Примитивна функција

1.Функцијата $F(x)=\frac{1}{6}x^6$ е примитивна функција за функцијата $f(x)=x^5$. Докажи!

Решение./

2.Функцијата $F(x)=2-e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$ е примитивна функција за функцијата $f(x)=e^{-x}+e^{-2x}$ на множеството реални броеви. Докажи!

Решение./

3.Функцијата $F(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ е примитивна функција на интервалот $(-\pi,\pi)$. Докажи!

Решение./

Непосредно интегрирање

1.Пресметај го интегралот

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx\,.$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegralnata funkcija:

$$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int\left(x^{-2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=(*)$$

Spored svojstvata na neopredelen integral i tablicata na integrali od elementarni funkcii imame:

$$(*)=\int x^{-2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+arctgx+C=$$
$$=-x^{-1}+arctgx+C=-\frac{1}{x}+arctgx+C\,.$$

Zna~i, $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{1}{x}+arctgx+C$.

2.Presmetaj go integralot

$$\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx\,.$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegral-nata funkcija

$$\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\right)dx=$$
$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=(*)$$

Koristej}i gi osobinite na neopredelen integral i tablicata na integrali od elementarni funkcii, imame:

$$(*)=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx=\ln|x|+2\int\frac{1}{1+x^2}dx=\ln|x|+2arctgx+C\,.$$

Zna~i,

$$\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx=\ln|x|+2arctgx+C\,.$$

3.Presmetaj go integralot

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx\,.$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegrl-anata funkcija:

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx=$$
$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$
$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$$

Zna~i,

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C\,.$$

4. Presmetaj go integralot:

$$\int tg^2 x dx .$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegral-nata funkcija

$$\int tg^2 x dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = (*)$$

Spored osobinite na neopredelen integral i tablicata na integrali od elementarni funkcii, imame:

$$(*) = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - x = tgx - x + C .$$

Zna~i,

$$\int tg^2 x dx = tgx - x + C .$$

5. Presmetaj go integralot

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx .$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegral-nata funkkcija, koristej}i go trigonometriskiot iden-titet $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = C - \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$$

Zna~i,

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = C - \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$$

6. Presmetaj go integralot

$$\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx .$$

Re{enie./Koristej}i go algebarskiot identitet $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$, dobivame:

$$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx = \int ((\sqrt{x})^3 + 1^3) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int 1 dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + C =$$

$$= x\left(\frac{2}{5}\sqrt{x^3} + 1 \right) + C .$$

Zna~i,

$$\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = x\left(\frac{2}{5}\sqrt{x^3} + 1 \right) + C .$$

7.. Presmetaj go integralot:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx .$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegral-nata funkcija

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = (*)$$

Koristej}i gi osobinite na neopredelen integral i tablicata na integrali od elementarni funkcii, imame:

$$(*) = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{3}x + 1 \right) + C$$

Zna~i,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{3}x + 1 \right) + C .$$

8.. Presmetaj go integralot

$$\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx .$$

Re{enie. Bidej}i $2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$, dobivame:

$$\int 2\sin^2\tfrac{x}{2}dx=\int(1-\cos x)dx=x-\sin x+C.$$

Zna~i,

$$\int 2\sin^2\tfrac{x}{2}dx=x-\sin x+C$$

9.Presmetaj go integralot:

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx.$$

Re{enie.]e napravime transformacija na podintegral-nata funkcija, koristej}i go trigonometriskite identi-teti $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ i $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pri {to dobiva-me:

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}dx=$$
$$=\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\frac{1}{2}\int 1dx=\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+\frac{1}{2}x+C.$$

Значи,

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{2}x+C.$$

10.Докажи дека, ако $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $a\neq 0$, тогаш $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Решение./Навистина, ако воведеме смена $ax+b=t$, тогаш $adx=dt$, т.е. $dx=\dfrac{1}{a}dt$, добиваме

$$\int f(ax+b)dx=\int f(t)\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

Што требаше и да се докаже.

11.Пресметај го интегралот

$$\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}=\int\frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3}dx=\int\frac{x^2+x^{-2}}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^5}dx=\ln x-\frac{1}{4x^4}+C.$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}=\ln x-\frac{1}{4x^4}+C.$$

12.Пресметај го интегралот

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=(*).$$

Ако ги примениме правилата (својствата) на неопределен интеграл и таблицата на интеграли од елементарни функ-ции,добиваме:

$$(*)=\int 1dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-arctgx+C.$$

Значи,

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=x-arctgx+C.$$

13.Пресметај го интегралот:

$$\int(\mathrm{tg}\phi+\mathrm{ctg}\phi)^2d\phi.$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int(\mathrm{tg}\phi+\mathrm{ctg}\phi)^2 d\phi=\int\left(\frac{\sin\phi}{\cos\phi}+\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right)^2 d\phi=\int\left(\frac{\sin^2\phi+\cos^2\phi}{\cos\phi\sin\phi}\right)^2 d\phi=$$
$$=\int\frac{1}{\sin^2\phi\cos^2\phi}d\phi=\int\frac{\sin^2\phi+\cos^2\phi}{\sin^2\phi\cos^2\phi}d\phi=$$
$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2\phi}+\frac{1}{\cos^2\phi}\right)d\phi=\int\frac{1}{\sin^2\phi}d\phi+\int\frac{1}{\cos^2\phi}d\phi=$$
$$=\mathrm{tg}\phi-\mathrm{ctg}\phi+C$$

Значи,

$$\int(\mathrm{tg}\,\phi+\mathrm{ctg}\,\phi)^2 d\phi=\mathrm{tg}\,\phi-\mathrm{ctg}\,\phi+C.$$

14. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција, користејќи алгебарски трансформации:

$$\int\frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx=\int\frac{x-4x^{\frac{5}{6}}+4x^{\frac{2}{3}}}{x}=\int\left(1-4x^{-\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=$$
$$=\int 1dx-4\int x^{-\frac{1}{6}}dx+4\int x^{-\frac{1}{3}}dx=x-4\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1}+4\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C$$
$$=x-4x^{\frac{5}{6}}+4x^{\frac{2}{3}}+C=x-4\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt[3]{x^2}$$

Значи,

$$\int\frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}dx=x-4\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt[3]{x^2}+C$$

15. Пресметај го интегралот:

$$\int x(x+1)(x-2)dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција и ќе ги примениме својствата за пресмету-вање на неопределен интеграл:

$$\int x(x+1)(x-2)dx=\int x(x^2-x-2)dx=\int(x^3-x^2-2x)dx=$$
$$=\int x^3dx-\int x^2dx-\int 2xdx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+C.$$

Значи,

$$\int x(x+1)(x-2)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+C.$$

16. Пресметај го интегралот:

$$\int(x^2-1)^3dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција и ќе ги примениме својствата за пресмету-вање на неопределен интеграл:

$$\int(x^2-1)^3dx=\int(x^6-3x^4+3x^2-1)dx=\int x^6dx-3\int x^4dx+3\int x^2dx-\int 1dx=$$
$$=\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x+C.$$

Значи,

$$\int(x^2-1)^3dx=\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x+C.$$

17. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција и ќе ги примениме својствата за пресмету-вање на неопределен интеграл

$$\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$$
$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C=$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C=2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{3}x+1\right)+C$$

Значи,

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{3}x+1\right)+C.$$

18. Пресметај го интегралот

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}\,dx = \int \sqrt{x\cdot x^{\frac{3}{4}}}\,dx = \int \sqrt{x^{\frac{7}{4}}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{7}{8}}dx = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}}+C = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+C.$$

Значи,

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+C.$$

19. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx.$$

20. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\right)dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}dx - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \arcsin x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

21. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција и ќе ги примениме својствата за пресмету-вање на интеграли:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\right)dx = \int\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}+C$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}+C$$

22. Пресметај го интегралот:

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}\,dx=$$

$$=\int x^{\frac{3}{4}}dx-\int\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2}dx=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-\int x^{-\frac{5}{4}}dx=\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}-\frac{x^{-\frac{5}{4}+1}}{-\frac{5}{4}+1}+C=$$

$$=\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+C=\frac{4}{7}\frac{x^2+7}{\sqrt[4]{x}}+C$$

Значи,

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\frac{4}{7}\frac{x^2+7}{\sqrt[4]{x}}+C$$

23. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx\,.$$

Решение./

24. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}dx\,.$$

Решение. Ќе направиме алгебарски трансформации на подинтегралната функција

$$\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(5\frac{x^2}{\sqrt{x}}-6\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=5\int x^{\frac{3}{2}}dx-6\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=5\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}-6\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

Значи,

$$=2x^2\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C=\sqrt{x}(2x^2-4x+2)+C$$

$$\int\frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,(2x^2-4x+2)+C$$

25. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx\,.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција со

$$\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{1-3x+3x^2-x^3}{x\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3\frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{x^3}{x\sqrt[3]{x}}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{4}{3}}dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}dx+3\int x^{\frac{2}{3}}dx-\int x^{\frac{5}{3}}dx=$$

$$=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+C=$$

$$=-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}+C=C-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(3+\frac{9}{2}x-\frac{9}{5}x^2+\frac{3}{8}x^3\right)$$

Значи,

$$\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx=C-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(3+\frac{9}{2}x-\frac{9}{5}x^2+\frac{3}{8}x^3\right).$$

26. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$$

Решение./

27. Пресметај го интегралот:

$$\int(2^x+3^x)^2\,dx\,.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int(2^x+3^x)^2dx=\int(2^{2x}+2\cdot2^x3^x+3^{2x})dx=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx=$$

$$=\int4^xdx+2\int6^xdx+\int9^xdx=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C$$

Значи,

$$\int(2^x+3^x)^2dx=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C\ .$$

28. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx\ .$$

Решение./

29. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$$

Решение./

30. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx\ .$$

Решение./

31. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}dx=$$
$$=\int\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int 2dx-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=2x-\mathrm{tg}x+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx=2x-\mathrm{tg}\,x+C\ .$$

32. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx\ .$$

Решение./

33. Пресметај го интегралот:

$$\int x^2(2-x)^3dx\ .$$

Решение./

34. Пресметај го интегралот:

$$\int(1-2x)(1-3x)(1-4x)dx\ .$$

Решение./

35. Пресметај го интегралот:

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}+1\right)dx=$$
$$=\int x^{-2}dx-2\int\frac{1}{x}dx+\int 1dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2\ln x+x+C=$$
$$=x-\frac{1}{x}-2\ln x+C\ =\frac{x^2-1}{x}-\ln x^2+C$$

Значи,

$$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\frac{x^2-1}{x}-\ln x^2+C$$

36. Пресметај го интегралот:

$$\int(\sqrt{x}-x)^3dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$\int(\sqrt{x}-x)^3dx$

37. Пресметај го интегралот:

$$\int\sqrt[3]{x^3+3x+3x^{-1}+x^{-3}}\,dx\ .$$

Решение./Подинтегралната функција можеме да ја запишеме во облик

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x+3x^{-1}+x^{-3}}=\sqrt[3]{x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\sqrt[3]{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3}=x+\frac{1}{x}\ .$$

Сега е јасно дека

$$\int\sqrt[3]{x^3+3x+3x^{-1}+x^{-3}}\,dx=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|+C\ .$$

38. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{1+\sin^2x}{1+\cos2x}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција, користејќи ги тригонометриските иден-титети $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x$, $\sin^2x+\cos^2x=1$, при што

$$\int\frac{1+\sin^2x}{1+\cos2x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x+\sin^2x}{\sin^2x+\cos^2x+\cos^2x-\sin^2x}dx=$$

$$=\int\frac{2-\cos^2x}{2\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int\frac{1}{2}dx=\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}x+C$$

Значи,

$$\int\frac{1+\sin^2x}{1+\cos2x}dx=\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}x+C\ .$$

39. Пресметај го интегралот

$$\int\operatorname{ctg}^2xdx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција користејќи ја тригонометриската релација $\sin^2x+\cos^2x=1$. При тоа

$$\int\operatorname{ctg}^2xdx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=$$
$$=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int1dx=\operatorname{tg}x-x+C\ .$$

Значи,

$$\int\operatorname{ctg}^2xdx=\mathbf{tg}x-x+C\ .$$

40. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^xdx+\int\frac{1}{x}dx=$$
$$=C-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}-e^x+\ln x\ .$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=C-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}-e^x+\ln x\ .$$

41. Пресметај го интегралот

$$\int(2x^2+1)^3dx\ .$$

Решение. $\int(2x^2+1)^3dx=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+C$.

42. Пресметај го интегралот

$$\int(1+\sqrt{x})^4dx\ .$$

Решение. $\int(1+\sqrt{x})^4dx=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C$.

43. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx .$$

Решение. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln x + \frac{1}{x} + C$.

44. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx .$$

Решение. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$.

45. Определи примитивна фунмција за функцијата $f(x) = x|x|$.

Решение.//Функцијата $f(x) = x|x|$ можеме да ја претставиме во облик

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 , & x < 0 \\ x^2 , & x \geq 0 \end{cases}$$

За негативниот дел на x -оската имаме примитивна функција

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} ,$$

А за позитивниот дел на x -оската имаме примитивна функција

$$F(x) = \frac{x^3}{3} .$$

Бидејќи $F(x) = \frac{|x|^3}{3} = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} , & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} , & x > 0 \end{cases}$, примитивната функција за $f(x) = x|x|$ е функцијата $F(x) = \frac{|x|^3}{3}$.

Теорема за смена на променливи во неопределен интеграл

1.Пресметај го интегралот

$$\int tg^3 x dx .$$

Решение. **Јасно е дека дадениот интеграл не е табличен случај. Според тоа, ќе направиме трансформација на подинтегралната функција. При тоа**

$$\int tg^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx = (*)$$

Сега е јасно дека треба да воведее смена $\cos x = t \;\; \Rightarrow \;\; \sin x dx = -dt$ **, од каде што непосредно добиваме**

$$(*) = -\int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t^3} dt = \ln t + \frac{1}{2t^2} + C = \ln \cos x + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Значи

$$\int tg^3 x dx = \ln \cos x + \frac{1}{2\cos^2 x} + C \; .$$

2.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \, .$$

Решение. Воведуваме смена $\cos x = t \;\Rightarrow\; \sin x dx = -dt$ и доби-ваме:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C \, .$$

Значи,

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C \, .$$

3.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx \, .$$

Решение.Ако воведеме смена $t = e^x + 1 \;\Rightarrow\; dt = e^x dx$, доби-ваме:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(e^x + 1) + C \, .$$

Значи,

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + C$$

4.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Решение.Воведуваме смена $t = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = 2x$, т.е. $xdx = \frac{1}{2} dt$, и добиваме

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \, .$$

Значи,

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \, .$$

5.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

Решение.Воведуваме смена $t = x^2 + 1$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = 2x$, т.е. $xdx = \frac{1}{2} dt$ добиваме:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2} \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} + C \end{aligned} .$$

6.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx \, .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{e^x (1 + e^{-x})} dx = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = (*) \, .$$

Воведуваме смена $t = 1 + e^{-x}$, $-dt = e^{-x}dx$ и добиваме:

$$(*) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(1 + e^{-x}) + C .$$

Значи,

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = C - \ln(1 + e^{-x})$$

7. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2)^2 + 1} dx = (*) .$$

Воведуваме смена $t = x^2$, $dt = 2xdx$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C .$$

Значи,

$$\int \frac{x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C .$$

8. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx .$$

Решение./

9. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{(\ln x)^m}{x} dx \text{ , } m \in R \text{ .}$$

Решение./Во оваа ситуација ќе разгледаме два случаи.

а) $m = 1$

Во оваа ситауција добиваме дека

10. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Решение./

11. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx .$$

Решение. Воведуваме смена $t = x^2 + 1$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = 2x$, т.е. $xdx = \frac{1}{2}dt$, добиваме:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

Значи,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} + C .$$

12. Пресметај го интегралот

а) $\int \operatorname{tg} x dx$ б) $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Решение. а) Воведуваме смена $t = \cos x$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, т.е. $\sin x dx = -dt$, добиваме:

$$\int \text{тг} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = C - \ln|\cos x| .$$

Значи,

$$\int \operatorname{tg} x dx = C - \ln|\cos x|$$

13. Пресметај го интегралот:

$$\int e^x \sin e^x dx .$$

Решение./

14. Пресметај го интегралот

$$\int e^{-3x+1} dx$$

Решение./

15. Пресметај го интегралот

$$\int tg^4 x dx \ .$$

Решение./ Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int tg^4 x dx = \int tg^4 x \frac{1}{tg^2 x+1}\frac{1}{\cos^2 x}dx = (*) \ .$$

Воведуваме смена $t = tgx$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, добиваме

$$(*) = \int t^4 \frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{t^4}{t^2+1}dt = (**) \ .$$

Користејќи гои равенството $\frac{t^4}{t^2+1} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$, добиваме:

$$(**) = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - t + arctgt + C =$$
$$= \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + arctg(tgx) + C = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x + C \ .$$

Значи,

$$\int tg^4 x dx = \frac{1}{3}tg^3 x - tgx + x + C \ .$$

16. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}} \ .$$

Решение./

17. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx \ .$$

Решение. Воведуваме смена $\mathrm{arctg}\,x = t$, $\frac{1}{1+x^2}dx = dt$ и добиваме:

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^2\, x}{1+x^2}dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}arctg^3 x + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^2\, x}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}^3\, x + C \ .$$

18. Пресметај го интегралот:

$$\int \cos^3 x \sin 2x dx \ .$$

Решение./

19. Прерсметај го интегралот

а) $\int \sin^4 x dx$ б) $\int \cos^4 x dx$

Решение./

20. Пресметај го интегралот

а) $\int \cos^5 x dx$ б) $\int \sin^5 x dx$ в) $\int \mathrm{tg}^5\, x dx$.

Решение./

21. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

Решение. Воведуваме смена $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$ и добиваме:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{\ln x}\frac{1}{x}dx = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + C$$

22. Пресметај го интегралот

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx$$

Решение./ Ако воведеме смена $t = 1 - x^2$, $xdx = -\frac{1}{2}dt$, добиваме:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=C-\frac{1}{3}\sqrt{t^3}=C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\ .$$

Значи,

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx==C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\ .$$

23. Пресметај го интегралот

а) $\int\sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$ **б)** $\int\sqrt{8-2x}\,dx$ **в)** $\int\frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}dx$

Решение./

24. Пресметај го интегралот

а) $\int\frac{dx}{(2x-3)^5}$ б) $\int\frac{dx}{(ax+b)^c}$ в) $\int ctg(2x+1)dx$.

