Илија Јанев, Скопје

ВАРИЈАЦИИ НА ИСТА ТЕМА

(*или колку се задлабочуваме во решението на една задача*)

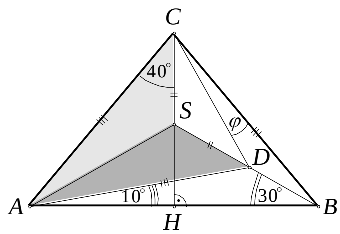
Навистина, колку се задлабочувате во решението на некоја задача? Дали некогаш сте се обиделе да “прокопате” подлабоко во решението на некоја задача, што тоа го дозволува? Ако досега не сте го правеле тоа, се надеваме дека читањето на овие редови ќе ве поттикне да се обидете. А ако се обидете со потребната упорност, веруваме дека и ќе успеете.

За да ви помогнеме во таа насока, во оваа статија избравме две задачи, чија сличност ни овозможува да ги “варираме“ условите и по продлабочено да го продискутираме нивното решение. Првата задача ќе ја решиме на два начина (планиметриски и тригонометриски), а вие сторете го тоа со втората, па дури потоа продолжете да го читате вториот дел од оваа статија.

Пример 1. *Во рамнокрак триаголник* ABC, *со агли при основата* AB *од* 50°, *е избрана точка* D, *таква што* $\angle ABD = 30^\circ$ *и* $\angle BAD = 10^\circ$.

Најди го аголот BCD.

***Решение* I (*Планиметриско*).** Нека $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\angle BAC = \angle ABC = 50^\circ$, тогаш $\angle ACB = 80^\circ$. Од условите $\angle ABD = 30^\circ$ и $\angle BAD = 10^\circ$, заклучуваме дека $\angle DBC = 20^\circ$ и $\angle DAC = 40^\circ$.



Црт. 1

Ако $CH \perp AB$, тогаш

$$\angle ACH = \angle BCH = 40^\circ \qquad \text{(црт. 1).}$$

Нека S е пресечната точка на висината CH и правата BD, тогаш триаголникот ABS е рамнокрак, со основа AB и агли при основата од 30°. Оттука

$$\angle DAS = 20^\circ \text{ и } \angle CAS = 20^\circ,$$

т.е. AS е симетрала на аголот CAD.

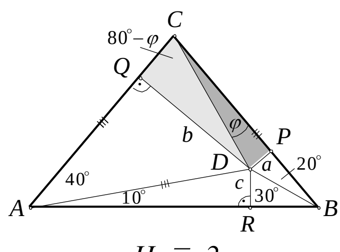
Бидејќи $\angle SDA = 40^\circ$ како надворешен агол за ΔABD, и $\angle SCA = 40^\circ$, следува дека $\Delta ASD \cong \Delta ASC$ (според признакот ACA).

Оттука $\overline{AD} = \overline{AC}$, т.е. ΔDCA е рамнокрак па

$$\angle ADC = \angle ACD = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$$

Тогаш $\angle DCS = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$ и конечно $\angle BCD = 10^\circ$.

***Решение* II (*тригонометриско*).** Ако $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\angle BAC = \angle ABC = 50^\circ$, тогаш $\angle ACB = 80^\circ$, а



Црт. 2

од условите $\angle ABD = 30^\circ$ и $\angle BAD = 10^\circ$ следува $\angle DBC = 20^\circ$ и $\angle DAC = 40^\circ$. Да ставиме $\angle BCD = \varphi$, тогаш

$$\angle ACD = 80^\circ - \varphi .$$

Нека P, Q, R се подножја на нормалите од точката D соодветно на страните BC, CA, AB (црт. 2),
тогаш од правоаголните триаголници CDP и CDQ имаме:

$$a = \overline{CD}\sin\varphi, \quad b = \overline{CD}\,(\sin 80^\circ - \varphi) \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(80^\circ - \varphi)}{\sin\varphi} \tag{1}$$

Слично, од правоаголните триаголници ADQ и ADR, односно BDR и BDP добиваме:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$$

а оттука

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2}}{\sin 10^\circ \sin 20^\circ}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува:

$$\sin 10^\circ \sin(80^\circ - \varphi) = \sin\varphi \cos 20^\circ \qquad /\cdot 2$$

$$2\sin 10^\circ \cos(10^\circ + \varphi) = 2\sin\varphi\cos 20^\circ$$

$$\sin(10^\circ - 10^\circ - \varphi) + \sin(10^\circ + 10^\circ + \varphi) = \sin(\varphi - 20^\circ) + \sin(\varphi + 20^\circ)$$

$$\sin(-\varphi) = \sin(\varphi - 20^\circ)$$

Бидејќи $\varphi < 90^\circ$, следува $\varphi - 20^\circ = -\varphi$, т.е. $\varphi = 10^\circ$.

