

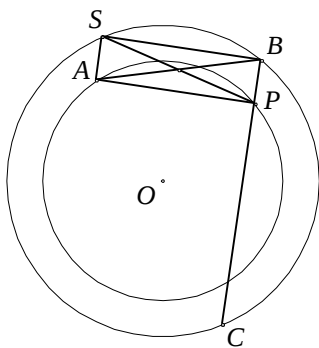
XXIX олимпијада

1. Во рамнина дадени се две кружници со радиуси R и r ($R > r$) со заеднички центар. Нека P е фиксна точка на помалата кружница, а точката B се движи по поголемата кружница. Правата BP повторно ја сече поголемата кружница во точката C . Нормалата l на BP во P , повторно ја сече помалата кружница во A , (ако l е тангента на кружницата во точката P , тогаш $A = P$).

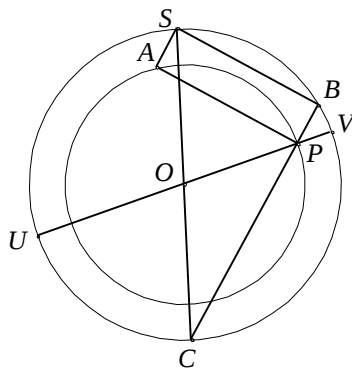
(a) Најди го множеството вредности на изразот $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$.

(b) Најди го геометриското место на точки на средините на отсечката AB .

Решение. Прво ќе го решиме вториот дел од задачата. Го дополнуваме триаголникот APB до правоаголник $APBS$ (црт. 29.1.). Ако разгледаме осната симетрија со оска, симетралата на отсечката AP , добиваме дека точката S лежи на поголемата кружница. Во специјален случај, кога $A \equiv P$, земаме $S \equiv B$.



Црт. 29.1.



Црт. 29.2.

Во секој случај средината на отсечката AB се совпаѓа со средината на отсечката SP , и кога точката B минува низ сите точки од големата кружница, истото важи и за точката S , и обратно. Значи, бараното множество точки е еднакво на множеството од сите средини на отсечките PS , кога S се движи по големата кружница. Со други зборови, тоа е слика на големата кружница при хомотетија со центар P и коефициент $\frac{1}{2}$, а тоа е кружница со центар во средината на отсечката OP и радиус $\frac{R}{2}$.

За да го решиме првиот дел од задачата, ќе го користиме истиот правоаголник. Забележуваме дека OC е радиус на поголемата кружница, бидејќи аголот CBS е прав (црт. 29.2.). Затоа

$$\overline{AP}^2 = \overline{SB}^2 = \overline{SC}^2 - \overline{BC}^2 = 4R^2 - \overline{BC}^2,$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{BP}^2, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2.$$

Од добиените равенства и степенот на точка во однос на кружница, добиваме

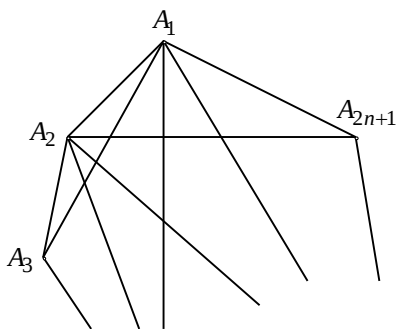
$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 &= 2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{BC}^2 = 8R^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 - \overline{BC}^2 \\ &= 8R^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 - (\overline{BP} + \overline{CP})^2 = 8R^2 - 2\overline{BP} \cdot \overline{CP} \\ &= 8R^2 - 2\overline{UP} \cdot \overline{VP} = 8R^2 - 2(R+r)(R-r) = 6R^2 + 2r^2.\end{aligned}$$

Значи, бараното множество е $\{6R^2 + 2r^2\}$.

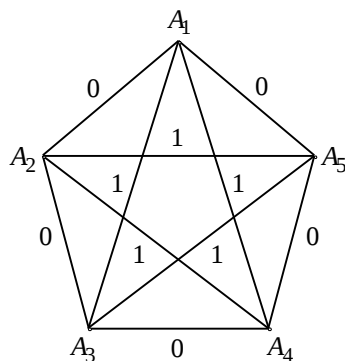
2. Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ се подмножества од некое множество B ,
такви што
- (a) секое множество A_i има точно $2n$ елементи
 - (b) множеството $A_i \cap A_j$, ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) содржи само еден елемент, и
 - (c) секој елемент од B се содржи барем во две подмножества A_i .