Решение./

25. Пресметај го интегралот:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\ .$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1-x)(1+x)}}dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=(*)$$

Во вториот интеграл воведуваме смена $t=1-x^2$, $xdx=-\frac{1}{2}dt$ и добиваме:

$$(*)=\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\arcsin x+\sqrt{t}+C=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\ .$$

Значи,

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\ .$$

26. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx\ .$$

Решение./

27. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$$

Решение./

28. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx\ .$$

Решение./

29. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}=\int\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2(x-\sqrt{x^2-1})^2}=\int\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2dx}{[x^2-(\sqrt{x^2-1})^2]^2}=$$
$$=\int(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)dx=$$
$$=\frac{2}{3}x^3-x-\int 2x\sqrt{x^2-1}dx=(*)$$

Воведуваме смена $t=x^2-1$, $dt=2xdx$ и добиваме:

$$(*)=\frac{2}{3}x^3-x-\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}x^3-x-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C=\frac{2}{3}x^3-x-\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}=\frac{2}{3}x^3-x-\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$$

30. Пресметај го интегралот

а) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$. **б)** $\int (e^x-1)^3 dx$

Решение.а)Ќе направиме трансформација на подинте-гралната функција

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int (e^{2x}-1)e^{-x}dx = \int [(e^{-x})^{-2}-1]e^{-x}dx = (*) \ .$$

Воведуваме смена $t=e^{-x}$, $e^{-x}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*) = -\int (t^{-2}-1)dt = -\int \left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt = \frac{1}{t}+t+C = \frac{1}{e^{-x}}+e^{-x}+C = e^x+\frac{1}{e^x}+C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = e^x+\frac{1}{e^x}+C \ .$$

31.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}}{e^x}dx \ .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \frac{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}}{e^x}dx = \int \frac{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}{e^x}dx = \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}dx = \int \left(\frac{1}{e^{-x}}+e^{-x}\right)e^{-x}dx = (*)$$

Воведуваме смена $t=e^{-x}$, $e^{-x}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*) = -\int \left(\frac{1}{t}+t\right)dt = C-\ln t-\frac{1}{2}t^2 = C-\ln e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x} = C+x-\frac{1}{2e^{2x}} \ .$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}}{e^x}dx = C+x-\frac{1}{2e^{2x}}$$

32.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \ .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \int \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{1}{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx = (*) \ .$$

Воведуваме смена $t=e^x$. Бидејќи $\frac{dt}{dx}=e^x$, т.е. $dt=e^x dx$, добиваме:

$$(*) = \int \frac{1}{t^2+1}dt = arctgt + C = arctg\, e^x + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = arctg\, e^x + C \ .$$

33.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = (*)$$

Воведуваме смена $t=\sqrt{x}$. Бидејќи $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, т.е. $2dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, добиваме

$$(*) = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}2dt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = 2\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C = 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C.$$

34.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \ .$$

Решение.Ќе направиме трансфомација на подинтеграл-ната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(e^x)[(e^{-x})^2+1]}} = \int \frac{1}{e^x\sqrt{(e^{-x})^2+1}}dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}}dx = (*) \ .$$

Воведуваме смена $t=e^{-x}$. Бидејќи $\frac{dt}{dx}=-e^{-x}$, т.е. $-dt=e^{-x}dx$, добиваме:

$$(*) = \int \frac{-dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C = C-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}) \ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = C-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}) \ .$$

35. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1+2e^x+(e^x)^2}{1+(e^x)^2}dx = \int\left(1+\frac{2e^x}{1+(e^x)^2}\right)dx = x+\int \frac{2e^x}{1+(e^x)^2}dx = (*)\ .$$

Воведуваме смена $t = e^x$, $dt = e^x dx$ и добиваме:

$$(*) = x + 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = x + 2\operatorname{arctg} t + C = x + 2\operatorname{arctg} e^x + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx = x + 2\operatorname{arctg} e^x + C\ .$$

36. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (tg^2 x+1)\frac{1}{\cos^2 x}dx = (*)\ .$$

Воведуваме смена $t = tgx$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, добиваме:

$$(*) = \int (t^2+1)dt = \frac{1}{3}t^3 + t + C = \frac{1}{3}tg^3 x + tgx + C$$

Значи,

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx = \frac{1}{3}tg^3 x + tgx + C\ .$$

37. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}\ .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg}^2 x+1)\frac{1}{\cos^2 x}dx = (*)\ .$$

Воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$, $\frac{1}{\cos^2 x}dx = dt$, и добиваме:

$$(*) = \int\left(\frac{1}{t} + t\right)dt = \ln t + \frac{1}{2}t^2 + C = \ln\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \ln\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$$

38. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int tg^2 x(tg^2 x+1)\frac{1}{\cos^2 x}dx = (*)\ .$$

Воведуваме смена $t = tgx$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, добиваме:

$$(*) = \int t^2(t^2+1)dt = \int (t^4+t^2)dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{3}tg^3 x + C\ .$$

39. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx\ .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = (*)\ .$$

Воведуваме смена $t = \frac{x}{2}$, $dx = 2dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{2dt}{2\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\ .$$

40. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1}{1-\cos x}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{1}{1-\cos x}dx = \int \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx = (*)\ .$$

Воведуваме смена $t=\frac{x}{2}$, $dx=2dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{2dt}{2\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C = C - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\ .$$

Значи,

$$\int \frac{1}{1-\cos x}dx = C - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\ .$$

41. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$$

Решение./

42. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x(1+e^{-x})}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x}\sqrt{1+e^{-x}}} = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{1+e^{-x}}} = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{1+(e^{-\frac{x}{2}})^2}} = (*)\ .$$

Воведуваме смена $e^{-\frac{x}{2}} = t$, $e^{-\frac{x}{2}}dx = -2dt$, и добиваме:

$$(*) = \int \frac{-2dt}{\sqrt{1+t^2}} = -2\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C = C - 2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{e^{-x}+1}\right)\ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = C - 2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{e^{-x}+1}\right).$$

43. Пресметај го интегралот:

$$\int (tg\varphi + ctg\varphi)^2 d\varphi\ .$$

Решение./ Ќе направиме трансформација на подинте-гралната функција:

$$\int (tg\varphi+ctg\varphi)^2 d\varphi = \int\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 d\varphi = \int\left(\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi}\right)^2 d\varphi =$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}d\varphi = \int \frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}d\varphi =$$
$$= \int\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}+\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi = \int \frac{1}{\sin^2\varphi}d\varphi + \int \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi =$$
$$= tg\varphi - ctg\varphi + C$$

Значи,

$$\int (tg\varphi + ctg\varphi)^2 d\varphi = tg\varphi - ctg\varphi + C$$

44. Пресметај го интегралот:

$$\int (\sin\varphi - \cos\varphi)^2 d\varphi\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int (\sin\varphi-\cos\varphi)^2 d\varphi = \int (\sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = \int 1d\varphi - \int \sin 2\varphi d\varphi = (*).$$

Во вториот интеграл воведуваме смена $2\varphi = t$, $d\varphi = \frac{1}{2}dt$ и добиваме:

$$(*) = \varphi - \frac{1}{2}\int \sin t dt = \varphi + \frac{1}{2}\cos t + C = \varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + C\ .$$

Значи,

$$\int (\sin\varphi - \cos\varphi)^2 d\varphi = \varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + C\ .$$

45. Пресметај го интегралот:

$$\int x\sqrt{a-x}dx \ .$$

Решение.Воведуваме смена $a-x=t^2$, $dx=-2tdt$ и доби-ваме:

$$\int x\sqrt{a-x}dx=-2\int(a-t^2)t\cdot tdt=-2\int(at^2-t^4)dt=$$
$$=-\frac{2a}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5+C=C-\frac{2a}{3}\sqrt{(a-x)^3}+\frac{2}{5}\sqrt{(a-x)^5} \ .$$

Значи,

$$\int x\sqrt{a-x}dx=C-\frac{2a}{3}\sqrt{(a-x)^3}+\frac{2}{5}\sqrt{(a-x)^5} \ .$$

46.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \ .$$

Решение.Ќе направиме трансфроамција на подинтеграл-ната функција:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=(*) \ .$$

Воведуваме смена $\frac{1}{x}=t$, $\frac{1}{x^2}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*)=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=C-\ln(t+\sqrt{t^2+1})=C-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=C-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \ .$$

47.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{\sin 2x} \ .$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{dx}{\sin 2x}=\int\frac{dx}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\operatorname{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}dx=(*) \ .$$

Воведуваме смена $\operatorname{tg}x=t$, $\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}x+C \ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}x+C \ .$$

48.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx \ .$$

Решение.Воведуваме смена $2+\cos^2 x=t$, $2\sin x\cos xdx=-dt$, т.е. $\sin 2xdx=-dt$ и добиваме:

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx=-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-2\sqrt{t}+C=C-2\sqrt{2+\cos^2 x} \ .$$

Значи,

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{2+\cos^2 x}}dx=C-2\sqrt{2+\cos^2 x} \ .$$

49.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

Решение./

50.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx \ .$$

Решение./

51.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x} \ , \ |x|<\frac{\pi}{2} \ .$$

Решение./

52.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

Решение./

53. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx \ .$$

Решение./

54. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx \ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}} dx = (*) \ .$$

Воведуваме смена $\sqrt{2}\cos x = t$, $\sin x dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} dt$ и добиваме:

$$(*) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| + C = C - \ln|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}|$$

Значи,

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = C - \ln|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}|$$

55. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx \ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - 2\sin^2 x}} dx = (*) \ .$$

Воведуваме смена $\sqrt{2}\sin x = t$, $\sqrt{2}\cos x dx = dt$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}\sin x) + C \ .$$

56. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{25\sin^2 x + 9\cos^2 x}} dx \ .$$

Решение./

57. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}} dx \ .$$

Решение./

58. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\sin 2\mathrm{x}} dx \ .$$

Решение./

59. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{e^{\mathrm{tg}\, x} + c\,\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x} dx \ .$$

Решение./

60. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{e^{\sin x} - 1}} dx \ .$$

Решение./

61. Пресметај го интегралот:

$$\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x) dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтеграл-ната функција:

$$\int (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x) dx = \int \mathrm{tg}^2 x (1 + \mathrm{tg}^2 x) dx = \int \mathrm{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx = (*)$$

Воведуваме смена $\mathrm{tg}\, x = t$, $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ и добиваме:

$$(*)=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\text{tg}^3 x+C .$$

Значи,

$$\int(\text{tg}^2 x+\text{tg}^4 x)dx=\frac{1}{3}\text{tg}^3 x+C .$$

Посебни видови смени и класи на интеграбилни функции

Интеграли од прости ирационални функции

1. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} .$$

Решение. Воведуваме смена $t=\sqrt{x}$, т.е. $x=t^2$. Бидејќи $\frac{dx}{dt}=2t$, т.е. $dx=2tdt$, добиваме:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{(1+t^2)t}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=2arctg\sqrt{x}+C .$$

2. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx .$$

Решение./Воведуаме смена $t=\sqrt{x}$, т.е. $x=t^2$. Бидејќи $\frac{dx}{dt}=2t$, т.е. $dx=2tdt$, добиваме:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=\int\frac{t}{1+t^2}2tdt=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$
$$=2\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-arctgt)+C .$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C .$$

3. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}} .$$

Решение. Воведуваме смена $t=\sqrt{x}$, т.е. $x=t^2$. Бидејќи $\frac{dx}{dt}=2t$, т.е. $dx=2tdt$, добиваме:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{t}{t+1}dt=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=2t-2\int\frac{1}{t+1}dt=(*) .$$

Воведуваме нова смена $z=t+1 \Rightarrow dz=dt$ и добиваме:

$$(*)=2t-2\int\frac{1}{z}dz=2t-2\ln z+C=2t-2\ln(1+t)+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C .$$

4. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} .$$

Решение. Воведуваме смена $t=\sqrt[4]{x}$, т.е. $x=t^4$. Бидејќи $\frac{dx}{dt}=4t^3$, т.е. $dx=4t^3dt$, добиваме:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int\frac{t^3}{t(t+1)}dt=4\int\frac{t^2}{t+1}dt=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=$$
$$=4\int\left(\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=4\frac{1}{2}t^2-4t+4\ln(t+1)+C=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C .$$

5. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$$

Решение. Воведуваме смена $t=\sqrt[3]{x+1}$, т.е. $x=t^3-1$. Бидејќи $\frac{dx}{dt}=3t^2$, т.е. $dx=3t^2dt$, добиваме:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\int \frac{3t^2dt}{1+t}=3\int \frac{t^2}{t+1}dt=3\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt=3\int\left(\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln(t+1)+C=$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)+C .$$

6. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$$

Решение./

7. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} .$$

Решение. Воведуваме смена $1+x=t^2$, т.е. $x=t^2-1$ $dx=2tdt$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}=\int \frac{2tdt}{(2+t^2-1)\sqrt{t^2}}=\int \frac{2}{t^2+1}dt=2\operatorname{arctg} t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}=2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C .$$

8. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$$

Решение. Воведуваме смена $t=\sqrt{x}$, т.е. $x=t^2$, $dx=2tdt$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}=\int \frac{2tdt}{\sqrt{t^2}(t^2-1)}=2\int \frac{dt}{t^2-1}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}=\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C .$$

9. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1} .$$

Решение. Воведуваме смена $x=t^4$, $dx=4t^3$ и добиваме:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}=\int \frac{\sqrt{t^4}\,4t^3dt}{\sqrt[4]{t^{12}}+1}=4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int \frac{t^3}{t^3+1}t^2dt=(*) .$$

Воведуваме нова смена $t^3+1=z$, $t^2dt=\frac{1}{3}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{4}{3}\int \frac{z-1}{z}dz=\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}\ln z+C=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln(t^3+1)+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)+C .$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)+C .$$

10. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$$

Решение. Воведуваме смена $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ и доби-ваме:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \int \frac{\sqrt[3]{t^6}}{t^6(\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6})}6t^5dt = \int \frac{6t^7}{t^6(t^3+t^2)}dt =$$
$$= 6\int \frac{1}{t(t+1)}dt = 6\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\ln t - 6\ln(t+1) =$$
$$= 6\ln\frac{t}{t+1} + C = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)} + C$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx = \ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)} + C$$

11. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}\ . \quad ab>0$$

Решение./

Решение: $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}arctg\sqrt{\frac{ax}{b}} + C$

12. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx = x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{1+x}-1) + C$

13. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

14. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx = \frac{6}{5}[\ \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|\ ] + C$

15. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$

16. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + C$

17. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$.

18. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}\ .$$

Решение./

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m} = \frac{2}{a}[\sqrt{ax+b} - m\ln|\sqrt{ax+b}+m|]$.

19. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$$

Решение./

Решение. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C$.

20. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$$

Решение./

Решение. $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx = x\sqrt{1+2x} - \frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

Интегтрали од облик $\int R(x,\sqrt{a^2 \pm x^2})dx$ и $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$, каде $R=R(u,v)$ е рационална функција од две променливи.

1. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Решение. Воведуваме смена $x = a\,tgt$. Бидејќи $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$, добиваме:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}}{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t}+a^2}}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = (*).$$

Воведуваме нова смена $z = \sin t$, $\cos t dt = dz$, па според тоа

$$(*) = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{a^2}\int z^{-2}dz = \frac{1}{a^2}\frac{z^{-1}}{-1}+C = C - \frac{1}{a^2}\frac{1}{z} =$$

$$= C - \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin t} = C - \frac{1}{a^2}\frac{1}{\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}} = C - \frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{\frac{x}{a}} =$$

$$= C - \frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = C - \frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}.$$

2. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Решение./

3. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Решение./

4. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$$

Решение./

5. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$$

Решение./

6. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}.$$

Решение./

7. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$$

Решение./

8. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

Решение./

9. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Решение. Интегралот ќе го пресметаме на два начини.

10. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$$

Решение. Ако воведеме смена $x=\frac{a}{\cos t}$, т.е. $t=\arccos\frac{a}{x}$, $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$, добиваме:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=\int \frac{\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{(\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2)^3}}=\int \frac{\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{(\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t})^3}}=\int \frac{\frac{a\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{a^3\sin^3 t}{\cos^3 t}}dt=$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=(*)$$

Воведуваме нова смена $z=\sin t$, $dz=\cos t dt$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{a}\int \frac{1}{z^2}dz=-\frac{1}{a}\frac{1}{z}+C=C-\frac{1}{a}\frac{1}{\sin t}=C-\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}=$$

$$=C-\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}}=C-\frac{1}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=C-\frac{1}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

11. Пресметај го интегралот

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$$

Решение./

12. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$$

Решение./

13. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Решение. Во суштина тоа е интеграл кој може на елементарен начин да се премсета. Но овде ние ќе наведеме два начини како истиот може да најде.

I начин

Воведуваме смена $x=\sin^2 t$. Сега, $dx=2\sin t\cos t\,dt$, од каде што добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t-\sin^4 t}}=\int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}}=\int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}=2\int \frac{\sin t\cos t}{\sin t\cos t}dt=2\int 1dt=2t+C=2\arcsin\sqrt{x}+C$$

II начин

Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=(*)$$

Воведуваме смена $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t$, т.е. $dx=\frac{1}{2}dt$, при што добиваме дека

$$(*) = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t^2}}\frac{1}{2}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + C = \arcsin(2x-1)+C\,.$$

Интеграли од облик $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, каде $R=R(u,v)$ е рационална функција од две променливи.

1. Да се пресмета

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4+1-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4+(x-1)^2}} = (*)$$

Воведуваме смена $x-1=2t \quad \Rightarrow \quad dx = 2dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{2dt}{\sqrt{4+(2t)^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C = \ln\left(\tfrac{x-1}{2}+\sqrt{1+\left(\tfrac{x-1}{2}\right)^2}\right)+C = \ln\left(x-1+\sqrt{5-2x+x^2}\right)+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \ln\left(x-1+\sqrt{5-2x+x^2}\right)+C$$

2. Да се пресмета

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+1+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = (*)$$

Воведуваме смена $3x-1=t \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{1}{3}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C = \frac{1}{3}\ln\left(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \frac{1}{3}\ln\left(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)+C$$

3. Да се пресмета

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = (*)$$

Воведуване смена $3x-2=\sqrt{2}t \quad \Rightarrow \quad 3dx = \sqrt{2}dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{1}{\sqrt{2-\left(\sqrt{2}t\right)^2}}\frac{\sqrt{2}}{3}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\arcsin t + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$$

4. Да се пресмета

$$\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx = -4\int \frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{6-1+2x-x^2}} = -4\int \frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} = (*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $5+2x-x^2 = t \Rightarrow (2-2x)dx = dt$, а во вториот интеграл воведуваме смена $x-1 = \sqrt{6}t \Rightarrow dx = \sqrt{6}dt$ и добиваме:

$$(*) = -4\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt - 3\int \frac{1}{\sqrt{6-\left(\sqrt{6}z\right)^2}}\sqrt{6}dt = -4\cdot 2\sqrt{t} - 3\int \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6-6z^2}}dz =$$

$$= -8\sqrt{t} - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin z + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C$$

Значи,

$$\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx = -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C$$

5. Да се пресмета

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{\left(x+1\right)^2+1}dx = (*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t = x^2+2x+2 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$, а во вториот интеграл воведуваме смена $x+1 = z \Rightarrow dx = dz$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2}\ln t + arctgz + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + arctg(x+1) + C$$

Значи,

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \ln\sqrt{x^2+2x+2} + arctg(x+1) + C$$

6. Да се пресмета

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx = (*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t = 3-2x-x^2 \Rightarrow dt = (-2-2x)dx$, а во вториот интеграл воведуваме смена $x+1 = 2z \Rightarrow dx = 2dz$ и добиваме:

$$(*) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt - 4\int \frac{1}{\sqrt{4-(2z)}}2dz = -\frac{1}{2}2\sqrt{t} - 4\int \frac{1}{\sqrt{4-4z^2}}2dz = -\sqrt{t} - 4\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz =$$

$$= -\sqrt{t} - 4\arcsin z + C = -\sqrt{3-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

Значи,

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -\sqrt{3-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

7. Да се пресмета

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \frac{1}{8}\int \frac{24x-12+4}{4x^2-4x+17}dx = \frac{3}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+17}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x-1)^2+16}dx = (*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t = 4x^2-4x+17 \Rightarrow dt = (8x-4)dx$ а во вториот интеграл воведуваме смена $2x-1 = 4z \Rightarrow dx = 2dz$ и добиваме:

$$(*) = \frac{3}{8}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(4z)^2+16}2dz = \frac{3}{8}\ln t + \frac{1}{16}\int \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{3}{8}\ln t + \frac{1}{16}arctgz + C =$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4} + C$$

Значи,

$$\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx = \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4} + C$$

8. Да се пресмета

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{3x+3-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx = (*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t = x^2+2x+2 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$, а во вториот интеграл воведуваме смена и добиваме:

$$(*) = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt - 4\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz = \frac{3}{2}2\sqrt{t} - 4\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) + C = 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) =$$

$$= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$$

Значи,

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$$

9. Да се пресмета

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$$

Решение. Подинтегралната функција е рационална функција при што нули на именителот се $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$. Истата ќе ја разложиме на прости дропки т.е.