Ете, тоа беа двата начини на решавање на оваа задача. Вие можете да најдете и трет, четврт (обидете се!), но за она кое си го поставивме како цел, доволни се и овие. Значи, пред да продолжите со читањето на наредните редови, треба прво самостојно да ја решите, на два начина, следната:

Задача. *Во рамнокрак триаголник ABC, со $\angle C = 100^\circ$ се повлечени две полуправи низ темињата A и B, кои со основата AB зафаќаат агли од 20° и од 30°, соодветно. Тие се сечат во точката D, внатре во триаголникот ABC.*

Најди го аголот BCD.

По решавањето на втората задача, веројатно ја согледавте големата сличност меѓу овие две задачи. Тие, кратко речено, се решаваат по иста "формула", како што две квадратни равенки се решаваат по формулата за корените на квадратна равенка. Веројатно добивте $\varphi = 20^\circ$.

Е сега, дали навира желбата да бидете автор на една задача? Секако, идејата е позајмена, видена ... Но, за почеток ќе ви треба некоја насока. Значи, се одлучувате сами да составите задача, слична на понудените две, само со ”други бројки”. Обидете се, бидете упорни, истражувајте подолго време, а дури потоа поминете на читање на наредните редови. Имате фора 7 дена!

Внимавајте! Дали аглите $\alpha_1 = \angle BAD$, $\beta_1 = \angle ABD$ и γ се дадени ”од ракав”? Или, меѓу нив постои некоја ”скриена врска”? Затоа се враќате на дадените примери, ги разгледувате цртежите, го препрочитувате решението и ... ”врската” е откриена...

За триаголниците ASC и ASD да бидат складни, треба $\angle SDA = \angle SCA = \frac{\gamma}{2}$. Но $\angle SDA$ е надворешен агол за ΔABD. Заклучок: $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\gamma}{2}$.

Нестрпливи од радост, овој заклучок веднаш го проверуваме на конкре-
тен пример. Почнуваме да го ”варираме” првиот услов - промена на вредноста на аголот α_1. Се обидуваме со овие вредности:

$\alpha_1 = 18^\circ$ (не 10° или 20°, како во дадените примери)

$\beta_1 = 30^\circ$, и , се разбира $\gamma = 2(\alpha_1 + \beta_1) = 96^\circ$.

При овие услови решението (планиметриско и тригонометриско) оди ”глатко” - лесно наоѓате дека $\varphi = 18^\circ$. Но, (секогаш има едно: но), за општ заклучок сеуште е рано. Да се обидеме со уште еден пример, со вредностите:

$$\alpha_1 = 18^\circ, \quad \beta_1 = 28^\circ, \quad \gamma = 92^\circ.$$

И - веќе имаме потешкотии. Нешто ”не оди” ?

Оваа задача не се вклопува во досегашниот ”шаблон”, т.е. не можеме да ја решиме по истата ”формула”. Која е причината? Веројатно уште некоја ”скриена врска”, што досега не ја воочивме. И пак потрага низ цртежите, решенијата... решенијата, цртежите... Што сé користевме досега? Па, користевме дека ΔDCA е рамнокрак,... и дека AS е симетрала на $\angle CAD$,... и дека $\Delta ASC \cong \Delta ASD$. Значи, треба $\angle ASC = \angle ASD.$ Но, $\angle ASC = \angle BSC$ (зошто?), а оттука:

$$\angle ASC = \angle ASB = \angle BSC = 120^\circ.$$

$$\angle ASH = \angle BSH = 60^\circ,$$

па од правоаголникот ΔHBS следува дека $\angle HBS = 30^\circ$, т.е. $\beta_1 = 30^\circ$.

Конечно ги откриваме сите ”згодни” врски меѓу зададените агли: $\alpha_1, \beta_1, \gamma;$ тие се: $\beta_1 = 30^\circ$, $\alpha_1 = a < 30^\circ$, $\gamma = 2(\alpha_1 + \beta_1)$.

Значи, ако $\alpha_1 = a$, $\beta_1 = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ + 2a$ (за $a < 30^\circ$), тогаш

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - (30^\circ + a) = 60^\circ - a = \beta.$$

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 60^\circ - a - a = 60^\circ - 2a$$

па од рамнокракиот триаголник DCA добиваме:

$$\alpha_2 + 2(\gamma - \varphi) = 180^\circ$$

$$60^\circ - 2a + 2(60^\circ + 2a - \varphi) = 180^\circ$$
$$2\varphi = 2a\,,\quad \varphi = a\,.$$

Е, дури сега можеме да се пофалиме дека дадената задача ја решивме за произволно многу вредности на α_1, β_1 и γ. Сепак, на овој начин извршивме едно нецелосно обопштување на задачата, бидејќи изборот на аглите α_1, β_1 и γ беа ”врзани” со некоја ”згодна” врска, која ни го олеснува патот до решението.

