРАЊЕ НА АМОРТИЗАЦИОНЕН ФОНД БЕЗ ПЕРИОДИЧНО ПЛАЌАЊЕ НА КАМАТАТА

Нека е одобрен заем Z со годишна каматна стапка $p\%\text{p.a.(d)}$, кој треба да се врати за n периоди, при што треба да се формира амортизационен фонд и притоа немаме периодично плаќање на каматата. Ќе разгледаме два случаи, и тоа:

а) рокот на формирање на амортизациониот фонд N се совпаѓа со рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $n = N$ и

б) рокот на формирање на амортизациониот фонд N е помал од рокот на отплаќање на заемот, т.е. $N < n$.

Нека рокот на формирање на амортизациониот фонд N се совпаѓа со рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $n = N$. Ако за периодичните влогови кои го формираат амортизациониот фонд е договорена каматна стапка p' и ако тие се вложуваат антиципативно, тогаш на крајот од $n-$тиот период нивната сума треба да биде еднаква на висината на заемот Z, на кој е пресметана сложена камата за $n-$те периоди. Според тоа,

$$ar'\frac{r'^n-1}{r'-1} = Zr^n,\ r' = 1+\frac{p'}{100},\ r = 1+\frac{p}{100},$$

од каде наоѓаме дека сумата која треба да се уплаќа за да се обезбеди потребниот амортизационен фонд е

$$a = Zr^n\frac{r'-1}{r'(r'^n-1)}, \tag{1}$$

и таа е еднаква на годишните расходи на кредитобарателот. Аналогно, во случај кога вложувањето во амортизациониот фонд е декурзивно, за сумата која кредитобарателот треба да ја вложува добиваме:

$$a = Zr^n\frac{r'-1}{r'^n-1}. \tag{2}$$

Пример 25. Заем од 6000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\text{p.a.(d)}$ без периодично плаќање на ка-

матата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено истовремено формирање на амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се

1) антиципативни,

2) декурзивни,

со годишна каматна стапка $15\%\text{p.a.(d)}$. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$Z = 6000000 \text{ денари, } n = N = 6 \text{ години,}$$
$$p = 12\%,\ r = 1{,}12,\ p' = 15\% \text{ и } r' = 1{,}15.$$

1) Годишните расходи на кредитобарателот, т.е вложувањата во амортизациониот фонд се

$$a = Zr^n \frac{r'-1}{r'(r'^n-1)} = 6000000 \cdot 1{,}12^6 \frac{1{,}15-1}{1{,}15(1{,}15^6-1)} = 1176435{,}11 \text{ денари.}$$

2) Годишните расходи на кредитобарателот, т.е вложувањата во амортизациониот фонд се

$$a = Zr^n \frac{r'-1}{r'^n-1} = 6000000 \cdot 1{,}12^6 \frac{1{,}15-1}{1{,}15^6-1} = 1352900{,}38 \text{ денари. } \blacksquare$$

Нека рокот на формирање на амортизациониот фонд N е помал од рокот на отплаќање на заемот n, т.е. $N < n$. Ако за периодичните влогови кои го формираат амортизациониот фонд е договорена каматна стапка p' и ако тие се вложуваат антиципативно, после $k = n - N$ периоди од земањето на заемот, тогаш на крајот од $N-$от период нивната сума треба да биде еднаква на висината на заемот, на кој е пресметана сложена камата за $n-$те периоди. Според тоа,

$$ar'\frac{r'^N-1}{r'-1} = Zr^n,\ r' = 1+\frac{p'}{100},\ r = 1+\frac{p}{100},$$

од каде наоѓаме дека сумата која треба да се уплаќа за да се обезбеди потребниот амортизационен фонд е

$$a = Zr^n \frac{r'-1}{r'(r'^N-1)}, \tag{3}$$

и таа е еднаква на годишните расходи на кредитобарателот. Аналогно, во случај кога вложувањето во амортизациониот фонд е декурзивно, за сумата која кредитобарателот треба да ја вложува добиваме:

$$a = Zr^n \frac{r'-1}{r'^N-1}. \tag{4}$$

Пример 26. Заем од 6000000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $12\%\text{p.a.(d)}$ без периодично плаќање на ка-

матата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено да се формира амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се

1) антиципативни,

2) декурзивни,

со годишна каматна стапка $15\%\text{p.a.(d)}$ и почнуваат две години по добивањето на заемот. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$Z = 6000000$ денари, $n = 6, N = 4$ и $k = 2$ години,

$p = 12\%$, $p' = 15\%$ и $r' = 1{,}15$.

1) Годишните расходи на кредитобарателот, т.е вложувањата во амортизациониот фонд се

$$a = Zr^n \frac{r'-1}{r'(r'^N-1)} = 6000000 \cdot 1{,}12^6 \frac{1{,}15-1}{1{,}15(1{,}15^4-1)} = 2062373{,}70 \text{ денари.}$$

2) Годишните расходи на кредитобарателот, т.е вложувањата во амортизациониот фонд се

$$a = Zr^n \frac{r'-1}{r'^N-1} = 6000000 \cdot 1{,}12^6 \frac{1{,}15-1}{1{,}15^4-1} = 2371729{,}76 \text{ денари.} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

49. Заем од 1500000 денари со рок на отплата 8 години е доделен со годишна каматна стапка $8\%\text{p.a.(d)}$ без периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено истовремено формирање на амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се
    а) антиципативни, б) декурзивни,
    со годишна каматна стапка $9\%\text{p.a.(d)}$. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

50. Заем од 1500000 денари со рок на отплата 6 години е доделен со годишна каматна стапка $8\%\text{p.a.(d)}$ без периодично плаќање на каматата. Договорено е заемот да се исплати наеднаш, при што како услов за одобрување на заемот е предвидено да се формира амортизационен фонд. Вложувањата во фондот се
    а) антиципативни, б) декурзивни,
    со годишна каматна стапка $9\%\text{p.a.(d)}$ и почнуваат три години по добивањето на заемот. Најди ги годишните расходи на кредитобарателот.

15. ОБЛИГАЦИОНИ ЗАЕМИ

Во определени случаи кредитобарателот не е во состојба потребните средства да ги обезбеди од еден или неколку кредитори, па затоа се пристапува кон облигациони заеми. Суштината на облигационите заеми е во емитирањето на таканаречените *обврзници* (*облигации*). Обврзницата е хартија од вредност која се издава на определена заокружена сума пари и која се плаќа на точно определена дата (валута на обврзницата). Според тоа, издавањето и продажбата на обврзниците е начин за земање кредит од голем број кредитори (купувачи на обврзниците). Издавач на обврзниците може да биде државата и локалната самоуправа, а при определени услови тоа можат да бидат и големите корпорациите. Во зависност од тоа кој ги издава (емитира) обврзниците, облигационите заеми можат да бидат државни, муниципални и корпоративни.

На секоја обврзница, на предната страна е означена сума која се нарекува *номинална вредност на обврзницата* или само *номинал*. Емитираните обврзници можат да бидат со иста или поделени во групи со различни номинални вредности. Понатаму, секоја обрзница припаѓа на определена серија и во рамките на серијата има свој број, па обрзниците меѓусебно се разликуваат и според серијата и бројот. За финансиските пресметувања од посебно значење е разграничувањето на облигационите заеми според начинот на нивното отплаќање. Од оваа гледна точка облигационите заеми можат да се поделат на:

- заеми кои исплаќаат на делови и
- заеми кои се исплаќаат одеднаш.

Заемите кои се исплаќаат на делови најчесто се долгорочни државни или муниципални заеми, но можат да бидат и корпоративни. Кај овие заеми амортизацијата се реализира периодично (еднаш годишно) со плаќање на достасаните емитирани обрзници. Притоа, заради рамноправност на кредиторите по пат на извлекување се определува кои обврзници во кој период се амортизираат. Тоа значи, дека амортизирањето на заемот за секој кредитор се реализира одделно и во моментот кога ќе бидат извлечени неговите обврзници. Понатаму, како и при секој заем, така и при облигационите заеми на сопственикот на обврзниците (кредиторот) му се исплаќа определена камата. Што се однесува до каматата, таа може да се исплаќа и во форма на премија, па затоа облигационите заеми се делат на каматни и лотариски (заеми со премии).

Кај заемите кои се исплаќаат одеднаш обврзниците се плаќаат откако ќе истече рокот на заемот. Јасно, за периодот во кој кредиторот е сопственик на обврзниците тој добива соодветна камата. Во повеќето случаи овие заеми се краткорочни, со период од една година, но можат да бидат и долгорочни и тоа се претежно корпоративните облигациони заеми. За овие заеми е важно тоа што, со обврзниците може да тргува на вториот финансиски пазар, т.е.

сопствениците можат обврзниците да ги продаваат по пазарна вредност пред истите да достасаат за наплата.

Во следните разгледувања ќе се задржиме на амортизацијата на облигационите заеми кои се исплаќаат на делови. Имено, за амортизација на овие заеми можат да се искористат сите претходно разгледани модели, меѓутоа моделите треба да се прилагодат на специфичностите на облигационите заеми.

15.1. КАМАТНИ ОБЛИГАЦИОНИ ЗАЕМИ

Облигационите заеми можат да бидат со еднаква и различна номинална вредност на обврзниците. На пример, заем од 30000000000 денари може да биде поделен на 1000000 обврзници со номинална вредност 30000 денари, но истиот може да биде поделен на 1000000 обврзници со номинална вредност 20000 денари и уште 1000000 обврзници со номинална вредност 10000 денари. За нашите разгледувања важно е да споменеме дека принципите за составување на амортизациониот план со обврзници со еднаква номинална и обврзници со различни номинални вредности се исти, па затоа ќе ги разгледаме само пресметките поврзани со составување амортизационен план на облигационен заем поделен на обврзници со иста номинална вредност.

При составување на амортизациониот план прво се определува големината на ануитетот. Бидејќи номиналната вредност на обврзниците е однапред определена целобројна сума, бројот на обврзници кои во дадениот период се амортизираат е цел број, а отплатата треба да биде еднаква на производот на бројот на доспеаните обврзници и нивната номинална вредност, заклучуваме дека постојат два вида ануитети, а со самото тоа и два вида амортизациони планови, т.е. два вида отплати: теориска и практична. Теорискиот ануитет се добива кога се искористи соодветната формула од моделот кој го применуваме и откако ќе ја одземеме соодветната камата ја добиваме теориската отплата. Понатаму, добиената отплата ја делиме на номиналната вредност на една обврзница и откако од добиениот број ќе го земеме целиот дел, го добиваме бројот на обврзниците кои во дадениот период треба да се амортизираат. Сега, вака најдениот број помножен со номиналната вредност на една обврзница ја дава практичната отплата. На практичната отплата ја додаваме соодветната камата, со што се добива практичниот ануитет. Разликата меѓу теорискиот и практичниот ануитет (соодветно меѓу теориската и практичната отплата) се запишува како остаток. Понатаму, остатоците на отплатите се сумираат и кога овој збир ќе ја надмине номиналната вредност на една обврзница, тогаш и таа обврзница се додава на претходно определениот број обврзници кои треба да се амортизираат во соодветниот период. Од досега изнесеното следува дека постапката на работење при составување на амортизационен план на облигационен заем со еднаква номинална вредност на обврзниците е следнава:

- согласно избраниот модел за амортизација на заемот Z се определува теориските ануитет a ,
- според формулата

$$R_i = R_{i-1} - c_{i-1}, \tag{1}$$

каде c_{i-1} е практичната отплата во $(i-1)$-та година и $R_0 = Z$ се определува остатокот од заемот на почетокот на i – та година,

- користејќи ја формулата

$$I_i = \frac{R_{i-1}p}{100}, \tag{2}$$

каде p е соодветната каматна стапка се пресметува каматата за i – та година,

- користејќи ја формулата

$$b_i = a - I_i \tag{3}$$

се пресметува теориската отплата,

- користејќи ја формулата

$$o_i = [\frac{b_i}{h}], \tag{4}$$

каде h е номиналната вредност на една обврзница се добива бројот на обврзниците кои се амортизираат во дадениот период,

- користејќи ја формулата

$$c_i = o_i h, \tag{5}$$

се определува практичната отплата, а разликата

$$r_i = b_i - c_i, \tag{6}$$

одделно се запишува во амортизациониот план, со тоа што кога збирот на остатоците ќе стане поголем или еднаков на номиналната вредност на една обврзница, тогаш кон определената вредност на бројот на обврзниците кои се амортизираат за дадениот период се додава и оваа обврзница,

- користејќи ја формулата

$$a_i^* = c_i + I_i \tag{7}$$

се определува практичниот ануитет за i – та година,

- користејќи ја формулата

$$O_i = O_{i-1} - o_i \tag{8}$$

се определува бројот на неамортизираните обврзници.

Пресметувањата при изработката на амортизациониот план почнуваат со наоѓање на теориските ануитет и пресметување на каматата за првата година. Потоа, се определува првата теориска отплата, бројот на обврзниците кои се амортизираат, првиот практичен ануитет итн.

Пример 27. Да се состави амортизационен план на облигационен заем од 100000000 денари поделен на 100000 обврзници по 1000 денари номинална вредност по една обврзница. Заемот се отплаќа декурзивно на делови во текот на 5 години со годишна каматна стапка од $9\%\,\text{p.a.(d)}$.

Решение. Користејќи ја формулата (2) од точка 3 го определуваме теориските ануитет. Имаме,

$$Z = 100000000 \text{ денари},\ n = 5,\ p = 9\%\,\text{p.a.(d)},$$

$$h = 1000 \text{ денари и } r = 1 + \frac{9}{100} = 1{,}09, \text{ па затоа}$$

$$a = Z\,\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 100000000 \cdot \frac{1{,}09^5(1{,}09-1)}{1{,}09^5 - 1} = 25709245{,}70 \text{ денари.}$$

Понатаму, користејќи ја формулата (2) за каматата во првата година наоѓаме

$$I_1 = \frac{R_0 p}{100} = \frac{100000000 \cdot 9}{100} = 9000000 \text{ денари.}$$

Според тоа, теориската отплата во текот на првата година е

$$b_1 = a - I_1 = 25709245{,}70 - 9000000 = 16709245{,}70 \text{ денари,}$$

па затоа бројот на обврзниците кои се амортизираат во првиот период е

$$o_1 = [\frac{b_1}{h}] = [\frac{16709245{,}70}{1000}] = 16709 \text{ обврзници.}$$

Сега, ако ја искористиме формулата (5) за практичната отплата наоѓаме

$$c_1 = o_1 h = 16709000 \text{ денари.}$$

Практичниот ануитет е

$$a_1^* = c_1 + I_1 = 25709000 \text{ денари,}$$

остатокот после првата година е

$$R_2 = R_1 - c_1 = 100000000 - 16709000 = 83291000 \text{ денари,}$$

бројот на обврзниците кои после првиот период остануваат неамортизирани е

$$O_1 = O_0 - o_1 = 83291$$

и остатокот кој одделно се запишува во амортизациониот план е

$$r_1 = b_1 - c_1 = 245{,}70 \text{ денари итн.}$$

Амортизациониот план е даден во следнава табела.

Год.	Ост. на поч. на година	Обврзници		Отплата	Камата	Ануитет	Остаток
		Во опт.	За амортизација				
1	100000000	100000	16709	16709000	9000000	25709000	245,70
2	83291000	83291	18213	18213000	7496190	25709190	55,70
3	65078000	65078	19852	19852000	5857020	25709020	225,70
4	45226000	45226	21638+1=21639	21639000	4070340	25709340	+905,70
5	23587000	23587	23586	23586000	2122830	25708830	432,80
							+415,70
							848,50
							-1000,00
							-151,50

Од амортизациониот план забележуваме, дека за целосно да се отплати заемот, недостигаат 151,50 денари, кои со остатокот од 848,50 денари треба да ја отплатата последната обврзница. Ова може да се избегне ако се работи со заокружени ануитети, кои ќе ги разгледаме во следната точка. ■

ЗАДАЧИ

51. Да се состави амортизационен план на облигационен заем од 150000000 денари поделен на 50000 обврзници по 3000 денари номинална вредност по една обврзница. Заемот се отплаќа декурзивно на делови во текот на 5 години со годишна каматна стапка од 10% p.a.(d) .

52. Да се состави амортизационен план на облигационен заем од 60000000 денари поделен на 100000 обврзници по 600 денари номинална вредност по една обврзница. Заемот се отплаќа декурзивно на делови во текот на 10 години со годишна каматна стапка од 8% p.a.(d) .

15.2. АМОРТИЗАЦИЈА НА ОБЛИГАЦИОНИ ЗАЕМИ СО ЗАОКРУЖЕНИ АНУИТЕТИ

Во претходната точка видовме дека при амортизацијата на облигационите заеми со еднакви ануитети најчесто теориската отплата не содржи цел број номинални вредности на една обврзница, поради што за да се отплати заемот Z најчесто недостига определена сума пари. Оваа потешкотија ќе ја надминеме користејќи ги заокружените ануитети. За да го составиме амортизациониот план при овој вид на отплата ќе ги користиме следниве ознаки:

h - номинална вредност на една обврзница,

p - каматна стапка,

a - теориски ануитет,

a_i^* - заокружен ануитет во i – от период,

I_i - камата за i – от период,

R_i - остаток од заемот во i – момент (после i – период), $R_0 = Z$,

r_i - остатокот добиен при амортизацијата на обврзниците во дадениот период,

b_i - отплата во i – от период која го вклучува остатокот r_i,

c_i - заокружена отплата во i – от период

O_i - бројот на обврзниците кои остануваат неамортизирани после i – от период и

o_i - бројот на обврзниците кои се амортизираат во i – от период.