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = \frac{x-2}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} = \frac{(A+B)x-3B-4A}{(x-3)(x-4)}$$

Од теоремите за еднаквост на рационални функции имаме:

$$1x-2 = (A+B)x-3B-4A$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми имаме:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+3B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A+4B=4 \\ 4A+3B=2 \end{cases}$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка имаме $B=2$ па според тоа $A=-1$, односно разложувањето гласи:

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12}=-\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}$$

па ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx=-\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{2}{x-4}dx=-\ln(x-3)+2\ln(x-4)+C=\ln\frac{(x-4)^2}{x-3}+C$$

Значи,

$$\int\frac{x-2}{x^2-7x+12}dx=\ln\frac{(x-4)^2}{x-3}+C$$

10. Да се пресмета

$$\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=\frac{1}{9}\int\frac{18x+45}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=\frac{1}{9}\int\frac{18x+6}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx+\frac{39}{9}\int\frac{1}{\sqrt{9x^2+6x+1+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{18x+6}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx+\frac{13}{3}\int\frac{1}{\sqrt{\left(3x+1\right)^2+1}}dx=(*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t=9x^2+6x+2\Rightarrow dt=(18x+6)dx$ а во вториот интеграл воведуваме смена $z=3x+1\Rightarrow dz=3dx\Rightarrow dx=\frac{1}{3}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt+\frac{13}{9}\int\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz=\frac{1}{9}2\sqrt{t}+\frac{13}{9}\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)+C=$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$$

Значи,

$$\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx=\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$$

11. Да се пресмета

$$\int\frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$$

Решение. Подинтегралната функција е рационална функција, чиј што именител има реални корени $x_1=1$ и $x_2=\frac{1}{2}$, т.е.

$$\frac{3-4x}{2x^2-3x+1}=\frac{3-4x}{(x-1)(2x-1)}$$

Истата ќе ја разложиме на прости функции т.е.

$$\frac{3-4x}{(x-1)(2x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}=\frac{(2A+B)x-B-A}{(x-1)(2x-1)}$$

Според теоремите за еднаквост на рационални функции имаме:

$$3-4x=(2A+B)x-B-A$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми имаме

$$\begin{cases}2A+B=-4\\A+B=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\A+B=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=-2\end{cases}$$

односно разложувањето гласи:

$$\frac{3-4x}{(x-1)(2x-1)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{-2}{2x-1}$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{3-4x}{(x-1)(2x-1)}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{2}{2x-1}dx=(*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t=x-1\Rightarrow dt=dx$ а во вториот интеграл воведуваме смена $z=2x-1\Rightarrow dz=2dx$ и добиваме:

$$(*)=-\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{z}dz=-\ln t-\ln z+C=C-\ln[(x-1)(2x-1)]=C-\ln\left(2x^2-3x+1\right)$$

Значи,

$$\int\frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx\ \ =C-\ln\left(2x^2-3x+1\right)$$

Парцијална интеграција

1. Пресметај го интегралот

$$\int xe^x dx.$$

Решение. Ќе направиме парцијални интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{cases},$$

при што добиваме:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C .$$

Значи,

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C .$$

2. Пресметај го интегралот

$$\int x \ln x dx .$$

Решение./Ако направиме парцијална интеграција со:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int dv = \int xdx = \frac{1}{2} x^2 \end{cases},$$

и добиваме:

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C .$$

Значи,

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C .$$

3. Пресметај го интегралот:

$$\int x \sin x dx .$$

Решение./Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C .$$

Значи,

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

4. Пресметај го интегралот:

$$\int x arctgx dx .$$

Решение. Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = arctgx \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = \int dv = \int xdx = \frac{1}{2} x^2 \end{cases},$$

и добиваме:

$$\begin{aligned} \int x arctgx dx &= \frac{1}{2} x^2 arctgx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 arctgx - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 arctgx - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 arctgx - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arctgx + C \end{aligned}$$

Значи,

$$\int x arctgx dx = \frac{1}{2} x^2 arctgx - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arctgx + C .$$

5. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx .$$

Решение./Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1} \end{cases}$, со што добиваме

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C,$$

(во последниот интеграл воведовме смена $1-x=t, dx=-dt$).

Значи,

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$$

6.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Решение.Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \mathrm{arctg}x \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$, при Што добиваме дека

$$\int \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}x - \int \sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{1+x^2}dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

ЗначИ,

$$\int \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

7.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$$

Решение./Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \arcsin\sqrt{x} \\ dv = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -\sqrt{1-x} \end{cases}$, од каде што добиваме дека

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = -\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = -\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x} + C.$$

Значи,

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx = -\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x} + C.$$

8.Пресметај го интегралот

$$\int x^n \ln x dx, \quad n \neq -1$$

Решение.Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$, од каде што добиваме дека

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.$$

Значи,

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.$$

9.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int x\frac{x}{(1+x^2)^2}dx = (*)\ .$$

Ако направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = [1+x^2 = t \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt] = , \\ \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

добиваме:

$$(*) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}arctgx + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}arctgx + C$$

10.Пресметај го интегралот:

$$\int \ln(x^2+1)dx\ .$$

Решение.Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1+x^2}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+1)dx &= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \\ &= x\ln(x^2+1) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \\ &= x\ln(x^2+1) - 2(x - arctgx) + C = \\ &= x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C \end{aligned}$$

Значи,

$$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C\ .$$

11.Пресметај го интегралот:

$$\int \ln^2 xdx\ .$$

Решение.Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2\int x\frac{\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = (*)\ .$$

Воведуваме нова парцијална интеграција со:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\begin{aligned} (*) &= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int 1dx = . \\ &= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C \end{aligned}$$

Значи,

$$\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C\ .$$

12.Пресметај го интегралот:

$$\int x\ln(1+x)dx$$

Решение./Ќе направиме парцијална интеграција со:

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = \int dv = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{1+x}dx=$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(1+x)+C$$

13. Пресметај го интегралот:

$$\int\sin\ln x dx$$

Решение./Ќе воведеме парцијална интеграција со $\begin{cases}u=\sin\ln x\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos\ln x}{x}dx\\ v=\int dv=\int dx=x\end{cases}$, при што добиваме дека

$$\int\sin\ln x dx=x\sin\ln x-\int x\frac{\cos\ln x}{x}dx=x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx=(*)$$

Сега ќе направиме нова парцијална интеграција со $\begin{cases}u=\cos\ln x\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{\sin\ln x}{x}dx\\ v=\int dv=\int dx=x\end{cases}$ со што добиваме

$$(*)=x\sin\ln x-\left(x\cos\ln x+\int\sin\ln x dx\right)=x\sin\ln x-x\cos\ln x-\int\sin\ln x dx$$

Според тоа $I=x\sin\ln x-x\cos\ln x-I$, т.е. $I=\frac{1}{2}\left(x\sin\ln x-x\cos\ln x\right)+C$.

Значи,

$$\int\sin\ln x dx=\frac{1}{2}(x\sin\ln x-x\cos\ln x)+C.$$

14. Пресметај го интегралот:

$$\int e^{ax}\cos nx dx.$$

Решение./Ако направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases}u=e^{ax}\\ dv=\cos nx dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=ae^{ax}dx\\ v=\int dv=\int\cos nx dx=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{cases}$$

добиваме:

$$\int e^{ax}\cos nx dx=\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx-\frac{a}{n}\int e^{ax}\sin nx dx=(*).$$

Ќе направиме уште една парцијална интеграција со

$$\begin{cases}u=e^{ax}\\ dv=\sin nx dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=ae^{ax}dx\\ v=\int dv=\int\sin nx dx=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{cases}.$$

Со тоа добиваме:

$$(*)=\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx-\frac{a}{n}\left(-\frac{1}{n}e^{ax}\cos nx+\frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nx dx\right)=$$
$$=\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx+\frac{a}{n^2}e^{ax}\cos nx-\frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\cos nx dx.$$

Ако воведеме ознака $I=\int e^{ax}\cos nx dx$, добиваме:

$I=\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx+\frac{a}{n^2}e^{ax}\cos nx-\frac{a^2}{n^2}I$, т.е. $I+\frac{a^2}{n^2}I=\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx+\frac{a}{n^2}e^{ax}\cos nx$

Значи,

$$I=\frac{n}{n^2+a^2}e^{ax}\sin nx+\frac{a}{n^2+a^2}e^{ax}\cos nx+C.$$

15. Пресметај го интегралот:

$$\int(\arcsin x)^2dx.$$

Решение./Ќе воведеме парцијална интеграција со $\begin{cases}u=(\arcsin x)^2\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ v=\int dv=\int dx=x\end{cases}$, при што добиваме дека

$$\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx=(*)$$

Сега ќе направиме нова парцијална интеграција и тоа

16. Пресметај го интегралот:

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx .$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u=(arctgx)^2 \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx \\ v=\int dv = \int xdx = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$, при што добиваме дека

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx = \frac{1}{2}x^2(\operatorname{arctg}x)^2 - \int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg}xdx = \frac{1}{2}x^2(\operatorname{arctg}x)^2 - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\operatorname{arctg}xdx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\operatorname{arctg}x)^2 - \int \operatorname{arctg}xdx + \int \frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg}xdx = (*)$$

Сега де направиме и парцијална интеграција и смена на променливи. За смената на променливи бираме $z=\arctan x$, па $dz = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, а за парацијалната интеграција бираме $\begin{cases} u=\operatorname{arctg}x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v=\int dv = \int dx = x \end{cases}$, при што добиваме:

$$(*) = \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \left(x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx\right) + \int zdz = (**)$$

Воведуваме нва смена $t = 1+x^2$, $\dfrac{1}{2}dt = xdx$ при што добиваме дека

$$(**) = \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \int zdz = \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}z^2 =$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 = \left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Значи,

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx = \left(\frac{1}{2}x^2+1\right)(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

17. Пресметај го интегралот:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. а) Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (*)$$

Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \displaystyle\int dv = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} \end{cases},$$

и добиваме:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int\sqrt{1-x^2}\,dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Ако воведеме ознака $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$, имаме

$$I = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - I \quad \Rightarrow 2I = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

Значи,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C .$$

18. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx .$$

Решение./Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = x^2 e^x \\ dv = \dfrac{1}{(x+2)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x(x+2)e^x dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{1}{(x+2)^2}dx = -\dfrac{1}{x+2} \end{cases}$, со што добиваме

$$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x(x+2)e^x \frac{1}{x+2}dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int xe^x dx = (*) .$$

Сега ќе направиме нова парцијална интеграција со $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{cases}$, при што добиваме дека

$$(*) = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - \int e^x dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - e^x + C$$

ЗначИ,

$$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - e^x + C .$$

19. Пресметај го интегралот:

$$\int \operatorname{arctg} x dx .$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = arctgx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \text{арцтг}x dx = x\text{арцтг}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\text{арцтг}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = (*)$$

Воведуваме смена $t = 1 + x^2$. Бидејќи $\frac{dt}{dx} = 2x$, т.е. $dt = 2xdx$, добиваме

$$(*) = x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln t + C = x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

Значи,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

20. Пресметај го интегралот:

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx .$$

Решение./Ќе направиме транскрмација на подинтегралната функција со

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx = (*)$$

Сега ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$, па според тоа

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx = (*) .$$

Сега, повторно ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$, со што добиваме дека

$$(*) = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx\right) = -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}dx = C - \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x}$$

Значи,

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = C - \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} .$$

21. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx .$$

Решение./Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx \end{cases},$$

и добиваме:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = xtgx - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = (*)$$

Ако направиме смена $t = \cos x \Rightarrow -dt = \sin x dx$, добиваме:

$$(*) = x \operatorname{tg} x + \int \frac{dt}{t} = x \operatorname{tg} x + \ln|t| + C = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C .$$

Значи,

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C .$$

22. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx .$$

Решение./Ќе направиме парцијална интеграција.При тоа

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1} \end{cases},$$

и добиваме:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx &= -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}dx = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \\ &= -\frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + C = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1} + C \end{aligned}.$$

Значи,

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx = -\frac{\ln x}{x+1} + \ln\frac{x}{x+1} + C .$$

23. Пресметај го интегралот

$$\int x\ln(x-1)dx .$$

Решение. Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1}dx \\ v = \int dv = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \int x\ln(x-1)dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{x-1}dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x-1) + C \end{aligned}$$

Значи,

$$\int x\ln(x-1)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x-1) + C .$$

24. Пресметај го интегралот:

$$\int \ln(x^2+1)dx .$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1+x^2}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+1)dx &= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \\ &= x\ln(x^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \\ &= x\ln(x^2+1) - 2(x - \operatorname{arctg} x) + C \end{aligned}$$

Значи,

$$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - 2(x - \operatorname{arctg} x) + C \ .$$

25. Да се пресмета

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \int dv = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = (1+x^2 = t^2 \Rightarrow xdx = tdt) = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = x^2\sqrt{1+x^2} - \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = (*)$$

Воведуваме смена $1+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$ и добиваме:

$$(*) = x^2\sqrt{1+x^2} - \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = x^2\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{t}\,dt = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$$

Значи,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C \ .$$

26. Да се пресмета

$$\int arctg\sqrt{x}dx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = arctg\sqrt{x}dx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int arctg\sqrt{x}dx = xarctg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = (*)$$

Воведуваме смена $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$ и добиваме:

$$(*) = xarctg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2+1}\frac{1}{t}2tdt = xarctg\sqrt{x} - \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = xarctg\sqrt{x} - \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= xarctg\sqrt{x} - \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = xarctg\sqrt{x} - t + arctgt + C = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C$$

Значи,

$$\int arctg\sqrt{x}dx = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C \ .$$

27. Да се пресмета

$$\int xtg^2xdx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int xtg^2xdx = \int x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx - \int xdx = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx - \frac{1}{2}x^2 = (*)$$

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx \end{cases}$$

и добиваме:

$$(*) = xtgx - \int tgxdx - \frac{1}{2}x^2 = xtgx - \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = (*)$$

Воведуваме смена $z = \cos x \Rightarrow \sin dx = -dz$ и добиваме:

$$(*) = xtgx - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{1}{t}dt = xtgx - \frac{1}{2}x^2 + \ln t + C = xtgx - \frac{1}{2}x^2 + \ln(\cos x) + C$$

Значи,

$$\int xtg^2xdx = xtgx - \frac{1}{2}x^2 + \ln(\cos x) + C \ .$$

28. Да се пресмета

$$\int xe^{-x}dx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = C - xe^{-x} - e^{-x}$$

Значи,

$$\int xe^{-x}dx = C - xe^{-x} - e^{-x}$$

Парцијална интеграција и други методи на интеграција

1. Пресметај го интегралот:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx .$$

Решение./Ќе воведеме смена со $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$ со што добиваме дека

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^{\sqrt{t^2}}2tdt = 2\int te^t dt = (*)$$

Сега, ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \int dv = \int e^t dt = e^t \end{cases}$. Според тоа,

$$(*) = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + C .$$

Значи,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + C .$$

2. Пресметај го интегралот:

$$\int \sin\sqrt[3]{x}dx .$$

Решение./Воведуваме смена $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2dt$ и добиваме

$$\int \sin\sqrt[3]{x}dx = 3\int t^2 \sin tdt = (*) .$$

Сега ќе воведеме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \sin tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2tdt \\ v = \int dv = \int \sin tdt = -\cos t \end{cases}$ и добиваме дека

$$(*) = -t^2 \cos t + 2\int t\cos tdt = (**)$$

Повторно ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = t \\ dv = \cos tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \int dv = \int \cos tdt = \sin t \end{cases}$, со што добиваме дека

$$(**) = -t^2 \cos t + 2\left(t\sin t - \int \sin tdt\right) = -t^2 \cos t + 2t\sin t + 2\cos t + C = -\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x} + 2\cos\sqrt[3]{x} + C .$$

Значи,

$$\int \sin\sqrt[3]{x}dx = -\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x} + 2\cos\sqrt[3]{x} + C .$$

3. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$$

Решение./На почеток де направиме смена на променливите со $x = \sin t, dx = \cos tdt, \arcsin x = t$, при што добиваме дека

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx = \int \frac{t\cos t}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}dt = \int \frac{t}{\cos^2 t}dt = t\,\mathrm{tg}\,t + \ln(\mathrm{tg}\,t) + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C .$$

ЗначИ,

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + C$$

4. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx .$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегрлната функција на следниот начин:

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \arctan x dx = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) \arctan x dx = \int \arctan x dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = (*)$$

Во првиот интеграл ќе воведеме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$, а во вториот интеграл воведуваме смена $t = \arctan x$, $dt = \frac{1}{1+x^2} dx$, при што добиваме дека

$$(*) = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int t dt = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} t^2 = (**)$$

Повторно водеуваме смена $z = 1+x^2$, $dz = 2xdx$, т.е.

$$(**) = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z} dz - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln z - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C = x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

Значи,

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C .$$

5. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} \arctan x dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) \arctan x dx = \int \frac{1}{x^2} \arctan x dx - \int \frac{1}{1+x^2} \arctan x dx = (*)$$

Во првиот интеграл ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \end{cases}$, а во вториот интеграл ќе направиме смена на променливите со $t = \arctan x$, $dt = \frac{1}{1+x^2} dx$ од каде што добиваме дека

$$(*) = -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx - \int t dt = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{2} t^2 = (**)$$

Сега ќе воведеме смена $z = x^2$, $dz = 2xdx$ и добиваме дека:

$$(**) = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z(1+z)} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}\right) dz - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 =$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}(\ln z - \ln(1+z)) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{z}{1+z} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C =$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

Значи,

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx = -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

6. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x} dx .$$

Решение. Ќе направиме парцијлана интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln(\cos x) \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\operatorname{tg} x dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \end{cases},$$

и добиваме:

$$\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx = (\operatorname{tg} x)\ln(\cos x) + \int \operatorname{tg}^2 x dx = (\operatorname{tg} x)\ln(\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx =$$
$$= (\operatorname{tg} x)\ln(\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$
$$= (\operatorname{tg} x)\ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C$$

Значи,

$$\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx = (\operatorname{tg} x)\ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C$$

7. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \arcsin x \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$, при што добиваме дека

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

Значи,

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C .$$

8. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int dv = \int \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx = -\dfrac{1}{2\cos^2 x} \end{cases}$, од каде добиваме

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = -\frac{x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\frac{x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C .$$

Значи,

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = -\frac{x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C .$$

9. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}dx$$

Решение. Ќе направиме смена на променливата и тоа со $x = e^t$, $dx = e^t dt$, при што добиваме:

$$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}dx = \int \frac{\ln e^t - 1}{\ln^2 e^t}e^t dt = \int \frac{t-1}{t^2}e^t dt = \int \frac{1}{t}e^t dt - \int \frac{e^t}{t^2}dt = (*)$$

Во првиот интеграл ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u = \dfrac{1}{t} \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{1}{t^2}dt \\ v = \int dv = \int e^t dt = e^t \end{cases}$, со што добиваме дека

$$(*) = \frac{e^t}{t} + \int \frac{1}{t^2}e^t dt - \int \frac{1}{t^2}e^t dt = \frac{e^t}{t} + C = \frac{x}{\ln x} + C .$$

Значи,

$$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}dx = \frac{x}{\ln x} + C .$$

10. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}dx .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

11. Пресметај го интегралот:

$$\int \ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$$

Решение. Ако направиме парцијална интеграција

$$\begin{cases} u = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases},$$

добиваме:

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = (*)$$

Воведуваме смена $t = x^2+1$, $xdx = \frac{1}{2}dt$ и добиваме:

$$(*) = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}2\sqrt{t} + C = \\ = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Значи,

$$\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

12. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx.$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln\sin x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \operatorname{ctg} x dx \\ v = \int dv = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg}x\ln\sin x + \int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg}x\ln\sin x + \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \\ = -\operatorname{ctg}x\ln\sin x + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int 1dx = \\ = C - \operatorname{ctg}x\ln\sin x - \operatorname{ctg}x - x$$

Значи,

$$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx = C - \operatorname{ctg}x\ln\sin x - \operatorname{ctg}x - x.$$

13. Пресметај го интегралот:

$$\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}dx.$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со:

$$\begin{cases} u = \ln\frac{1-x}{1+x} \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-2}{1-x^2} \\ v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{cases},$$

и добиваме:

$$\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}dx = \frac{1}{3}x^3 \ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1-x^2}dx =$$

14. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со:

$$\begin{cases} u = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ v = \int dv = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \end{cases},$$

и добиваме:

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \sqrt{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int 1dx = \\ = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x + C$$

Значи,

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x + C.$$

15. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx .$$

Решение.Ќе направиме парцијална интеграција со:

$$\begin{cases} u=\arcsin x \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v=\int dv=\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x} \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=$$
$$=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}dx=(*)$$

