

БМО 1992

1. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и

$$A(m, n) = m^{3^{4n}+6} - m^{3^{4n}+4} - m^5 + m^3.$$

Определи ги сите природни броеви n за кои $A(m, n)$ е делив со 1992 за секој $m \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека n е решение на задачата. Да забележиме дека $1992 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$ и

$$A(m, n) = m^3(m^2 - 1)(m^{3^{4n}+1} - 1).$$

Лесно се докажува дека 24 е делител на $m^3(m^2 - 1)$. Според тоа, $A(m, n)$ е делив со 1992 ако и само ако $A(m, n)$ е делив со 83. Нека n е таков што $83 \mid A(m, n)$ за секој $m \in \mathbb{N}$. Во случајов имаме $83 \mid A(2, n) = 2^{3^{4n}+1} - 1$. Бидејќи степенот на 2 по модул 83 е 82 (провери!), заклучуваме дека $82 \mid 3^{4n} + 1 = 81^n + 1$. Лесно се проверува дека последното е исполнето ако и само ако n е непарен број.

Ќе докажеме дека најдениот потребен услов е и доволен, т.е. дека $83 \mid A(m, n)$ за секој природен број m и за секој непарен природен број n . Случаите $m = 1$ и $83 \mid m$ се тривијални. Нека $m > 1$ и $\text{NZD}(m, 83) = 1$. Тогаш $m^{82} \equiv 1 \pmod{83}$, а од непарноста на n следува дека $82 \mid 3^{4n} + 1$. Според тоа,

$$m^{3^{4n}+4} - 1 \equiv m^{82k} - 1 \equiv 0 \pmod{83}.$$

2. Докажи дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$. Од друга страна, ако го искористиме познатото равенство $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, добиваме дека горното неравенство е еквивалентно на неравенството $\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$, кое пак е еквивалентно на бараното неравенство.

3. Даден е $\triangle ABC$ и точки D, E, F соодветно на неговите страни BC, CA, AB , различни од темињата на триаголникот. Докажи дека ако четириаголникот $AFDE$ е тетивен, тогаш

$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} \leq \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}.$$

Решение. Последователно имаме

$$\begin{aligned} \frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} &= \frac{P_{ABD} + P_{ACD}}{P_{DEF}} = \frac{P_{ABD}}{P_{DEF}} + \frac{P_{ACD}}{P_{DEF}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} \sin \angle FAD}{\overline{ED} \cdot \overline{EF} \sin \angle DEF} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD} \sin \angle EAD}{\overline{DF} \cdot \overline{EF} \sin \angle DFE} \\ &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{ED} \cdot \overline{EF}} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}{\overline{DF} \cdot \overline{EF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EF}} \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \right) \geq 2 \frac{\overline{AD}}{\overline{EF}} \sqrt{\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}}, \end{aligned}$$

при што искористивме дека

$$\angle FAD = \angle DEF \text{ и } \angle EAD = \angle DFE,$$

бидејќи четириаголникот $AFDE$ е тетивен.

Од друга страна $\angle BAC + \angle EDF = 180^\circ$, па

затоа $\sin \angle BAC = \sin \angle EDF$ и затоа

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin \angle BAC}{\overline{DE} \cdot \overline{DF} \sin \angle EDF} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{DE} \cdot \overline{DF}}.$$

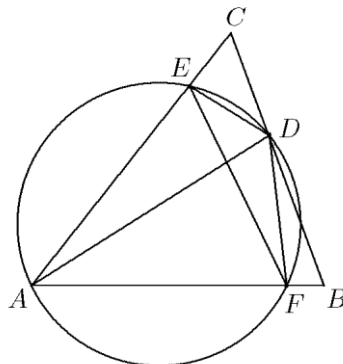
Според тоа,

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} \geq 2 \frac{\overline{AD}}{\overline{EF}} \sqrt{\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}},$$

и со квадрирање на последното неравен-

ство го добиваме бараното неравенство.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако точката D е средина на BC .



4. За секој природен број $n \geq 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m е природен број и $M = \{m, m+1, \dots, m+5\}$. Тогаш секое петелементно подмножество на M содржи три броја кои се по парови заемно прости.

Доказ. Лесно се гледа дека постои непарен број a таков што $A = \{a, a+2, a+4\} \subset M$. Барем еден од броевите $a+1$ и $a+3$ не е делив со 3. Тој број да го означиме со b и да го разгледаме множеството $B = \{a, a+2, a+4, b\} \subset M$. Тогаш елементите на B се по парови заемно прости, а секое петелементно подмножество на M содржи три елементи од B . Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Да го разгледаме множеството $X \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$ кое се состои од броевите деливи со 2 или со 3. Тогаш X го нема саканото својство, бидејќи во секое триелементно подмножество на X ќе има два броја со заеднички делител 2 или 3. Според тоа, секое множество со саканото својство има најмалку $|X| + 1$ елемент, па затоа

$$f(n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil + 1.$$

Со индукција ќе докажеме дека за секој избор на множество $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ со $g(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil + 1$ елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости. За забележиме дека $g(n+6) = g(n) + 4$.

Случаите $n = 3, 4, 5$ се тривијални, а за $n = 6$ тврдењето следува од лемата. За $n = 7$ ја применуваме лемата кога $1, 7 \notin A$, а во спротивен случај тројката $\{1, 7, x\}$, каде $x \neq 1, 7$ е произволен елемент од A е бараната тројка од условот на задачата. На сличен начин се разгледува и случајот $n = 8$.

Нека $n \geq 9$ и $f(k) \leq g(k)$ за секој $k \in \{3, 4, \dots, n-1\}$. Ако пресекот $A \cap \{n-5, n-4, \dots, n\}$ содржи барем 5 елементи, тогаш тврдењето следува од лемата. Ако $|A \cap \{n-5, n-4, \dots, n\}| \leq 4$, тогаш во A се содржат најмалку $g(n) - 4 = g(n-6)$ елементи од $\{1, 2, \dots, n-6\}$ и меѓу нив согласно индуктивната претпоставка постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.