За кои вредности на n можеме на секој елемент од B да му придружime еден од броевите 1 или 0 на начин таков што за секое множество A_i бројот на неговите елементи на кои им е придружена нула е еднаков на n .

Решение. Ќе докажеме дека секоја точка се наоѓа точно во две множества A_i . Ако го запишеме A_j како унија од множества $A_j \cap A_i$, за секој $i \neq j$, тогаш сме запишале едно $2n$ -елементно множество како унија од $2n$ едноелементни множества, и тие се попарно дисјунктни, т.е. тие се различни. Бидејќи A_j е било кое множество тврдењето е докажано.



Цр̄ѣ. 29.3. (оѣиѣѣ)



Цр̄ӯ. 29.4. (за r=2)

Ако ги претставиме множествата A_i како темиња на граф, а елементите како ребра на оние темиња (подмножества!) кои ги содржат, добиваме $2n+1$ темиња и сите нивни ребра (црт. 29.3.).

Задачата е еквивалентна на следната задача: за кои природни броеви n може да се означат ребрата на тој граф со 0 или 1 (или да се обојат со две различни бои) така што од секое теме да излегуваат точно n ребра со иста ознака (боја).

Ако такво придружување е можно, тогаш сите ребра на кои е придружена 0 се $\frac{(2n+1)n}{2}$, при што $2n+1$ е бројот на темиња, n е бројот на ребрата на кои им придружен бројот 0 и кои излегуваат од едно теме, а делиме со 2 бидејќи секое ребро го броиме два пати. Бидејќи $\frac{(2n+1)n}{2}$ е природен број заклучуваме дека n мора да е парен број.

Ако $n = 2k$, k е природен број, тогаш за секое теме придружуваме 0 на сите ребра со k следни и k претходни темиња (во некој фиксен цикличен распоред на тие темиња) и само на нив. Такво придружување постои, бидејќи ако A_j е меѓу следните k темиња за A_i , тогаш A_i е претходните k темиња за A_j , и обратно, што значи дека на некое ребро ќе му придружиме ист елемент без разлика на тоа дали го гледаме како ребро од едно негово теме или од друго.

3. Функцијата $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е дефинирана со

$$f(1)=1, \quad f(3)=3, \quad f(2n)=f(n), \quad f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n), \\ f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n), \quad \text{за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Најди го бројот на сите броеви $n \in \mathbb{N}$, помали или еднакви на 1988, за кои $f(n) = n$.

Решение. Ќе пресметаме неколку први членови на низата:

$$\begin{array}{ll} f(1)=1 & f(10)=f(5)=5 \\ f(2)=f(1)=1 & f(11)=3f(5)-2f(2)=13 \\ f(3)=3 & f(12)=f(6)=3 \\ f(4)=f(2)=1 & f(13)=2f(7)-f(3)=11 \\ f(5)=2f(3)-f(1)=5 & f(14)=f(7)=7 \\ f(6)=f(3)=3 & f(15)=3f(7)-2f(3)=15 \\ f(7)=3f(3)-2f(1)=7 & f(16)=f(8)=1 \\ f(8)=f(4)=1 & f(17)=2f(9)-f(4)=17 \\ f(9)=2f(5)-f(2)=9 & \dots\dots\dots \end{array}$$

На прв поглед претходните равенства не ни даваат никаква информација за функцијата f . Но овие равенства да ги запишеме во бинарен броен систем

$$\begin{array}{ll} f(1)=1 & f(1010)=0101 \\ f(10)=01 & f(1011)=1101 \end{array}$$

$f(11) = 11$	$f(1100) = 0011$
$f(100) = f(2) = 1$	$f(1101) = 1011$
$f(101) = 101$	$f(1110) = 0111$
$f(110) = 011$	$f(1111) = 1111$
$f(111) = 111$	$f(10000) = 00001$
$f(1000) = 0001$	$f(10001) = 10001$
$f(1001) = 1001$	

Ќе докажеме дека функцијата f секој број n го пресликува во број чиј бинарен запис се добива од бројот n , ако цифрите ги запишеме во обратен редослед.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција. Јасно, тоа е точно за $n=1,2,...,17$. Ќе докажеме дека тоа е точно за секој природен број, ако е точно за сите броеви помали од него.