Воведуваме смена $t=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*)=-\frac{1}{x}\arcsin x-\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=C-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln(t+\sqrt{t^2-1})=$$
$$=C-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right).$$

Значи,

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx=C-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right).$$

16.Пресметај го интегралот:

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx .$$

Решение./Ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u=\ln\frac{1+x}{1-x} \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{1-x^2}dx \\ v=\int dv=\int xdx=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$, при што добивме дека

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\left(\int 1dx-\int\frac{1}{1-x^2}dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx\right)=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

Значи,

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

17.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x}{1+\cos x}dx .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегрланата функција со

$$\int\frac{x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=(*)$$

Воведуваме смена $x=2t$, $dx=2dt$, при што добиваме дека

$$(*)=2\int\frac{t}{\cos^2 t}dt=(**)$$

Сега ќе направиме парцијална интеграција со $\begin{cases} u=t \\ dv=\frac{1}{\cos^2 t}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=\int dv=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt=\mathrm{tgt} \end{cases}$, при што добиваме дека

$$(**)=2t\,\mathrm{tg}t-2\int \mathrm{tg}tdt==2ttgt-2\int\frac{\sin t}{\cos t}dt=(***)$$

Сега, повторно ќе воведеме смена $\cos t=z$, $\sin tdt=-dz$ и добиваме дека

$$(***)=2t\,\mathrm{tg}t+2\int\frac{1}{z}dz=2t\,\mathrm{tg}t+2\ln z+C=2\frac{x}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}+C=x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}+C$$

Значи,

$$\int\frac{x}{1+\cos x}dx=x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}+C .$$

18. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}dx .$$

Решение./

19. Да се пресмета интегралот:

$$\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$$

Решение. Со примена на методот на парцијална интеграција при што $\begin{cases} u=\operatorname{arctg}\sqrt{x} \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx \\ v=\int dv=\int dx=x \end{cases}$, добиваме дека

$$\int \arcsin\sqrt{x}dx = x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx=(*)$$

Воведуваме смена $x=\sin^2 t \;\Rightarrow\; dx=2\sin t\cos t dt$ и добиваме:

$$(*)=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 t}{\sin t\cos t}2\sin t\cos t dt = x\arcsin\sqrt{x}-\int\sin^2 t dt = x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=x\arcsin\sqrt{x}-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}+C$$

Значи

$$\int\arcsin\sqrt{x}dx=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$$ ☺

20. Да се пресмета интегралот:

$$\int x\arccos\frac{1}{x}dx$$

Решение. Со примена на методот на парцијална интеграција при:

$$u=\arccos\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; du=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$dv=xdx \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$$

добиваме:

$$\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=(*)$$

Воведуваме смена $x^2-1=t^2 \;\Rightarrow\; xdx=tdt$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$$

Значи

$$\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$$ ☺

21. Да се пресмета интегралот:

$$\int x\arcsin(1-x)dx$$

Решение. Воведуваме смена $1-x=t \;\Rightarrow\; dx=-dt$ и добиваме:

$$\int x\arcsin(1-x)dx=-\int(1-t)\arcsin t dt=\int t\arcsin t dt-\int\arcsin t dt=(*)$$

И во двата интеграли воведуваме парцијална интеграција со:

1. Во првиот интеграл:

$$u=\arcsin t \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$dv=tdt \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int tdt=\frac{1}{2}t^2$$

2. Во вториот интеграл:

$$u=\arcsin t \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$dv=dt \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int dt=t$$

и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{2}t^2\arcsin t-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt-t\arcsin t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}t^2\arcsin t-\frac{1}{2}\int t\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt-t\arcsin t+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=(**)$$

Во вториот интеграл воведуваме смена $1-t^2=z^2 \;\Rightarrow\; tdt=-zdz$ а во првиот интеграл парцијална интеграција при:

$$u=t \;\Rightarrow\; du=dt$$

$$dv=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\sqrt{1-t^2}$$

22. Да се пресмета интегралот:

$$\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$$

Решение. Со примена на методот на парцијална интеграција при:

$$dv=dx \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int dx=x$$

$$u=\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{x}}dx$$

добиваме:

$$\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx=x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\int\frac{x}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=(*)$$

Воведуваме смена $\sqrt{x}=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$ и добиваме:

$$(*)=x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt=x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-\frac{1}{2}\int t\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=(**)$$

Со примена на методот на парцијална интеграција при:

$$u=t \;\Rightarrow\; du=dt$$

$$dv=\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

добиваме:

$$(**)=x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt\right)=$$

$$=x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{t}\frac{\sqrt{x}}{1+x}-\frac{1}{4}arctg\sqrt{x}+C$$

Значи

$$\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx=x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{t}\frac{\sqrt{x}}{1+x}-\frac{1}{4}arctg\sqrt{x}+C$$ ☺

23. Да се пресмета

$$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int x\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=(*)$$

Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u=x \\ dv=\frac{x}{(x^2+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\int dv=\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$$

Според тоа

$$(*)=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Значи,

$$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx+C\,.$$

24. Да се пресмета

$$\int \ln xdx$$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\int dx=x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \ln xdx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int 1dx=x\ln x-x+C$$

Значи,

$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$.

25. Да се пресмета

$\int \arccos x dx$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \arccos x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \int dv = \int dx = x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \arccos x dx = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (*)$$

Воведуваме смена $1 - x^2 = t^2 \Rightarrow xdx = -tdt$ и добиваме:

$$(*) = x\arccos x - \int \frac{tdt}{t} = x\arccos x - \int dt = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Значи,

$$\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C .$$

26. Да се пресмета

$\int e^x \sin x dx$

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$$

и добиваме:

$$I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = (*)$$

Воведуваме нова парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int dv = \int \cos dx = \sin x \end{cases}$$

и добиваме:

$$(*) = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

Според тоа

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \quad \Rightarrow \quad 2I = -e^x \cos x + e^x \sin x \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

Значи,

$$\int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C$$

27. Да се пресмета

$\int \sin x \ln(tgx)dx$.

Решение. Ќе направиме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = \ln(tgx) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\cos x \sin x}dx \\ v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$$

и добиваме:

$$\int \sin x \ln(tgx)dx = -\cos x \ln(tgx) + \int \cos x \frac{1}{\sin x \cos x}dx = -\cos x \ln(tgx) + \int \frac{1}{\sin x}dx =$$

$$= -\cos x \ln(tgx) + \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = -\cos x \ln(tgx) + \int \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}dx = (*)$$

Воведуваме смена $t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\dfrac{1}{2}dx$ и добиваме:

$$(*) = -\cos x \ln(tgx) + \int \frac{1}{t}dt = -\cos x \ln(tgx) + \ln t + C = -\cos x \ln(tgx) + \ln(tg\tfrac{x}{2}) + C$$

Значи,

$$\int \sin x \ln(tgx)dx = -\cos x \ln(tgx) + \ln(tg\tfrac{x}{2}) + C .$$

Интегрирање на рационални функции

1.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx \ .$$

Решение.Подинтегралната функција ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{(2A+B)x+A+B}{(x+1)(2x+1)} \ .$$

Според теоремите за еднаквост на рационални функции, имаме

$$1\cdot x + 0 = (2A+B)x + A + B \ ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми, го добиваме системот:

$$\begin{cases} 2A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} .$$

Според тоа

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{2x+1}dx = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C = \ln\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} + C \ .$$

2.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx \ .$$

Решение.Подинтегралната функција е права правилна рационална функиција. Притоа $2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$, од каде што според теоремите за разложување на рационални функции на прости дропки, добиваме:

$$\frac{x}{2x^2-3x-2} = \frac{x}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} = \frac{(A+2B)x+(-2A+B)}{(2x+1)(x-2)} \ .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции, добиваме:

$$1x + 0 = (A+2B)x + (-2A+B) \ ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} -2A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} .$$

Неговo решение е $A=\frac{1}{5}, B=\frac{2}{5}$ од каде што добиваме дека бараното разложувањее гласи:

$$\frac{x}{2x^2-3x-2} = \frac{1}{5}\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{x-2} \ .$$

Ако интегрираме, добиваме

$$\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx = \int\left(\frac{1}{5}\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{10}\ln|2x+1| + \frac{2}{5}\ln|x-2| + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx = \frac{1}{10}\ln|2x+1| + \frac{2}{5}\ln|x-2| + C \ .$$

3.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx \ .$$

Решение./Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Истата ќе ја разложиме на прости дропки.При тоа

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)} = \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x^2+2x-3)+B(x^2-x-12)+C(x^2-5x+4)}{(x-1)(x+3)(x-4)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(2A-B-5C)x-3A-12B+4C}{(x-1)(x+3)(x-4)}$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции, добиваме:

$$2x^2+41x-91 = (A+B+C)x^2 + (2A-B-5C)x - 3A - 12B + 4C \ ,$$

од каде според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ 2A - B - 5C = 41 \\ -3A - 12B + 4C = -91. \end{cases}$$

Неговo решение е $A=5, B=4, C=-7$, па според тоа

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)} = \frac{5}{x-4} + \frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} \ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx = \int\left(\frac{5}{x-4} + \frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3}\right)dx = 5\ln|x-4| + 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + C$$

Значи,

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx = 5\ln|x-4|+4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+C .$$

4.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x} .$$

Решение.Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Неа ќе ја разложиме на праости дропки, по методот на неопределени коефициенти:

$$\frac{1}{6x^3-7x^2-3x} = \frac{1}{x(6x^2-7x-3)} = \frac{1}{x(2x-3)(3x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{3x+1} = \frac{A(6x^2-7x-3)+B(3x^2+x)+C(2x^2-3x)}{6x^3-7x^2-3x} =$$

$$= \frac{(6A+3B+2C)x^2+(-7A+B-3C)x-3A}{6x^3-7x^2-3x}$$

Според теоремите за еднаквост на рационални функции имаме:

$$1+0x+0x^2 = (6A+3B+2C)x^2+(-7A+B-3C)x-3A ,$$

а од теоремата за еднавост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} 6A + 3B + 2C = 0 \\ -7A + B - 3C = 0 \\ -3A = 1 \end{cases}$$

Негово решение е $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{4}{33}$, $C=\frac{9}{11}$. Значи разложувањето на подинтегралната функција на прости дропки гласи

$$\frac{1}{6x^3-7x^2-3x} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x}+\frac{4}{3}\frac{1}{2x-3}+\frac{9}{11}\frac{1}{3x+1} .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{1}{6x^3-7x^2-3x}dx = \int\left(-\frac{1}{33}\frac{1}{x}+\frac{4}{3}\frac{1}{2x-3}+\frac{9}{11}\frac{1}{3x+1}\right)dx = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx+\frac{4}{33}\int\frac{1}{2x-3}dx+\frac{9}{11}\int\frac{1}{3x+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|+\frac{3}{11}\ln|3x-1|+C .$$

Значи,

$$\int \frac{1}{6x^3-7x^2-3x}dx = -\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|+\frac{3}{11}\ln|3x-1|+C .$$

5.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx .$$

Решение.Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. При тоа

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx = (*) .$$

Воведуваме смена $t = x^2+3x-10$, $dt = (2x+3)dx$, при што добиваме:

$$(*) = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln|x^2+3x-10|+C$$

Значи,

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \ln|x^2+3x-10|+C .$$

6.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx .$$

Решение.Ќе направиме трнасформација на подинтегралната функција, која е неправа, правилна рационална функција:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)}\right)dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\right)dx = (*)$$

Функцијата $g(x) = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}$ која е права правилна рационална функција. Истата ше ја разложиме на прости дропки, по методот на неопределени коефициенти, при што:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} = \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+6A}{x(x-2)(x-3)}$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции го добиваме равенството:

$$5x^2-6x+1 = (A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+6A ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A + B + C = 5 \\ -5A-3B-2C = -6 , \\ 6A = 1 \end{cases}$$

чие решение е $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{9}{2}$, $C=\frac{28}{3}$. Значи, разложувањето на подинтегралната функција е

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x}-\frac{9}{2}\frac{1}{x-2}+\frac{28}{3}\frac{1}{x-3} .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$(*) = x+\int\left(\frac{1}{6}\frac{1}{x}-\frac{9}{2}\frac{1}{x-2}+\frac{28}{3}\frac{1}{x-3}\right)dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C .$$

Значи,

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C .$$

7. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx .$$

Решение. Подинтегралната функција е правилна неправа рационална функција. При тоа

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx = \int \frac{x^4+5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx - \int \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \int 1dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{16}{3}\int \frac{1}{x^2+4}dx = (*) .$$

Во третиот интеграл воведуваме смена $x=2t$, $dx=2dt$, и добиваме:

$$(*) = x-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x+\frac{16}{3}\int \frac{2dt}{4t^2+4} = x-\frac{1}{3}arctgx+\frac{16}{3}\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C = x-\frac{1}{3}arctgx+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C .$$

Значи,

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx = x-\frac{1}{3}arctgx+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C .$$

8. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx .$$

Решение. Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Истата по методот на неопределени коефициенти ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1} = \frac{A(x^2-1)+B(x-1)+C(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(-B+2C)x+(-A-B+C)}{(x+1)^2(x-1)} .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции, добиваме:

$$x^2+1=(A+C)x^2+(-B+2C)x+(-A-B+C) ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми, го добиваме системот(и истиот го решаваме):

$$\begin{cases} A + \quad + C = 1 \\ \quad + B + 2C = 0 \\ -A-B+C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + \quad + C = 1 \\ B+2C=0 \\ 4C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1-C \\ B=-2C \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Значи, разложувањето на подинтегралната функција на прости дропки е:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} .$$

Ако интегрираме, добиваме:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x-1)+C = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{x+1}+C$$

Значи,

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{x+1}+C .$$

9. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx .$$

Решение. Подинтегралната функција е правилна, неправа рационална функција. При тоа

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} .$$

Според тоа,

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx = (*) .$$

Правата правилна рационална функција $f(x)=\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2-4)+B(x^2+2x)+C(x^2-2x)}{x^3-4x} = \frac{(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A}{x^3-4x} .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции, добиваме:

$$4x^2+16x-8=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми добиваме:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ 2B-2C=16 \\ -4A=-8. \end{cases}$$

Негово решение е $A=2, B=5, C=-3$, па според тоа

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2} .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$(*) = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\int\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}+C .$$

Значи,

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + C$$

10.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$$

Решение.Подинтегралната функција е правилна, неправа, рационална функција. При тоа

$$\frac{x^3-1}{4x^3-x} = \frac{1}{4}\frac{4x^3-4}{4x^3-x} = \frac{1}{4}\frac{4x^3-x+x-4}{4x^3-x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{x-4}{4x^3-x}.$$

Според тоа

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3-4}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3-x+x-4}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \frac{x-4}{4x^3-x}x = (*).$$

Подинтегрланата функција во последниот интеграл е права правилна рационална функција и истата ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{x-4}{4x^3-x} = \frac{x-4}{x(4x^2-1)} = \frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1} = \frac{A(4x^2-1)+B(2x^2+x)+C(2x^2-x)}{4x^3-x} = \frac{(4A+2B+2C)x^2+(B-C)x-A}{4x^3-x}.$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции имаме:

$$0x^2 + x - 4 = (4A+2B+2C)x^2 + (B-C)x - A.$$

Според теоремата за еднаквост на полиноми, го добиваме системот:

$$\begin{cases} 4A+2B+2C = 0 \\ B - C = 1 \\ -A = -4 \end{cases}$$

Негово решение е $A=4, B=-\frac{7}{2}, C=-\frac{9}{2}$, па бараното разложување на подинтегралната функција е:

$$\frac{x-4}{4x^3-x} = 4\frac{1}{x} - \frac{7}{2}\frac{1}{2x-1} - \frac{9}{2}\frac{1}{2x+1}$$

па добиваме:

$$(*) = \frac{1}{4}x + \int \frac{1}{x}dx - \frac{7}{8}\int \frac{1}{2x-1}dx - \frac{9}{8}\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C.$$

Значи,

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C$$

11.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx.$$

Решение.Подинтегралната функција е права правилна рационална функција и истата според методот на неопределени коефициенти ќе ја разложиме на прости дропки.При тоа

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции добиваме:

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

Значи, разложувањето на подинтегралната на прости дропки е

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

12.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{1+x^3}$$

Решение.Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Истата ќе ја разложиме на прости дропки, според методот на неопределени коефициенти. При тоа

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{x^3+1}.$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции имаме:

$$1 + 0x + 0x^2 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} -A+B+C=0 \\ A+B=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

Негово решение е $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$, па бараното разложување гласи:

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{1}{1+x^3}dx=\int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=(*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t=x^2-x+1$, $dt=(2x-1)dx$, а во вториот интеграл воведуваме смена $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln t+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} z+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\ln\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\ln\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

13. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x}{x^3-1}dx\ .$$

Решение. Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Истата ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{x^3-1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{x^3-1}$$

Според теоремата за еднаквост на рационална функција имаме

$$0x^2+1x+0=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C\ ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases}A+B\qquad=0\\A-B+C=1\\A\qquad-C=0\end{cases}$$

Негови решенија се $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$ и $C=\frac{1}{3}$. Според тоа, разложувањето гласи:

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{x}{x^3-1}d=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=(*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $t=x^2+x+1$, $dt=(2x+1)dx$ а во вториот интеграл воведуваме смена $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}dz=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} z=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{x}{x^3-1}dx=\ln\sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

14. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$$

Решение. Подинтегралната функција, која е права, правилна рационална функција по методот на неопределени коефициенти ќе ја разложиме на прости дропки. Равенката $x^2-2x+5=0$ нема реални корени и заради тоа:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}=\frac{Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+5A-C}{(x-1)(x^2-2x+5)}\ .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции имаме:

$$2x^2-3x-3=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+5A-C\ ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми имаме:

$$\begin{cases}A\ +B\qquad=\ 2\\-2A-B+C=-3\\5A\qquad-C=-3\end{cases}$$

Ако ги собереме трите равенки добиваме $A=-1$, па решение на системот е $A=-1, B=3, C=-2$. Според тоа разложувањето гласи:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx=-\ln(x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2+4}dx=(*)\ .$$

Во прvиот интеграл воведуваме смена $t=x^2-2x+5$, $dt=(2x-2)dx$, а во вториот интеграл воведуваме смена $x-1=2z$, $dx=2dz$ и добиваме

$$(*)=-\ln(x+1)+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}+\int\frac{2dz}{4z^2+4}=-\ln(x+1)+\frac{3}{2}\ln t+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=-\ln(x+1)+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx=-\ln(x+1)+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C\ .$$

15.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(x^4+1)}{x^3-x^2+x-1}dx\ .$$

Решение.Подинтегралната функција е правилна, неправа, рационална функција. Нејзе можеме да ја претставиме во облик:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=x+1+\frac{2}{(x^2+1)(x-1)}\ .$$

Изразот $\frac{2}{(x^2+1)(x-1)}$ можеме да го претставиме как прости рационални дропки. При тоа

$$\frac{2}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(B-A)x+(-B+C)}{(x^2+1)(x-1)}\ .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции имаме

$$2=(A+C)x^2+(B-A)x+(-B+C)\ ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми имаме:

$$\begin{cases}A+C=0\\B-A=0\\B-C=-2\end{cases}.$$

Ако ги собереме левите и десните страни на равенките, добиваме $B=-1$. Но тогаш $A=-1$, $C=1$, и разложувањето гласи:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=x+1-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\ .$$

Интегрирајќи добиваме:

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(x+1-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=(*)\ .$$

Во прvиот интеграл воведуваме смена $t=x^2+1$, $dt=2xdx$ а во третиот $z=x-1$, $dz=dx$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-arctgx+\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\ln t-\operatorname{arctg}x+\ln z+C=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+\ln(x+1)+C=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x-\operatorname{arctg}x+\ln\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{(x^4+1)}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{1}{2}x^2+x-\operatorname{arctg}x+\ln\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+C\ .$$

16.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx\ .$$

Решение.Подинтегрланата функција е права правилна рационална функција. Истата на елементарен начин ќе ја разложиме на прости дропки:

$$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)(1+x)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx=-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{x^2}{1-x^4}dx=\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