Составувањето на амортизациониот план се реализира со следнава постапка:

- се пресметува теорискиот ануитет: $a = Z\dfrac{r^n(r-1)}{r^n-1}$,
- се пресметува каматата за i – от период: $I_i = \dfrac{R_{i-1}p}{100}$,
- се пресметува отплатата: $b_i = \begin{cases} a - I_i, & i = 1, \\ a - I_i + (1+\dfrac{p}{100})r_{i-1}, & i > 1, \end{cases}$
- се пресметува бројот на обврзниците кои се амортизираат во i – от период: $o_i = [\dfrac{b_i}{h}]$,
- се пресметува заокружената отплата $c_i = o_i h$ и
- се пресметува остатокот добиен при амортизацијата на обврзниците во дадениот период: $r_i = b_i - c_i$.

Пример 28. Да се состави амортизационен план со заокружени ануитет на облигационен заем од 100000000 денари поделен на 100000 обврзници по 1000 денари номинална вредност по една обврзница. Заемот се отплаќа декурзивно на делови во текот на 5 години со годишна каматна стапка од $9\%\text{p.a.(d)}$.

Решение. Го определуваме теорискиот ануитет. Имаме,

$Z = 100000000$ ден, $n = 5$, $p = 9\%\text{p.a.(d)}$, $h = 1000$ ден. и $r = 1 + \dfrac{9}{100} = 1,09$,

па затоа

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} = 100000000 \cdot \frac{1,09^5(1,09-1)}{1,09^5-1} = 25709245,70 \text{ денари.}$$

Понатаму, за каматата во првата година наоѓаме:

$$I_1 = \frac{R_0 p}{100} = \frac{100000000 \cdot 9}{100} = 9000000 \text{ денари.}$$

Според тоа, отплатата во првата година е

$$b_1 = a - I_1 = 25709245,70 - 9000000 = 16709245,70 \text{ денари,}$$

па затоа бројот на обврзниците кои се амортизираат во првиот период е

$$o_1 = [\frac{b_1}{h}] = [\frac{16709245,70}{1000}] = 16709 \text{ обврзници.}$$

Сега, за заокружената отплата наоѓаме

$$c_1 = o_1 h = 16709000 \text{ денари.}$$

Заокружениот ануитет е

$$a_1^* = c_1 + I_1 = 25709000 \text{ денари,}$$

остатокот после првата година е

$$R_2 = R_1 - c_1 = 83291000 \text{ денари,}$$

бројот на обврзниците кои после првиот период остануваат неамортизирани е

$$O_1 = O_0 - o_1 = 83291$$

и остатокот добиен при амортизацијата на обврзниците од првиот период е

$$r_1 = b_1 - c_1 = 245,70 \text{ денари.}$$

Понатаму, каматата во втората година е

$$I_2 = \frac{R_1 p}{100} = \frac{83291000 \cdot 9}{100} = 7496190 \text{ денари.}$$

Отплатата во втората година во која е вклучен остатокот r_1 е

$$b_2 = a - I_2 + (1 + \frac{p}{100}) r_1 = 25709245,70 - 7496190 + 1,09 \cdot 245,70 = 18213323,51 \text{ ден.}$$

Бројот на обврзниците кои се амортизираат во вториот период е

$$o_2 = [\frac{b_2}{h}] = [\frac{18213323,51}{1000}] = 18213 \text{ обврзници.}$$

Сега, за заокружената отплата наоѓаме

$$c_2 = o_2 h = 18213000 \text{ денари.}$$

Заокружениот ануитет е

$$a_2^* = c_2 + I_2 = 25709190 \text{ денари,}$$

остатокот после втората година е

$$R_3 = R_2 - c_2 = 65078000 \text{ денари,}$$

бројот на обврзниците кои после вториот период остануваат неамортизирани е

$$O_2 = O_1 - o_2 = 65078$$

и остатокот добиен при амортизацијата на обврзниците од вториот период е

$$r_2 = b_2 - c_2 = 323,51 \text{ денар итн.}$$

Амортизациониот план е даден во следнава табела.

Год.	Ост. на поч. на година	Обврзници		Отплата	Камата	Ануитет	Остаток
		Во опт.	За амортизација				
1	100000000	100000	16709	16709000	9000000	25709000	245,70
2	83291000	83291	18213	18213000	7496190	25709190	323,51
3	65078000	65078	19852	19852000	5857020	25709020	578,33
4	45226000	45226	21639	21639000	4070340	25709340	536,08
5	23587000	23587	23587	23587000	2122830	25709830	0,03

Да забележиме дека во овој модел при пресметување на отплатата b_i се додава и претходниот неотплатен остаток, кој се вкаматува за важечката каматна стапка. Последното е всушност единствената разлика од претходниот модел, но таа како што видовме е суштествена и овозможува отстранување на констатираниот недостаток. ■

ЗАДАЧИ

53. Да се состави амортизационен план со заокружени ануитет на облигационен заем од 150000000 денари поделен на 50000 обврзници по 3000 денари номинална вредност по една обврзница. Заемот се отплаќа декурзивно на делови во текот на 5 години со годишна каматна стапка од $10\%\,\mathrm{p.a.(d)}$.

54. Да се состави амортизационен план со заокружени ануитет на облигационен заем од 60000000 денари поделен на 100000 обврзници по 600 денари номинална вредност по една обврзница. Заемот се отплаќа декурзивно на делови во текот на 10 години со годишна каматна стапка од $8\%\,\mathrm{p.a.(d)}$.

15.3. АМОРТИЗАЦИЈА НА ЛОТАРИСКИ ЗАЕМИ

Лотариските заеми се карактеризираат со тоа што секоја година се формира таканаречен фонд за премии, од кој се исплаќаат добитните обврзници. Добитните обврзници се определуваат по пат на лотариско извлекување во кое учествуваат неамортизираните обврзници до моментот на извлекувањето. Средствата за исплаќање на добитните обврзници се обезбедуваат од сумата за исплаќање на каматата на заемот. За добитните обврзници е карактеристично тоа што за нив се исплаќа само премијата, но не и номиналната вредност на обврзницата. Меѓутоа, постојат и лотариски заеми кај кои

освен премијата за добитната обврзница се исплаќа и камата. Обврзниците кај лотариските заеми се нарекуваат лозови, на кои се исплаќа или само номилната вредност или премија (во случај на бескаматни лотариски заеми) и лозови на кои се исплаќа или само номиналната вредност и камата или само премија и камата (во случај на каматни лотариски заеми).

Нека имаме бескаматен лотариски заем Z денари, распределен во o обврзници со номинална вредност на една обврзница h денари. Заемот е одобрен со годишна каматна стапка $p\%\text{p.a(d)}$ и треба да се отплати за n години со еднакви ануитети. Понатаму, првите m извлечени лозови во даден период се исплаќаат од фондот за премии f, а сите останати лозови извлечени во дадениот период се исплаќаат според определената вредност за соодветната година (период). Според тоа, во $i-$ от период x_i лозови се исплаќаат по h_i денари.

Бидејќи заемот е со еднакви ануитети и годишна каматна стапка $p\%\text{p.a(d)}$ ануитетот е даден со формулата

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}. \tag{1}$$

Но, како ануитетот е константен, фондот за премии се формира од каматите кои треба да се исплатат во дадениот период и во $i-$ от период x_i лозови се исплаќаат по h_i денари, важи:

$$a = x_i h_i + f,\ i = 1,2,...,n. \tag{2}$$

Понатаму, бидејќи ануитетите се еднакви, а исто така и фондот за премии е еднаков за секој период (година) од равенствата (2) следува

$$x_i h_i = x,\ i = 1,2,...,n,$$

т.е.

$$x_i = \frac{x}{h_i},\ i = 1,2,...,n. \tag{3}$$

Од (3) следува

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{h_i} = x\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i}. \tag{4}$$

Од друга страна, бидејќи во секој од $n-$те периоди на отплата од фондот за премии f се исплаќаат по m лозови, добиваме дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = o - mn$. Ако ставиме $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} = s$, тогаш од последното равенство и од (4) добиваме $o - mn = xs$, од каде наоѓаме:

$$x = \frac{o - mn}{s}. \tag{5}$$

Понатаму, од $x_i h_i = x, i = 1,2,...,n$ следува $x_i = \frac{x}{h_i}, i = 1,2,...,n$, па од последното равенство и од (4) наоѓаме:

$$x_i = \frac{o - mn}{sh_i}, i = 1,2,...,n. \tag{6}$$

Што се однесува до фондот за премии, тој е еднаков на разликата меѓу ануитетот и сумата која се исплаќа во i – от период за x_i лозови по h_i денари, т.е. $f = a - x_i h_i$. Од последното равенство и од равенството (1) за фондот на премии добиваме:

$$f = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} - x_i h_i. \tag{7}$$

Пример 29. Бескаматен лотариски заем од 10000000 денари треба да биде исплатен за 5 години со годишна каматна стапка $10\%\text{p.a.(d)}$. Заемот е распределен на 10000 лозови, секој од по 1000 денари, при што секоја година се амортизираат еднаков број лозови, од кои 30% се од фондот за премии, а за останатите лозови се исплаќа само номиналната вредност. Да се состави амортизационен план.

Решение. Од условот на задачата следува:

$$Z = 10000000 \text{ денари}, o = 10000, n = 5, p = 10\%\text{p.a.(d)},$$
$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1 \text{ и } h_i = 1000, i = 1,...,5.$$

Според тоа, годишно треба да се амортизираат $\frac{o}{n} = 2000$ лозови, од кои $m = \frac{30 \bullet 2000}{100} = 600$ добитни лозови треба да се исплатат од фондот за премии, а за останатите $x_i = 2000 - 600 = 1400$ лозови да се исплати номиналната вредност. Ако ја искористиме формулата (1) за ануитетот добиваме.

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 1000000 \cdot \frac{1{,}1^5(1{,}1-1)}{1{,}1^5 - 1} = 2637975 \text{ денари.}$$

Понатаму, ако ја искористиме формулата (7) за фондот за премии добиваме:

$$f = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} - x_i h_i = a - x_i h_i = 2637975 - 1400 \cdot 1000 = 1237975 \text{ денари.}$$

За распределбата на фондот за премии одлучуваат субјектите кои управуваат со враќањето на заемот. Така, на пример, може да се одлучи еднодишниот фонд да биде распределен на следниов начин:

- 400 премии од 1500 денари,
- премии од 2000 денари,

- 80 премии од 2500 денари,
- 19 премии од 8000 денари, и
- 1 премија од 85975 денари.

Год.	Остаток од заемот на поч. на год.	Лозови			Фонд за премии	Ануитет
		Во оптек	Извлечени без премии	Извлечени со премии		
1	10000000	10000	1400	600	1237975	2637975
2	8000000	8000	1400	600	1237975	2637975
3	6000000	6000	1400	600	1237975	2637975
4	4000000	4000	1400	600	1237975	2637975
5	2000000	2000	1400	600	1237975	2637975

Конечно, амортизациониот план е даден во горната табела. ■

Нека имаме каматен лотариски заем Z денари, распределен во o обврзници со номинална вредност на една обврзница h денари. Заемот е одобрен со годишна каматна стапка $p\%\text{p.a(d)}$ и треба да се отплати за n години со еднакви ануитети. Понатаму, првите m извлечени лозови во даден период се исплаќаат од фондот за премии f, а сите останати лозови извлечени во дадениот период се исплаќаат според определената вредност за соодветната година (период). Според тоа, во $i-$от период x_i лозови се исплаќаат по h_i денари. Сите лозови добиваат купон за еднократно исплаќање на камата во висина од $p_1\%\text{p.a(d)}$, а додека разликата во пресметаните камати се користи за формирање на фондот за премии.

Бидејќи заемот е со еднакви ануитети и годишна каматна стапка $p\%\text{p.a(d)}$ ануитетот е даден со формулата (1). Понатаму, најдениот ануитет во секој период се распределува на сума за исплаќање на каматата на извлечените лозови, на сума за фондот за премии и на сума за исплаќање на извлечените лозови без добивки, т.е. за ануитетот важи

$$a=\frac{(x_ih_i+mh)p_1}{100}+f+x_ih_i,\ i=1,2,...,n. \tag{8}$$

Пример 30. Каматен лотариски заем од 10000000 денари треба да биде исплатен за 5 години со годишна каматна стапка $10\%\text{p.a.(d)}$. Заемот е распределен на 10000 лозови, секој од по 1000 денари, при што секоја година се амортизираат еднаков број лозови, од кои 30% се од фондот за премии, а за останатите лозови се исплаќа само номиналната вредност. На сите извлечени лозови им се исплаќа камата од $3\%\text{p.a.(d)}$. Да се состави амортизационен план.

Решение. Од условот на задачата следува:

$$Z=10000000 \text{ денари},\ o=10000,\ n=5,\ p=10\%\text{p.a.(d)},$$

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1\,,\ \ p_1 = 3\%\,\text{p.a.(d)}\ \text{ и }\ h_i = 1000,\ i = 1,...,5\,.$$

Според тоа, годишно треба да се амортизираат $\frac{o}{n} = 2000$ лозови, од кои $m = \frac{30 \cdot 2000}{100} = 600$ добитни лозови треба да се исплатат од фондот за премии, а за останатите $x_i = 2000 - 600 = 1400$ лозови да се исплати номиналната вредност.

Ако ја искористиме формулата (1) за ануитетот добиваме:

$$a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 1000000 \cdot \frac{1{,}1^5(1{,}1-1)}{1{,}1^5 - 1} = 2637975 \text{ денари.}$$

Понатаму, ако ја искористиме формулата (8) за фондот за премии добиваме:

$$f = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} - x_i h_i - \frac{(x_i h_i + mh)\,p_1}{100} = a - x_i h_i - \frac{(x_i h_i + mh)\,p_1}{100}$$
$$= 2637975 - 1400 \cdot 1000 - \frac{2000 \cdot 1000 \cdot 3}{100} = 1177975 \text{ денари.}$$

Како и кај бескаматните лотариски заеми и овде за распределбата на фондот за премии одлучуваат субјектите кои управуваат со враќањето на заемот.

Конечно, амортизациониот план е даден во следнава табела:

Год.	Остаток од заемот на поч. на год.	Лозови			Фонд за премии	Ануитет
		Во оптек	Извлечени без премии	Извлечени со премии		
1	10000000	10000	1400	600	1177975	2637975
2	8000000	8000	1400	600	1177975	2637975
3	6000000	6000	1400	600	1177975	2637975
4	4000000	4000	1400	600	1177975	2637975
5	2000000	2000	1400	600	1177975	2637975

Да забележиме дека во случајов на сите сопственици на лозови им се исплаќа камата од $3\%\,\text{p.a.(d)}$. Последното значи дека, без разлика дали лозот е добитен или не е добитен на сопственикот со извлекувањето на лозот му се исплаќа камата во висина од 30 денари. За добивање на каматата сопственикот на лозот при купувањето на истиот добива и посебен купон, кој ги содржи податоците за лозот и на кој е наведена каматната стапка или висината на каматата која треба да се исплати. ■

ЗАДАЧИ

55. Бескаматен лотариски заем од 20000000 денари треба да биде исплатен за 10 години со годишна каматна стапка $8\%\,\text{p.a.(d)}$. Заемот е распределен на 10000 лозови, секој од по 2000 денари, при што секоја година се амортизираат еднаков број лозови, од кои 20% се од фондот за премии, а за останатите лозови се исплаќа

само номиналната вредност. Да се состави амортизационен план и да се направи распределба на фондот за премии.

56. Бескаматен лотариски заем од 15000000 денари треба да биде исплатен за 5 години со годишна каматна стапка $8\%p.a.(d)$. Заемот е распределен на 15000 лозови, секој од по 1000 денари, при што секоја година се амортизираат еднаков број лозови, од кои 25% се од фондот за премии, а за останатите лозови се исплаќа само номиналната вредност. Да се состави амортизационен план и да се направи распределба на фондот за премии.

57. Каматен лотариски заем од 20000000 денари треба да биде исплатен за 10 години со годишна каматна стапка $8\%p.a.(d)$. Заемот е распределен на 10000 лозови, секој од по 2000 денари, при што секоја година се амортизираат еднаков број лозови, од кои 20% се од фондот за премии, а за останатите лозови се исплаќа само номиналната вредност. На сите извлечени лозови им се исплаќа камата од $4\%p.a.(d)$. Да се состави амортизационен план и да се направи распределба на фондот за премии.

58. Каматен лотариски заем од 15000000 денари треба да биде исплатен за 5 години со годишна каматна стапка $8\%p.a.(d)$. Заемот е распределен на 15000 лозови, секој од по 1000 денари, при што секоја година се амортизираат еднаков број лозови, од кои 25% се од фондот за премии, а за останатите лозови се исплаќа само номиналната вредност. На сите извлечени лозови им се исплаќа камата од $4\%p.a.(d)$. Да се состави амортизационен план и да се направи распределба на фондот за премии.

Успехот секогаш и секаде започнува со еден збор: решителност.

А. Касон

Ако сакаш да ја дознаеш цената на парите, обиди се да земеш заем.

Б. Франклин

Да заработиш многу пари е храброст, да ги зачуваш е мудрост, а паметно да ги користиш е искуство.

