Ристо Малчески,
Скопје

НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Во оваа статија ќе го разгледаме неравенството на рускиот математичар Чебишев и неколку негови примени.

Тврдење 1 (неравенство на Чебишев). Нека $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ се такви што $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \le n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1, 2, ..., n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. I начин. Од условот следува дека за секои $i, k \in \{1, 2, ..., n\}$ е исполнето неравенството

$$(a_i - a_k)(b_i - b_k) \ge 0, \tag{2}$$

од што следува

$$\sum_{i \ne k} (a_i - a_k)(b_i - b_k) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sum_{i \ne k} a_i (b_i - b_k) \ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i \ne k} a_i (b_i - b_k) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i \ne k} a_i b_k \ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

т.е. точно е равенството (1). Јасно, во (1) знак за равенство важи ако и само ако за секои $i \ne k$ во (2) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $a_i = a,$ за $i = 1, 2, ..., n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, ..., n$.

II начин. Равенството (1) ќе го докажеме со помош на математичка индукција.

За $n = 1$ имаме $a_1 \cdot b_1 \le 1 \cdot a_1 b_1$, т.е. важи (1).

Нека претпоставиме дека неравенството (1) е точно за $n = k \ge 1$, т.е. дека за

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i \le k \sum_{i=1}^{k} a_i b_i. \tag{3}$$

Нека се дадени реалните броеви a_i, b_i, $i=1,2,\dots,k+1$ такви што $a_1 \le \dots \le a_k \le a_{k+1}$ и $b_1 \le \dots \le b_k \le b_{k+1}$. Да ставиме $A=\sum_{i=1}^{k} a_i$ и $B=\sum_{i=1}^{k} b_i$. Тогаш

$$A=\sum_{i=1}^{k} a_i \le k a_{k+1} \text{ и } B=\sum_{i=1}^{k} b_i \le k b_{k+1},$$

па затоа последователно добиваме

$$(A-ka_{k+1})(B-kb_{k+1}) \ge 0 \Leftrightarrow \tag{4}$$

$$AB+k^2 a_{k+1}b_{k+1} \ge kBa_{k+1}+kAb_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$(k+1)AB+k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} \ge k(AB+Ab_{k+1}+Ba_{k+1}+a_{k+1}b_{k+1}) \Leftrightarrow$$

$$(k+1)AB+k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} \ge k(AB+Ab_{k+1}+Ba_{k+1}+a_{k+1}b_{k+1}) \Leftrightarrow$$

$$(k+1)AB+k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} \ge k(A+a_{k+1})(B+b_{k+1}) \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{1}{k}AB+a_{k+1}b_{k+1} \ge \tfrac{1}{k+1}(A+a_{k+1})(B+b_{k+1}) \tag{5}$$

Понатаму, од индуктивната претпоставка и од неравенството (5) добиваме

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1} \ge \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i + a_{k+1}b_{k+1} = \frac{1}{k}AB + a_{k+1}b_{k+1}$$

$$\ge \tfrac{1}{k+1}(A+a_{k+1})(B+b_{k+1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k+1} b_i,$$

т.е. неравенството (1) важи за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

Конечно, од (4) следува дека во (1) знак за равенство важи ако и само ако $A-na_{n+1}=0$ или $B-nb_{n+1}=0$, односно ако и само ако $a_i=a,$ за $i=1,2,\dots,n+1$ или $b_i=b$, за $i=1,2,\dots,n+1$. ♦

Забелешка 1. Аналогно се докажува дека равенството (1) важи и во случај кога $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i=1,2,\dots,n$ се такви што $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n$.

Забелешка 2. На потполно ист начин како во тврдење 1 се докажува дека за реалните броеви a_i, b_i, $i=1,2,\dots,n$ за кои важи $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n$ и $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ или пак важи $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n$ е точно неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \ge n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{6}$$

Притоа доказот се разликува само во неравенството (4), кое во овој случај го добива видот

$$(A-ka_{k+1})(B-kb_{k+1})\le 0 .$$

Во натамошните разгледувања ќе ја покажеме примената на неравенството на Чебишев.