Да ја разгледаме сега можноста за целосно обопштување на задачата-кога аглите α_1, β_1 и γ се произволно зададени. Кој пат ќе го избереме за нејзиното решавање? Планиметриското решение е добро кога меѓу овие агли постоеше извесна зависност. Тригонометриското решение, пак, овозможува, дозволува поширок ”замав”.

Значи се одлучуваме на тригонометриско решение и притоа не очекуваме вредноста за φ да биде некој природен или рационален број...

На крајот, од вас очекуваме сами да ја формулирате задачата, а потоа да ја решите. Вашиот труд ќе најде место на овие страници. Очекуваме да ни се јавите.

(Продолжува)

Илија Јанев, Скопје

ВАРИЈАЦИИ НА ИСТА ТЕМА- продолжение

Во СИГМА бр. 47 понудивме две решенија на една “натпреварувачка” задача (планиметриско и тригонометриски). Од вас се бараше прво да реќите една задача, многу слична на дадената, а потоа, како вистински математичари, да формулирате задача, која ќе ги опфати дадените “натпреварувачки” задачи, но ќе опфати и други задачи, слични на нив. Имено, требаше да формулирате задача со општи услови и да најдете нејзино решение.

Целта ни беше да видиме колку се задлабочувате во решението на една задача и дали имате навика во една ”обична” задача, со конкретни услови, да согледате ”многу” задачи, слични на неа, т.е. да дадете генерализација на одреден вид на задачи.

До сега се јави само Борче Јошевски, ученик во IV година во гимназијата ”Јосип Броз Тито” од Битола. Неговиот напис го објавуваме без какво и да е ”дотерување”, а од вас очекуваме да се ”сложите” со него или да понудите друго решение. Еве како Борче Јошевски ја формулира општата

Задача. Во внатрешноста на рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$), со агол при основата α, е избрана точка D, таква што $\angle BAD = \alpha_1$ и $\angle ABD = \alpha_2$. Одреди го аголот BCD.

Решение. Нека $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$, $\angle BAD = \alpha_1$, $\angle ABD = \alpha_2$, $\angle BCD = \varphi = ?$; тогаш

$\overline{AB} = 2b\cos\alpha$, $\angle ADB = \pi - (\alpha_1 + \beta_1)$, $\angle DBC = \beta_2$, $\angle BDC = \pi - (\beta_2 + \varphi)$

Според синусната теорема за ΔABD и ΔBCD наоѓаме:

$$\frac{2b\cos\alpha}{\sin[\pi-(\alpha_1+\beta_1)]} = \frac{\overline{BD}}{\sin\alpha_1}$$

$$\overline{BD} = \frac{2b\cos\alpha\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)} \qquad (1)$$

$$\frac{b}{\sin[\pi-(\beta_2+\varphi)]} = \frac{\overline{BD}}{\sin\varphi}$$

$$\overline{BD} = \frac{b\sin\varphi}{\sin(\beta_2+\varphi)} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$\frac{2b\cos\alpha\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\beta_1)} = \frac{b\sin\varphi}{\sin(\varphi+\beta_2)}$$

$$2b\cos\alpha\sin\alpha_1\sin(\varphi+\beta_2) = b\sin\varphi\sin(\alpha_1+\beta_1)$$

$$2\cos\alpha\sin\alpha_1[\sin\varphi\cos\beta_2 + \cos\varphi\sin\beta_2] = \sin\varphi\sin(\alpha_1+\beta_1)$$

$$2\cos\alpha\sin\alpha_1\cos\varphi\sin\beta_2 = \sin\varphi[\sin(\alpha_1+\beta_1) - 2\cos\alpha\sin\alpha_1\cos\beta_2]$$

$$ctg\varphi = \frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha_1\sin\beta_2} - ctg\beta_2$$

Оттука $$\varphi = arcctg\left[\frac{\sin(\alpha_1+\beta_1)}{2\cos\alpha\sin\alpha_1\sin\beta_2} - ctg\beta_2\right].$$

Забелешка. Веројатно забележувате конечниот резултат е доста ”сложено искажан”. Проверете го решението на Борче Јошевски на конкретните примери од задачите (види СИГМА бр. 47).

Можете ли да најдете ”поедноставен” резултат? Очекуваме да се јавите.