17.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Решение.Подинтегрланата функција е права правилна рационална функција. Според методот на неопределени коефициенти, истата ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x^2+x)+C(x^2+1)(x+1)+D(x^3+x)}{(x^2+1)(x^2+x)}=$$

$$=\frac{(A+C+D)x^3+(A+B+C)x^2+(B+C+D)x+C}{(x^2+1)(x^2+x)}\ .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции добиваме:

$$1+0x+0x^2+0x^3=(A+C+D)x^3+(A+B+C)x^2+(B+C+D)x+C\ .$$

Според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ A+B+C=0 \\ B+C+D=0 \\ \qquad C=1 \end{cases}$$

Негово решение е $A=-\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=1, D=-\frac{1}{2}$, па според тоа разложувањето е:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}=-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\,\text{арцтг}\,x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x)+C=(*)\ .$$

Воведуваме смена $t=1+x^2$, $dt=2xdx$ и добиваме:

$$(*)=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x)+C=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C\ .$$

18.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Решение. Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Истата ќе ја разложиме на прости дропки според методот на неопределени коефициенти.При тоа

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1)+C(x^3+2x^2+x)+D(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции имаме:

$$0x^3+0x^2+0x+0=(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=0 \\ A+B+D=1 \\ A+C=0 \end{cases}$$

Негово решение е $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=0$, и разложувањето е

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C.$$

Значи,

$$\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C.$$

19.Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx\ .$$

Решение.Подинтегралната функција ќе ја претставиме во облик:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+4\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}\ .$$

Според тоа

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x-2+4\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-2x+4\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}dx=(*)\ .$$

Подинтегралната функција ќе ја разложиме на прости дропки.При тоа

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=\frac{Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+B)x+2B}{x^2(x^2+2x+2)}$$

Од теоремата за еднаквост на рационални функции, добиваме

$$x^3+x^2+x+1=(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+B)x+2B\ ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми добиваме:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 2A+B+D=1 \\ 2A+2B=1 \\ 2B=1 \end{cases}$$

Решение на системот е $A=0, B=\frac{1}{2}, C=1, D=\frac{1}{2}$, па според бараното разложување е

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+2x+2}.$$

Ако интегрираме добиваме:

$$(*)=\frac{1}{2}x^2-2x+4\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+2)}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+2\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\int\frac{2x+2-1}{x^2+2x+2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-2\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=(**)$$

Воведуваме смени $t=x^2+2x+2$, $(2x+2)dx=dt$ и $x+1=z, dx=dz$, при што

$$(**)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\int\frac{1}{t}dt-2\int\frac{1}{z^2+1}dx=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\ln t-2\operatorname{arctg} z+C=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Значи,

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

20. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

Решение. Подинтегралната функција е права, правилна, рационална функција. Истата ќе ја разложиме на прости дропки со помош на елементарни трансформации, претходно воведувајќи прости смени. При тоа

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int\frac{dx}{x^4+2x^2+1-x^2}=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2-x^2}=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=(*).$$

Подинтегралната функција ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=\frac{(A+C)x^3+(A+B-C+D)x^2+(A+B+C-D)x+B+D}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}.$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции добиваме:

$$0x^3+0x^2+0x+1=(A+C)x^3+(A+B-C+D)x^2+(A+B+C-D)x+B+D,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A+C=0\\ A+B-C+D=0\\ A+B+C-D=0\\ B+D=1\end{cases}$$

Јасно е дека решение на системот е $A=-\frac{1}{2}, B=C=D=\frac{1}{2}$. Значи, разложувањето гласи:

$$\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}=-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{2x-2}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx=(*)$$

Воведуваме смени:

$t=x^2-x+1$, $dt=(2x-1)dx$,

$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$

$t=x^2-x+1$, $dt=(2x-1)dx$

$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$

и добиваме:

$$(*)=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}-\frac{\sqrt{3}}{6}\int\frac{1}{z^2+1}dz+\frac{\sqrt{3}}{6}\int\frac{dv}{v^2+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{u}{t}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg} v-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg} z+C=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

21. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx.$$

Решение. Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа истата ќе ја претставиме во облик

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)x+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2},$$

каде A, B и C се коефициенти кои ќе ги определиме. Според теоремата за еднаквост на рационални функции добиваме:

$$x^2-3x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A.$$

Според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} 2A+B+C=-3 \\ A+B=\ 1 \\ A=\ 2 \end{cases}$$

чие решение е $A=2, B=-1, C=-6$. Значи, разложувањето гласи:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}\right)dx=2\ln x-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx=\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C\ .$$

22. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x(x^2-2x+1)}dx\ .$$

Решение. Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Според методот на неопределени коефициенти истата ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x^2-2x+1)}=\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}\ .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции имаме

$$x^2+4x+4=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A\ ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиними го добиваме системот:

$$\begin{cases} -2A-B+C=4 \\ A+B=1\ , \\ A=4 \end{cases}$$

Негово решение е $A=4, B=-3, C=9$, па разложувањето гласи:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x^2-2x+1)}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}\ .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x(x^2-2x+1)}dx=\int\left(\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}\right)dx=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}\ .$$

Значи,

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x(x^2-2x+1)}dx=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C\ .$$

23. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx\ .$$

Решение. Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. При тоа

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=\frac{A(x^2+4x+4)+B(x^2+3x+2)+C(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+4A+2B+C}{(x+1)(x+2)^2}$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции добиваме:

$$x^2=(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+4A+2B+C\ ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} 4A+2B+C=0 \\ 4A+3B+C=0 \\ A\ +B=1 \end{cases}$$

чие решение е $B=0$, $A=1$, $C=-4$. Значи, разложувањето гласи

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}$$

Ако интегрираме, добиваме:

$$\int\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}\right)dx=\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C$$

Значи,

$$\int\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx=\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$$

24. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со елементарни трансформации:

$$\frac{x^3-1}{x^3-x^2}=\frac{x^3-x^2+x^2+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2(x-1)}=1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x+2\ln|x-1|+\frac{1}{x}-\ln|x|+C$$

Значи,

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$$

25. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$$

Решение. Подинтегралната функција со помош на елементарни трансформации ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2(x^2-1)}=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}.$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{1}{x^4-x^2}dx=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{x}+C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x^4-x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

26. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx.$$

Решение.//

Решение. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx=2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}$

27. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx.$$

Решение. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx=\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C$

28. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx.$$

Решение. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4dx=\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C$

29. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}dx.$$

Решение. $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}dx=\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C$

30. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx.$$

Решение. $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$

Рационални функции, додаток

1. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{(x^3)^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2)^3+1}dx=(*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $x^3=t \Rightarrow 3x^2dx=dt$, а во вториот интеграл воведуваме смена $x^2=z \Rightarrow 2xdx=dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^3+1}=(**)$$

2. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\int\frac{x^n}{x^n+1}x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int\frac{x^n}{x^n+1}nx^{n-1}dx=(*).$$

Воведуваме смена $t=x^n$. Бидејќи $dt=nx^{n-1}dx$, добиваме:

$$(*)=\frac{1}{n}\int\frac{t}{t+1}dt=\frac{1}{n}\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=\frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{n}t-\frac{1}{n}\ln(t+1)+C=\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{n}\ln(x^n+1)+C.$$

Значи,

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{n}\ln(x^n+1)+C$$

3.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx \ .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \int \frac{(x^n)^n}{[(x^n)^2+1]^2}x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{(x^n)^2}{[(x^n)^2+1]^2}nx^{n-1}dx = (*)$$

Воведуваме смена $t = x^n$. Бидејќи $dt = nx^{n-1}dx$, добиваме:

$$(*) = \frac{1}{n}\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{n}\int t\frac{t}{(t^2+1)^2}dt = (**) \ .$$

Воведуваме парцијална интеграција со

$$\begin{cases} u = t \\ dv = \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \int dv = \int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2z} = -\frac{1}{2(t^2+1)} \end{cases}$$

Според тоа,

$$(*) = -\frac{1}{2n}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2n}\int \frac{1}{t^2+1}dt = -\frac{1}{2n}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2n}\operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1} + \frac{1}{2n}\operatorname{arctg} x^n + C \ .$$

Значи,

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = -\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1} + \frac{1}{2n}\operatorname{arctg} x^n + C \ .$$

4.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx \ .$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx = \int \frac{x^4-1}{x^8+1}xdx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1}2xdx = (*)$$

Воведуваме смена $x^2 = t$. Бидејќи $2xdx = dt$ добиваме:

$$(*) = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{t^4+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{t^2\left(t^2+t^{-2}\right)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} = (*) \ .$$

Воведуваме нова смена $t+\frac{1}{t} = z \Rightarrow \left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt = dz$, и добиваме:

$$(**) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2-2}dz = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}}\right)dz = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} + C = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1} + C$$

Значи,

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1} + C \ .$$

5.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)}7x^6dx = (*)$$

Воведуваме смена $t = x^7 \Rightarrow dt = 7x^6dx$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{7}\int \frac{1-t}{t(1+t)}dt = \frac{1}{7}\int \frac{1+t-2t}{t(1+t)}dt = \frac{1}{7}\int\left(\frac{1+t}{t(1+t)} - \frac{2t}{t(1+t)}\right)dt = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t}dt - \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+t}dt = \frac{1}{7}\ln t - \frac{2}{7}\ln(1+t) + C = \frac{1}{7}\ln x^7 - \frac{2}{7}\ln(1+x^7) + C = \ln\sqrt[7]{\frac{x^7}{(1+x^7)^2}} + C$$

Значи,

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx = \ln\sqrt[7]{\frac{x^7}{(1+x^7)^2}} + C \ .$$

6.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx \ .$$

7.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{xdx}{x^8-1}$$

8.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx \ .$$

9.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx \ .$$

10.. Пресметај го интегралот:

$\int \frac{x^3 dx}{x^8+3}$.

11. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$

Решение. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx = arctgx + \frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4} + C$

12. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

Решение. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C$.

13.. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Решение. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C$.

14. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$.

15.. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$.

Решение. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx = -\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

Решение. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C$

17. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

Решение. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}\right| - \frac{8}{25}arctg(x+1) + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

Решение. $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

19. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$

Решение. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln|x+1| + \frac{7}{288}\ln|x^2+4| - \frac{1}{24(x^2+4)} + C$.

20. $\int \frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

Решение. $\int \frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)^2} = \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$

Интеграли од некои тригонометриски функции

1. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, и добиваме:

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2-3+3t^2}{1+t^2}}dt=\int \frac{2}{2+8t^2}dt=\int \frac{1}{1+(2t)^2}dt=(*).$$

Воведуваме нова смена $2t=z \Rightarrow dt=\frac{1}{2}dz$, при што:

$$(*)=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+z^2}dz=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, при што $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, и добиваме:

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+4\frac{2t}{1+t^2}}dt=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5t^2+8t+5}{1+t^2}}dt=\int \frac{2}{5t^2+8t+5}dt=\frac{2}{5}\int \frac{1}{t^2+2\frac{4}{5}t+1}dt=\frac{2}{5}\int \frac{1}{t^2+2\cdot\frac{4}{5}t+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}dt=\frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}dt=(*)$$

Воведуваме нова смена $t+\frac{4}{5}=\frac{3}{5}z$, $dt=\frac{3}{5}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{6}{25}\int \frac{1}{\frac{9}{25}z^2+\frac{9}{25}}dz=\frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2+1}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg} z+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5t+4}{3}+C=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x}=\frac{2}{3}arctg\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.$$

3. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=\int \frac{2}{2+\cos x}dx+\int \frac{-\sin x dx}{2+\cos x}=(*).$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $tg\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, а во вториот интеграл воведуваме смена $z=2+\cos x$, $-\sin x dx=dz$ и добиваме:

$$(*)=\int \frac{2\frac{2}{1+t^2}dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\int \frac{dz}{z}=\int \frac{4}{3+t^2}dt+\ln z=(**).$$

Воведуваме смена $t=\sqrt{3}z$, $dt=\sqrt{3}dz$ и добиваме:

$$(**)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du+\ln(2+\cos x)+C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} u+\ln(2+\cos x)+C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+\ln(2+\cos x)+C=\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln(2+\cos x)+C$$

Значи,

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\ln(2+\cos x)+C.$$

4. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}.$$

Решение. Ќе воведеме смена $\operatorname{tg} x=t$, $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{4+tgx+4ctgx}=\int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{4+t+\frac{4}{t}}=\int \frac{t}{(t+2)^2(t^2+1)}dt=(*).$$

Добиената подинтегралната функција е права правилна рационална функција.ќе ја разложиме на прости дропки:

$$\frac{t}{(t+2)^2(t^2+1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{(t+2)^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}=\frac{A(t^3+2t^2+t+2)+B(t^2+1)+C(t^3+4t^2+4t)+D(t^2+4t+4)}{(t+2)^2(t^2+1)}=$$
$$=\frac{(A+C)t^3+(2A+B+4C+D)t^2+(A+4C+4D)t+2A+B+D}{(t+2)^2(t^2+1)}.$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции го добиваме равенството

$$0t^3+0t^2+1t+0=(A+C)t^3+(2A+B+4C+D)t^2+(A+4C+4D)t+2A+B+D,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A \quad + C \quad = 0 \\ 2A+B+4C+\ D\ = 0 \\ A +\quad +4C+4D=1 \\ 2A+B \quad\ +4D=0 \end{cases}$$

Негови решенија се $A=C=0$, $B=-\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$, а разложувањето на подинтегрланата функција е:

$$\frac{t}{(t+2)^2(t^2+1)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(t+2)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{t^2+1}.$$

Ако интегрираме добиваме:

$$(*)=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(t+2)^2}dt+\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{4}\frac{1}{t+2}+\frac{1}{4}\text{arctg}\,t+C\ .????$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{4+\text{tg}\,x+4\text{ctg}\,x}=\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\,\text{tg}\,x+2\,|+\frac{2}{5(\,\text{tg}\,x+2\,)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x\,|+C$$

5. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$$

Решение. Воведуваме смена $tg\frac{x}{2}=t$, при што $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Според тоа

$$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{5+5t^2-8t+3-3t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{2t^2-8t+8}dt=\int\frac{1}{t^2-4t+4}dt=\int\frac{1}{(t-2)^2}dt=-\frac{1}{t-2}+C=C-\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=C-\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}.$$

6. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Решение. Воведуваме смена $tgx=t$, $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{1}{2+t^2}dt=(*)\ .$$

Воведуваме нова смена $t=\sqrt{2}z$, $dt=\sqrt{2}dz$, при што

$$(*)=\int\frac{\sqrt{2}dz}{2+2z^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1+z^2}dz=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\,z+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C\ .$$

7. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)^2}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1}{(tgx+1)^2}\frac{dx}{\cos^2 x}=(*)\ .$$

Воведуваме смена $t=tgx+1$, $\frac{dx}{\cos^2 x}=dt$ и добиваме:

$$(*)=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=C-\frac{1}{tgx+1}\ .$$

Значи,

$$\int\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx=C-\frac{1}{tgx+1}\ .$$

8. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x \cos x} dx .$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sqrt{tgx}}{tgx} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\sqrt{tgx}} \frac{dx}{\cos^2 x} = (*) .$$

Воведуваме смена $tgx = t$, $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt$, и добиваме:

$$(*) = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{tgx} + C .$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x \cos x} dx = 2\sqrt{tgx} + C$$

9.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x} .$$

Решение.Воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, и добиваме:

$$\int \frac{dx}{1+tgx} = \int \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} dt = (*) .$$

Подинтегралната функција во последниот интеграл е права правилна рационална функција и истата ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Bt + Ct + C}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A + C}{(t+1)(t^2+1)} .$$

Според теоремата за еднаквост на рационални функции добиваме:

$$0t^2 + 0t + 1 = (A+B)t^2 + (B+C)t + A + C ,$$

а според теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ A + C = 1 \end{cases}$$

Негово решение е $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$. Според тоа разложувањето на рационалната функција е:

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{t-1}{t^2+1} .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$(*) = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{4}\int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\text{арцтг}t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(tgx+1) - \frac{1}{4}\ln(tg^2 x + 1) + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{tgx+1}{\cos x} + \frac{1}{2}x + C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\cos x} + \frac{1}{2}x + C$$

10.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx .$$ **Решение.**

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегрланата функција:

$$\int \frac{\sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{tg^3 x - 1} \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{tgx}{tg^3 x - 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = (*)$$

Воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$, $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, и добиваме

$$(*) = \int \frac{t}{t^3 - 1} dt$$

Ѕначи,

$$\int \frac{\sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx = \ln \frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

11.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} .$$

Решение.Воведуваме смена $tgx = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{(1+t^2)^3}{t^4}dt=\int \frac{1+3t^2+3t^4+t^8}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{3}{t^2}+3+t^4\right)dt=$$
$$=-\frac{1}{3t^3}-\frac{3}{t}+3t+\frac{1}{5}t^5+C=C-\frac{1}{3tg^3x}-\frac{3}{tgx}+3tgx+\frac{1}{5}tg^5x$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=C-\frac{1}{\mathrm{tg}^3 x}-\frac{3}{\mathrm{tg}x}+3\mathrm{tg}x+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x\,.$$

12. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}\,.$$

Решение. Воведуваме смена $\mathrm{tg}\,x=t$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}=\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{(1+t^2)^3}{t^3(1+t^2)}dt=\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}dt=\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}dt=-\frac{1}{2t^2}+2\ln t+\frac{1}{2}t^2+C=C-\frac{1}{2tg^2x}+2\ln tgx+\frac{1}{2}tg^2x$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}=C-\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x}+2\ln \mathrm{tg}\,x+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x$$

13. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}\,.$$

Решение. Воведуваме смена $\mathrm{tg}x=t$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}=\int \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2}{t^3}dt=\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}\right)dt=-\frac{1}{2t^2}+\ln t+C=-\frac{1}{2tg^2x}+\ln tgx+C\,.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}=-\frac{1}{2tg^2x}+\ln \mathrm{tg}\,x+C\,.$$

14. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$$

Решение. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$

Решение. Воведуваме смена $\mathrm{tg}x=t$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{t^4}{(1+t^2)^2}dt=\int \frac{t^4+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}dt=\int\left[\frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^2}-\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\right]dt=\int \frac{t^2}{1+t^2}dt-\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=$$
$$=\int 1dt-\int \frac{1}{1+t^2}dt-\int t\frac{t}{(1+t^2)^2}dt=t-\arctan t-\int t\frac{t}{(1+t^2)^2}dt=(*)$$

Воведуваме парцијална интеграција со $\begin{cases}u=t\\ dv=\frac{t}{(1+t^2)^2}dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=\int dv=\int \frac{t}{(1+t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2}dz=-\frac{1}{2}\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\end{cases}$, при што добиваме

$$(*)=t-\arctan t-\left(-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt\right)=t-\arctan t+\frac{t}{2(1+t^2)}-\frac{1}{2}\arctan t+C=\tan x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$$

Значи,

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$$

15. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx\,.$$

Решение. Воведуваме смена $1-\cos x=t \Rightarrow \sin x dx=dt$ и добиваме:

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx=\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=C-\frac{1}{1-\cos x}\,.$$

Значи,

$$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx = C - \frac{1}{1-\cos x}\ .$$

16. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx$$

Решение. /Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C = C-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\ .$$

Значи,

$$\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx = C - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\ .$$

17. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}\ .$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x} = \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2+t^2}\frac{1}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2(t^2+2)} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt - \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+2}dt = -\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+2}dt = (*)\ .$$

Воведуваме нова смена $t = \sqrt{2}z$, $dt = \sqrt{2}dz$ и добиваме:

$$(*) = -\frac{1}{2\operatorname{tg} x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{1}{z^2+1}dz = C - \frac{1}{2\operatorname{tg} x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x} = C - \frac{1}{2\operatorname{tg} x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\ .$$

18. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}\ .$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} = \int \frac{1+t^2}{2t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\frac{2+2t^2}{2t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{1+2t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2}dt = (*)\ .$$

Воведуваме смена $z = \sqrt{2}t$, $dt = \frac{1}{\sqrt{2}}dz$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+z^2}dz = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C\ .$$

19. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ .$$

Решение. Ќе направиме тансформација на подинтегралната функција со:

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{1}{a^2 tg^2 x + b^2}\frac{dx}{\cos^2 x} = (*)\ .$$

Воведуваме смена $a\operatorname{tg} x = bt$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{b}{a}dt$ и добиваме:

$$(*) = \int\frac{1}{b^2t^2+b^2}\frac{b}{a}dt = \frac{1}{ab}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} x\right)+C$$

20. Пресметај го интегралот:

$\int \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}dx$. **Решение.** $\int \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}dx = \frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4} - \frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x| + C$

Решение.Воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$, $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и добиваме:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-tgx}dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1-t}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)^2}dt = (*)$$

Подинтегралната функција е права правилна рационална функција. Истата ќе ја разложиме на прости дропки. При тоа

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} + \frac{Dt+E}{(1+t^2)^2} = \frac{A(1+t^2)^2 + (Bt+C)(1-t)(1+t^2) + (Dt+E)(1-t)}{(1-t)(1+t^2)^2} =$$

$$= \frac{A(1+2t^2+t^4) + Bt(1-t+t^2-t^3) + C(1-t+t^2-t^3) + Dt(1-t) + E(1-t)}{(1-t)(1+t^2)^2} =$$

$$= \frac{A(1+2t^2+t^4) + B(t-t^2+t^3-t^4) + C(1-t+t^2-t^3) + D(t-t^2) + E(1-t)}{(1-t)(1+t^2)^2} =$$

$$= \frac{(A+C+E) + (B-C+D-E)t + (2A-B+C-D)t^2 + (B-C)t^3 + (A-B)t^4}{(1-t)(1+t^2)^2}$$

Сега, од теоремите за еднаквост на рационални функции, добиваме дека

$$t^2 = (A+C+E) + (B-C+D-E)t + (2A-B+C-D)t^2 + (B-C)t^3 + (A-B)t^4 ,$$

А од теоремите за еднаквост на полиноми добиваме систем

$$\begin{cases} A + C + E = 0 \\ B - C + D - E = 0 \\ 2A - B + C - D = 1 \\ B - C = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

21. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}.$$

Решение.За подинтегралната функција е исполнет условот $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$. Заради тоа воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$. Заради равенствата $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, добиваме:

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{4-\frac{3}{1+t^2}+5\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{\frac{4+4t^2-3+5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1}{1+9t^2}dt = \int \frac{1}{1+(3t)^2}dt = (*)$$

Воведуваме нова смена $z=3t$, $dt=\frac{1}{3}dz$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{1}{1+z^2}\frac{1}{3}dz = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3t) + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x) + C.$$

22. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$$

Решение.Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x(\cos^2 x-\sin^2 x)} = (*).$$

Бидејќи е исполнет условот $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, воведуваме смена $\operatorname{tg} x = t$. Заради равенствата $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,

$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, добиваме:

$$(*) = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{t(\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t(1-t^2)} = \int \frac{tdt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2(1-t^2)} = (**)$$

Воведуваме смена $z=t^2$, $dz=2tdt$ и добиваме:

$$(**) = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z(1-z)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)dz = \frac{1}{2}\ln z - \frac{1}{2}\ln(1-z) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{z}{1-z} + C = \ln\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}} + C = \ln\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}} + C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tg}x\ \cos 2x} = \ln\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1-\mathrm{tg}^2 x}} + C\ .$$

23. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}\ .$$

Решение./Ќе направиме трансфроамција на подинтегралната функција со:

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \int \frac{dx}{[(a\,\mathrm{tg}x + b)\cos x]^2} = \int \frac{1}{(a\,\mathrm{tg}x+b)^2}\frac{dx}{\cos^2 x} = (*)\ .$$

Воведуваме смена $a\,\mathrm{tg}x + b = t$, $\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{a}dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{1}{t^2}\frac{1}{a}dt = -\frac{1}{a}\frac{1}{t} + C = C - \frac{1}{a}\frac{1}{a\,\mathrm{тг}x + b}\ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2} = C - \frac{1}{a}\frac{1}{a\,\mathrm{тг}x + b}\ .$$

24. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}\ .$$

Решение. Воведуваме општа тригонометриска смена $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{6t^2+4t+4}{1+t^2}}dt = \int \frac{1}{3t^2+2t+2}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2 + 2\frac{1}{3}t + \frac{1}{9} + \frac{5}{9}}dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{3})^2 + \frac{5}{9}} = (*)\ .$$

Воведуваме смена $t + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}z$, $dt = \frac{\sqrt{5}}{3}dz$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{3}\int \frac{dz}{\frac{5}{9} + \frac{5}{9}z^2} = \frac{\sqrt{5}}{9}\frac{1}{\frac{5}{9}}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}z + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$$

25. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}\ .$$

Решение. Ако воведеме општа тригонометриска смена $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, добиваме:

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{t^2(3+t^2)}2tdt = (*)\ .$$

Воведуваме нова смена $z = t^2$, $dz = 2tdt$ и добиваме:

$$(*) = \frac{1}{2}\int \frac{1+z}{z(3+z)}dz = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{z} + \frac{2}{3}\frac{1}{3+z}\right)dz = \frac{1}{6}\ln z + \frac{1}{3}\ln(3+z) + C = \frac{1}{6}\ln t^2 + \frac{1}{3}\ln(3+t^2) + C = \frac{1}{6}\ln \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln(3+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2})$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \frac{1}{6}\ln \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln(3+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2})\ .$$

(б) Може да се направи трансформација

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} = (*)$$

Воведуваме смена $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{-dt}{(2+t)(1-t^2)} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t)(1+t)} = (**)\ .$$

Подинтеграланата функција е рационана функција која ќе ја разложиме на елементарни дропки. При тоа

$$\frac{1}{(2+t)(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{2+t} = \frac{A(2+3t+t^2) + B(2-t-t^2) + C(1-t^2)}{(2+t)(1-t^2)} = \frac{(2A+2B+C) + (3A-B)t + (A-B-C)t^2}{(2+t)(1-t^2)}\ .$$

Според теоремите за еднаквост на рационални функции го добиваме равенството

$$(2A+2B+C) + (3A-B)t + (A-B-C)t^2 = 1\ ,$$

А според теоремите за еднаквост на полиноми, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2A + 2B + C = 1 \\ 3A - B = 0 \\ A - B - C = 0 \end{cases}.$$

Негово решение е $A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{3}$. Според тоа, разложувањето на функцијата е гласи:

$$\frac{1}{(2+t)(1-t^2)}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}-\frac{1}{3}\frac{1}{2+t},$$

па ако интегрираме, добиваме

$$(**)=\int\left(\frac{1}{6}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}-\frac{1}{3}\frac{1}{2+t}\right)dt=\frac{1}{6}\int\frac{1}{1-t}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}dt-\frac{1}{3}\int\frac{1}{2+t}dt=-\frac{1}{6}\ln(1-t)+\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{1}{3}\ln(2+t)+C=$$

$$=C-\frac{1}{6}[\ln(1-t)-3\ln(1+t)+2\ln(2+t)]+C=C-\frac{1}{6}\ln\frac{(1-t)(2+t)^2}{(1+t)^3}=C-\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=C-\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$$

26. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

за:

а) $0<\varepsilon<1$ б) $\varepsilon>1$

Решение./Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)t^2}dt=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{1}{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}t^2}dt=(*)$$

а) Ако направиме нова смена $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}t=z$, $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}t=z$, добиваме:

$$(*)=\frac{2}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}z+C=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}t\right)+C=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Значи, во овој случај

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

б) Ако направиме нова трансфроамција

$$(*)=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{dt}{1-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}t^2}=(**)$$

и воведеме смена $\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}t=z$, $dt=\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}dz$ и добиваме:

$$(**)=\frac{2}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{1+z}{1-z}+C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}t}{1-z\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}t}+C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-z\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Значи, во овој случај

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-z\sqrt{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

27. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}.$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ и добиваме

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{3\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}dt=\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=\int\frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{1}{t+3}+C=C-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}=C-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}$$

28. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}=\int\frac{\sin xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin xdx}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}=(*)$$

Воведуваме смена $\cos x=t$, $\sin xdx=-dt$ и добиваме:

$$(*)=\int\frac{dt}{(t^2-1)t^2}=\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\frac{1}{t^2-1}dt-\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{t}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{\cos x}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{\cos x}+C$$

29. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+4\cos x}\ .$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме

$$\int\frac{dx}{1+4\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+4\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{5-3t^2}dt=\int\frac{2}{(\sqrt{5}-t\sqrt{3})(\sqrt{5}+t\sqrt{3})}dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{5}-t\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+t\sqrt{3}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{5}+t\sqrt{3}}{\sqrt{5}-t\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{1+4\cos x}=\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C\ .$$

30. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{dx}{4+\cos x}\ .$$

Решение. $\int\frac{dx}{4+\cos x}=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{4+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{4(1+t^2)+1-t^2}dt=\int\frac{2}{5+3t^2}dt=(*)$$

Воведуваме нова смена $\sqrt{3}t=\sqrt{5}z$, $dt=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}dz$ при што добиваме:

$$(*)=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{5+5z^2}=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}z+C=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}t\right)+C=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$$

ЗначИ,

$$\int\frac{dx}{4+\cos x}=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$$

31. Пресметај го интегртралот:

$$\int\frac{dx}{4-\sin x}$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{4-\sin x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{4-\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2}{4t^2-2\frac{1}{2}2t+\frac{1}{4}+\frac{15}{4}}dt=2\int\frac{dt}{(2t-\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}}=(*)\ .$$

Воведуваме нова смена $2t-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}z$, $dt=\frac{\sqrt{15}}{4}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{\sqrt{15}}{2}\int\frac{dz}{\frac{15}{4}z^2+\frac{15}{4}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}z+C=\frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{15}}+C=\frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{4-\sin x}=\frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}+C$$

32. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}\ .$$

Решение. Воведуваме смена $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ и добиваме

$$\int\frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+5}=\int\frac{2}{2t^2+2t+8}dt=\int\frac{1}{t^2+t+4}dt=\int\frac{dt}{t^2+2\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+\frac{19}{4}}=\int\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}=(*)$$

Воведуваме смена $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}z$, $dt=\frac{\sqrt{19}}{2}dz$ и добиваме:

$$(*)=\frac{\sqrt{19}}{2}\int\frac{dz}{\frac{19}{4}z^2+\frac{19}{4}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{2\sqrt{19}}{19}\text{арцтг}z+C=\frac{2\sqrt{19}}{19}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{19}}+C=\frac{2\sqrt{19}}{19}\text{arctg}\frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{19}}+C.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{3\cos x+\sin x+5}=\frac{2\sqrt{19}}{19}\text{arctg}\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{19}}+C$$

33. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}dx.$$

Решение. $\int\frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}dx=x+\cos x+2\ln|1+\sin x|+tg\frac{2x-\pi}{4}+C$

Решение./Воведуваме смена $tg\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dx$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int\frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}dx=\int\frac{(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})^2}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{8}{(t+1)^2(t^2+1)^2}dt=(*).$$

34. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}$$

Решение. $\int\frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}\text{arctg}\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{2}}-\frac{\text{tg}\,x}{4\,\text{tg}^2x+8}+C$

Решение. Воведуваме смена $\text{tg}\,x=t$, $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{(1+\frac{1}{1+t^2})^2}=\int\frac{1+t^2}{(t^2+2)^2}dt=(*)$$

Воведуваме нова смена $t=\sqrt{2}z$, $dt=\sqrt{2}dz$, при што добиваме

$$(*)=\int\frac{1+2z^2}{(2z^2+2)^2}\sqrt{2}dz=\frac{1}{4}\int\frac{1+2z^2}{(z^2+1)^2}dz=$$

35. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}.$$

Решение. Воведуваме смена $tg\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dx$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=\int\frac{2}{t^2+2t+5}dt=2\int\frac{1}{(t+1)^2+4}dt=(*).$$

Воведуваме нова смена $t+1=2z$, $dt=2dz$ и добиваме:

$$(*)=2\int\frac{2dz}{4z^2+4}=\text{arctg}\,z+C=\text{arctg}\frac{t+1}{2}+C=\text{arctg}\frac{\text{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+C.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\text{arctg}\frac{\text{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+C.$$

36. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx.$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција. При тоа

$$\int\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\int\frac{(\sin x-\cos x)2\sin x\cos x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{2}{3}\int\frac{3(\sin^2 x\cos x-\cos^2 x\sin x)}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=(*)$$

Сега е јасно дека треба да воедеме смена $\sin^3 x+\cos^3 x=t \Rightarrow 3(\sin^2 x\cos x-\cos^2 x\sin x)dx=dt$, од каде што добиваме дека

$$(*)=\frac{2}{3}\int\frac{1}{t}dt=\frac{2}{3}\ln t+C=\frac{2}{3}\ln(\sin^3 x+\cos^3 x)+C.$$

Значи,

$$\int\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=\frac{2}{3}\ln|\cos^3 x+\sin^3 x|+C.$$

37. Пресметај го интегралот:

$$\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

Решение.Подинтегралната функција е од облик $R(\sin x, \cos x)$, при што $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Заради тоа воведуваме смена $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ и добиваме:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = -\int (1-t^2)t^2 dt = -\int (t^2 - t^4) dt = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Значи,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C .$$

38.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx .$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(\sin x, \cos x)$, при што $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Заради тоа воведуваме смена $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ и добиваме:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C .$$

Значи,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C .$$

39.Пресметај го интегралот:

$$\int \mathrm{tg}^5 x dx .$$

Решение. $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x - \ln|\cos x| + C$

Решение. а)Подинтегралната функција е од облик $R(\sin x, \cos x)$, при што $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Заради тоа воведуваме смена $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ и добиваме:

$$\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}\sin x dx = \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^5 x}\sin x dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x}\sin x dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^5} dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^5} dt - 2\int \frac{1}{t^3} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} + \ln t + C = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\cos x)^4} + \frac{1}{(\cos x)^2} + \ln(\cos x) + C$$

Значи,

$$\int \mathrm{tg}^5 x dx = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\cos x)^4} + \frac{1}{(\cos x)^2} + \ln(\cos x) + C$$

б) Но можеме да направиме и друг вид на трансформација и тоа со

$$\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \frac{\mathrm{tg}^5 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\frac{1}{\cos^2 x} dx = (*)$$

Сега е јасно дека можеме да воедеме смена

40. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = C - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

Решение.//

41. $\int \sin x \sin 3x dx$

Решение. $\int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

42. $\int \sin 2x \cos 4x dx$

Решение. $\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$

43. $\int \cos x \cos 4x dx$

Решение. $\int \cos x \cos 4x dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x + C$

44. $\int \sin(3x+2)\cos(x-1) dx$

Решение. $\int \sin(3x+2)\cos(x-1) dx = -\frac{1}{8}\cos(4x+1) - \frac{1}{4}\cos(2x+3) + C$

45. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

Решение. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$.

46. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

Решение. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx = \frac{1}{36}\sin 9x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x + C$

47. $\int \cos^2 2x \cos^2 3x dx$

Решение. $\int \cos^2 2x \cos^2 3x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{80}\sin 10x + C$

48. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

Решение. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$

49. $\int \sin^4 4x dx$

Решение. $\int \sin^4 4x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 16x}{128} + C$

50. $\int \sin^4 x \cos^6 x dx$

Решение. $\int \sin^4 x \cos^6 x dx = \frac{24x - 8\sin 4x + \sin 8x}{2048} + \frac{\sin^5 2x}{320} + C$.

Ојлерови смени

1. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} .$$

Решение. а)Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = (*) .$$

Воведуваме смена $\frac{1}{x}=t$, $\frac{1}{x^2}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*) = -\int \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+2\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = (**) .$$

Воведуваме нова смена $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z$, $dt=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$ и добиваме:

$$(**) = -\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dz}{\sqrt{\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = C-\ln(z+\sqrt{z^2+1}) = C-\ln\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{t^2+t+1}\right) = C-\ln\left(\frac{2+x}{x\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{3}}\right)$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = C-\ln\left(\frac{2+x}{x\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{3}}\right).$$

б) Подинтегралната функција е рационална функција од облик $R(\,x\,,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)$. Заради тоа, воведуваме смена $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$, од каде што добиваме:

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t},\ dx=2\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt ,\ \sqrt{x^2+x+1}=\frac{-t^2+t-1}{1-2t} .$$

Ако замениме во интегралот добиваме:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt}{\frac{t^2-1}{1-2t}\frac{-t^2+t-1}{1-2t}} = 2\int \frac{1}{t^2-1}dt = \ln\frac{t-1}{t+1}+C = \ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1} .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1} .$$

2. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} .$$

Решение. (а)Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} = (*)$$

Воведуваме смена $\frac{1}{x}=t$, $\frac{1}{x^2}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*) = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-1+2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = (**) .$$

Воведуваме нова смена $t-1=\sqrt{2}z$, $dt=\sqrt{2}dz$, и според тоа:

$$(**) = -\int \frac{\sqrt{2}dz}{\sqrt{2-2z^2}} = -\arcsin z + C = C-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}} = C-\arcsin\frac{1-x}{x\sqrt{2}} .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = C-\arcsin\frac{1-x}{x\sqrt{2}} .$$

(б) Подинтегралната функција е рационална функција од облик $R(\,x\,,\sqrt{x^2+x+1}\,)$. Заради тоа, воведуваме смена $\sqrt{x^2+2x-1}=x+t$, па според тоа

$$x=\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{1-t} ,\ dx=\frac{1}{2}\frac{-t^2+2t+1}{(1-t)^2}dt ,\ \sqrt{x^2+2x-1}=\frac{-t^2+2t+1}{2-2t} .$$

Ако замениме во интегралот, добиваме:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\int\frac{\frac{1}{2}\frac{-t^2+2t+1}{(1-t)^2}dt}{\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{1-t}\frac{-t^2+2t+1}{2-2t}}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+2x-1}-x)+C\,.$$

3. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}\,.$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(\,x\,,\sqrt{x^2+x+1}\,)$. Заради тоа, воведуваме смена $\sqrt{4x-x^2}=xt$, т.е. $x=\frac{4}{1+t^2}$, $\sqrt{4x-x^2}=\frac{4t}{1+t^2}$ и $dx=-\frac{8t}{(1+t^2)^2}dt$. Ако замениме во интегралот, добиваме:

$$\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{-\frac{8t}{(1+t^2)^2}dt}{\left(2\frac{4}{1+t^2}-3\right)\frac{4t}{1+t^2}}=-2\int\frac{1}{5-3t^2}dt=-2\int\frac{dt}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}t)^2}=-2\int\frac{1}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}t)(\sqrt{5}+\sqrt{3}t)}dt=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}t}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}t}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{15}}(\ln(\sqrt{5}+\sqrt{3}t\,)-(\sqrt{5}-\sqrt{3}t))+C=C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}t}{\sqrt{5}-\sqrt{3}t}$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}=C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}t}{\sqrt{5}-\sqrt{3}t}\,,\ t=\sqrt{\frac{4-x}{x}}\,.$$

4. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx\,.$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(\,x\,,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)$. Заради тоа, воведуваме смена $\sqrt{2x+x^2}=xt$, т.е. $x=\frac{2}{t^2-1}$, $dx=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt$, $\sqrt{2x+x^2}=\frac{2t}{t^2-1}$ и добиваме:

$$\int\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx=\int\frac{\frac{2t}{t^2-1}}{\frac{4}{(t^2-1)^2}}\frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-\ln\frac{t-1}{t+1}+C=C-2\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x}-\ln\frac{\sqrt{2x+x^2}-x}{\sqrt{2x+x^2}+x}$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx=C-2\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x}-\ln\frac{\sqrt{2x+x^2}-x}{\sqrt{2x+x^2}+x}\,.$$

5. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,.$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(\,x\,,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)$. Заради тоа, воведуваме смена $\sqrt{1-2x-x^2}=1+xt$, при што $x=-\frac{2+2t}{t^2+1}$, $dx=-2\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}dt$, $\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}$. Ако замениме во интегралот, добиваме:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{-2\frac{-t^2-2t+1}{(t^2+1)^2}}{1+\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}}dt=2\int\frac{t^2+2t-1}{2(1-t)(t^2+1)}dt=\int\frac{t^2+2t-1}{(1-t)(t^2+1)}dt=\int\frac{t^2+1-2+2t}{(1-t)(t^2+1)}dt=\int\left(\frac{1}{1-t}-2\frac{1}{1+t^2}\right)dt==C-\ln|1-t|-2\operatorname{arctg}t\,.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=C-\ln|1-t|-2\operatorname{arctg}t\,,\ \text{каде}\ t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}\,.$$

6. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}\,.$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(\,x\,,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)$. Затоа воведуваме смена $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$, од каде што добиваме:

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t}\,,\ dx=2\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt\,,\ \sqrt{x^2+x+1}=\frac{-t^2+t-1}{1-2t}\,.$$

Ако замениме во интегралот:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2}dt}{\left(\frac{t^2-1}{1-2t}-1\right)\frac{-t^2+t-1}{1-2t}}=2\int\frac{dt}{t^2+2t-2}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2-3}=2\int\frac{1}{(t+1-\sqrt{3})(t+1+\sqrt{3})}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{t+1-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+1+\sqrt{3}}\right)dt=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}}+C\text{, каде } t=\sqrt{x^2+x+1}-x$$

7. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. Затоа воведуваме смена $\sqrt{x^2+2x+2}=x+t$, т.е. $x=\frac{t^2-2}{2(1-t)}$, $dx=\frac{1}{2}\frac{-t^2+2t-2}{(1-t)^2}dt$ и $\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{-t^2+2t-2}{2-2t}$. Ако замениме во интегралот добиваме:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\frac{1}{2}\frac{-t^2+2t-2}{(1-t)^2}dt}{1+\frac{1}{2}\frac{-t^2+2t-2}{1-t}}=-\int\frac{-t^2+2t-2}{t^2(1-t)}dt=\int\frac{1}{1-t}dt+2\int\frac{1}{t^2}dt=C-\ln(1-t)-\frac{2}{t}=$$

Значи

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=C-\ln(1-t)-\frac{2}{t}\text{, каде } t=\sqrt{x^2+2x+2}-x.$$

8. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Решение./Подинтегралната функција е од облик $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. Заради тоа воведуваме смена $\sqrt{x^2-x+1}=x+t$, т.е. $x=\frac{1-t^2}{1+2t}$, $dx=-2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$, $\sqrt{x^2-x+1}-x=t$, и добиваме:

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=-2\int\frac{\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt}{-t}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t^2+4t+4}{t(1+2t)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t^2+4t+1+3}{t(1+2t)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt+3\int\frac{1}{2t(1+2t)^2}dt=$$
$$=\frac{1}{2}\ln t+3\int\left(\frac{1}{2t}-\frac{1}{2t+1}-\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{2t+1}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{2t+1}+C\text{, каде } t=\sqrt{x^2-x+1}-x$$

9. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Решение. Подинтегралната функција е од облик $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, каде R е рационална функција од две променливи. Затоа воведуваме смена $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$, т.е. $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$, $dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt}{t}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t^2+4t+4}{t(1+2t)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t^2+4t+1+3}{t(1+2t)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt+3\int\frac{1}{2t(1+2t)^2}dt=$$
$$=\frac{1}{2}\ln t+3\int\left(\frac{1}{2t}-\frac{1}{2t+1}-\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{2t+1}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{2t+1}+C,\ t=\sqrt{x^2+x+1}+x.$$

10. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}.$$

Решение.(а) Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+4\frac{1}{x}-4\frac{1}{x^2}}}=(*).$$

Воведуваме смена $t=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*)=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+4t-4t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-1+4t-4t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-(2t-1)^2}}=(**)\,.$$

Воведуваме нова смена $2t-1=\sqrt{2}z$, $dt=\frac{\sqrt{2}}{2}dz$, па според тоа:

$$(**)=-\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}dz}{\sqrt{2-2z^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz=-\frac{1}{2}\arcsin z+C=C-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{2}}=C-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\,.$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=C-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\,.$$

11. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}\,.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}}=(*)$$

Воведуваме смена $\frac{1}{x}=t$, $\frac{1}{x^2}dx=-dt$ и добиваме:

$$(*)=-\int\frac{dt}{\sqrt{2t^2+t-1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{4})^2-\frac{7}{16}}}=(**)\,.$$

Воведуваме нова смена $t+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}z$, $dt=\frac{\sqrt{7}}{4}dz$ и добиваме:

$$(**)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}z^2-\frac{7}{16}}}dz=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(z+\sqrt{z^2-1})+C=C-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{4t+1}{\sqrt{7}}+\sqrt{\left(\frac{4t+1}{\sqrt{7}}\right)^2-1}\right)=C-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(4\frac{1}{x}-1+\sqrt{16\frac{1}{x^2}+16\frac{1}{x}-6}\right)$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=C-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(4\frac{1}{x}-1+\sqrt{16\frac{1}{x^2}+16\frac{1}{x}-6}\right).$$

12. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}\,]^2}\,.$$

Решение. Подинтегрлната фунцкија е од облик $R(x,\sqrt{ax^2+b+c})$. Според тоа, ḱе направиме трансформација на нејзиниот облик, односно ḱе воведеме смена:

$$\sqrt{x(1+x)}=xt \;\Rightarrow\; x(1+x)=x^2t^2 \;\Rightarrow\; 1+x=xt^2 \;\Rightarrow\; 1=x(t^2-1)\,,$$

односно $x=\frac{1}{t^2-1}$. Сега, $dx=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$ и $\sqrt{x(1+x)}=\frac{t}{t^2-1}$. Ако извршиме замена во интегралот, добиваме

$$\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}\,]^2}=\int\frac{1}{\left(1+\frac{t}{t^2-1}\right)^2}\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=\int\frac{-2t}{(t^2+t-1)^2}dt=(*)$$

13. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Решение./

14. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx\,.$$

Решение. а) Со непосредна трансформација на подинтегралната функција ḱе добиеме

$$\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}dx-\ln x=(*)$$

Сега ќе воведеме смена $t=\frac{1}{x}\;\Rightarrow\;-dt=\frac{1}{x^2}dx$, и добиваме

$$(*)=-\int\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}dt-\ln x=-\int\frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dt-\ln x=(**)\ .$$

Сега воведуваме нова смена $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}z\ \Rightarrow\ dt=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$, од каде следува

$$(**)=-\int\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}}}\frac{\sqrt{3}}{2}dz-\ln x=C-\ln(z+\sqrt{z^2+1})-\ln x=C-\ln\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)-\ln x=$$

$$=C-\ln\frac{2t+1+\sqrt{4t^2+4t+4}}{\sqrt{3}}-\ln x=C-\ln\left(\frac{2}{x}+1+2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right)-\ln x$$

Значи,

$$\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx=C-\ln\left(\frac{2}{x}+1+2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right)-\ln x$$

Овој резултат да се провери: $\int\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx=\ln\left|\ 1-\left(\ \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\ \right)^2\ \right|+C\ .$

15. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}\ .$$

Решение. $\int\frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+2x+3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\frac{1-x+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{x+2}-\frac{1}{3\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{2}(x+2)+\sqrt{3(x^2+2x+3)}}{x-2}+C\ .$

16. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}\ .$$

Решение./ $\int\frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{x}-\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x+3+\sqrt{6(x^2+x+4)}}{x-1}-\frac{1}{4}\ln\frac{7-x+4\sqrt{x^2+x+4}}{x+1}+C\ .$

17. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\ .$$

Решение. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=2\ln|\,x-\sqrt{x^2-x+1}\,|-\frac{3}{2}\ln|\,2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\,|-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}+C\ .$

18. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\ .$$

Решение. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\ln\left|1-\frac{x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C\ .$

19. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{(\,1+\sqrt{x^2+x}\,)^2}\ .$$

Решение. $\int\frac{dx}{(\,1+\sqrt{x^2+x}\,)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\left|\frac{2t+\sqrt{5}+1}{2t-\sqrt{5}+1}\right|+\frac{2(\,4t-3\,)}{5(\,t^2+t-1\,)}+C$,каде $t=\sqrt{x^2+x}-x\ .$

20. Пресметај го интегралот:

$$\int\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}\ .$$

Решение. $\int\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=2\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\ln|\,2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x\,|+C\ .$

21. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}dx .$$

Решение./ $\int \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}dx = \frac{5}{18(t+1)}+\frac{1}{6(t+1)^2}+\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{16}{27}\ln|t-2|+C$, каде $t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

Интеграли од облик

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx\ ,\ n\in\mathbf{N}\ ,\ a,b,c,d\in R\ ,\ p_1,p_2,\dots,p_n\in\mathbf{Q} .$$

1. Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx .$$

Решение. Воведуваме смена $x=t^6, dx=6t^5dt$ и добиваме:

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int\frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}6t^5dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=6\int\left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{6}{4}t^4+6\operatorname{arctg}t+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C .$$

Значи,

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C .$$

2. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}} .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}(2-x)^6}}=\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2}=(*) .$$

Воведуваме смена $\frac{2+x}{2-x}=t^3$, $\frac{1}{(2-x)^2}dx=\frac{3}{4}t^2dt$, при што

$$(*)=\int\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}}\frac{3}{4}t^2dt=\frac{3}{4}\int tdt=\frac{3}{8}t^2+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C .$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C .$$

3. Пресметај го интегралот

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx .$$

Решение. Воведуваме смена $x+1=t^2$, $dx=2tdt$ и добиваме:

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx=\int\frac{t+1}{t-1}2tdt=2\int\frac{t^2+t}{t-1}dt=2\int\left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=t^2+4t+4\ln|t-1|+C=x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C .$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx=x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C .$$

4. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx .$$

Решение. $\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx=\frac{x}{2}(\sqrt{x^2-1}-x)-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-1}+x|+C$.

5. Пресметај го интегралот:

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx .$$

Решение./ $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^2-1}+C$, каде $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

6. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}} .$$

Решение./ $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}} = -\frac{4t^3}{t^4+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} + C$, каде $t = \sqrt[4]{\frac{4-x}{x}}$.

7.Пресметај го интегралот

$\int \sqrt[4]{x-2}\,xdx$.

Решение. $\int \sqrt[4]{x-2}\,xdx = \frac{4}{45}(x-2)(5x+8)\sqrt[4]{x-2} + C$

8.Пресметај го интегралот

$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

Решение. $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx = \frac{3}{4}\left(t^4 - 2t^2 - \ln|t-1| + \frac{5}{2}\ln(t^2+t+2) - \frac{9\sqrt{7}}{14}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) + C$, $t = \sqrt[3]{x+2}$.

9.Пресметај го интегралот:

$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Решение. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

10.Пресметај го интегралот

$\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$.

Решение.Воведуваме смена $\frac{x}{x+1} = t^5$, $x = \frac{t^5}{t^5-1}$, $dx = \frac{5t^4}{(1-t^5)^2}dt$, при што добиваме:

$$\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3} = \int \sqrt[5]{t^5}\frac{\frac{5t^5}{(1-t^5)^2}}{\left(\frac{t^5}{1-t^5}\right)^3}dt = 5\int \frac{(1-t^5)t^5}{(t^5)^3}dt = 5\int\left(\frac{1}{t^{10}} - \frac{1}{t^5}\right)dt = 5\left(-\frac{1}{9}\frac{1}{t^9} + \frac{1}{4}\frac{1}{t^4} \right) + C = -\frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + C .$$

Значи,

$$\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} - \frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^9} + C .$$

11.Пресметај го интегралот

$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} + C$

12.Пресметај го интегралот

$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, $n \in \mathbf{N}$, $a \neq b$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$.

13.Пресметај го интегралот

$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

Решение.//Воведуваме смена $x+4=t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Сега, ако замениме во интегралот, ќе добиеме

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-4}2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt = 2\left(\int 1 + 4\frac{1}{t^2-4}\right)dt = 2t + 8\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt =$$

$$= 2t + 4\ln\frac{t-2}{t+2} + C = 2\sqrt{x+4} + 4\ln\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} + C$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = 2\sqrt{x-4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C .$$

14.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$$

Решение.//Воведуваме смена $x = t^3 \;\Rightarrow\; dx = 3t^2 dt$, при што добиваме

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{3t^2 dt}{3t^3+t^2} = 3\int \frac{1}{3t+1} dt = \ln(3t+1)+C = \ln(3\sqrt[3]{x}+1)+C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}} = \ln|\,1+3\sqrt[3]{x}\,|+C .$$

Интегрирање на биномен диференцијал

Биномен диференција го нарекуваме секој диференцијал

$$x^m (a+bx^n)^p \, dx \,,$$

каде $m,n,p \in \square$, а a и b се произволни константи.

Бидејќи $m,n,p \in \square$ се рационални броеви, можеме да сметаме дека тие се од облик $p=\frac{s}{r}$, $m=\frac{s_1}{r_1}$, $n=\frac{s_2}{r_2}$

Интеграл од биномен диференцијал

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx \qquad (1)$$

може да се изрази преку елементарни функции само во три случаи.

а) $p \in \square$,

б) $\frac{m+1}{n} - 1 \in \square$ $\frac{m+1}{n} - 1 \in$, т.е. $\frac{m+1}{n} \in \square$,

в) $\frac{m+1}{n} + p \in \square$.

Во случајот а) воведуваме смена $x=t^r$. Во случајот б) воведуваме смена $ax^n+b=t^q$, каде $q=NZS(r_1,r_2)$. Во случајот в) воведуваме смена $ax^{-n}+b=t^q$, каде $q=NZS(r_1,r_2)$. Во сите три случаи се добива за интеграција рационална функција по променливата t .

1.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \,.$$

Решение./Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^{\circ} (1+x^3)^{-\frac{1}{3}} dx = (*)$$

За биномниот диференцијал $x^{\circ}(1+x^3)^{-\frac{1}{3}} dx$ имаме $m=0, n=3, p=-\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \in \mathbf{Z}$, воведуваме смена $x^{-3}+1=t^3$, т.е. $x^3=\frac{1}{t^3-1}$, $x^2 dx = \frac{-t^2}{(t^3-1)^2} dt$. Според тоа,

$$(*) = \int \frac{1}{x\sqrt[3]{x^{-3}+1}} dx = \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt[3]{x^{-3}+1}} = \int \frac{\frac{-t^2}{(t^3-1)^2} dt}{\frac{1}{t^3-1} t} = -\int \frac{t}{t^3-1} dt = C - \frac{1}{3} \ln \frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \,.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int \frac{t}{t^3-1} dt = C - \frac{1}{3} \ln \frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \text{, каде } t = \frac{\sqrt{1+x^3}}{x} \,.$$

1. Да се пресмета

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во друг облик

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^o \left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{3}} dx$$

Воведуваме ознаки: $m=0$, $n=3$ и $p=-\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \in Z$, изразот $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$ е биномен диференцијал.

Воведуваме смена $x^{-3}+1=t^3$, т.е. $\frac{1}{x^3}+1=t^3$, $x^3=\frac{1}{t^3-1}$, $x^2 dx = \frac{-t^2}{\left(t^3-1\right)^2} dt$, па според тоа

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sqrt[3]{x^{-3}+1}} = \int \frac{1}{\frac{1}{t^3-1} t} \frac{-t^2}{(t^3-1)} dt = -\int \frac{t}{t^3-1} dt = -\int \frac{t}{(t-1)(t^2+t+1)} dt = (**)$$

Подинтегралната функција е рационална функција и истата ќе ја разложиме на прости дропки:

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{A\left(t^2+t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t-1\right)}{t^3-1} = \frac{\left(A+B\right)t^2+\left(A-B+C\right)t+A-C}{t^3-1}$$

Според теоремите за еднаквост на рационални функции имаме:

$$0t^2+1t+0=\left(A+B\right)t^2+\left(A-B+C\right)t+A-C$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми имаме

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A=1 \\ B=-A \\ C=A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

односно разложувањето гласи:

$$\frac{t}{t^3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\frac{t-1}{t^2+t+1}$$

Ако интергрираме добиваме:

$$\int\frac{t}{t^3-1}dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{3}\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2t+1-3}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=(*)$$

Во првиот интеграл воведуваме смена $z=t^2+t+1\Rightarrow dz=(2t+1)dt$ а во вториот интеграл воведуваме смена $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{3}}{2}du$ и добиваме:

$$(*)=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\int\frac{1}{z}dz+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}du=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\ln z+\frac{\sqrt{3}}{3}arctgu+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Според тоа

$$(**)=-\frac{1}{3}\ln(t-1)+\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\ln\sqrt[6]{\frac{(t-1)^2}{(t^2+t+1)}}-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\text{, каде } t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$$

2. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}.$$

Решение./ Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}=\int x^\circ(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx=(*).$$

Во биномниот диференцијал $x^\circ(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$, $m=0,n=4,p=-\frac{1}{4}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in\mathbf{Z}$, воведуваме смена $x^{-4}+1=t^4$, т.е. $x^4=\frac{1}{t^4-1}$, $x^3dx=-\frac{t^3}{(t^4-1)^2}dt$ и добиваме:

$$(*)=\int\frac{x^3dx}{x^4\sqrt[4]{x^{-4}+1}}=\int\frac{-\frac{t^3}{(t^4-1)^2}dt}{\frac{1}{t^4-1}t}=-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=-\int\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{1}{4}\int\frac{1}{t+1}dt-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}=\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}+\operatorname{arctg}t+C\text{, каде } t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

3. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

Решение./ Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\int x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx=(*)$$

Во биномниот диференцијал $x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx$ имаме $m=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{2}=0\in\mathbf{Z}$, воведуваме смена

$$t^3=x^2+1,\ xdx=\frac{3}{2}t^2dt,$$

и добиваме:

$$(*)=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt[3]{x^2+1}}=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{(t^3-1)t}=\frac{3}{2}\int\frac{t}{t^3-1}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \text{, каде } t=\sqrt[3]{1+x^2}\ .$$

4. Да се пресмета

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во нов облик:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \int x^{-1}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=-1$, $n=2$ и $p=-\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{2}=0\in Z$, изразот $\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ е биномен диференцијал.