Пример 1. докажете дека за секои позитивни реални броеви $x_i, i=1,...,n$ е исполнето равенството

$$\frac{1}{\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}}-\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}\ge\frac{1}{n}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1\ge x_2\ge...\ge x_n$. Нека,

$$a_i=\frac{1}{x_i}, b_i=\frac{1}{1+x_i}, i=1,2,...,n .$$

Ако го искористиме неравенството на Чебишев и земеме предвид дека

$$a_i-b_i=\frac{1}{x_i}-\frac{1}{1+x_i}=\frac{1+x_i-x_i}{x_i(1+x_i)}=\frac{1}{x_i(1+x_i)}=a_ib_i, i=1,2,...,n$$

го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\le n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i(1+x_i)}=n[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}].$$

Конечно, ако во последното неравенство поделиме со $n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$ добиваме

$$\frac{1}{n}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_i=c,\ \ i=1,2,...,n$. ♦

Пример 2. Најдете n реални броеви $x_1\le x_2\le...\le x_n$ за кои е исполнето неравеството

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\le n\sum_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}. \qquad (7)$$

Решение. Нека $a_i = x_i$, $b_i = -x_{n-i+1}, i = 1,2,...,n$. Тогаш $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, па од неравенството на Чебишев следува

$$-(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (-x_{n-i+1}) \le n \sum_{i=1}^{n} x_i(-x_{n-i+1}) = -n \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1},$$

т.е.

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \ge n \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}. \quad (8)$$

Од (7) и (8) следува дека важи знак за равенство, а во неравенството на Чебишев знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a$, за $i = 1,2,...,n$ или $b_i = b$, за $i = 1,2,...,n$, што значи ако и само ако $x_i = x$, за $i = 1,2,...,n$. ♦

Пример 3. Нека $x_1 \ge x_2 \ge x_3 > 0$ и $0 < y_1 \le y_2 \le y_3$. Докажете дека

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \ge 3\frac{x_1 + x_2 + x_3}{y_1 + y_2 + y_3}. \quad (9)$$

Решение. Ако ставиме $a_i = x_i, b_i = \frac{1}{y_i}, i = 1,2,3$, тогаш од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \ge \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}). \quad (10)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за позитивните реални броеви $0 < y_1 \le y_2 \le y_3$ добиваме

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \ge \frac{9}{y_1 + y_2 + y_3}. \quad (11)$$

Конечно, неравенството (9) следува од неравенствата (10) и (11). ♦

Пример 4. Нека α, β, γ се аглите (изразени во радијани) и a, b, c се должините на страните на триаголник. Докажете дека

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \ge \frac{9}{\pi}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако во равенството (9) ставиме $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $y_1 = \alpha, y_2 = \beta, y_3 = \gamma$ и земеме предвид дека $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, добиваме

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \ge 3\frac{1+1+1}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{9}{\pi}.$$

Јасно, зна за равенство важи ако и само во (9) важи знак за равенство, што значи ако и само ако во неравенствата (10) и (11) важи знак за равенство. Но, во (11) важи зна за равенство ако и само ако $y_1 = y_2 = y_3$, што во нашиот слуја значи ако и само ако триаголникот е рамностран. ♦

На крајот од нашите разгледувања ќе наведеме неколку задачи за самостојна работа за чие решавање може да се искористат неравенството на Чебишев и претходните примери.

Задача 1. Нека $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,...,n$. Докажете дека

а) ако $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$, тогаш

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1}{n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}.$$

б) ако $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ и $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$, тогаш

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1}{n} \ge \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}.$$

Задача 2. Нека α, β, γ се аглите (изразени во радијани) и a, b, c се должините на страните на триаголник. Докажете дека

а) $\frac{b+c-a}{\alpha} + \frac{c+a-b}{\beta} + \frac{a+b-c}{\gamma} \ge 3\frac{a+b+c}{\pi}$,

б) $\frac{b+c-a}{a\alpha} + \frac{c+a-b}{b\beta} + \frac{a+b-c}{c\gamma} \ge \frac{9}{\pi}$.

Задача 3. Ако a, b, c се позитивни реални броеви и $s = \frac{a+b+c}{2}$, тогаш

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \ge (\frac{2}{3})^{n-2} s^{n-1}.$$

Упатство. Најпрво со помош на математичка индукција докажете дека за произволни позитивни реални броеви $a_i, i = 1,2,...,k$ важи

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n \le k^{n-1}(a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n),$$

А потоа искористете го претходното неравенство и неравенството на Чебишев.

Литература

1. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Mitrinović, D. S.; Vasić, P. M.: *Analitičke nejednakosti,* Građevinska knjiga, Beograd, 1970