Б. Фоербах

Инвестициите се средство за урамнотежување на сегашните и идните потреби.

Б. Фишер

Економијата е искуство да се извлече максимум од животот.

Б. Шо

ГЛАВА VI
ОБВРЗНИЦИ И АКЦИИ

1. ОБВРЗНИЦИ

Во точка V 15 обврзницата ја дефиниравме како хартија од вредност која се издава на определена сума пари и која се плаќа на точно определена дата (валута на обврзницата). Според тоа, издавањето и продажбата на обврзниците е начин на земање кредит од голем број кредитори (купувачи на обврзниците). Понатаму, обврзниците се издаваат (емитираат) во големи серии, што не е случај со мениците и комерцијалните записи кои се издаваат поединечно.

1.1.ВИДОВИ ОБВРЗНИЦИ

На современите финансиски пазари се среќаваат голем број видови обврзници, со тенденција за постојано појавување на нови видови хибридни инструменти. Во оваа точка ќе дадеме класификација која ги вклучува најважните видови обврзници.

а) Според издавачот (емитерот) на обврзниците истите се делат на:

- државни,
- муниципални и
- корпоративни.

Државните и муниципалните обврзници ги издаваат државата, органите на управата и локалната самоуправа, па затоа во истите инвеститорите имаат голема доверба. Имено, државата и нејзините органи се сметаат за сигурни гаранти, што од своја страна значи дека инвестицијата е обезбедена. Друг момент што ги прави овие обврзници атрактивни за инвеститорите е фактот дека истите котираат на првиот и вториот пазар на капитал.

Корпоративните обврзници ги користат компаниите како инструмент за финансирање на бизнисот. Меѓу другото, компаниите го практикуваат емитирањето на обврзници за финансирање на бизнисот, бидејќи во земјите со развиена пазарна економија истото им овозможува низа даночни олеснувања.

б) Според периодот за кој се издаваат обврзниците можат да бидат:

- краткорочни, кои се издаваат за период до една година, како што се, на пример, благајничките записи кои ги разгледавме во точките III 4 и III 5 и кои се познати под името обврзници со нулти купон (zero bonds),

- среднорочни (notes), кои обично се издаваат за период од 1 до 5 години и
- долгорочни (bonds), кои се издаваат за период над 5 години.

в) Според гаранцијата која емитерот ја дава за обврзниците, тие се делат на:

- негарантирани обврзници (debentures),
- хипотекарни обврзници (mortgage bonds), и
- обврзници за опрема (equipment trust certificates).

Негарантираните обврзници се широко распространети и за истите нема специјална гаранција. Овие обврзници ги купуваат основните кредитори на компанијата која ги емитира и за истите гаранција е нејзината ликвидност и добриот рејтинг на компанијата

Хипотекарните обврзници се обезбедени со хипотека на имотот на компанијата емитер. Кај овие обврзници среќаваме два вида: *затворени обврзници* (*closed end*), кај кои не се допушта емитерот да го заложува истиот имот при емитирање на нови обврзници и *отворени обврзници* (*open end*), кај кои е допуштено веќе заложен имот повторно да се заложува при издавање на нови обврзници. Во случај на отворени хипотекарни обврзници, при ликвидација на компанијата емитер и продажба на имотот ставен под хипотека прво се намируваат обврзниците од првата емисија, потоа од втората итн.

Обврзниците за опрема се користат за финансирање на набавка на нова опрема или превозни средства (авиони и слично) врз принципот на лизинг. Со средствата собрани од продажбата на обврзниците се купува неопходната опрема и истата се дава под лизинг на компанијата емитер. Понатаму со исполнувањето на обврските од договорот за лизинг се елиминира долгот и се гаснат обврзниците.

г) Според посебните права кои ги имаат купувачите обврзниците се делат на:

- конвертибилни обврзници (convertible bonds) и
- партиципативни обврзници.

Сопствениците на *конвертибилните обврзници* имаат право истите да ги претворат во акции или право за првенство во купување на акции.

Партиципативните обврзници се одликуваат по тоа што на нивните иматели покрај камата им се дава право и на соодветен дел од дивидентата која ја остварува емитерот на обврзниците.

По правило корпоративните обврзници од една иста емисија се со иста дата на валута. За разлика од нив кај државните и муниципалните обврзници имаме можност за сериско, тиражно гасење на обврзниците, т.е. постојат неколку дати на валута за овие обврзници.

Многу често емитерот на обрзниците го зачувува правото (опцијата) обврзниците да ги повлече (откупи) од обрт пред нивната валута (call provision). Емитерот од оваа опција има корист кога каматната стапка се намалува, при што може да ги замени обврзниците со повисока каматна стапка со нови обврзници, кои имаат пониска каматна стапка. Јасно, од гледна точка на инвеститорите оваа клаузула е непожелна, бидејќи цената по која емитерот ги откупува обврзниците (redemption price) обично е повисока од номиналната вредност на обврзниците, но не е доволна да ја компензира загубата од пониската каматна стапка. Затоа, заштитата на купувачите од раното откупување на обврзниците се обезбедува со клаузула со која се предвидува период од неколку години (пет или десет) во кои оваа опција не може да се применува.

1.2.ОЦЕНКА НА ОБВРЗНИЦИТЕ. ПРЕМИЈА И ДИСКОНТ

Обврзниците (облигациите) припаѓаат на групата хартии од вредност со фиксиран приход. Како должнички инструмент тие на сопственикот, кој е кредитор на издавачот, му носат определена камата. Во минатото постоела пракса каматата за обврзниците да се исплаќа со помош на специјални купони кои биле прикачени на обврзницата. Денес таа пракса е надмината, но за да ја разликуваме оваа каматна стапка од останатите видови каматни стапки истата ќе ја нарекуваме *облигациона каматна стапка*. Понатаму, облигационата каматна стапка и номиналната вредност (face value) се запишуваат на лицето на обврзницата. Ако ги искористиме ознаките:

- i , облигациона каматна стапка и
- F , номинална вредност на обврзницата,

тогаш *облигационата камата*, т.е. годишната сума која емитерот се обврзува да ја исплаќа по обврзница се пресметува според формулата

$$F_0 = \frac{Fi}{100}. \qquad (1)$$

Што се однесува до облигационата камата, таа може да се исплаќа еднаш годишно, но во практиката најчесто истата се исплаќа два пати во годината, т.е. семестрално.

Обврзниците се издаваат на строго определен рок и на денот на валутата на обврзницата должникот (емитерот) ќе ја исплати главнината на својот долг, т.е. ќе ја откупи обврзницата по нејзината номинална вредност F. Претходно изнесеното ни овозможува да дадеме оценка (ја определиме вредноста) на обврзницата, постапка во која ќе го користиме математичкиот дисконт. За таа цел, потребно е да ја знаеме каматната стапка која ќе ја користиме при дисконтирањето и која пред сè се разгледува како посакувана каматна стапка од страна на инвеститорот, која ја детерминираат алтернативните инвестициони проекти, т.е. проекти со аналоген степен на ризик. Ако покрај

претходно воведените ознаки за облигационата каматна стапка и номиналната вредност на обврзницата, ги користиме и ознаките:

- p, посакуваната каматна стапка од страна на инвеститорот,

- n, бројот на каматни периоди од моментот на купување (оценување) на обврзницата до моментот на нејзиното откупување или валута,

- C, цената на откупување на обврзницата, која во општ случај се совпаѓа со нејзината номинална вредност и

- V, оценетата вредност на обврзницата,

Добиваме:

$$V=\frac{\frac{Fi}{100}}{1+\frac{p}{100}}+\frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{p}{100})^2}+\frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{p}{100})^3}+\ldots+\frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{p}{100})^n}+\frac{C}{(1+\frac{p}{100})^n},$$

т.е.

$$V=Fi\frac{(1+\frac{p}{100})^n-1}{p(1+\frac{p}{100})^n}+\frac{C}{(1+\frac{p}{100})^n}. \qquad (2)$$

Пример 1. Определете ја вредноста на обврзница со номинална вредност од 10000 денари, со годишна облигациона каматна стапка од 6%, при што облигационата камата се исплаќа семестрално. Облигацијата се купува две години пред нејзината валута, а посакуваната каматна стапка од инвеститорот е 8%.

Решение. Бидејќи облигационата камата се исплаќа семестрално, а облигационата и посакуваната каматна стапка се дадени на годишно ниво, ќе работиме со релативните каматни стапки. Од условот на задачата имаме:

$F=10000$ денари, $i=3\%$, $p=4\%$, $C=F=10000$ денари и $n=4$.

Со замена во формулата (2) за вредноста на обврзницата наоѓаме:

$$V=10000\cdot 3\cdot\frac{(1+\frac{4}{100})^4-1}{4(1+\frac{4}{100})^4}+\frac{10000}{(1+\frac{4}{100})^4}=1088,97+8548,04=9637,01 \text{ денари.}$$

Според тоа, за да обезбеди постигнување на посакуваната каматна стапка инвеститорот треба обврзницата да ја купи по цена од најмногу 9637,01 денари по обврзница, која е пониска од нејзината номинална вредност, т.е. да ја купи со *дисконт*. ■

Како што веќе рековме, во многу случаи емитерот си дава опција, според однапред утврдена цена, да откупи дел од обврзниците пред нивната дата на валута. Во овој случај се јавуваат низа потешкотии при пресметките, кои пред сè се должат од неизвесноста, дали и кога емитерот ќе ја искористи оваа опција.

Пример 2. Валутата на неконкурентните обврзници на компанијата T&B со номинална вредност од 1000 $ и 8% годишна облигациона каматна

стапка е 1.04.2015 година. Облигационата камата се плаќа двапати годишно и тоа на 1.04 и на 1.10. Која сума за оваа обврзница е подготвен да плати на 1.10.2007 година инвеститор за оваа обврзница, ако посакуваната годишна каматна стапка од страна на инвеститорот е 6%. Освен тоа познато е дека неконкурентните обврзници емитерот може да ги откупи после 1.04.2010 по цена од 1050 $. Која цена во овој случај е подготвен да ја плати инвеститорот?

Решение. а) Во случајот кога емитерот ја користи опцијата да ги откупи облигациите на 1.10.2007 година, времето, за кое инвеститорот ја добива облигационата камата, е од 1.10.2007 година до 1.04.2010 година, т.е. тоа се пет периоди на вкаматување, што значи $n=5$. Панатаму, бидејќи облигационата и посакуваната камата се дадени на годишно ниво ќе работиме со релативните каматни стапки, што значи $i=4\%$ и $p=3\%$. Од условот на задачата добиваме дека $F=1000\$$ и $C=1050\$$. Со замена во формулата (2) за вредноста на обврзницата во дадениот случај наоѓаме:

$$V=1000\cdot 4\cdot\frac{(1+\frac{3}{100})^5-1}{3\cdot(1+\frac{3}{100})^5}+\frac{1050}{(1+\frac{3}{100})^5}=4000\cdot\frac{1{,}03^5-1}{3\cdot 1{,}03^5}+\frac{1050}{1{,}03^5}=1088{,}927511\$.$$

б) Ако емитерот не го користи правото да ги откупи обврзниците и тие се исплатуваат на денот на валутата, т.е. на 1.04.2015 година, тогаш од условот на задачата имаме

$F=1000\$$, $i=4\%$, $p=3\%$, $C=F=1000\$$ денари и $n=15$.

Со замена во формулата (2) за вредноста на обврзницата во овој случај наоѓаме:

$$V=1000\cdot 4\cdot\frac{(1+\frac{3}{100})^{15}-1}{3\cdot(1+\frac{3}{100})^{15}}+\frac{1000}{(1+\frac{3}{100})^{15}}=4000\cdot\frac{1{,}03^{15}-1}{3\cdot 1{,}03^{15}}+\frac{1000}{1{,}03^{15}}=1119{,}379351\$.$$

Како што можеме да видиме и во двата случаи, за да ја оствари посакуваната годишна каматна стапка, инвеститорот може да ја плати обврзницата по цена повисока од нејзината номинална вредност, т.е. да плати *премија*. Притоа, ако тој успее да ја откупи обврзницата по цена од 1088,927511$ и компанијата не ја искористи опцијата за предвремено откупување на обврзниците, тогаш инвеститорот ќе оствари повисока добивка од посакуваната. ■

Разгледуваните примери не наведуваат на заклучокот, дека цената на обврзниците отстапуваат од нивната номинална вредност, т.е. истите се купуваат со дисконт или со премија. Притоа, ако сакаме при инвестирањето во обврзници да обезбедиме повисока посакувана камата од дадената облигациона камата, тогаш обрзниците треба да ги купиме со дисконт на номиналната вредност на обврзниците, формула (7). Но, ако сме задоволни со пониска посакувана каматна стапка од дадената облигациона каматна стапка, тогаш обврзниците можеме да ги откупиме по цена повисока од номиналната вредност на обврзниците, т.е. со премија, формула (5). Од претходно изнесеното може-

ме да заклучиме дека посакуваната каматна стапка и цената на обрзницата се обратнопропорционални големини. Навистина, при воведените ознаки, ако во формулата (2) ставиме $\frac{p}{100} = x$ и $\frac{i}{100} = i*$, тогаш оценетата вредност на обврзницата во функција од посакуваната каматна стапка, т.е. во функција од x е дадена со формулата

$$V(x) = Fi * \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n} + \frac{C}{(1+x)^n} \tag{3}$$

и притоа важи

$$V'(x) = Fi * \frac{-(1+x)^{n+1} + 1 + (n+1)x}{x^2(1+x)^{n+1}} - \frac{nC}{(1+x)^{n+1}}.$$

Но, од *неравенството на Бернули* следува $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$, за $x > -1$, што значи дека $V'(x) < 0$, за $x > -1$. Според тоа, функцијата (3) монотоно опаѓа на интервалот $(-1, +\infty)$, т.е. со зголемувањето на посакуваната каматна стапка се намалува курсот (цената) на обврзниците.

Нека ги воведеме ознаките:

- P, премија која ја плаќаме над номиналната вредност на обврзницата и
- D, дисконт кој се одбива од номиналната вредност на обврзницата,

тогаш премијата и дисконтот на дадена обврзница можат да се пресметаат на следниов начин.

Премијата која можеме да ја платиме при купувањето на обврзниците е еднаква на разликата на оценетата и номиналната вредност на обврзницата, т.е.

$$P = V - F. \tag{4}$$

Ако во формулата (2) ставиме $C = F$ и замениме во (4) за премијата добиваме

$$P = Fi \frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p(1+\frac{p}{100})^n} + \frac{F}{(1+\frac{p}{100})^n} - F = Fi \frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p(1+\frac{p}{100})^n} - F \frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{(1+\frac{p}{100})^n},$$

т.е.

$$P = F(i-p) \frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p(1+\frac{p}{100})^n}. \tag{5}$$

Дисконтот кој сакаме да го постигнеме при купувањето на обврзниците е еднаков на разликата на номиналната и оценетата вредност на обврзницата, т.е.

$$D = F - V. \tag{6}$$

Ако во формулата (2) ставиме $C = F$ и замениме во (6) за дисконтот добиваме

$$D = F - Fi\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p(1+\frac{p}{100})^n} - \frac{F}{(1+\frac{p}{100})^n} = F\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{(1+\frac{p}{100})^n} - Fi\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p(1+\frac{p}{100})^n},$$

т.е.

$$D = F(p-i)\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{p(1+\frac{p}{100})^n}. \qquad (7)$$

Да забележиме дека, во случај кога обврзницата се купува со премија, до датата на валутата на обврзницата заедно со облигацината камата се исплатува и дел од премијата, која ја платил инвеститорот. Овој процес го нарекуваме *амортизација на премијата*. Во врска со амортизацијата на премијата ќе го разгледаме следниов пример.

Пример 3. Валутата на неконкурентните обврзници на компанијата T&B со номинална вредност од 1000 $ и 8% годишна облигациона каматна стапка е 1.06.2009 година. Облигационата камата се плаќа двапати годишно и тоа на 1.06 и на 1.12. Која сума за оваа обврзница е подготвен да плати на 1.06.2007 година инвеститор за оваа обврзница, ако посакуваната годишна каматна стапка од страна на инвеститорот е 6%. Составете амортизационен план на премијата.

