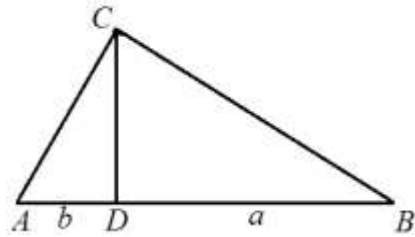


КОНСТРУКЦИЈА НА АРИТМЕТИЧКА, ГЕОМЕТРИСКА И ХАРМОНИСКА СРЕДИНА НА ДВЕ ОТСЕЧКИ

Нека се дадени две отсечките со должини a и b , $a > b$. Како што знаеме, аритметичката средина на отсечките со должини a и b можеме да ја конструираме ако на една полуправа од почетната точка O последователно конструираме отсечки OA , $\overline{OA} = a$ и OB , $\overline{OB} = b$, а потоа ја најдеме средната точка на отсечката OB , која се добива во пресек на отсечката OB и нејзината симетрала s (направи цртеж).

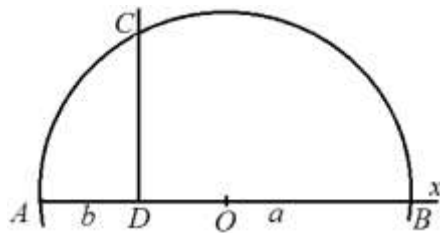
Понатаму, да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC со должина на хипотенуза $a + b$ (цртеж десно), во кој D е подножјето на висината повлечена во темето на правиот агол и важи $\overline{AD} = b$, $\overline{DB} = a$. Од сличноста на триаголниците ACD и CBD следува



дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$, односно $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{DB}} = \sqrt{ab}$. Според тоа, во овој три-

аголник должината на висината спуштена од темето на правиот агол е еднаква на геометриската средина на отсечките со должини a и b . Имајќи го предвид претходно изнесеното геометриската средина на отсечките со должини a и b можеме да ја конструираме на следниот начин:

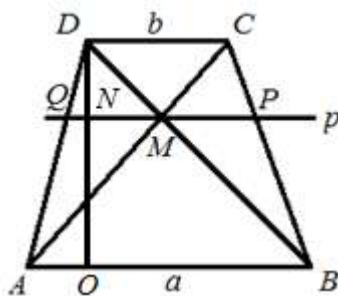
- конструираме полуправа Ax , а потоа ги наоѓаме точките D и B такви што $\overline{AD} = b$, $\overline{DB} = a$ (цртеж десно),



- конструираме симетрала на отсечката AB и во пресекот со полуправата Ax ја наоѓаме точката O ,
- конструираме полукружница со центар во O и радиус $r = \overline{AO}$ и
- во точката D конструираме нормала на отсечката AB и во пресекот на истата со полукружницата ја наоѓаме точката C , со што ја определивме отсечката CD за која важи $\overline{CD} = \sqrt{ab}$.

Доказот за точноста на оваа конструкција следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Да го разгледаме траpezот $ABCD$ чии основи се со должини a и b , $a > b$. Нека M е пресечната точка на дијагоналите AC и BD (цртеж десно). Во точката M повлекуваме права p паралелна на AB и CD , а во точката D ја повлекуваме висината на траpezот која правата p ја сече во точката N и основата AB во точката O . Нека



$$p \cap AD = \{Q\} \text{ и } p \cap BC = \{P\}.$$

Триголниците AMQ и ACD се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{ON}}$. Исто така, триголниците BMP и BDC се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{ON}}$. Сега од последните две равенства следува дека $\overline{QM} = \overline{PM}$. Понатаму, триголниците ABC и MPC се слични, па затоа важи $\frac{\overline{PM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BC}}$, а од сличноста на триголниците BMP и BDC имаме $\frac{\overline{PM}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}$. Последните две равенства ги собираме и добиваме

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{PM}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CP+BP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = 1,$$

па затоа

$$\overline{PM} = \frac{\overline{AB \cdot CD}}{\overline{AB+CD}} = \frac{ab}{a+b}, \text{ т.е. } \overline{PQ} = 2\overline{PM} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Од претходните разгледувања следува следнава конструкција на отсечка чија должина е еднаква на хармониската средина на должините a и b , $a > b$ на две дадени отсечки:

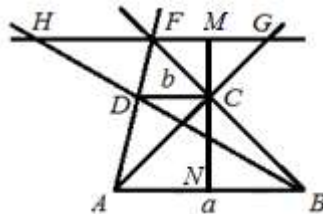
- конструираме траpez $ABCD$ со должини на основи a и b , произволна висина и произволен остар агол во темето A ,
- конструираме точка $AC \cap BD = \{M\}$,
- во точката M конструираме права $p \parallel AB$ и
- наоѓаме $p \cap AD = \{Q\}$ и $p \cap BC = \{P\}$, со што ја добиваме отсечката

$$PQ \text{ за која важи } \overline{PQ} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Доказот за точноста на оваа конструкција следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

На крајот од оваа статија, користејќи ги својствата на трапезот со основи a и b , $a > b$, ќе покажеме како може да се конструира отсечка со должина $\frac{2ab}{a-b}$.

Да го разгледаме трапезот $ABCD$ чии основи се со должини a и b , $a > b$. Нека F е пресечната точка на краците AD и BC (цртеж десно). Во точката F повлекуваме права p паралелна на AB и CD , а во точката C ја повлекуваме висината на трапезот која правата p ја сече во точката M и основата AB во точката N . Нека $p \cap BD = \{H\}$ и $p \cap AC = \{G\}$.



Триголниците AGF и ACD се слични (зошто?), па затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{MN}}$. Исто така, триголниците BFH и BDC се слични (зошто?), па

затоа важи $\frac{\overline{CD}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{MN}}$. Сега од последните две равенства следува дека

$\overline{GF} = \overline{HF}$. Понатаму, триголниците ACD и AGF се слични, па затоа важи $\frac{\overline{FG}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = 1 + \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$, а од сличноста на триголниците ABF и DCF

имаме $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = 1 + \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$. Од последните две равенства ги добиваме

равенствата $\frac{\overline{FG}}{b} - 1 = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}$ и $\frac{a}{b} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}}$. Последните две равенства ги

множиме и добиваме $(\frac{\overline{FG}}{b} - 1)(\frac{a}{b} - 1) = 1$, од каде наоѓаме $\overline{FG} = \frac{ab}{a-b}$, т.е.

$$\overline{HG} = 2\overline{FG} = \frac{2ab}{a-b}.$$

Од претходните разгледувања следува следнава конструкција на отсечка чија должина е еднаква на $\frac{2ab}{a-b}$:

- конструираме трапез $ABCD$ со должини на основи a и b , произволна висина и произволен остар агол во темето A ,
- конструираме точка $AD \cap BC = \{F\}$ и во F повлекуваме права $p \parallel AB$ и
- наоѓаме $p \cap BD = \{H\}$ и $p \cap AC = \{G\}$, со што ја добиваме отсечката FH за која важи $\overline{GH} = \frac{2ab}{a-b}$.

Доказот за точноста на оваа конструкција следува од претходните разгледувања. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.