$$\begin{aligned}
 f(\overline{a_k \dots a_1 0}_{(2)}) &= f(\overline{10}_{(2)} \cdot \overline{a_k \dots a_1 0}_{(2)}) = f(\overline{a_k \dots a_1}_{(2)}) \\
 &= \overline{a_k \dots a_1}_{(2)} = \overline{0 a_1 \dots a_k}_{(2)} \\
 f(\overline{a_k \dots a_2 01}_{(2)}) &= f(\overline{100}_{(2)} \cdot \overline{a_k \dots a_1 0}_{(2)} + 1) \\
 &= \overline{10}_{(2)} \cdot f(\overline{10}_{(2)} \cdot \overline{a_k \dots a_2}_{(2)} + 1) - f(\overline{a_k \dots a_2}_{(2)}) \\
 &= \overline{10}_{(2)} \cdot f(\overline{a_k \dots a_2 1}_{(2)}) - f(\overline{a_k \dots a_2}_{(2)}) \\
 &= \overline{10}_{(2)} \cdot \overline{1 a_2 \dots a_k}_{(2)} - \overline{a_2 \dots a_k}_{(2)} = \overline{10 a_2 \dots a_k}_{(2)} \\
 f(\overline{a_k \dots a_2 11}_{(2)}) &= f(\overline{100}_{(2)} \cdot \overline{a_k \dots a_1}_{(2)} + \overline{11}_{(2)}) \\
 &= \overline{11}_{(2)} \cdot f(\overline{10}_{(2)} \cdot \overline{a_k \dots a_2}_{(2)} + 1) - \overline{10}_{(2)} \cdot f(\overline{a_k \dots a_2}_{(2)}) \\
 &= \overline{11}_{(2)} \cdot f(\overline{a_k \dots a_2 1}_{(2)}) - \overline{10}_{(2)} f(\overline{a_k \dots a_2}_{(2)}) \\
 &= \overline{11}_{(2)} \cdot \overline{1 a_2 \dots a_k}_{(2)} - \overline{10}_{(2)} \cdot \overline{a_2 \dots a_k}_{(2)} = \overline{11 a_2 \dots a_k}_{(2)}
 \end{aligned}$$

Од досега изнесенот следува дека треба да се пребројат оние природни броеви n , $n < 1988$, кои имаат симетричен запис во бинарен броен систем, во литературата познати како полиндроми.

Јасно, број со $2k$ цифри во бинарен запис е полиндром ако и само ако има облик $\overline{1 a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1}_{(2)}$, каде $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{0, 1\}$. Такви броеви има 2^{k-1} .

Исто така број кој во бинарен систем има $2k+1$ цифра е таков ако и само ако е од облик $\overline{1 a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1}_{(2)}$ каде што $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{0, 1\}$, и такви има 2^k .

Бидејќи $1988 = \overline{11111000100}_{(2)}$, броеви кои го исполнуваат условот од задачата се броеви кои се помали од 1988, и кои во бинарен запис имаат помалку

од 11 цифри., како и оние што се симетрични со 11 цифри, и се од облик $\overline{1abcdedcba}1_{(2)}$, кај кои $\overline{abcd} < 1111_{(2)} = 15$ (значи, има 15 такви четворки

$ABCD$, а броеви e има 2).

Според тоа, бараниот број е

$$2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^4 + 30 = 2 \cdot (2^5 - 1) + 30 = 92.$$

4. Докажи дека множеството од сите реални броеви x за кои е важи

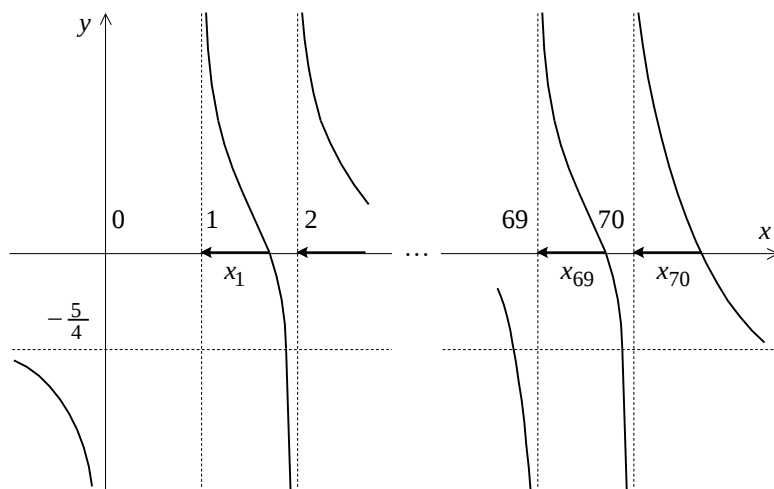
$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

е унија од дисјунктни полуотворени интервали, со збир на должини 1988.