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$F = 1000\$,\ i = 4\%,\ p = 3\% \text{ и } n = 4.$$

Со замена во формулата (5) за премија која е подготвен да ја плати инвеститорот наоѓаме:

$$P = 1000(4-3)\frac{(1+\frac{3}{100})^4 - 1}{3(1+\frac{3}{100})^4} = 1000 \cdot \frac{1{,}03^4 - 1}{3 \cdot 1{,}03^4} = 37{,}170984\$.$$

Од формулата (4) за оценетата вредност на обврзницата добиваме:

$$V = P + F = 1037{,}170984\$.$$

Според тоа, цената на обврзницата, која ќе на ивеститорот ќе му обезбеди посакувана каматна стапка од $p = 3\%$ е 1037,170984$. Да составиме амортизационен план на премијата $P = 37{,}170984\$$. Имаме:

Дата	Приход пресметан врз база на посакуваната каматна стапка	Облигациона камата	Сума за амортизација на премијата	Сметководствена вредност на обврзницата
1.06.2007	-	-	-	1037,170984
1.12.2007	31,115130	40,000000	8,884870	1028,286114
1.06.2008	30,848583	40,000000	9,151417	1019,134697
1.12.2008	30,574041	40,000000	9,425959	1009,708738
1.12.2009	30,291262	40,000000	9,708738	1000,000000
Сума			37,170984	

Претходната табела ја составуваме на следниов начин. Поаѓаме од цената која сме ја платиле за обврзницата, т.е. од 1037,170984$ и тоа е таканаречената *сметководствена вредност* (book value) на обврзницата. На сметководствена вредност ја пресметуваме каматата добиена со помош на посакуваната каматна стапка, која за периодот од 1.06.2007 до 1.12.2007 година изнесува 31,115130$ и истата ја одземаме од обликационата камата која за секој шестмесечен период изнесува 40$. Добиената разлика е еднаква на сумата за амортизација на платената премија и таа за овој период изнесува 8,888870$. Понатаму, од сметководствената вредност на обврзницата 1037,170984$ ја одземаме сумата за амортизација 8,888870$ и ја добиваме сметководствената вредност на обврзницата на ден 1.12.2007 година, т.е. добиваме 1028,286114$. Сега, за следниот период постапката ја повторуваме со новодобиената сметководствена вредност на обврзницата итн. ■

Во случај кога посакуваната каматна стапка е поголема од обликационата, тогаш облигационата камата не е доволна да ја обезбеди посакуваната добивка од страна на инвеститорот, па затоа обврзницата ја купуваме со дисконт. Притоа, недостигот од посакуваната добивка во одделните временски периоди ќе се покрива од дисконтот и овде ќе имаме постојано зголемување на сметководствената вредност на обврзницата, за на датата на валута истата се изедначи со нејзината номинална вредност. Овој процес ќе го наречеме *акумулација на дисконтот.* Да разгледаме еден пример.

Пример 4. Валутата на неконкурентните обврзници на компанијата T&B со номинална вредност од 1000 $ и 4% годишна облигациона каматна стапка е 1.06.2009 година. Облигационата камата се плаќа двапати годишно и тоа на 1.06 и на 1.12. Која сума е подготвен да плати на 1.06.2007 година инвеститор за оваа обврзница, ако посакуваната годишна каматна стапка од страна на инвеститорот е 6%. Составете табела за акумулација на дисконтот.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$F = 1000\$,\ i = 2\%,\ p = 3\% \text{ и } n = 4.$$

Со замена во формулата (7) за дисконтот кој му е потребен на инвеститорот за да ја оствари посакуваната добивка наоѓаме:

$$D = 1000(3-2)\frac{(1+\frac{3}{100})^4 - 1}{3(1+\frac{3}{100})^4} = 1000 \cdot \frac{1{,}03^4 - 1}{3 \cdot 1{,}03^4} = 37{,}170984\$.$$

Од формулата (6) за оценетата вредност на обврзницата добиваме

$$V = F - D = 1000 - 37{,}170984 = 962{,}829016\$.$$

Да ја составиме табелата за акумулација на дисконтот. Имаме:

Дата	Приход пресметан врз база на посакуваната каматна стапка	Облигациона камата	Сума за акумулација на дисконтот	Сметководствена вредност на обврзницата
1.06.2007	-	-	-	962,829016
1.12.2007	28,884870	20,000000	8,884870	971,713886
1.06.2008	29,151417	20,000000	9,151417	980,865303
1.12.2008	29,425959	20,000000	9,425959	990,291262
1.12.2009	29,708738	20,000000	9,708738	1000,000000
		Сума	37,170984	

Претходната табела ја составуваме на потполно анологен начин како и табелата во која е дадена амортизацијата на премијата, со тоа што почетна сметководствена вредност на обврзницата е нејзината оценета вредност 962,829016. Притоа, во секој временски период сумата за акумулација на дисконтот се добива како разлика од приходот пресметан врз база на посакуваната каматна дтапка и облигационата камата, која во случајов во секој од разгледуваните периоди изнесува 20,00$. ■

1.3.ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА БЕРЗАНСКИОТ КУРС НА ОБВРЗНИЦИТЕ

Обврзниците се динамички хартии од вредност. Имено, после нивното емитирање тие можат да бидат објект на неограничен број купопродажби, кои се обавуваат на финансискиот пазар. Зделките сврзани со првичната продажба на обврзници од нова емисија од страна на емитерот или негов претставник го формираат таканаречениот прв пазар. Натамошните трансакции со обврзниците се одвиваат на таканаречениот втор пазар. Првиот и вториот пазар на обврзници се составен дел на берзата. Но, постои и вонберзанско тргување со обврзници. На пример, многу зделки со обврзници се одвиваат на таканаречениот over-the-counter начин, при што зделките се склучуваат по телефон меѓу дилерите кои се информираат со помош на комјутерски информационен систем. Понатаму, на вториот пазар зделките со хартиите од вредност се склучуваат од страна на берзанските посредници (брокери и слично), кои за својата услуга добиваат соодветна провизија.

На берзата се користи специјален начин на изразување на цените на тргуваните хартии од вредност. Притоа, како синоним за берзанската цена се користи терминот *курс*. Курсовите на скоро сите обврзници се даваат во вид на процент од номиналните вредности на обврзниците и при промената на курсот се користи определена стапка, која кај обврзниците е најмалку $\frac{1}{32}\% = 0,03125\%$. На пример, кога ќе речеме дека една обврзница со номинална вредност од $10000\$$ на берзата котира $95\frac{1}{32} = 95,03125$, тоа значи дека нејзината цена е $9503,125\$$. Понатаму, обично на берзата се котираат две цени, при што поголемата од нив е курсот по кој обврзницата се продава (asked price), а помалата е курсот по кој обрзницата се купува (bid price).

Во претходните разгледувања, при оценувањето на вредноста на обврзниците се задржавме само на деновите на исплаќање на облигационата камата. Но, трансакциите со обврзниците се одвиваат секојдневно, па затоа ќе покажеме како нивната цена се определува меѓу деновите на исплата на облигационата камата. За да ја определиме оваа цена доволно е да одговориме на прашањето, како на денот на купопродажбата се распределува облигационата камата меѓу продавачот и купувачот на обврзницата. Логичен одговор на ова прашање е купувачот на обврзницата на продавачот да му го плати пристигнатиот дел од облигационата камата, што и се применува во практиката. Тогаш куповната цена е збир на пазарната (котираната) цена и соодветниот дел од облигационата камата, а ако купопродажбата се одвива на вториот пазар, тогаш во цената се вклучува и надоместокот на брокерот. Пред да го разгледаме следниот пример, да забележиме дека цената по која котираат обврзниците, по правило, не ја содржи облигационата камата и истата се нарекува *пазарна цена* (market price).

Пример 5. Обврзница со номинална вредност од 1000$ и 6% облигациона каматна стапка е со валута 1.06.2010 година. Облигационата камата се исплаќа полугодишно на 1.06 и 1.12, а посакуваната каматна стапка е 4%. Која е цената на обврзницата на 1.10.2008 година?

Решение. За да ја определиме куповната цена на 1.10.2008 година прво ќе ја определиме цената на обврзниците на датите на исплаќање на облигационата камата пред и после 1.10.2008 година, т.е. на 1.06 и на 1.12.2008 година. Ако ја искористиме формулата (2) добиваме:

- за 1.06.2008 година имаме $F = C = 1000\$$, $i = 3\%$, $p = 2\%$ и $n = 4$, па затоа

$$V = 1000 \cdot 3\frac{1{,}02^4 - 1}{2 \cdot 1{,}02^4} + \frac{1000}{1{,}02^4} = 1038{,}077287\$,$$

- за 1.12.2008 година имаме $F = C = 1000\$$, $i = 3\%$, $p = 2\%$ и $n = 3$, па затоа

$$V = 1000 \cdot 3\frac{1{,}02^3 - 1}{2 \cdot 1{,}02^3} + \frac{1000}{1{,}02^3} = 1028{,}838833\$$$

Според тоа, во разгледуваниот временски интервал од шест месеци вредноста на обврзницата се намалува за $1038{,}077287 - 1028{,}838833 = 9{,}238454\$$. Периодот од 1.06 до 1.10.2008 година е $\frac{2}{3}$ од периодот од 1.06 до 1.12.2008 година, па затоа за да ја добиеме цената на обврзницата на 1.10.2008 година ќе ја намалиме цената на обврзницата од 1.06.2008 година за $\frac{2}{3}$ од разликата на цената во пеиродот од 1.06 до 1.12.2008 година. Според тоа, цената на обврзницата на 1.10.2008 година ќе изнесува

$$1038{,}077287 - \frac{2}{3} \cdot 9{,}238454 = 1031{,}918318\$.$$

Понатаму, во периодот од 1.06 до 1.12.2008 година облигационата камата изнесува $\frac{1000 \cdot 3}{100} = 30\$$ и како до 1.10.2008 година $\frac{2}{3}$ од истата му припаѓа на продавачот на обврзницата (зошто?), за да ја добиеме реалната цена на обврзницата овој дел ќе го додадеме на претходно добиената цена. Според тоа, на 1.10.2003 година цената на обврзницата е:

$$1031,918318 + \frac{2}{3} \cdot 30 = 1051,918318\$ \,.\ \blacksquare$$

На крајот од овој дел да забележиме, дека во случај кога плаќањето на облигационата камата не е сигурно и зависи од тоа дали емитерот на обврзниците располага со доволно средства, тогаш имаме таканаречено income bonds тргување, при кое пазарната (котираната) цена е целата сума која купувачот ја плаќа. Во претходниот пример таа цена изнесува 1031,918318$.

1.4.ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ТЕКОВНА ДОХОДОВНОСТ И ДОХОДОВНОСТ ДО ВАЛУТАТА НА ОБВРЗНИЦИТЕ

Во досегашните разгледувања ја определивме оценетата вредност на обврзницата во случај кога е зададена посакуваната каматна стапка. Но, во практиката многу често се бара да се најде доходовноста од вложувањето во обврзницата, во случај кога е познат курсот (котираната цена) на обврзницата. За таа цел ќе ги разгледаме следниве три видови показатели за доходовноста од вложувањето во обврзници:

- номинална доходовност,
- тековна доходовност и
- доходовност до валутата на обрзницата.

Облигационата каматна стапка всушност ја дава *номиналната доходовност* од вложувањето во обврзниците. Јасно, таа е доволен и адекватен показател за доходовноста од вложувањето во обврзниците само ако инвеститорот ги купува обврзниците по номиналната вредност, редовно и навремено ги добива облигационите камати и ја продава обврзницата по нејзината номинална вредност. Меѓутоа, во практиката овие услови се многу ретко исполнети, па затоа номиналната доходовност не е достаточно точен и репрезентативен показател за доходовноста од вложувањето во обврзниците.

Тековната доходовност (current yield) претставува количник меѓу годишниот доход (облигационата камата) и тековниот пазарен курс на обврзницата. Според тоа, тековната доходовност не ги зема предвид периодот до валутата на обврзницата и цената по која инвеститорот може да продаде обврзницата. Меѓутоа, и покрај овие пропусти тековната доходовност на различните видови обврзници редовно се пресметува и се публикува во специјализирани финансиски извештаи.

Пример 6. Негарантираните обврзници на компанијата УСПЕХ со номинална вредност од 1000 денари и 11% облигациона камата на Македонската берза се котира по 1225 денари. Најдете ги номиналната и тековната доходовност.

Решение. Облигационата каматна стапка изнесува 11%, што значи дека номиналната доходовност е 11%. Понатаму, годишниот доход т.е. облигационата камата изнесува $\frac{1000\cdot 11}{100}=110$ денари, а тековниот пазарен курс на обврзницата е 1125 денари, па затоа тековната доходовност изнесува

$$\frac{110}{1125}=0,09777778 \text{ или } 9,777778\%. \blacksquare$$

Доходовност до валута (yield to maturity) е каматната стапка која инвеститорот ќе ја добие, ако ја купи обврзницата по нејзиниот пазарен курс и ја задржи до нејзината дата на валута. Според тоа, доходовноста до валута е еднаква на каматната стапка која го изедначува пазарниот курс на обврзницата со збирот на сите остварени приходи од купувањето на обврзницата до датата на нејзината валута. Ако ги прифатиме ознаките:

- F , номинална вредност на обврзницата,
- K , пазарен курс на обврзницата во моментот на купувањето,
- i , облигациона каматна стапка,
- y , доходовност до валута и
- n , број на периоди до датата на валута на обврзницата,

тогаш, аналогно како при пресметувањето на оценетата вредност на обврзницата, добиваме

$$K=\frac{\frac{Fi}{100}}{1+\frac{y}{100}}+\frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{y}{100})^2}+\frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{y}{100})^3}+\ldots+\frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{y}{100})^n}+\frac{F}{(1+\frac{y}{100})^n},$$

т.е.

$$K=Fi\frac{(1+\frac{y}{100})^n-1}{y(1+\frac{y}{100})^n}+\frac{F}{(1+\frac{y}{100})^n}. \qquad (1)$$

Решавајќи ја последната равенка по непозната y ја наоѓаме доходовноста до валута. Да забележиме дека равенката (1) може да се реши, на пример, со методот на делење на сегментот разгледан во пример 4 од точка II 2.1 применет на функцијата

$$f(y)=K-Fi\frac{(1+\frac{y}{100})^n-1}{y(1+\frac{y}{100})^n}-\frac{F}{(1+\frac{y}{100})^n}.$$

Пример 7. Обврзница со номинална вредност од 10000 денари и облигациона каматна стапка 8%, која се исплаќа еднаш годишно, на берзата ко-

тира 10600 денари и до датата на нејзината валута има три години. Најдете ја доходовноста до валута на оваа обврзница.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$F = 10000 \text{ денари},\ K = 10600 \text{ денари},\ i = 8\% \text{ и } n = 3.$$

Со замена во формулата (1) ја добиваме равенката

$$10600 = 10000 \cdot 8\frac{(1+\frac{y}{100})^3 - 1}{y(1+\frac{y}{100})^3} + \frac{10000}{(1+\frac{y}{100})^3},$$

од која треба да ја определиме доходовноста до валута. Сега, бидејќи при купувањето на обврзницата е платена премија од 600 денари, од формулата (4) во точка 1.2 заклучуваме дека доходовноста до валута е помала од облигационата каматна стапка, т.е. $y < 8$. Понатаму, користејќи го методот на делење на сегментот за доходовноста до валута наоѓаме $y = 5,7683889\%$. ■

Парцијален случај на доходовноста до валутата е таканаречената *доходовност за периодот на сопственост* (holding period yield), која се користи кога обврзницата се продава пред датата на нејзината валута. Ако ги прифатиме ознаките:

- F, номинална вредност на обврзницата,
- K, пазарен курс на обврзницата во моментот на купувањето,
- S, продажна цена на обврзницата,
- i, облигациона каматна стапка,
- h, доходовност за период на сопственост и
- m, број на периоди до продажба на обврзницата,

тогаш аналогно на претходните разгледувања добиваме:

$$K = \frac{\frac{Fi}{100}}{1+\frac{h}{100}} + \frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{h}{100})^2} + \frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{h}{100})^3} + \ldots + \frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{h}{100})^m} + \frac{S}{(1+\frac{h}{100})^m},$$

т.е.

$$K = Fi\frac{(1+\frac{h}{100})^m - 1}{h(1+\frac{h}{100})^m} + \frac{S}{(1+\frac{h}{100})^m}. \qquad (2)$$

Решавајќи ја последната равенка по непозната h ја наоѓаме доходовноста за периодот на сопственост. Како и во претходниот случај, равенката (2) може да се реши, на пример, со методот на делење на сегментот применет на функцијата

$$f(h) = K - Fi\frac{(1+\frac{h}{100})^m - 1}{h(1+\frac{h}{100})^m} - \frac{S}{(1+\frac{h}{100})^m}.$$

Доходот на валута може да се пресмета и според таканаречениот *трговски метод* (bond salesman's method). Предноста на овој метод е во едно-

ставноста на пресметките, но недостаток на овој метод е тоа што добиените резултати се приближни. Ако ги прифатиме ознаките:

- F , номинална вредност на обврзницата,
- K , пазарен курс на обврзницата во моментот на купувањето,
- S , продажна цена на обврзницата,
- i , облигациона каматна стапка,
- y , дохододовност до валута и
- n, број на периоди до валутата или продажбата на обврзницата,

тогаш доходовноста до валута се пресметува според формулата

$$y = 100\frac{\frac{Fi}{100}+\frac{S-K}{n}}{\frac{S+K}{2}}. \tag{3}$$

Пример 8. Користејќи го трговскиот метод ќе ја пресметаме доходовноста до валутата на обврзницата од пример 7. Имаме

$$S = F = 10000 \text{ денари},\ K = 10600 \text{ денари},\ i = 8\% \text{ и } n = 3.$$

и ако замениме во формулата (3) за бараната доходовност добиваме

$$y = 100 \cdot \frac{\frac{10000 \cdot 8}{100}+\frac{10000-10600}{3}}{\frac{10000+10600}{2}} = 100 \cdot \frac{800-200}{10300} = 5{,}825243\%\ . \blacksquare$$

Коментар. Споредувајќи ги резултатите за доходовноста до валута добиени во примерите 7 и 8, забележуваме дека меѓу нив нема суштествена разлика. Овој факт, како и едноставноста на пресметките според трговскиот метод, му дава предност на овој метод, па затоа истиот е најчесто користен во практиката.