Воведуваме смена $1+x^2=t^3 \Rightarrow xdx=\frac{3}{2}t^2dt$. Според тоа

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^3-1)t} = \frac{3}{2}\int\frac{t}{t^3-1}dt = (*)$$

Бидејќи

$$\int\frac{t}{t^3-1}dt = \frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

добиваме:

$$(*) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{4}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

Значи,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}} = \ln\sqrt[4]{\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{2}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \text{, каде } t=\sqrt[3]{1+x^2}$$

5. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx = \int x^{-5}(1-x^4)^{\frac{1}{2}}dx = (*)\ .$$

Во биномниот диференцијал $x^{-5}(1-x^4)^{\frac{1}{2}}dx$ имаме $m=-5, n=4, p=\frac{1}{2}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-5+1}{4}=-1\in \mathbf{Z}$, воведуваме смена $1-x^4=t^2$, $x^3dx=-\frac{1}{2}tdt$ и добиваме:

$$(*) = \int\frac{\sqrt{1-x^4}}{(x^4)^2}x^3dx = -\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{t^2}}{(1-t^2)^2}tdt = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{t}{(1-t)(1+t)}\right)^2dt = -\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{(1-t)^2} - 2\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt = -\frac{1}{8}\left(\int\frac{1}{(1-t)^2}dt - \int\frac{1}{1-t}dt - \int\frac{1}{1+t}dt + \int\frac{1}{(1+t)^2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\ln(1+t) - \frac{1}{8}\ln(1-t) - \frac{1}{8}\frac{1}{1-t} - \frac{1}{8}\frac{1}{1+t} + C = \frac{1}{8}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-t^2} + C$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx = \frac{1}{8}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-t^2} + C \text{, каде } t=\sqrt{1-x^4}$$

6. Пресметај го интегралот:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx = \int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = (*)$$

За биномниот диференцијал $x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$ имаме $m=-1$, $n=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{\frac{1}{3}}=0\in \mathbf{Z}$, воведуваме смена $1+\sqrt{x}=t^3$, т.е. $x=(t^3-1)^2$, $dx=6t^2(t^3-1)dt$ и добиваме:

$$(*)=\int\frac{t}{(t^3-1)^2}6t^2(t^3-1)dt=6\int\frac{t^3}{t^3-1}dt=2\ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}}+2\sqrt{3}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx=t=2\ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}}+2\sqrt{3}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C\text{, каде } t=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\ .$$

7. Да се пресмета

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во друг облик:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx=\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

Воведуваме ознаки: $m=-1$, $n=\frac{1}{2}$ и $p=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{\frac{1}{2}}=0$, изразот $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$ е биномен диференцијал. Воведуваме смена $1+\sqrt{x}=t^3\Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^2\Rightarrow dx=6t^2\left(t^3-1\right)dt$ и добиваме:

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx=\int\frac{t}{\left(t^3-1\right)^2}6t^2\left(t^3-1\right)dt=6\int\frac{t^3}{t^3-1}dt=6\int\left(1+\frac{1}{t^3-1}\right)dt=6t+6\int\frac{1}{t^3-1}dt=(*)$$

Подинтегралната функција е рационална функција и истата ќе ја разложиме на прости дропки:

$$\frac{1}{t^3-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}=\frac{A\left(t^2+t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t-1\right)}{t^3-1}=\frac{\left(A+B\right)t^2+\left(A-B+C\right)t+A-C}{t^3-1}$$

Од теоремите за еднаквост на рационални функции имаме:

$$0t^2+0t+1=\left(A+B\right)t^2+\left(A-B+C\right)t+A-C$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми имаме

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B+C=0\\A-C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3A=1\\B=-A\\C=A-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\\C=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

односно разложувањето гласи:

$$\frac{1}{t^3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\frac{t+2}{t^2+t+1}$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{1}{t^3-1}dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2t+4}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}dt=(**)$$

Воведуваме ознаки Во првиот интеграл $z=t^2+t+1\Rightarrow dz=(2t+1)dt$ Воведуваме ознаки а во $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{3}}{2}du$ и добиваме

$$(**)=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\int\frac{1}{z}dz-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{3}}{2}du=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\ln z-\frac{\sqrt{3}}{3}arctgu+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Според тоа

$$(*)=6t+2\ln(t-1)-\ln(t^2+t+1)-2\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx=6t+2\ln(t-1)-\ln(t^2+t+1)-2\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\text{, каде } t=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\ .$$

8. Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx\ .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=(*)$$

Во биномниот диференцијал $x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$ имаме $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in \mathbf{Z}$, воведуваме смена $1+\sqrt[4]{x}=t^3$, $x=(t^3-1)^4$, $dx=12t^2(t^3-1)^3dt$, и добиваме:

$$(*)=\int \frac{t}{\sqrt{(t^3-1)^4}}12t^2(t^3-1)^3dt=12\int \frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}dt=12\int t^3(t^3-1)dt=12\int (t^6-t^3)dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C\ .$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C\text{, каде } t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\ .$$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$

10. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$

11. Да се пресмета

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$$

Решение. Воведуваме ознаки $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=4$. Бидејќи $p=4\in Z$, изразот $\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx$ е биномен диференцијал. Воведуваме смена $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$ и добиваме:

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx=\int t^3(1+t^2)^4 6t^5dt=6\int t^8(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)dt=6\left(\frac{1}{9}t^9+\frac{4}{11}t^{11}+\frac{6}{13}t^{13}+\frac{4}{15}t^{15}+\frac{1}{17}t^{17}\right)+C$$

Значи,

$$\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx=\frac{2}{3}t^9+\frac{24}{11}t^{11}+\frac{36}{13}t^{13}+\frac{8}{5}t^{15}+\frac{6}{17}t^{17}+C\text{, каде } t=\sqrt[6]{x}\ .$$

12. $\int x^{-1}(1+\sqrt[3]{x})^{-3}dx$.

Решение. $\int x^{-1}(1+\sqrt[3]{x})^{-3}dx=3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$

13. Да се пресмета

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx$$

Решение. Ќе направиме треансформација на подинтегралната функција:

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx=\int\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int x^o\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=0$, $n=\frac{1}{4}$ и $p=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{\frac{1}{4}}=4\in Z$, воведуваме смена $1+\sqrt[4]{x}=t^3$, $x=\left(t^3-1\right)^4 \Rightarrow dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt$, добиваме:

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx=\int \sqrt[3]{t^3}12t^2(t^3-1)^3dt=12\int t^3\left(t^9-3t^6+3t^3-1\right)dt=\frac{12}{13}t^{13}-\frac{36}{7}t^7+9t^4-12t+C$$

Значи,

$$\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx=\frac{12}{13}t^{13}-\frac{36}{7}t^7+9t^4-12t+C\text{, каде } t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$$

14. Да се пресмета

$$\int \sqrt{x^3+x^4}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегреалната функција со

$$\int \sqrt{x^3+x^4}dx=\int x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=\frac{3}{2}$, $n=1$ и $p=\frac{1}{2}\notin Z$. При тоа исполнет е условот $\frac{m+1}{n}+p=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3\in Z$. Според тоа

$$\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left(x^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2}}x^2dx=(*)$$

Воведуваме смена $\frac{1}{x}+1=t^2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$ и добиваме:

$$(*)=-2\int t\frac{1}{(t^2-1)^2}\frac{t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int\frac{t^2}{(t^2-1)^4}dt=(**)$$

15. Да се пресмета

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=\int x^{-1}(1+x^6)^{\frac{1}{6}}dx=(*)$$

Воведуваме ознаки $m=-1, n=6$, $p=-\frac{1}{6}\notin Z$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{0}{6}=0\in Z$, воведуваме смена $1+x^6=t^6 \;\Rightarrow\; x^5dx=t^5dt$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=\int\frac{x^5dx}{x^6\sqrt[6]{1+x^6}}=\int\frac{t^5dt}{(t^6-1)t}=\int\frac{t^4}{t^6-1}dt=(*)$$

17. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$ **Решение.** $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=\frac{5}{4}t^4-\frac{5}{9}t^9+C$, каде $t=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$

16. Да се пресмета

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=\int x^{-3}(1+x^{-1})^{\frac{1}{5}}dx=(*)$$

Воведуваме ознаки $m=-3$, $n=-1$, $p=-\frac{1}{5}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{-1}=2\in Z$, воведуваме смена $1+\frac{1}{x}=t^5 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x^2}dx=-5t^4dt$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=\int\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}\frac{1}{x^2}dx=-\int(t^5-1)\frac{1}{t}5t^4dt=-5\int(t^8-t^3)dt=-5\left(\frac{1}{9}t^9-\frac{1}{4}t^4\right)+C=C-5t^4\left(\frac{1}{9}t^5-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=C-5\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}\left(\frac{1}{9x}-\frac{1}{4}\right)$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=C-5\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}\left(\frac{1}{9x}-\frac{1}{4}\right)$$

17. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

Решение. //Интегралот ќе го запишеме во облик

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx=\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx=(*)$$

Сега е јасно дека $m=1, n=\frac{2}{3}, p=\frac{1}{2}\notin \mathbf{Z}$. Од друга страна

$$\frac{m+1}{n}=\frac{1+1}{\frac{2}{3}}=\frac{6}{2}=3\in \mathbf{Z}$$

Според тоа, изразот $x(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx$ е биномен диференцијал. Заради тоа, воведуваме смена

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^3 \Rightarrow 1+x^{\frac{2}{3}}=t^3$$

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C$, каде $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$

18. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$ **Решение.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx=6t+2\ln\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

19. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}dx$.

20. Да се пресмета

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Решение.

21. Да се пресмета

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$$

Воведуваме ознаки $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$ и $p=-2\in Z$. Воведуваме смена $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$ и добиваме:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\int \frac{t^3}{(1+t^2)^2}6t^5dt=6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt=$$

22. Да се пресмета

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}dx=(*)$$

Воведуваме ознаки

$$m=\frac{1}{3}, n=2,\ p=\frac{1}{3}\notin Z$$

Бидејќи $\frac{m+1}{n}+p=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1\in Z$ ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}dx=\int \sqrt[3]{3x^{-2}-1}\,xdx=(*)$$

Воведуваме смена $\frac{3}{x^2}-1=t^3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{t^3+1}\Rightarrow xdx=\frac{-9t^2}{2(t^3+1)^2}dt$ и добиваме:

$$(*)=-\frac{9}{2}\int \frac{t^3}{(t^3+1)^2}dt=$$

23. Во кои случаи интегралот:

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx$$

каде m е рационален број е елементарна функција.

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx = \int x^o (1+x^m)^{\frac{1}{2}} dx = (*)$$

Воведуваме ознаки $m_1 = 0$, $n_1 = m$, $p = \frac{1}{2} \notin Z$. Изразот

$$x^o (1+x^m)^{\frac{1}{2}} dx$$

ќе биде биномен диференцијал ако

$a)$ $\frac{0+1}{m} \in Z$, т.е. $m = \frac{1}{k}, k \in Z \setminus \{0\}$

$b)$ $\frac{0+1}{m} + \frac{1}{2} \in Z$, т.е. $m = \frac{2}{2k-1}$, $k \in Z \setminus \{0\}$

Во првиот случај имаме т.е. воведуваме смена $1+\sqrt[k]{x} = t^2$ т.е.

Во вториот случај воведуваме ќе направиме трансформација на подинтегралната функција со

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{2}} \sqrt{x^{-m}+1}\,dx = (*)$$

и воведуваме смена $\frac{1}{x^m} + 1 = t^2$, т.е. $x^m = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow mx^{m-1}dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt$ и добиваме

24. Да се пресмета

$$\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во нов облик:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx = \int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}} dx$$

Воведуваме ознаки $m=-2$, $n=3$ и $p=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \in Z$, изразот $\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx$ е биномен диференцијал. Заради тоа воведуваме смена $x^{-3}+1 = t^3$, $x^3 = \frac{1}{t^3-1} \Rightarrow x^2dx = -\frac{t^2}{(t^3-1)^2}dt$ И добиваме:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt[3]{x^{-3}+1}}{x^3}x^2dx = \int \frac{t}{\frac{1}{t^3-1}} \frac{-t^2}{(t^3-1)^2}dt = -\int \frac{t^3}{t^3-1}dt = -\int \frac{t^3-1+1}{t^3-1}dt = -\int 1dt - \int \frac{1}{t^3-1}dt = (*)$$

Бидејќи,

$$\int \frac{1}{t^3-1}dt = \frac{1}{3}\ln(t-1) - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

добиваме:

$$(*) = -t - \frac{1}{3}\ln(t-1) + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -t - \ln\sqrt[6]{\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

Значи,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx = -t - \ln\sqrt[6]{\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \text{ каде } t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$$

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$ **Решение.** $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = \frac{1}{6}\ln\frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{12}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{3}}$, $t = \sqrt[6]{1+x^6}$

26. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$. **Решение.** $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) + C$

27. Да се пресмета

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}dx$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во нов облик:

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}dx = \int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx$$

Воведуваме ознаки $m=-1, n-\frac{1}{3}, p=-3$. Бидејќи $p=-3\in Z$, изразот $\frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}dx$ е биномен диференцијал.

Воведуваме смена $x=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt$ и добиваме:

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}dx = \int \frac{1}{t^3(1+t)^3}3t^2dt = 3\int \frac{1}{t(1+t)^3}dt = 3\int \frac{1}{(t+1)^2}\frac{1}{t(t+1)}dt = 3\int \frac{1}{(t+1)^2}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right]dt =$$

$$=3\int \frac{1}{t(1+t)^2}dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^3}dt = 3\int \frac{1}{t+1}\frac{1}{t(t+1)}dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^3}dt =$$

$$=3\int \frac{1}{t+1}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right]dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^3}dt = 3\int \frac{1}{t(1+t)}dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^2}dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^3}dt =$$

$$=3\int \frac{1}{t}dt - 3\int \frac{1}{1+t}dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^2}dt - 3\int \frac{1}{(1+t)^3}dt =$$

$$=3\ln t - 3\ln(t+1) + 3\frac{1}{1+t} + 3\frac{1}{(t+1)^2} + C$$

Значи,

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})^3}dx = \ln\frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^3} + 3\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} + 3\frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} + C$$

28. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx$.

Решение. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx = \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{6}\ln\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{2\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$

29. Да се пресмета

$$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција

$$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx = \int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=\frac{1}{3}$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}+p=2\in Z$, изразот $\sqrt[3]{x(1-x^2)}dx$ е биномен диференцијал.

Воведуваме смена $x^{-2}-1=t^3$, $x^2=\frac{1}{t^3+1} \Rightarrow xdx = \frac{3}{2}\frac{-t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt$ и добиваме:

$$\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}dx = \int \sqrt[3]{x^{-2}-1}\,xdx = -\frac{3}{2}\int t\frac{t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt = -\frac{3}{2}\int \frac{t^3}{(t^3+1)^2}dt = (*)$$

Задача 30. Да се пресмета

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во нов облик:

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=-11$, $n=4$ и $p=-\frac{1}{2}$. Бидејќи

$$\frac{m+1}{n}+p = \frac{-11+1}{4} - \frac{1}{2} = -3 \in Z$$

изразот $\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ е биномен диференцијал. Заради тоа воведуваме смена $x^{-4}+1=t^2$, $x^4=\frac{1}{t^2-1}$ $\Rightarrow$ $x^3dx=-\frac{1}{2}\frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int\frac{x^3dx}{x^{16}\sqrt{1+x^{-4}}}=\int\frac{-\frac{1}{2}\frac{t}{(t^2-1)^2}dt}{t\frac{1}{(t^2-1)^4}}=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{1}{2}\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C\text{, каде } t=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}$$

9. $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{1}{5}\ln\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+t+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$, $t=\sqrt[3]{1+x^5}$

31. Да се пресмета

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$$

Решение. Ќе направиме трансформација на подинтегралната функција:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=-1, n=5, p=-\frac{1}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{5}=0\in Z$, изразот $\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ е биномен диференцијал. Воведуваме смена $1+x^5=t^3\Rightarrow x^4dx=\frac{3}{5}t^2dt$ и добиваме:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int\frac{x^4dx}{x^5\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\int\frac{t^2}{(t^3-1)t}dt=\frac{3}{5}\int\frac{t}{t^3-1}dt=(*)$$

Бидејќи

$$\int\frac{t}{t^3-1}dt=\frac{1}{3}\ln(t-1)-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

добиваме

$$(*)=\frac{1}{5}\ln(t-1)-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

Значи,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{1}{5}\ln(t-1)-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\text{, каде } t=\sqrt[3]{1+x^5}$$

32. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$

Решение. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$

33. Да се пресмета

$$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$$

Решение. Подинтегралната функција ќе ја запишеме во нов облик:

$$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx=\int x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}}dx$$

Воведуваме ознаки $m=5, n=3, p=\frac{2}{3}$. Бидејќи $\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{3}=2\in Z$ изразот $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$ е биномен диференцијал. Воведуваме смена $1+x^3=t^3\Rightarrow x^2dx=t^2dt$ и добиваме:

$$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx=\int(t^3-1)t^3dt=\int(t^6-t^3)dt=\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{4}t^4+C$$

Значи,

$$\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{4}t^4 + C \text{, каде } t = \sqrt[3]{1+x^3}$$

34. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$.

Решение. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4 dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5} + C$

35. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

Решение. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx = 12\left[\frac{\sqrt[3]{t^{13}}}{13} - \frac{3\sqrt[3]{t^{10}}}{10} + \frac{3\sqrt[3]{t^7}}{7} - \frac{\sqrt[3]{t^4}}{4}\right] + C$, $t = \sqrt[4]{x}$

Интеграли од ирационални функции

1.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx .$$

Решение./Решението на интегралот е од облик

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx ,$$

каде што A, B, C и λ се коефициенти кои треба да ги определиме. Ако последното равенство го диференцираме, добиваме:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}} ,$$

т.е.

$$\frac{2x^3}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2(2Ax+B)(x^2+x+1)+(Ax^2+Bx+C)(2x+1)+2\lambda}{2\sqrt{x^2+x+1}} .$$

Од последното равенство го добиваме равенството:

$$2x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0 = 6Ax^3+(4B+5A)x^2+(3B+4A+2C)x+2B+C+\lambda .$$

Според теоремата за еднаквост на полиноми добиваме:

$$\begin{cases} 6A=2 \\ 5A+4B=0 \\ 4A+3B+2C=0 \\ 2B+C+\lambda=0 \end{cases}$$

Негово решение е $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{5}{12}$, $C=-\frac{1}{24}$, $\lambda=\frac{7}{16}$. Од друга страна,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = (*) .$$

Воведуваме смена $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$ и добиваме

$$(*) = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\sqrt{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln(t+\sqrt{t^2+1}) = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}}\right)+C .$$

Значи,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{7}{16}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}}\right)+C .$$

2.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$$

Решение.Решението е од облик

$$\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{1+x-x^2}+\lambda\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx ,$$

каде што A, B и λ се коефициенти кои ќе ги определиме.При тоа, последното равенство ќе го диференцираме, и добиваме:

$$\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} = A\sqrt{1+x-x^2}+\frac{(Ax+B)(1-2x)}{2\sqrt{1+x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+x-x^2}} = \frac{2A(1+x-x^2)+(Ax+B)(1-2x)+2\lambda}{2\sqrt{1+x-x^2}} .$$

Според теоремите за еднаквост на рационални функции, имаме

$$2-2x+2x^2 = 2A(1+x-x^2)+(Ax+B)(1-2x)+2\lambda = -4Ax^2+(3A-2B)x+2A+B+2\lambda ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} 2A+B+2\lambda=2 \\ 3A-2B=-2 \\ -4A=2 \end{cases}$$

Јасно е дека решение на системот е $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}$ и $\lambda=\frac{11}{8}$.

Од друга страна

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx = (*) .$$

Воведуваме смена $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}t$, $dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}dt}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{4}t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C .$$

Конечно,

$$\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C .$$

3.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx .$$

Решение.Решението е од облик

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx ,$$

каде A, B и λ се коефициенти кои треба да ги определиме. Последното равенство ќе го диференцираме, при што

$$\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} = A\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{(Ax+B)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{A(x^2-2x+5)+(Ax+B)(x-1)+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} ,$$

т.е.

$$\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \frac{2Ax^2+(-3A+B)x+5A-B+\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}} .$$

Според правилата за еднаквост на рационални алгебарски изрази, добиваме:

$$2x^2-3x = 2Ax^2+(-3A+B)x+5A-B+\lambda ,$$

а од теоремата за еднаквост на полиноми го добиваме системот:

$$\begin{cases} 5A-B+\lambda=0 \\ -3A+B=-3 \\ 2A=2 \end{cases}$$

Негово решение е $A=1, B=0$ и $\lambda=-5$. Од друга страна:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}dx = (*) .$$

Воведуваме смена $x-1=t$, $dx=dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln(t+\sqrt{t^2+4})+C = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$$

Значи,

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C .$$

4.Пресметај го интегралот

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx .$$

Решение. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C$

5.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx .$$

Решение./ $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+\frac{111}{3}\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$

6.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx .$$

Решение. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = (x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C$

7.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx .$$

Решение. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C$

8.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx .$$

Решение. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx = (x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}|+C$

9.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx .$$

Решение. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})$

10.Пресметај го интегралот:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$$

Решение.Решението ќе го побараме во облик:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx ,$$

каде што A, B и λ се коефициенти кои ќе ги определиме. Ако равенството го диференцираме и алгебарски средиме, добиваме

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{-2Ax^2 + (-3A-B)x + (A-B+\lambda)}{\sqrt{1-2x-x^2}} .$$

Два рационални алгебарски изрази се еднакви ако и само ако имаат исти броители или имаат исти именители. За да важи знак за равенство, потребно е и доволно да

$$x^2 + 0x + 0 = -2Ax^2 + (-3A-B)x + (A-B+\lambda) .$$

Два полиноми се еднакви ако и само имаат еднакви коефициенти пред соодветните степени на променливата x, од каде што го добиваме системот:

$$\begin{cases} A - B + \lambda = 0 \\ -3A - B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases}.$$

Решение на системот е $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}, \lambda = 2$. Од друга страна,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}}dx = (*) .$$

Воведуваме смена $x+1 = \sqrt{2}t$, $dx = \sqrt{2}dt$ и добиваме:

$$(*) = \int \frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{2-2t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C .$$

Значи,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2} - 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C .$$