Решение. Ја разгледуваме функцијата

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}.$$

Задачата сега гласи: докажи дека множеството од сите решенија на неравенката $f(x) \geq 0$ е унија на дисјунктни полуотворени интервали, чиј збир на должини е 1988.



Црпй. 29.5.

Графиците на поединечните собироци од $f(x)$ се хиперболи, т.е. кривите

$y = \frac{k}{x-k}$, $k = 1, 2, \dots, 70$. Ако ги пресметаме границите на f во бесконечност и во точките $1, 2, \dots, 70$ заклучуваме:

1. f строго опаѓа на интервалите

$$(-\infty, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, (69, 70), (70, +\infty)$$

2. $f(x) \rightarrow -\frac{5}{4}$, кога $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$;

3. $f(x) \rightarrow +\infty$, кога $x \rightarrow 1, 2, 3, \dots, 70$ од десно;

4. $f(x) \rightarrow -\infty$, кога $x \rightarrow 1, 2, 3, \dots, 70$ од лево.

Од овде гледаме дека постојат броеви

$$x_1 \in (1, 2), x_2 \in (2, 3), \dots, x_{69} \in (69, 70), x_{70} \in (70, +\infty)$$

такви што

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (1, x_1] \cup (2, x_2] \cup \dots \cup (69, x_{69}] \cup (70, x_{70}]$$

(види ја скицата на графикот на функцијата f на цртеж 25.9.). При тоа

$x_1, x_2, \dots, x_{69}, x_{70}$ се нули на функцијата. Но, равенката $f(x) = 0$ е еквивалентна со равенката $P(x) = 0$, каде P е полиномот

$$P(x) = \prod_{j=1}^{70} (x - j) - \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{70} k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{70} (x - j)$$

(бидејќи ниту еден од броевите $1, 2, \dots, 69, 70$ не е нула на полиномот P).

Збирот на должините на интервалите изнесува

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{70} - 70) = x_1 + x_2 + \dots + x_{70} - (1 + 2 + \dots + 70).$$

Според Виетовите формули $x_1 + x_2 + \dots + x_{70}$ е коефициентот пред x^{69} во нормираниот полином $P(x)$, со променет предзнак, т.е.

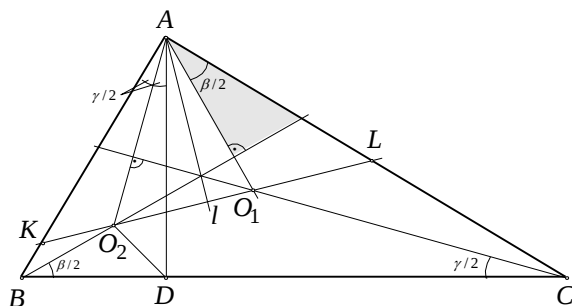
$$x_1 + x_2 + \dots + x_{70} = -(-1 - 2 - 3 - \dots - 70) - \left(-\frac{4}{5}\right)(1 + 2 + \dots + 70).$$

Конечно, бараниот збир на должини е еднаков на

$$\frac{4}{5}(1 + 2 + \dots + 70) = \frac{4}{5} \frac{70 \cdot 71}{2} = 1988.$$

5. Даден е $\triangle ABC$ со прав агол во темето A . Висината повлечена од темето A ја сече спротивната страна во точката D . Правата која минува низ центрите на впишаните кружници во триаголниците ABD и ACD ги сече страните AB и AC во точките K и L , соодветно. Нека S и T се плоштините на триаголниците ABC и AKL . Докажи дека $S \geq 2T$.

Решение. *I начин.* Нека O_1 и O_2 се центри на кружниците впишани во триаголниците ABD и ADC (црт. 29.6.), β и γ се агли кај темињата B и C соодветно. Пресметувајќи ги агли-те во освенчениот триаголник, заклучуваме дека правата $BO_2 \perp AO_1$; слично $CO_1 \perp AO_2$. Затоа симетралата на аголот A во триаголникот ABC (ја



Црт. 29.6.