1.5.ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПОКАЗАТЕЛОТ "ДУРАЦИЈА" НА ОБВРЗНИЦИТЕ

Во точка 1.2 рековме дека меѓу курсот (цената) на обврзниците и посакуваната каматна стапка постои обратнопропорционална врска. Понатаму, може да се докаже, дека една иста промена на каматната стапка предизвикува различни промени во цените на обврзниците со различни дати на валута. Затоа е неопходно да се најде показател за чувствителноста на цената на обврзниците во однос на промената на каматната стапка. Во практиката овој показател е *коефициентот на еластичност*, кој се пресметува според следнава формула:

$$Ke = \frac{\frac{V_1 - V_0}{V_0}}{\frac{p_1 - p_0}{p_0}}, \tag{1}$$

каде

- V_0 , е цената на обврзницата во почетниот момент од времето,

- V_1 , е цената на обврзноцата во определен краен момент од времето,

- p_0 , е нивото на пазарната каматна стапка во почетниот момент од времето,

- p_1 , е нивото на пазарната каматна стапка во определениот краен момент од времето.

Што се однесува до ризикот од вложување, долгорочните обврзници се со поголем ризик од краткорочните. Притоа, со зголемување на рокот се зголемува и коефициентот на еластичност, но врската не е линеарно пропорционална, т.е. еластичноста на цената за шестгодишна обврзница не е двапати поголема од соодветната еластичност за тригодишна обврзница. На врската цена-рок на обврзница влијае и облигационата каматна стапка, која исто така влијае и на еластичноста на ценовните промени во однос на промените на пазарната каматна стапка.

Во основа обврзниците со пониска облигациона каматна стапка се почуствителни на промената на каматното ниво од обврзниците со повисока облигациона каматна стапка. Имено, курсовите на обврзниците со пониска облигациона каматна стапка растат побрзо од курсовите на обврзниците со повисока облигациона каматна стапка, кога пазарната каматна стапка се намалува и обратно, кога пазарнати каматни нивоа се зголемуваат, курсовите на обврзниците со ниска облигациона каматна стапка се намалуваат побрзо, од курсовите на обврзниците со повисока облигациона каматна стапка. Овој резултат, кој во литературата е познат како *облигационен ефект*, се јавува заради различните времиња на диспозиција на плаќањата (паричните текови) на двата разгледувани вида обврзници. Имено, кај обврзниците со помала облигациона каматна стапка основниот дел од паричните текови инвеститорот ги добива на крајот од временскиот период (валутата), за разлика од обврзниците со висока облигациона каматна стапка, каде плаќањата се распределуваат порамномерно во времето. Значи, инвестирањето во обврзници со пониска облигациона каматна стапка е со поголем ризик од флуктуацијата на курсот на обврзниците. Следствено, кај обврзниците со ниска облигациона каматна стапка, споредено со обврзниците со повисока облигациона каматна стапка, постои поголема можност за капитална добивка или загуба.

Досега разгледаните зависности квантитативно не може да се согледаат ниту само од времетраењето на обврзницата, ниту само од големините на облигационата и посакуваната каматна стапка. За оваа намена се користи таканаречената *дурација*, која се пресметува според следнава формула:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tV_t}{\sum_{t=1}^{n} V_t}, \qquad (2)$$

каде:

- F , номиналната вредност на обврзницата,
- n , бројот на годините до датата на валута на обврзницата,
- $t = 1, 2, ..., n$, годините во кои се добива приход од обвзницата,
- i , облигационата каматна стапка,
- y , доходовноста до валута и
- V_t , е приходот кој се добива од обврзницата во t – тата година и кој се пресметува според формулите

$$V_t = \frac{\frac{Fi}{100}}{(1+\frac{y}{100})^t}, t = 1, 2, ..., n-1 \text{ и } V_n = \frac{F(1+\frac{i}{100})}{(1+\frac{y}{100})^n}. \quad (3)$$

Да забележиме, дека аналогно како и кај терминската сметка дурацијата го покажува временскиот момент кога може истовремено да се исплатат сите приходи кои се остваруваат од обврзницата, при што да не бидат оштетени ниту инвеститорот ниту емитерот на обрзницата.

Пример 9. а) Валутата на обврзница со номинална вредност од 10000$ и облигациона каматна стапка 10% е после четири години. Облигационата камата се исплаќа еднаш годишно и доходовноста до валутата е 12%. Најдете ја дурацијата на оваа обврзница.

б) Колкава е дурацијата на оваа обврзница, ако нејзината валута е после три години?

Решение. а) Од условот на задачата имаме

$$n = 4, i = 10\%, y = 12\%, F = 10000\$.$$

Резултатите од пресметките според формулите (3) се дадени во следнава табела:

t	V_t	tV_t
1	892,857143	892,857143
2	797,193878	1594,387756
3	711,780248	2135,340744
4	6990,698862	27962,795448
Збир	9392,530131	32585,381091

Понатаму, со замена во формулата (2) за дурацијата на обврзницата добиваме

$$D = \frac{32585,381091}{9392,530131} = 3,4692868 \text{ години.}$$

б) Имаме:

$$n = 3, i = 10\%, y = 12\%, F = 10000\$ \text{ и}$$

t	V_t	tV_t
1	892,857143	892,857143
2	797,193878	1594,387756
3	7829,582728	23488,748184
Збир	9519,633749	25975,993083

Понатаму, со замена во формулата (2) за дурацијата на обврзницата добиваме

$$D = \frac{25975,993083}{9519,633749} = 2,7286757 \text{ години. } \blacksquare$$

Коментар. Дурацијата може да ја разгледаме како функција од облигационата каматна стапка, т.е. може да земеме $D = D(i)$. Тогаш, на интервалот $(0,+\infty)$ важи $D'(i) < 0$, (проверете!). Според тоа, функцијата $D = D(i)$ монотоно опаѓа на разгледуваниот интервал, што значи дека обврзниците со помала облигациона каматна стапка имаат поголема дурација.

Од формулата (2) следува, дека дурацијата е тежишна средина на годините во кои се добиваат приходи од обврзницата, при што "тежините" се приходите во соодветните години. Затоа, имајќи го предвид значењето на тежишната средина заклучуваме дека обврзниците кои имаат поголема дурација со поголем ризик од обврзниците со помала дурација. Понатаму, бидејќи обврзниците со помала облигациона каматна стапка имаат поголема дурација, заклучуваме дека обврзниците со помала облигациона каматна стапка се со поголем ризик за ценовни промени од обврзниците со повисока облигациона каматна стапка.

Ова својство на дурацијата можеме да го искористиме за наоѓање на очекуваните релативни промени во цената на обврзницата при промената на нивото на нејзината доходовност до валута. При претходно воведените ознаки *релативната промена на цената на обврзницата* P, изразена во проценти, ја пресметуваме според формулата:

$$P = -100D\frac{|y-i|}{100+y}. \tag{4}$$

Пример 10. а) Ако ја искористиме формулата (4), за обврзница со карактеристики од пример 9 а) добиваме, дека релативната промена на нејзината цена изнесува

$$P = -100 \cdot 3,4692868 \cdot \frac{|12-10|}{100+12} = -6,195155\%.$$

б) Аналогно, за обврзницата разгледана во примерот 9 б) добиваме, дека релативната промена на нејзината цена изнесува

$$P = -100 \cdot 2,7286757 \cdot \frac{|12-10|}{100+12} = -4,872635\%. \blacksquare$$

Природно, релативната промена на цената на обврзницата при промената на нивото на доходовноста е показател според кој инвеститорите донесуваат инвестициони решенија, кога се очекуваат промени на нивото на пазарната каматна стапка (нивото на доходовност). Меѓутоа, овој показател може да се искористи и за оценувањето на ризикот од вложувањето во зависност од датата на валута на обврзницата. Имено, како што веќе рековме долгорочните обврзници се со поголем ризик од краткорочните, што може да се заклучи и од анализата на релативната промена на цената на обврзницата. Имено, ако две обврзници имаат иста номинална вредност, иста облигациона каматна стапка, иста доходовност и различни дати на валути, тогаш обврзницата со поголем рок има поголема дурација, па од (4) следува дека таа има и поголема релативна промена на нејзината цена, што значи дека истата е со поголем ризик. Така, на пример, во пример 10 видовме дека обврзницата со рок од четири години има релативна промена од $-6{,}195155\%$, а обврзница со рок од три години има релативна промена од $-4{,}872635\%$.

ЗАДАЧИ

1. Определете ја вредноста на обврзница со номинална вредност од 15000 денари и годишна облигациона каматна стапка од 5%, при што облигационата камата се исплаќа семестрално. Облигацијата се купува две години пред нејзината валута, а посакуваната каматна стапка од инвеститорот е 7%.
2. Валутата на неконкурентните обврзници на компанијата R&F со номинална вредност од 400 $ и 6% годишна облигациона каматна стапка е 1.06.2014 година. Облигационата камата се плаќа двапати годишно и тоа на 1.06 и на 1.12. Која сума за оваа обврзница е подготвен да плати на 1.12.2007 година инвеститор за оваа обврзница, ако посакуваната годишна каматна стапка од страна на инвеститорот е 5%. Освен тоа познато е дека неконкурентните обврзници емитерот може да ги откупи после 1.06.2010 по цена од 425 $. Која цена во овој случај е подготвен да ја плати инвеститорот?
3. Валутата на неконкурентните обврзници на компанијата R&F со номинална вредност од 100 $ и 7% годишна облигациона каматна стапка е 1.06.2012 година. Облигационата камата се плаќа двапати годишно и тоа на 1.06 и на 1.12. Која сума за оваа обврзница е подготвен да плати на 1.12.2007 година инвеститор за оваа обврзница, ако посакуваната годишна каматна стапка од страна на инвеститорот е 6%. Составете амортизационен план на премијата.
4. Валутата на неконкурентните обврзници на компанијата R&F со номинална вредност од 600 $ и 5% годишна облигациона каматна стапка е 1.04.2010 година. Облигационата камата се плаќа двапати годишно и тоа на 1.04 и на 1.10. Која сума за оваа обврзница е подготвен да плати на 1.04.2007 година инвеститор за оваа обврзница, ако посакуваната годишна каматна стапка од страна на инвеститорот е 6%. Составете табела за акумулација на дисконтот.
5. Обврзница со номинална вредност од 400$ и 7% облигациона каматна стапка е со валута 1.04.2010 година. Облигационата камата се исплаќа полугодишно на 1.04

и 1.10, а посакуваната каматна стапка е 6%. Која е цената на обврзницата на 1.08.2009 година?

6. Негарантираните обврзници на компанијата PREMIUM со номинална вредност од 500 денари и 11% облигациона камата на Македонската берза се котираат по 625 денари. Најдете ги номиналната и тековната доходовност.

7. Обврзница со номинална вредност од 6000 денари и облигациона каматна стапка 7%, која се исплаќа еднаш годишно, на берзата котира 6300 денари и до датата на нејзината валута има четири години.
   а) Најдете ја доходовноста до валута на оваа обврзница, без користење на трговскиот метод.
   б) Најдете ја доходовноста до валута на оваа обврзница, користејќи го трговскиот метод.

8. а) Валутата на обврзница со номинална вредност од 2000$ и облигациона каматна стапка 8% е после шест години. Облигационата камата се исплаќа еднаш годишно и доходовноста до валутата е 11%. Најдете ја дурацијата на оваа обврзница.
   б) Колкава е дурацијата на оваа обврзница, ако нејзината валута е после пет години?
   в) За случаите под а) и б) пресметајте ги релативните промени на цените. Што можете да заклучите од добиените резултати?

2. АКЦИИ

Акција е писмена исправа за сопственост над средствата која донесува променлив приход. Имено, акцијата е сопственичка хартија од вредност која преставува доказ за сопственост на идеален дел од основната главнина на акционерското друштво. Имателот на акцијата стекнува право на учество во добивката, а зависно од видот и родот на акцијата може да има право и на учество во управувањето.

Појавувањето на акциите е сврзано со појавата на акционерските друштва. Во процесот на финансирање на акционерското друштво акцијата претставува инструмент за прибирање капитал од надворешни финансиери. Освен тоа, акцијата претставува инструмент за одделување на сопственоста од сопственикот, т.е. сопственоста од раководењето. Имено, раководењето на акционерското друштво е доверено на професионални менаџери.

Зборот акција има три основни значења и тоа:

- со зборот акција се означува дел од основната главнина кој е определен (изразен) во еднаков номинален паричен износ како и другите делови на кои е поделена основната главнина,
- со зборот акција се означува членството во акционерското друштво, односно го означува учеството на членот во акционерското друштво и

- со зборот акција се означува исправа со која акционерското друштво потврдува дека нејзиниот имател поседува определен влог во друштвото (удел во основната главница), како и дека има право на учество во добивката и право на учество во управувањето со друштвото.

Акција може да гласи во денари или странска валута со тоа што во Македонија се купува и продава само во денари. Акцијата секогаш се уплатува во номинална вредност. Вредноста на акцијата секогаш се определува во *номинална вредност* (par value) и тоа со одлука за издавање на акции или со правилата на акционерското друштво. Објавувањето на номиналната вредност (номиналниот капитал) е своевидна гаранција, која сопствениците на акционерското друштво ја даваат на неговите кредитори. Затоа скоро во сите законодавства за акционерските друштва и според нашето законодавство акциите не можат да се издаваат под нивната номинална вредност. Ваквата забрана е разбирлива, со оглед на тоа дека издавањето акции под номиналната вредност што ќе доведе до смалување на основната главница. Меѓутоа, акциите не ја гарантираат активата, која инвеститорот ќе ја добие ако акционерското друштво се ликвидира. Во оваа насока подобар показател за инвеститорот е таканаречената *сметководствена, билансна вредност на акцијата* (book value). Таа го покажува зголемувањето на сопствениот капитал на акционерското друштво, како последица од реинвестирање на дел од добивката. Истата се добива како количник меѓу сопствениот капитал на акционерското друштво и бројот на емитуваните акции. Од посебен интерес за инвеститорите е таканаречената *пазарна вредност* (*берзански курс*). Оваа вредност се формира на пазарот и воглавном е детерминирана од понудата и побарувачката. Меѓутоа, на пазарната вредност на акцијата влијаат и многу други фактори, како што се: конкуренцијата, ризикот од вложување, очекувањата на инвеститорите и слично.

Како хартија од вредност акциите материјализираат определени права на нивните сопственици. Меѓу нив е и правото на *дивидента*, т.е. на учество во распределбата на добивката на акционерското друштво. Јасно, големината на исплатената дивидента зависи од финансиските резултати на корпорацијата во периодот за кој се исплаќа дивидентата, од видот на акциите кои се поседуваат и од одлуката на управните органи (бордот на директори и управниот одбор). Во определени случаи дивидентата може да се исплати и со доделување на нови *дополнителни акции* (stock dividend). Притоа, распределбата на новите акции се врши врз база на акциите кои веќе се поседуваат. Имено, ако имате 200 акции и ако се исплаќа 7% дивидента, тогаш ќе добиете нови 14 акции.

Во определени случаи акционерското друштво може да ги *расцепкува акциите* (stock split), т.е. во определен сооднос да ги замени старите акции со нови акции кои имаат помала номинална вредност. Ако расцепкувањето на

акциите е во сооднос три за една, тоа значи дека, на пример, една акција со номинална вредност од 120 денари ќе се замени до три акции со номинална вредност од по 40 денари. Според тоа, во процесот на расцепкувањето на акциите големината на акционерскиот капитал и деловите кои ги поседуваат одделните акционери остануваат непроменети. Оттука произлегва дека целта на расцепкувањето на акциите е на пазарот да се понудат акции кои се со понизок номинална вредност, со што се овозможува да се прошири кругот на инвеститорите, кои на овој начин се стимулираат да купуваат *заокружени серии акции* (round lots) и со самото тоа да се намалат брокерските трошоци. Некои компании ја практикуваат и обратната постапка (reverse split), т.е. го редуцираат бројот на акциите, при што во определен сооднос постојните акции ги заменуваат со нови кои имаат поголема номинална вредност.

Издавачот на акциите е должен евиденцијата за издадените акции да ја води во Централниот депозитар за хартии од вредност, на начин и постапка пропишана од Комисијата.

Акцијата како исправа се состои од три дела, и тоа:

- прв дел од акцијата, кој се означува како "обвивка на акцијата" и таа мора да содржи некои основни елементи и изводи од одлуката за издавање на акции,
- втор дел од акцијата, кој се означува како "купонски табак" и кој ги содржи купоните за наплата на дивидендата,
- трет дел од акцијата и тоа е талон со кој сопственикот на акцијата го остварува правото да добива нов купонски табак за наплата на дивидендата.

Како дополнителна хартија кон акцијата може да се издава и талон. Купоните и талоните се само дополнителни хартии кон акцијата и тие ги инкорпорираат правата што се изведени од сопственоста на акцијата. Ваквиот нивен карактер не е доведен во прашање со тоа што, особено купоните може самостојно да се пренесуваат.

