ЕДЕН МЕТОД ЗА РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ

Зоран Штерјов
СОУ „Наум Наумовски-Борче"-Пробиштип

Со помош на неколку теореми и соодветни примери ќе покажеме како може својството монотоност на функции да се примени за решавање на некои видови равенки.

Дефиниција: Нека f е функција определена на интервалот $D \subseteq R$.

- Функцијата $f(x)$ е **строго монотоно растечка** на D ако од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) < f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in D$.
- Функцијата $f(x)$ е **строго монотоно опаднувачка** на D ако од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in D$.

Монотоноста на функциите може да се испита и со помош на изводи. Имено, диференцијабилната функција $f(x)$ строго монотоно расте на интервалот D ако и само ако $f'(x) > 0$, за секој $x \in D$, а строго монотоно опаѓа на D ако и само ако $f'(x) < 0$, за секој $x \in D$. Функцијата $f(x)$ е константна на D ако и само ако $f'(x) = 0$, за секој $x \in D$.

<u>Теорема 1</u>: Ако $f(x)$ е строго монотона функција (растечка или опаднувачка) на интервалот D, бројот c е константа и бројот $x = a$ е решение на равенката $f(x) = c$, тогаш бројот a е единствено решение на равенката.

Доказ: Нека $f(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D.
-Ако $x > a$, тогаш $f(x) > f(a) = c$, па за $x > a$ равенката нема решение.
-Ако $x < a$, тогаш $f(x) < f(a) = c$, па за $x < a$ равенката нема решение.
Значи $x = a$ е единствено решение на равенката. Аналогно се докажува кога $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција на интервалот D.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $a^x + b^x = (a+b)^x$, каде што $a, b \in R \setminus \{0,1\}$.

Решение: Едно очигледно решение е бројот $x = 1$. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^x+\left(\frac{b}{a+b}\right)^x=1.$$

Нека $f(x)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^x+\left(\frac{b}{a+b}\right)^x$. При $a,b\in R\setminus\{0,1\}$, функцијата $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка, па во согласност со *Теорема 1* добиваме дека $x=1$ е единствено решение на равенката.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $9^x-1=2^x\left(3+3\cdot 2^x+2^{2x}\right)$, каде што $x\in R$.

Решение: Дадената равенка ја запишуваме во облик
$9^x=1+3\cdot 2^x+3\cdot 2^{2x}+2^{3x}$,

$9^x=\left(1+2^x\right)^3$, односно $9^{\frac{x}{3}}=1+2^x$,

и ако ставиме $t=\dfrac{x}{3}$, тогаш равенката добива облик $9^t=1+8^t$, односно

$$\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{8}{9}\right)^t=1 \qquad (*)$$

Едно очигледно решение на оваа равенка е бројот $t=1$. Нека $f(t)=\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{8}{9}\right)^t$, $f:R\to R^+$. Функцијата $f(t)$ е строго монотоно опаднувачка, па во согласност со *Теорема 1* добиваме дека $t=1$ е единствено решение на равенката (*). Тогаш $x=3$ е единствено решение на дадената равенка.

<u>Теорема 2</u>: Збир на две строго монотоно растечки (опаднувачки) функции е строго монотоно растечка (опаднувачка) функција.

Доказ: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотоно опаднувачки функции на интервалот D. Тогаш за нив важи дека $f'(x)<0$ и $g'(x)<0$. Ако ставиме $h(x)=f(x)+g(x)$, тогаш и $h'(x)<0$, што значи дека и нивниот збир е строго монотоно опаднувачка функција. Аналогно се докажува кога $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотоно растечки функции на интервалот D.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $2^x+3^x=7+2\sqrt{3^x}$, каде што $x\in R$.

Решение: Ако $x\le 0$, тогаш $2^x+3^x\le 1+1=2$, додека $7+2\sqrt{3^x}>7$, што значи дека за $x \le 0$ равенката нема решение. Нека $x > 0$. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$3^x - 2\sqrt{3^x} + 1 + 2^x = 8,$$

$$\left(\sqrt{3^x} - 1\right)^2 + 2^x = 8, \text{ односно } \left(\left(\sqrt{3}\right)^x - 1\right)^2 + 2^x = 8.$$

Нека $f(x) = \left(\sqrt{3^x} - 1\right)^2$, $f:(0,\infty) \to R$ и $g(x) = 2^x$, $g:(0,\infty) \to R$. Функциите $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотоно растечки функции, па и нивниот збир $h(x) = f(x) + g(x)$ е строго монотоно растечка функција. Според *Теорема 1,* равенката $h(x) = 8$ има единствено решение, и бидејќи $h(2) = 8$, следува дека $x = 2$ е единствено решение на дадената равенка.

Теорема 3: Нека $f(x)$ е строго монотоно растечка (опаднувачка) функција на интервалот D, а $g(x)$ е строго монотоно опаднувачка (растечка) функција на интервалот D. Ако $x = a$ е решение на равенката $f(x) = g(x)$, тогаш $x = a$ е единствено решение.