означуваме со l), лежи на висината на триаголникот AO_2O_1 , т.е. $l \perp O_2O_1$.
Значи, точката L е симетрична на точката K во однос на правата l , т.е. $\overline{AK} = \overline{AL}$ и

$$\angle AKO_2 = \angle ALO_1 = 45^\circ.$$

Бидејќи DO_2 е симетрала на аголот D во триаголникот ABD добиваме $\angle ADO_2 = 45^\circ$, имаме $\triangle ADO_2 \cong \triangle AKO_2$, од што се добива $\overline{AK} = \overline{AD}$.

Понатаму, од $\overline{AD} = \frac{bc}{a}$, добиваме $2T = \overline{AD}^2 \leq S = \frac{1}{2}bc \Leftrightarrow 2bc \leq a^2 = b^2 + c^2$
 $\Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$, ($a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамнокрак.

II начин. При истите ознаки како и во претходното решение имаме,

$$\frac{\overline{DO_1}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\sin(90^\circ + \frac{\gamma}{2})} = \frac{\overline{AD}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

(синусна теорема за $\triangle ADO_1$, види црт. 29.7.)

$$\text{Слично, } \frac{\overline{DO_2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\cos \frac{\beta}{2}} \text{ и}$$

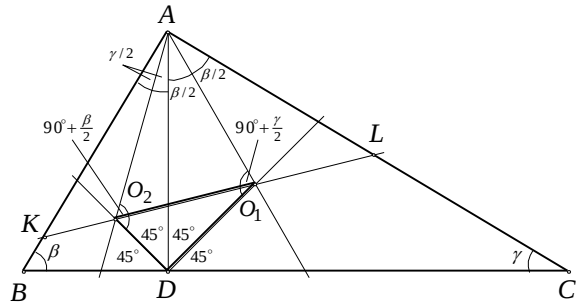
$$\text{затоа } \frac{\overline{DO_2}}{\overline{DO_1}} = \operatorname{tg} \beta.$$

Од досега изнесеното имаме $\angle DO_2O_1 = \beta$, и затоа $\angle DO_1O_2 = \gamma$. Добиваме

$$\angle AO_2O_1 = \angle AO_2D - \angle DO_2O_1 = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

па затоа $\angle KO_2A = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$. Аналогно се добива $\angle LO_1A = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Според тоа, $\triangle KO_2A \cong \triangle DO_2A$ и $\triangle DO_1A \cong \triangle LO_1A$, од што следува $\overline{AK} = \overline{AD} = \overline{AL}$.

Останатите пресметувања можат да се изведат со помош на тригонометрија, бидејќи $\overline{AD} = b \sin \gamma$, $\overline{AB} = b \operatorname{tg} \gamma$. Затоа неравенството го добива обликот $2 \sin \gamma \cos \gamma \leq 1$, односно $\sin 2\gamma \leq 1$, кое очигледно е точно. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\gamma = 45^\circ$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак.



Црт. 29.7.

6. Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$. Докажи дека $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ е полн квадрат.

Решение. Нека $\frac{a^2+b^2}{1+ab} = k$ не е полн квадрат. Ако $a = b$, тогаш

$$k = (2-k)a^2 \geq 0,$$

за $k \leq 2$, и тоа е можно само за $k=1$, кој е полн квадрат. Нека (a,b) е решение на Диофантовата равенка $x^2 + y^2 = k(1+xy)$, во множеството $\mathbb{N}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a > b$ и дека a е најмал меѓу сите такви решенија, т.е.

$$a = \min\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x > y, x^2 + y^2 = k(1+xy)\}.$$

Равенката $a^2 + b^2 = k(1+ab)$ ја разгледуваме како квадратна равенка со непозната a . Нека a' е другото нејзино решение. Тогаш, $a + a' = kb$, т.е. $a' \in \mathbb{Z}$ и a' не е нула, бидејќи во спротивно $k = a^2$, односно k е полн квадрат. Понатаму, од $k(a'b+1) = a'^2 + b^2$ следува $a' \geq 0$, т.е. $a' \in \mathbb{N}$. Освен тоа $aa' = b^2 - k < b^2 < ab$, па затоа $a' < b$. Значи парот (b, a') е решение на разгледуваната Диофантова равенка, во множеството $\mathbb{N}$, $b > a'$ и $b < a$, што противречи на минималноста на бројот a .

Од досега изнесеното следува дека ако a и b ги задоволуваат условите на задачата, тогаш $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ е полн квадрат.