Акцијата како хартија од вредност има *негоцијабилен карактер*, а тоа значи да се купува и продава како секоја друга стока. Затоа со право може да се рече дека негоцијабилноста е критериум за акција. Таа престанува да биде акција кога ќе го изгуби карактерот на негоцијабилност. Така во случај ако во во статутот на акционерското друштво биде определено дека сопственоста на акцијата не може да се пренесува, односно акцијата не може да се оттуѓува, тогаш друштвото нема карактер на акционерско друштво. Меѓутоа, можно е да се пропише ограничување на преносот на акциите (со закон или со друг акт) и тоа ограничување може да трае само определено време. Во повеќе земји во прописите за акционерските друштва постојат одредби за ограничување на преносот на акциите. Така, на пример, во француското право, акциите во два случаја не можат да се стават во промет и тоа:

- акции на влогови во предмети не може да се стават во промет во време од 2 години од денот на основање на друштвото и
- депонираните акции од страна на управувачите на друштвото кои служат како гаранција на нивното управување

Природно е да се запрашаме, кому ќе му биде исплатена дивидентата ако меѓу две последователни исплати на дивидента е извршена купопродажба на акциите? Повеќето берзи овој проблем го решаваат со објавување на такананаречената *дата на дивидента* (ex dividend date), која обично е неколку дена пред датата на регистрирање на берзата. Притоа, правило е дека акционерот кој ги купил акциите пред таа дата ја добива тековната дивидента, а додека ако акциите се купени после оваа дата, тогаш акционерот нема право на дивидента. Што се однесува до дивидентата, да забележиме дека со нејзиното исплаќање се поврзани и определени колебања на курсот на акциите. Притоа, логично е непосредно после исплаќањето на дивидентата акциите да имаат пониска пазарна вредност.

На крајот од овој дел да споменеме дека тековното исплаќање на дивидента е само еден вид на добивање приход од сопственоста на акции. Именно, значителен приход од сопственоста на акциите може да се добие од такананаречената капитална добивка, т.е. како разлика меѓу куповната и продажната цена на акциите. Притоа, по правило, компаниите кои ја реинвестираат добивката исплаќаат мала дивидента, но создаваат претпоставки за голема капитална добивка во иднина. Овде уште да споменеме, дека сите добивки од акциите се очекувани (веројатносни). Затоа поседувањето на акции има елементи на несигурност (ризик) за инвеститорите, и вложувањето во акции е со поголем ризик од вложувањето во обврзници.

2.1.ВИДОВИ АКЦИИ

За поделбата на акциите по видови можат да се применат различни критериуми. Во нашите разгледувања ќе ја разгледаме поделбата на акциите според:

- сопственоста на акцијата,
- редоследот на издавање,
- содржината на правата,
- правото на глас и
- цената на стекнување.

Според *сопственоста на акцијата,* разликуваме два вида на акции, и тоа:

- акции кои гласат на име,
- акции кои гласат на доносител.

Според *содржината на правата во акцијата* разликуваме два вида акции, и тоа:

- *обична* (*редовна*) *акција* и
- *приоритетна* (*повластена, привилегирана*) *акција*.

Обичната **(***редовната***)** *акција* е најчест вид на акција, која може да гласи на име и на доносител. Тие се такви акции кои на сопствениците на акции им даваат право на учество во управувањето со друштвото и дел од добивката (дивиденда).

Приоритетната (*повластената*, *привилегираната*) акција, како што кажува и нејзиното име, е акција која на имателот му дава поголеми права во однос на обичната. Тие приоритетни права можат да бидат:

- право на првенстве на наплата на дивидендата,
- право на првенство на наплата на акцијата во случај на стечај,
- право на повеќе гласови во Собранието и
- други права (право на откуп и првенство при купување на акции на нови емисии и сл.).

Ваквиот вид на акции ги наметнува практиката, поточно, потребата за зголемување на капиталот на друштвата, кое зголемување се постигнува со давање предност на новите во однос на старите акционери. Издавањето на приоритетните акции се овозможува со статутите на акционерските друштва. Овде ќе забележиме, дека издавањето на приоритетните акции го нарушува принципот на еднаквост на акционерите. Според Законот за хартии од вредност се утврдени два посебни подвида на приоритетни акции, и тоа:

- *кумулативна приоритетна акција*, која на имателот му дава право на наплата на кумулираните ненаплатени дивиденди пред наплатувањето на какви било дивиденди на имателите на обични акции,
- *партиципативна приоритетна акција*, која покрај определена дивиденда, донесува и права на учество во распределбата на добивката.

Според *правото на гласови во Собранието на акционерското друштво* (без разлика дали се обични или приоритетни) акциите можат да бидат:

- *обични* акции со право на глас,
- *приоритетни* акции без право на глас и
- *приоритетни* акции со право на глас.

Законодавствата во земјите по ова прашање тргнуваат, по правило, од правото на еден глас за секоја акција како основно решение околу кое се изградени многу варијанти. Меѓутоа, тие варијанти, по правило, не го вклучуваат решението акцијата да не носи право на глас.

Во теоријата е позната е и повластицата *плурален вотум* (една акција - поголем број гласови). Овој вид акции денес во многу земји е забранет затоа

што се смета дека неправедно фаворизира определени акции - акционери (на пример, на домашен капитал). Наспроти ваквите акции постојат и акции со ограничено право на глас, па дури и без право на глас. Причината на постоењето на ваквите акции е интересот од некои акционери (особено од помалите) да го користат само правото на дивиденда, а не и правото на учество во работата на акционерското друштво во целина (освен кога се работи за некои поважни работи).

Акција на име е секоја акција на која е наведено името на нејзиниот сопственик. Акциите на име се пренесуваат со посебна јавна или заверена исправа (*цесија*) или со назнака на преносот на самата акционерска исправа (*индосмент*), но само тогаш кога со правилата таквиот пренос не е ограничен, на пример, со согласност на акционерското друштво (*винкулација*). По барање на преносителот на акцијата името на сопственикот на акцијата се запишува и во акционерската книга. Таа евиденција нема конститутивно значење за самиот пренос, но истата овозможува остварување на правата на членот во друштвото.

Акцијата на доносителот е онаа акција во која сопственикот не е наведен, а за сопственик се смета лицето кое ја поседува исправата за акцијата. Акциите кои гласат на доносител слободно се пренесуваат со обично продавање.

Според *редоследот на издавањето* разликуваме два вида акции, и тоа:

- акција од првата емисија или основачка акција и
- акција од наредните емиси.

Акциите од првата емисија се основачки акции и тие се делови на кои е поделена основната главница на акционерското друштво. Основачките акции, односно акциите од прва емисија по правило се продаваат на основачите. Но, ако основачите на акционерското друштво во целост не ги купат основачките акции, Собранието на акционерското друштво може да донесе одлука и тие акции да се пуштат во продажба на потенцијалните купувачи.

Ако во иднина се зголеми основниот капитал на друштвото, тогаш најчесто се издаваат нови акции, таканаречени *акции од втора емисија*. Ако заради зголемување на основниот капитал на друштвото повторно се издаваат нови акции, тогаш велиме дека имаме акции од *трета, четврта* итн. емисија.

Овде ќе споменеме, дека најчесто акциите од првата емисија даваат право на поголем број гласови од акциите од наредните емисии. Затоа, акциите од следните емисии можеме да ги разгледуваме како начин за зголемување на имотот на акционерското друштво, при што идните акционери се стекнуваат со сите права и обврски кои им припаѓаат како сопственици на акции.

Според *цената на стекнување*, акциите можат да бидат:

- бесплатни акции и
- акции со повластена цена.

Средствата за купување на акции можат да се уплатуваат одеднаш или на рати. Затоа при донесување одлука за издавање на акции, треба однапред да се определи и начинот на уплата на средствата за купување на акции. Ако средствата за купување на акции се врши на рати, купувачот на акцијата добива таканаречена *привремена акција*, а секоја наредна уплата се запишува и потврдува на самата привремена акција. Понатаму, кога имателот на привремената акција ќе го уплати вкупниот износ на својот удел привремената акција се повлекува и се издава постојана акција.

2.2.ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПРИХОДИ ОД АКЦИИ

При купувањето на акции, природно, очекуваме дека после извесен период истите ќе можеме да ги продадеме најмалку по истата цена по која сме ги купиле, а во периодот додека сме сопственици на акциите од истите да остваримe тековен приход, т.е. дивидента. Според тоа, основниот вид на приход од вложувањето во акции е исплаќањето на дивидента. Ако дивидентата ја разгледуваме како апсолутно исплатена сума пари, тогаш не можеме ништо да заклучиме за доходот од вложувањето во акциите. Затоа, во нашите разгледувања ќе се задржиме на количникот од очекуваната (исплатената) дивидента од една акција и нејзината тековна пазарна вредност (курс). Притоа, дивидентата се разгледува за период од една година, која може да биде реализираната (исплатената во минатата година) или очекуваната дивидента (која треба да се исплати во тековната година). Ако ги прифатиме ознаките:

- K , тековна пазарна вредност (курс) на една акција,
- d , реализирана (исплатена) годишна дивидента од една акција,
- d^*, очекувана годишна дивидента од една акција,
- r_d , реализирано ниво на приход од дивидентата и
- r_{d^*}, очекувано ниво на приход од дивидентата,

тогаш под *ниво на приход од дивидентата* го подразбираме процентуалното учество на дивидентата во тековната пазарната вредност (курсот) на акцијата, па затоа имаме:

$$r_d = \frac{100d}{K}, \tag{1}$$

$$r_{d^*} = \frac{100d^*}{K}. \tag{2}$$

Пример 11. Минатата година компанијата Elita исплатила дивидента од 200 денари по акција, а оваа година се очекува да исплати дивидента од 245 денари па акција. Пресметајте ги реализираното и очекуваното ниво на

приход од дивидента ако тековната пазарна вредност на една акција е 1800 денари.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$K = 1800,\ d = 200 \text{ и } d^* = 246 \text{ денари.}$$

Ако замениме во формулите (1) и (2), за реализираното и очекуваното ниво на приход од дивидентата добиваме:

$$r_d = \frac{100 \cdot 200}{1800} \approx 11{,}11\% \text{ и } r_{d^*} = \frac{100 \cdot 246}{1800} \approx 13{,}67\%,$$

соодветно. ■

Претходно разгледаниот начин на пресметување на реализираното ниво на приход од дивидентата не го зема предвид фактот, дека после исплаќањето на дивидентата курсот на акцијата најчесто паѓа за вредноста на исплатената дивидента по акција. Според тоа, ако според формулата (1) го пресметаме нивото на приход од дивидентата пред и после нејзиното исплаќање ќе добиеме две различни вредности, при што нивото пресметано после исплатата на дивидентата ќе биде повисоко од нивото пресметано пред исплатата на дивидентата. Недоразбирањата можеме да ги избегнеме, ако го пресметаме таканаречената *реално* (*чисто*) *ниво на приход од дивидентата*, за што ја користиме следнава формула:

$$r_d = \frac{100d}{K - \frac{dn}{360}}, \tag{3}$$

Каде n е бројот на деновите после последната исплата на дивидентата.

Пример 12. На 11.04.2006 година акционерското друштво Elita исплатило 20 денари дивидента по една акција. Точно една година покасно, на 11. 04.2007 година акционерското друштво ја исплатило истата дивидента. На 10. 04.2007 година курсот на акциите на акционерското друштво е 400 денари, а на 12.04.2007 година како резултат од исплатата на дивидентата цената на акциите паѓа на 380 денари за една акција. Ако ја искористиме формулата (1) тогаш за реализираните нивоа на приход на 10.04 и 12.04.2007 година добиваме:

$$r_{d_{10.04.2007}} = \frac{20 \cdot 100}{400} = 5\% \text{ и } r_{d_{12.04.2007}} = \frac{20 \cdot 100}{380} \approx 5{,}263158\%.$$

Меѓутоа, ако ја искористиме формулата (3), т.е. реалното ниво на приход од дивидентата, добиваме дека и на 10.04.2007 година нивото на приходот од дивидентата е 5,263158%. Навистина, последното исплаќање на дивидентата е на 11.04.2006 година и до 10.04.2007 година се поминати $n = 360$ денови, па ако замениме во формулата (3) добиваме:

$$r_{d_{10.04.2007}} = \frac{100d}{K - \frac{dn}{360}} = \frac{20 \cdot 100}{400 - \frac{20 \cdot 360}{360}} = \frac{20 \cdot 100}{380} \approx 5{,}263158\%. \text{ ■}$$

Дивидентата претставува само еден дел од добивката на компанијата. Количникот од дивидентата и вкупната добивка на компанијата го дава нивото на распределба на добивката на компанијата. Некои компании претпочитаат поголемиот дел од добивката да го распределат како дивидента, се со цел да го зголемат нивото на приход од дивидента, со што акциите стануваат поатрактивни за инвеститорите. Други компании поголемиот дел од добивката го реинвестираат, со што создаваат услови за зголемување на курсот на акциите. Имајќи го предвид претходно кажаното од посебен интерес е да се пресмета *добивката од една акција* (earnings per share), која е резултат од годишните финасиски резултати на компанијата. Притоа, ако ги прифатиме ознаките:

- K , тековна пазарна вредност (курс) на една акција,
- e , реализирана (исплатена) годишна добивка од една акција,
- e^*, очекувана годишна добивка од една акција,
- r_e , реализирано ниво на добивка и
- r_{e^*}, очекувано ниво на добивка,

тогаш под *ниво на добивка од акција* го подразбираме процентуалното учество на добивката во тековната пазарната вредност (курсот) на акцијата, па затоа имаме:

$$r_e = \frac{100e}{K}, \tag{4}$$

$$r_{e^*} = \frac{100e^*}{K}. \tag{5}$$

Пример 13. За тековната година очекуваната добивка на една акција на компанијата Elita изнесува 16,65 денари, а тековната пазарна цена на една акција е 150 денари. Ако замениме во формулта (5) за очекуваното ниво на добивка наоѓаме

$$r_{e^*} = \frac{100e^*}{K} = \frac{100 \cdot 16{,}65}{150} = 11{,}1\% . \blacksquare$$

На крајот од овој дел во врска со акциите ќе разгледаме уште еден показател, кој често се применува во инвестиционата анализа. Имено, станува збор за *нивото на добивка за периодот на сопственост на акциите.* Притоа, во општ случај добивката за периодот на сопственост на акцијата е збир од добиената дивидента за овој период и капиталната добивка (зголемувањето на цената) по акција. Ако ги прифатиме ознаките:

- P_{t_0} , куповната цена на акцијата (цената на почетокот на периодот),
- P_{t_1} , продажната цена на акцијата (цената на крајот на периодот),
- D_t , остварената дивидента во разгледуваниот период и
- r_t , нивото на добивка за периодот на сопственост,

тогаш под *ниво на добивка за периодот на сопственост* го подразбираме процентуалното учество на добивката за периодот на сопственост на акцијата

во куповната цена на акцијата, па затоа истото се пресметува според формулата:

$$r_t = 100\frac{D_t + (P_{t_1} - P_{t_0})}{P_{t_0}}. \qquad (6)$$

Да забележиме дека нивото на добивка за периодот на сопственост на акциите се разликува од претходно разгледаните показатели. Разликата е во тоа што:

- нивото на добивка за периодот на сопственост на акциите може да се пресметува за произволен временски период, а останатите показатели ги пресметувавме за период од една година, и
- при пресметување на овој показател, како основа за пресметките се користи реално инвестираната сума во купувањето на акциите, а не тековната цена (курсот) на акциите, што овој показател го прави пореален во однос на претходно разгледаните.

Пример 14. Акциите на компанијата Elite котирале на берзата во Франкфурт на почетокот на 2006 година по цена од 120EU, а на крајот од 2006 година котирале по цена од 126EU. Во 2006 година компанијата четири пати исплатила дивидента (секој квартал) од по 3EU по акција. Кое ниво на добивка остварил инвеститор, кој купил акции на почеток на 2006 година и ги продал акциите на крајот истата година?

Решение. Од условот на задачата имаме

$$P_{t_0} = 120EU\ ,\ P_{t_1} = 126EU \text{ и } D_t = 4 \cdot 3 = 12EU\ .$$

Заменуваме во формулата (6) и добиваме дека остварениото ниво на добивка од страна на инвеститорот е

$$r_t = 100\frac{D_t + (P_{t_1} - P_{t_0})}{P_{t_0}} = 100 \cdot \frac{12 + (126 - 120)}{120} = 15\%\ .\ \blacksquare$$

2.3.ОЦЕНКА НА АКЦИИТЕ

Современите теории за оценка на акциите се базираат на определување на таква цена на акциите која на сопствениците на акциите им овозможува остварување на добивка. Притоа, ако го искористиме методот на дисконтирање, тогаш сегашната вредност на акциите можеме да ја претставиме како збир од дисконтираните вредности на идните приходи од акциите. Според тоа, точна е формулата

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{(1+r)^i} + \frac{P_n}{(1+r)^n} \qquad (1)$$

каде

- n, бројот на годините на сопственост на акцијата од страна на инвеститорот (акционерот),

- $d_i, i = 1,2,...,n$, очекуваните дивиденти за соодветните години,

- P_n, продажната цена на акцијата на крајот од $n-$ от период и

- $r = \frac{p}{100}$ и p е посакуваното ниво на добивка од страна на инвеститорот, т.е. посакуваната каматна стапка која ја детерминираат алтернативните инвестициони проекти, и

- V, сегашната вредност (цена) на акциите.