Доказ: Нека $f(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D, а $g(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција на интервалот D. Тогаш $-g(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D, па $f(x) - g(x)$ е строго монотоно растечка функција на интервалот D. Според *Теорема 1,* равенката $f(x) - g(x) = 0$, т.е. $f(x) = g(x)$ има единствено решение.

❖***Пример:*** Реши ја равенката

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(7 + \left(\sqrt{2}\right)^x\right) + 0{,}5x = 0{,}5\log_{\frac{1}{3}}\left(3 + \left(\sqrt{2}\right)^x + 2^x\right).$$

Решение: Равенката ја трансформираме во облик

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(7 + \left(\sqrt{2}\right)^x\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3 + \left(\sqrt{2}\right)^x + 2^x},$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(7 + \left(\sqrt{2}\right)^x\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3 + \left(\sqrt{2}\right)^x + 2^x},$$

$$7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{3 + \left(\sqrt{2}\right)^x + 2^x}.$$

Нека $f, g : R \to R^+$, $f(x) = 7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^x$ и $g(x) = \sqrt{3 + \left(\sqrt{2}\right)^x + 2^x}$.

Тогаш последната равенка добива облик $f(x) = g(x)$ и има решение $x = 2$. Бидејќи $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција, а $g(x)$ е строго монотоно растечка функција, според *Теорема 3* следува дека $x = 2$ е единствено решение на равенката.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$ во множеството R.

Решение: Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x.$$

Нека $f(x) = \left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ и $g(x) = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x$, $f, g : R \to R^+$.

Функцијата $f(x)$ е строго монотоно опаднувачка, а функцијата $g(x)$ е строго монотоно растечка. Според *Теорема 3* равенката $f(x) = g(x)$ има единствено решение. Јасно е дека $f(2) = g(2)$, па $x = 2$ е единствено решение. Навистина:

- ако $x < 2$, тогаш $f(x) > f(2)$ и $g(x) < g(2)$, односно

$$g(x) < g(2) = f(2) < f(x),$$

па равенката нема решение помало од 2;

- ако $x > 2$, тогаш $f(x) < f(2)$ и $g(x) > g(2)$, односно

$$f(x) < f(2) = g(2) < g(x),$$

па равенката нема решение поголемо од 2.

Значи $x = 2$ е единствено решение на равенката.

<u>Теорема 4</u>: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотони функции (растечки или опаднувачки) на интервалот D. Тогаш $(g \circ f)(x)$ е строго монотоно растечка функција.

Доказ: Нека $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотоно растечки функции на интервалот D, тогаш $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, односно $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$, што значи дека $(g \circ f)(x)$ е строго монотоно растечка функција. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотоно опаднувачки функции на интервалот D, тогаш $f(x_1) > f(x_2)$ и $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, односно повторно

$(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$, што значи дека $(g\circ f)(x)$ е строго монотоно растечка функција.

Забелешка: Ако $f(x)$ и $g(x)$ се функции со различна монотоност, тогаш $(g\circ f)(x)$ е строго монотоно опаднувачка функција.

❖***Пример:*** Да се реши равенката $2^{\log_3 x}=-x+2$, $x\in R^+$.

Решение: Нека $f(x)=\log_3 x$, $f:R^+\to R$, а $g(x)=2^x$, $g:R\to R^+$. Бидејќи $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотоно растечки функции, според *Теорема 4* следува дека и $(g\circ f)(x)=2^{\log_3 x}$ е строго монотоно растечка функција. Функцијата $h(x)=-x+2$, $h:R\to R$ е строго монотоно опаднувачка, па според *Теорема 3* равенката $(g\circ f)(x)=h(x)$ има единствено решение. Јасно е дека решение на равенката е бројот $x=1$.

Пример: Да се реши равенката $\sqrt{x+5}-\sqrt[4]{20-x}=1$ во множеството R.

Решение: Функцијата $f:[-5,\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x+5}$ е строго монотоно растечка како композиција на две строго монотоно растечки функции. Функцијата $g:[-\infty,20)\to R$, $g(x)=\sqrt[4]{20-x}$ е строго монотоно опаднувачка како композиција на една строго монотоно растечка функција и една строго монотоно опаднувачка функција. Добиваме дека функцијата $h:[-5,20]\to R$, $h(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt[4]{20-x}$ е строго монотоно растечка како разлика меѓу строго монотоно растечка и строго монотоно опаднувачка функција. Бидејќи $x=4$ е едно решение, според *Теорема 1* тоа е единствено решение.

Задачи за самостојна работа:

1. Да се реши равенката $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$.
2. Реши ја равенката $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$.
3. Да се реши равенката $2\log_3(ctgx)=\log_2(\cos x)$.
4. Реши ја равенката $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}=x$.
5. Реши ја равенката $x^{\log_2\sqrt{5}}=\left|x^{\log_2 3}-2^{\log_2 x}\right|$.
6. Да се реши равенката $\left(2^{\log_5 x}+3\right)^{\log_5 2}=x-3$.

Литература:

Gazeta matematika-SSM Romanija;

Revista matematika din Temisoara.