Формулата (1) ја користиме во случај кога акциите ги поседуваме точно определен број години. Но, во случај ако сакаме да купиме акции од реномирани компании, на пример компаниите Allianz, Henkel, Volkswagen и слично, и сакаме истите да ги поседуваме додека компаниите постојат, тогаш нашата инвестиција не е со определен рок, т.е. $n \to \infty$. Од друга страна, во практиката продажната цена на акцијата P_n е ограничена, т.е. $|P_n| \leq C$, за $n = 1,2,3,...$ и ако замениме во (1), во овој случај за сегашната вредност на акциите ја добиваме формулата

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{(1+r)^i}. \tag{2}$$

Во определени случаи формулите (1) и (2) се модифицираат, со што се поедноставуваат пресметките. Ова посебно се однесува на привилегираните акции, кои се карактеризираат со тоа што дивидентата е константна и е однапред определена. При овие претпоставки сегашната вредност на акциите се пресметува според формулата:

$$V = \frac{d}{r}, \tag{3}$$

каде

- d, добиената годишна дивидента,

- $r = \frac{p}{100}$ и p е посакуваното ниво на добивка од страна на инвеститорот, т.е. посакуваната каматна стапка која ја детерминираат алтернативните инвестициони проекти, и

- V, сегашната вредност (цена) на акциите.

Пример 15. Компанијата Elite емитира привилегирани акции, за кои плаќа годишна дивидента од 50ЕУ по акција. Колкава е сегашната вредност на една таква акција ако ниво на добивка на алтернативниот инвестиционен проект изнесува 10%?

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$d = 50EU \text{ и } p = 10\%, \text{ т.е. } r = 0,1.$$

Ако замениме во формулата (3) за сегашната вредност на една таква акција добиваме:

$$V = \frac{d}{r} = \frac{50}{0{,}1} = 500EU \ . \blacksquare$$

Кај обичните акции често пати имаме нараснување на дивидентата во текот на времето. Притоа, ако ги прифатиме ознаките:

- d_0, почетна (базна) годишна дивидента,
- $g = \frac{q}{100}$ и q е процентуалното годишно нараснување на дивидентата,
- $r = \frac{p}{100}$ и p е посакуваното ниво на добивка од страна на инвеститорот, т.е. посакуваната каматна стапка која ја детерминираат алтернативните инвестициони проекти, и
- V, сегашната вредност (цена) на акциите,

тогаш во случај кога акциите ги поседуваме на неопределен рок точна е формулата

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_0(1+g)^i}{(1+r)^i} = d_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^i . \tag{4}$$

Ако земеме предвид дека претходното има смисла кога процентуалното годишно нараснување на дивидентата е помало од посакуваното ниво на добивка, што е еквивалентно на $g < r$, т.е. на $\frac{1+g}{1+r} < 1$, добиваме дека во овој случај геометрискиот ред на десната страна во (4) конвергира и притоа важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^i = \frac{1+g}{1+r} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \frac{1+g}{r-g} .$$

Конечно, ако замениме во (4) за сегашната вредност на акциите ја добиваме формулата

$$V = d_0 \frac{1+g}{r-g} , \tag{5}$$

која во литературата е позната како *формула на Гордон*.

Пример 16. Дивидентната политика на компанијата Elita се карактеризира со постојано годишно зголемување на дивидентата за 5%. Колкава ќе биде сегашната вредност на една акција ако во минатата година е исплатена дивидента од 10 денари, а посакувата каматна стапка од страна на инвеститорот е 12%?

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$d_0 = 10 \text{ денари}, \ r = \frac{p}{100} = 0{,}12 \ \text{ и } \ g = \frac{q}{100} = 0{,}05 .$$

Заменуваме во формулата (5) и добиваме дека сегашната вредност на една акција изнесува

$$V = d_0 \frac{1+g}{r-g} = 10 \cdot \frac{1+0{,}05}{0{,}12-0{,}05} = 150 \text{ денари.} \blacksquare$$

Коментар. Претходните разгледувања за оценка на акциите, т.е. за определување на сегашната вредност на акциите се базираат на дивидентите кои треба да се исплатат во иднина. Меѓутоа, во практиката имаме случаи кога акциите на компании кои не исплаќаат дивидента високо котираат на берзата. Логично е да се запрашаме кои се причините за ваквата појава? Во нашите разгледувања нема да се задржуваме на ова прашање, но ќе споменеме дека при оценувањето на акциите се користат далеку посложени модели со чија помош може да се анализираат причините за претходно споменатата и слични на неа појави. Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на еден поедноставен модел за оценка на вредноста на акциите и кој се користи од страна на берзанските аналитичари.

Претходно споменатиот модел за оценка на акциите се базира на користењето на таканаречениот *коефициент курс-добивка од една акција* (price-earnings ratio) кој се пресметува според формулата:

$$PER = \frac{K}{e} \tag{6}$$

каде

- K , тековна пазарна вредност (курс) на една акција и
- e , реализирана (исплатена) годишна добивка од една акција.

Јасно, коефициентот PER покажува со колку годишни добивки може да биде исплатена акцијата.

Пример 17. Акционерското друштво Elita минатата година исплатило добивка од 123000000 денари. Во обрт се наоѓаат 125000 акции на акционерското друштво. Тековниот пазарен курс на една акција е 8550 денари. Најдете го коефициентот курс-добивка од една акција.

Решение. Добивката исплатена по една акција изнесува

$$e = \frac{123000000}{125000} = 984 \text{ денари}$$

и ако замениме во формулата (6) за коефициентот курс добивка добиваме

$$PER = \frac{K}{e} = \frac{8550}{984} = 8{,}69 .$$

Според тоа, акцијата ќе биде исплатена со 8,69 годишни добивки. ■

Коментар. Конкретните вредности на коефициентот курс-добивка се различни за различни акции. Имено, тие варираат како за различните компании, така и за различните видови дејности (текстилна индустрија, банкарство, шпедиција итн.). Иако не може да се земе како стандард, сепак од финансис-

ките аналитичари е прифатено дека историската вредност на овој коефициент е 15, т.е. акцијата треба да биде исплатена за 15 години. Имајќи го ова во предвид и целта на инвестиционата политика инвеститорите одлучуваат за вложувањето во одделните акции. Имено, ако инвеститорот претпочита висок тековен приход, тогаш природно е неговото внимание да биде насочено кон купување акции кои имаа мали вредности на коефициентот курс-добивка, на пример од 8-15. Притоа, се препорачува купување на акции од компании кај кои коефициентот *PER* е помал од соодветниот коефициент на нивните конкуренти. Ако пак, инвеститорот претпочита вложување кое во иднина ќе му донесе поголема добивка, тогаш тој треба да купи акции од компании кои имаат голем развоен потенцијал. Обично за акциите на овие компании коефициентот *PER* е поголем од 20.

ЗАДАЧИ

9. Минатата година компанијата МММ исплатила дивидента од 180 денари по акција, а оваа година се очекува да исплати дивидента од 215 денари па акција. Пресметајте ги реализираното и очекуваното ниво на приход од дивидента ако тековната пазарна вредност на една акција е 1700 денари.
10. На 11.05.2005 година акционерското друштво МММ исплатило 30 денари дивидента по една акција. Точно една година покасно, на 11.05.2006 година акционерското друштво ја исплатило истата дивидента. На 10.05.2006 година курсот на акциите на акционерското друштво е 600 денари, а на 12.05.2006 година како резултат од исплатата на дивидентата цената на акциите паѓа на 570 денари за една акција. Пресметајте ги реализираните нивоа на приход на 10.05 и 12.05.2006 година.
11. За тековната година очекуваната добивка на една акција на компанијата МММ изнесува 19,65 денари, а тековната пазарна цена на една акција е 180 денари. Пресметајте го очекуваното ниво на добивка.
12. Акциите на компанијата МКМ котирале на берзата во Франкфурт на почетокот на 2006 година по цена од 150EU, а на крајот од 2006 година котирале по цена од 159EU. Во 2006 година компанијата четири пати исплатила дивидента (секој квартал) од по 5EU по акција. Кое ниво на добивка остварил инвеститор, кој купил акции на почеток на 2006 година и ги продал акциите на крајот истата година?
13. Компанијата МКМ емитира привилегирани акции, за кои плаќа годишна дивидента од 60ЕУ по акција. Колкава е сегашната вредност на една таква акција ако ниво на добивка на алтернативниот инвестиционен проект изнесува 8%?
14. Дивидентната политика на компанијата МКМ се карактеризира со постојано годишно зголемување на дивидентата за 4%. Колкава ќе биде сегашната вредност на една акција ако во минатата година е исплатена дивидента од 12 денари, а посакувата каматна стапка од страна на инвеститорот е 10%?
15. Акционерското друштво МММ минатата година исплатило добивка од 15000000 денари. Во обрт се наоѓаат 14500 акции на акционерското друштво. Тековниот пазарен курс на една акција е 9250 денари. Најдете го коефициентот курс-добивка од една акција.

ДОДАТОК
АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Дефиниција 1. Низата реални броеви со својство, почнувајќи од нејзиниот втор член, разликата меѓу секој член и претходниот член да е константна ја нарекуваме *аритметичка прогресија* или *аритметичка низа*.

Значи, $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија ако и само ако

$$a_{k+1} - a_k = d \text{ , за } k \geq 1 .$$

односно

$$a_{k+1} = a_k + d \text{ , за } k \geq 1 . \tag{1}$$

Притоа, a_1 го нарекуваме *почетен член* на прогресијата, а d *разлика* на аритметичката прогресијата.

Пример 1. а) Низата $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ е аритметичка прогресија со почетен член $a_1 = 1$ и разлика $d = 4-1 = 7-3 = 10-7 = 13-10 = 3$.

б) Првите пет ченови на аритметичката прогресија со почетен член $a_1 = \frac{1}{2}$ и разлика $d = -\frac{1}{2}$ се

$$a_1 = \tfrac{1}{2},\ a_2 = a_1 + d = \tfrac{1}{2} + (-\tfrac{1}{2}) = 0,\ a_3 = a_2 + d = 0 + (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2},$$

$$a_4 = a_3 + d = -\tfrac{1}{2} + (-\tfrac{1}{2}) = -1 \text{ и } a_5 = a_4 + d = -1 + (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{2} . \blacksquare$$

Лема 1. Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија со разлика d .

а) Ако $d > 0$, тогаш прогресијата строго монотоно расте.
б) Ако $d < 0$, тогаш прогресијата строго монотоно опаѓа.
в) За секој $k \geq 2$ точна е формулата

$$a_k = \tfrac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1}) . \tag{2}$$

Доказ. а) Нека $d > 0$. Тогаш за секој $k \geq 1$ важи $a_k + d > a_k + 0$, од што според (1) добиваме $a_{k+1} > a_k$, т.е. прогресијата строго монотоно расте.

б) Постапи аналогно како во доказот под а).

в) Од равенството (1) следува дека за секој $k \geq 2$ се точни равенствата $a_{k-1} = a_k - d$ и $a_{k+1} = a_k + d$. Последните равенства ги собираме и го добиваме равенството $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, кое е еквивалентно на равенството (2). $\blacksquare$

Ако го знаеме почетниот член и разликата на аритметичката прогресија, тогаш користејќи ја формулата (1) можеме да го пресметаме секој член на прогресијата. Меѓутоа, овие пресметувања можат да бидат долги и напорни, ако на пример треба да го пресметаме 555-от член на прогресијата зададена, на пример со $a_1 = \frac{2}{3}$ и $d = \frac{7}{19}$. Во следнава теорема ќе ја докажеме формулата за наоѓање како на општиот член a_k на аритметичка прогресија, така и на збирот S_k на првите k нејзини членови.

Теорема 1. Нека $\{a_n\}$ е аритметичка прогресија со разлика d. Тогаш

$$a_k = a_1 + (k-1)d, \tag{3}$$

$$S_k = \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d]. \tag{4}$$

Доказ. Прво ќе ја докажеме формулата (3). За $k = 1$ имаме

$$a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (1-1)d,$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k = i$ важи

$$a_i = a_1 + (i-1)d.$$

Тогаш, за $k = i+1$ добиваме

$$a_{i+1} = a_i + d = [a_1 + (i-1)d] + d = a_1 + (i+1-1)d,$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (3) важи за секој природен број k.

Да ја докажеме формулата (4). За $k = 1$ имаме

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}[2a_1 + (1-1)d],$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k = i$ важи

$$S_i = \frac{i}{2}[2a_1 + (i-1)d].$$

Тогаш, за $k = i+1$ добиваме

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i + a_{i+1} = \frac{i}{2}[2a_1 + (i-1)d] + [a_1 + id] \\ &= (i+1)a_1 + id[\frac{i-1}{2} + 1] = (i+1)a_1 + \frac{i(i+1)}{2}d \\ &= \frac{i+1}{2}[2a_1 + id] = \frac{i+1}{2}[2a_1 + (i+1-1)d], \end{aligned}$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (4) важи за секој природен број k. ■

Забелешка 1. Ако ја искористиме формулата (3), тогаш од формулата (4) ја добиваме следнава формула за пресметување на збирот на првите k членови на аритметичката прогресија

$$S_k = \frac{k}{2}[2a_1 + (k-1)d] = \frac{k}{2}[a_1 + a_1 + (k-1)d] = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)\,. \qquad (5)$$

Пример 2. Пресметај го збирот на првите n членови на аритметичката прогресија $a, 2a-b, 3a-2b, 4a-3b, \ldots$.

Решение. Од условот на задачата, за разликата d на прогресијата наоѓаме $d = a_2 - a_1 = 2a - b - a = a - b$. Понатаму, од формулата (4) за збирот на првите n членови на оваа прогресија наоѓаме

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)(a-b)] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)a] - \frac{n(n-1)}{2}b = \frac{n(n+1)}{2}a - \frac{n(n-1)}{2}b\,. \blacksquare$$

Пример 3. Најди ја аритметичната прогресија за која се знае дека $a_7 = 21$ и $S_7 = 105$.

Решение. Ако ја искористиме (5), од условот на задачата добиваме

$$105 = \frac{7}{2}(a_1 + 21)$$

од каде наоѓаме $a_1 = 9$. Сега, со замена во (3) добиваме

$$21 = 30 + (7-1)d\,,$$

т.е. $d = -\frac{1}{2}$. Според тоа, прогресијата е зададена со почетен член $a_1 = 9$ и разлика $d = -\frac{1}{2}$. $\blacksquare$

Пример 4. Најди ја аритметичката прогресија ако $S_3 = 30$ и $S_5 = 75$.

Решение. Од условот на задачата и од формулата (4) го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 30 = \frac{3}{2}[2a_1 + 2d] \\ 75 = \frac{5}{2}[2a_1 + 4d] \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 10 = a_1 + d \\ 15 = a_1 + 2d. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја извадиме првата добиваме $d = 5$, па затоа

$$a_1 = 10 - 5 = 5\,. \blacksquare$$

Пример 5. Колку членови на аритметичката прогресија зададена со $a_1 = 41$ и $d = 2$ се собрани за да се добие збир $S_k = 4784$.

Решение. Од условот на задачата, ако замениме во (4) ја добиваме равенката

$$4784 = \frac{k}{2}[2 \cdot 41 + (k-1)2]$$

која е еквивалентна на равенката

$$k^2 + 40k - 4784 = 0 .$$

Решенијата на последната квадратна равенка се $k_1 = -92$ и $k_2 = 52$ и како k е природен број, добиваме $k = 52$, што значи дека се собрани 52 члена од дадената прогресија. ■

ЗАДАЧИ

1. Пресметај го збирот на првите 50 членови на аритметичката прогресија ако
   а) $d = 2$, $a_8 = 17$, б) $5a_1 + 10a_5 = 0$, $S_4 = 14$,
   в) $S_2 - S_4 + a_2 = 1$, $S_3 + a_3 = 17$, г) $a_3 + 10S_2 - 8a_4 = 14$, $a_1 + 2a_2 - a_3 = 4$.
2. Збирот на првите три члена на аритметичката прогресија е 36, а збирот на низните квадрати е 482. Најди ја прогресијата!
3. Најди ја аритметичката прогресија ако $a_1 = 2$ и $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m(m+1)}{n(n+1)}$.
4. За аритметичката прогресија е дадено $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ и $a_1 + a_6 = 10$. Најди ги почетниот член и разликата на прогресијата.
5. Во месец јануари се произведени 1000 тони, а во месеците февруари и март по 1040 и 1080 тони од еден производ, соодветно. Ако динамиката на пораст на производството се запази во иднина, да се пресмета:
   а) колку е произведено во месец декември,
   б) колку е произведено во текот на годината,
   в) за колку месеци ќе се произведат 13200 тони од овој производ?
6. Во последниот месец се произведени 3300 *kg*, а во претпоследниот 3350 *kg* од некој производ. Ако вкупното производство во разгледуваниот период изнесува 112500 *kg*, да се пресмета:
   а) за колку месеци е остварено производството од 112500 *kg*,
   б) колку е произведено првиот месец?
7. Производството на домати од една оранжерија од почетокот на бербата секоја следна недела се зголемува за 50 *kg*. Да се пресмета:
   а) за колку недели е остварено производство од 209050 кг, ако во последната недела од бербата се набрани 4650 кг,
   б) колкаво е производството во првата недела.

2. ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Дефиниција 2. Низата реални броеви со својство, почнувајќи од нејзиниот втор член, количникот меѓу секој член и претходниот член да е константен ја нарекуваме *геометриска прогресија* или *геометриска низа*.

Значи, $\{a_n\}$ е геометриска прогресија ако и само ако

$$a_{k+1} : a_k = q \text{, за } k \geq 1.$$

односно

$$a_{k+1} = a_k q \text{, за } k \geq 1. \tag{1}$$

Притоа, a_1 го нарекуваме *почетен член* на прогресијата, а q *количник* на геометриската прогресијата.

Пример 6. а) Низата $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$ е геометриска прогресија со почетен член $a_1 = 1$ и количник $q = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$.

б) Првите пет членови на геометриската прогресија со почетен член $a_1 = \frac{1}{2}$ и количник $q = -\frac{1}{2}$ се

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = a_1 q = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^2},\ a_3 = a_2 q = (-\frac{1}{2^2})(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^3},$$

$$a_4 = a_3 q = \frac{1}{2^3}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^4} \text{ и } a_5 = a_4 q = (-\frac{1}{2^4})(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^5}. \blacksquare$$

Лема 2. Ако $\{a_n\}$ е геометриска прогресија, тогаш за секој $k \geq 2$ точна е формулата

$$a_{k+1} a_{k-1} = a_k^2. \tag{2}$$

Доказ. Од (1) следува $a_{k+1} = a_k q$ и $a_k = a_{k-1} q$, т.е. $a_{k+1} = a_k q$ и $a_{k-1} = \frac{a_k}{q}$. Ако ги помножиме последните две равенства го добиваме равенството $a_{k+1} a_{k-1} = a_k^2$. $\blacksquare$

Забелешка 2. Ако $a_1 > 0$ и $q > 0$, тогаш равенството (2) е еквивалентно на равенството $\sqrt{a_{k+1} a_{k-1}} = a_k$, што значи дека во овој случај средниот член од три последователни членови на геометриската прогресија е геометриска средина на останатите два. Да забележиме дека ова не важи за секоја геометриска прогресија. Така, за прогресијата од пример 9 б) имаме

$$a_4 = -\frac{1}{2^4} \neq \frac{1}{2^4} = \sqrt{\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^5}} = \sqrt{a_3 a_5}.$$

Понатаму, дека ако $a_1 > 0$ и $q > 1$, геометриската прогресија строго монотоно расте, а за $a_1 > 0$ и $0 < q < 1$ таа строго монотоно опаѓа. Понатаму, ако $a_1 < 0$ и $q > 1$, тогаш прогресијата строго монотоно опаѓа, а за $a_1 < 0$ и $0 < q < 1$ таа строго монотоно расте. Понатаму, ако $q < 0$, тогаш без разлика на знакот на a_1 членовите на прогресијата наизменично ги менуваат знаците.

Теорема 2. Нека $\{a_n\}$ е геометриска прогресија со количник q. Тогаш

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \tag{3}$$

$$S_k = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}. \tag{4}$$

Доказ. Прво ќе ја докажеме формулата (3). За $k=1$ имаме

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1 q^0 = a_1 q^{1-1},$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k=i$ важи

$$a_i = a_1 q^{i-1}.$$

Тогаш, за $k=i+1$ добиваме

$$a_{i+1} = a_i q = a_1 q^{i-1} q = a_1 q^{i+1-1},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека формулата (3) важи за секој природен број k.

Да ја докажеме формулата (4). За $k=1$ имаме

$$S_1 = a_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q}$$

т.е. формулата (3) е точна. Нека претпоставиме дека за $k=i$ важи

$$S_i = a_1 \frac{1-q^i}{1-q}.$$

Тогаш, за $k=i+1$ добиваме

$$S_{i+1} = S_i + a_{i+1} = a_1 \frac{1-q^i}{1-q} + a_1 q^i = a_1 \left(\frac{1-q^i}{1-q} + q^i\right) = a_1 \frac{1-q^i+q^i-q^{i+1}}{1-q} = a_1 \frac{1-q^{i+1}}{1-q}$$

па до принципот на математичка индукција следува дека формулата (4) важи за секој природен број k. ■

Пример 7. Најди го количникот на геометриската прогресија, ако $a_1 = 3$ и $a_5 = 12288$.

Решение. Ако ја искористиме формулата (3) добиваме $12288 = 3q^4$, од што следува $q^4 = 4096$, па затоа $q = \sqrt[4]{4096} = 8$. ■

Пример 8. Првиот член на геометриската низа е еднаков на 1, а збирот на третиот и петтиот член е еднаков на 90. Најди ја низата.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$90 = a_3 + a_5 = a_1 q^2 + a_1 q^4 = q^2 + q^4.$$

Во последната равенка воведуваме смена $q^2 = t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2 + t - 90 = 0$ чии решенија се $t_1 = -10$ и $t_2 = 9$. Понатаму, равенката $q^2 = -10$ нема решенија во множеството реални броеви, а од равенката $q^2 = 9$ добиваме $q = \pm 3$. Според тоа, постојат две прогресии кои ги задоволуваат условите на задачата и тоа:

i) $a_1 = 1, q = -3$ и *ii*) $a_1 = 1, q = 3$. ■

Пример 9. Најди ја геометриската низа за која важи

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 15 \\ a_2 + a_4 = 30. \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен на системот равенки

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = 15 \\ a_1 q + a_1 q^3 = 30 \end{cases}$$

и ако ги поделиме равенките добиваме $\frac{a_1 + a_1 q^2}{a_1 q + a_1 q^3} = \frac{1}{2}$ т.е. $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, па затоа $q = 2$. Понатаму, со замена во првата равенка наоѓаме $a_1 + 4a_1 = 15$, т.е. $a_1 = 3$. ■

Пример 10. Бројот 9750 подели го на четири собирци кои формираат геометрсика прогресија и така што односот на разликата на првиот и четвртиот член и разликата на вториот и третиот член е еднаков на $19 : 6$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\frac{a_1 - a_4}{a_2 - a_3} = \frac{19}{6},$$

па затоа

$$\frac{a_1 - a_1 q^3}{a_1 q - a_1 q^2} = \frac{19}{6},$$

од што добиваме

$$\frac{1 - q^3}{q - q^2} = \frac{19}{6},$$

т.е.

$$\frac{(1-q)(1+q+q^2)}{q(1-q)} = \frac{19}{6}.$$

Од последната равенка ја добиваме равенката

$$6q^2 - 13q + 6 = 0$$

чии решенија се $q_1 = \frac{3}{2}$ и $q_2 = \frac{2}{3}$.

Понатаму,

$$9750 = S_4 = a_1 \frac{1-q^4}{1-q},$$

од каде за $q_1 = \frac{3}{2}$ наоѓаме

$$a_1 = 1200,\ a_2 = 1800,\ a_3 = 2700 \text{ и } a_4 = 4050,$$

а за $q_2 = \frac{2}{3}$ наоѓаме

$$a_1 = 4050,\ a_2 = 2700,\ a_3 = 1800 \text{ и } a_4 = 1200$$

што значи дека постои единствена поделба која ги задоволува условите на задачата. ■

ЗАДАЧИ

8. Првиот член на геометриската прогресија е еднаков на 5, а количникот е еднаков на 3. Колку членови треба да се соберат за да се добие збир 16400?

9. Најди ја геометриската прогресија, ако
$$a_2 + a_5 - a_4 = 10 \text{ и } a_3 + a_6 - a_5 = 20.$$

10. Во растечка геометриска прогресија збирот на првиот и седмиот член е еднаков на 65, а производот на третиот и петтиот член е еднаков на 64. Најди ја низата.

11. Најди броеви a и b кои се поголеми од 47, а помали 1269 така што броевите 47, a, b и 1269 да формираат геометриска прогресија.

12. Три броеви чиј збир е еднаков на 26 формираат геометриска прогресија. Ако на броевите последователно им се додадат броевите 1, 6 и 3 се добиваат броеви кои формираат аритметичка прогресија. Најди ги овие броеви.

13. Производот на првите три члена на една геометриска прогресија изнесува 1331000, а нивниот збир е 331. Најди ја оваа прогресија.

14. Десет лица треба да поделат 48156 денари, така што второто да добие 5% повеќе од првото, третото да добие 5% повеќе од второто итн., десеттото да добие 5% повеќе од деветтото. Колку ќе добие првото, а колку последното лице?

15. Туристичката посета во едно место од 01.03 до 31.09 месечно се зголемувала по принципот на геометриска прогресија. Разликата меѓу посетите во месеците јуни и април е 52800 туристи, а разликата меѓу посетите во месеците мај и април е 24000 туристи. Пресметај:
    а) колкав е процентот на месечното зголемување на посетителите,
    б) колку посетители биле во месец март,
    в) колку туристи вкупно го посетиле местото од 01.03 до 31.09?

16. Во првиот месец се произведени 2000 тони лим, а во вториот и третиот 2500 и 3125 тони лим, соодветно. Ако во следните месеци производството го задржало истото темпо на пораст, да се пресмета:
    а) колку тони лим се произведени во првите дванаесет месеци,
    б) колку ќе биде произведено во дваесеттиот месец.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Barnet, R.; Zeigler, M.:** *Finite Mathematics for Management, Life and Social sciences,* Dellen Publishing Company, 1987
2. **Brigham, E. F.; Ehrhardt, M. C.:** *Financial Management: Theory and Practice*, Hardcover, New York, 2001
3. **Budnik, S. F.:** *Applied mathematics for business, econimics and the social sciences,* McGraw-Hill book company, New York, 1988
4. **Vugdelija D., Mesaroš K., Lovasi I., Čileg M., Kiš T., Sedlak O**.: *Matematika za ekonomiste: Teorija i zbirka zadataka*, Ekonomski fakultet Subotica, 2002
5. **Gajić, Lj., Herceg, D., Krejić, N.:** *Elementi poslovne matematike*, PMF, Novi Sad, 1999
6. **Divjak, B., Erjavec, Z.:** *Gospodarska i financijska matematika,* TIVA - Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 2003
7. **Zima, P., Brown, R. L.:** *Mathematics of Finance*, Schaum`s O.S.,1996
8. **Йовкова, Й.; Петков, Б.:** *Финансова математика*, Нова звезда, София, 2001
9. **Johnson, R. W.:** *Financial Management*, McGraw-Hill, New York, 2001
10. **Logan, J. David:** *Applied mathematics*, Hoboken (New Jersey), Wiley-Interscience, 2006
11. **Luderer, B.; Nollau, V.; Vetters, K.:** *Mathematical Formulas for Economists,* Sprindger-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007
12. **Малчески, Р.:** *Калкулкус* 1, АЛФА 94 МА, Скопје, 2007
13. **Малчески, Р.:** *Калкулкус* 2, АЛФА 94 МА, Скопје, 2007
14. **Малчески, Р.:** *Математика за бизнис*, Европски универзитет, Скопје, 2006
15. **Малчески, С.; Гулев, Г.:** *Финансиски пресметувања кај обврзници и акции* 1, Сигма, 2007
16. **Малчески, С.; Гулев, Г.:** *Финансиски пресметувања кај обврзници и акции* 2, Сигма, 2007
17. **McCutcheon, J. J.; Scot, W. F.:** *An Introduction to the Mathematics of Finance,* Institute and Faculty of Actuaries, 2003
18. **Мирчески, Б.; Трајкоски, Д.:** *Математика за економисти*, Култура, Скопје, 1981
19. **Мирчески, Б.:** *Примери и задачи по математика за економисти*, Економски факултет, Прилеп, 1996
20. **Николовски, А.; Плавшиќ, С.:** *Трговско право*, Скопје, 2005

21. **Петковски, М.:** *Финансиски пазари и институции*, Економски факултет, Скопје, 2004
22. **Ralević, R.:** *Finansijska i aktuarska matematika*, Savremena administracija, Beograd, 1975
23. **Relic, B.:** *Gospodarska matematika,* 2nd edition, Zagreb: Računovodstvo i financije, 2003
24. **Rose, P.:** *Money and Capital Markets*, IRWIN, 1989
25. **Rosser, M.:** *Basic Mathematics for Economists,* Routletge, London-New Jork, 2003
26. **Roueche, N.; Graves, V.:** *Business Mathematics: A Collegiate Approach*, 8th Edition, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2001
27. **Shall, L. D.; Haley, Ch. W:** *Introduction to Funancial Management*, McGraw-Hill book company, New York, 1988
28. **Stojanović, D.:** *Matematičke metode u ekonomiji preduzeća,* Rad, Beograd, 1968
29. **Saunders, A.; Cornett, M. M.:** *Financial Institutions Management*, McGraw-Hill Irwin, Boston, 2003
30. **Fuente, Angel de la:** *Mathematical methods and models for economists.* Cambridge (UK), New York : Cambridge University Press, 2000
31. **Horne Van, Y.:** *Financial Management and Policy,* Prentice-Hall, 1980
32. **Horne, J. C.; Wachowicz, J. M.:** *Fundamentals of Financial Management*, South-Western College Pub, New York, 2004
33. **Capiński, M.; Zastawniak, T.:** *Mathematics for finance : an introduction to financial engineering*, Springer, London, New York, 2003
34. **Šutalo, I., Jemrić, I., Volarević, H.:** *Matematika za ekonomiste i managere*, Zagreb: Mate, 2005

ИНДЕКС НА ПОИМИ

А

Ажио, 163
Акумулација на дисконт, 201
Акција, 213
- кумулативно приоритетна, 217
- обична, 217
- партиципативно прироритетна, 217
- приоритетна, 217
Амортизационен фонд, 173
Амортизирање на заем, 124
Амортизација на премија, 201
Антиципативна камата, 11
Антиципативен каматен фактор, 25
Ануитет, 124
Аритметичка прогресија, 227

Б

Банкарски (трговски, практичен) дисконт, 67
Билансна вредност на акција, 214
Благајнички запис, 78

В

Валута на меница, 75
- - комерцијален запис, 75
Винкулација, 218
Внатрегодишно вкаматување, 9

Г

Геометриска прогресија, 230
Годишна (инвестициона) доходовност, 81
Годишно вкаматување, 9

Д

Дата на дивидента, 216
Декурзивна камата, 11
Декурзивен каматен фактор, 20
Дивидента, 214
Дисконт, 67, 198
Дисконтирање (есконтирање), 67
Дисконтна (есконтна) стапка, 67
Дисконтен рок, 67
Дисконтни множители, 73
Добивка од акција, 221
Дополнителни акции, 214
Доходовност до валута, 206
Доходовност за период на сопственост, 207
Доходовност на ден исплата, 81
Дурација, 210

Е

Ефективна годишна доходовност, 82
Ефективна антиципативна каматна стапка, 29
Ефективна декурзивна каматна стапка, 22
Ефективност на враќање на инвестиција, 83

З

Заем, 123
- амортизационен, 123
- бескаматен, 124
- долгорочен, 123
- домашен, 123
- каматен, 124
- краткорочен, 123
- комунален (јавен), 123
- личен, 123
- необлигационен, 124
- реален, 123
- рентен, 123
- облигационен, 124
- среднорочен, 123
- странски, 123
Заокружени серии акции, 215
Зголемен капитал, 12

И

Издавач (трасант), 75
Индосмент, 218
Интеркаларна камата, 125
Инфлација, 17

К

Камата (интерес), 9
Каматен период, 12
Каматна стапка, 12
Коефициент курс-добивка, 225
Коефициент на еластичност, 208
Количник на геометриска прогресија, 231
Комерцијален запис, 75
Консолидација на заем, 147
Конформна антиципативна каматна стапка, 30
Конформна декурзивна каматна стапка, 23
Курс на обврзница (берзанска цена), 203

Л

Лотариски заем, 188

М

Математички (точен) дисконт, 68
Меница, 75
Метод на делење на сегмент, 42
Миза, 85

Н

Намален капитал, 12
Негоцијабилен карактер, 215
Непрекинато (континуирано)
вкаматување, 32
Неравенство на Бернули, 200
Ниво на добивка за период
на сопственост, 221
Ниво на приход од дивидента, 219
- - - - -, реално, 220
Номинална антиципативна каматна стапка,
Номинална вредност на акција, 214
- - на обврзница, 181, 197
Номинална декурзивна каматна стапка, 18
Номинална доходовност, 205
Номинална сума (вредност) на
задолжение, 67
Номинална вредност на меница, 75

О

Обврзница, 181, 195
-, долгорочна, 196
-, државна, 195
-, за опрема, 196
-, конвертибилна, 106
-, корпоративна, 195
-, краткорочна, 195
-, муниципална, 195
-, негарантирана, 196
-, партиципативна, 196
-, среднорочна, 196
-, хипотекарна, 196
Облигациона камата, 197
Облигациона каматна стапка, 197
Облигационен ефект, 209
Основна сума (капитал), 12
Отплата, 124
Оценета вредност на обврзница, 198

П

Пазарна цена на акција, 214
- - на обврзница, 204
Периодичен влог, 39
Плурален вотум, 217
Посакувана каматна стапка, 198
Почетен капитал, 12
Почетен член на аритметичка
прогресија, 227
Почетен член на геометриска
прогресија, 231
Премија, 85, 199
Проста камата, 10

Р

Разлика на аритметичка прогресија, 227
Реална каматна стапка, 18
Реална (ефективна) сума, 67
Релативна антиципативна каматна стапка, 29
Релативна декурзивна каматна стапка, 22
Релативна промена на цена
на обврзница, 211
Ремиент (бенифиент), 75
Рента, 85
- антиципативна, 85
- времена (темпорерна), 85
- вечна, 85
- декурзивна, 85
- доживотна, 85
- непосредна, 85
- одложена, 85
- откупена со премии, 118
- прекината, 120

С

Сложена камата, 10
Сметководствена вредност на
обврзница, 202

Т

Тековна доходовност, 205
Терминска сметка, 33
Трасат, 75
Трговски метод, 207

Ф

Формула на Фишер, 19
- - Гордон, 224