Олимпиада трёх городов, весна 1980

Весна 1980
(в скобках указано, для каких классов предназначена задача)

Задача 1.(8-10)
На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Пусть первоначально было всего две красные точки (менее двух точек оставлять не разрешается).
Доказать, что за несколько разрешённых операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.
К. Казарновский, Москва

Задача 2.(8-10)
В таблице N*N, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе).
Доказать, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец, так что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.
А. Анджанс, Рига

Задача 3.(8)
a_1, a_2, ..., a_{101} - перестановка чисел 2, 3, ..., 102 такая, что a_k делится на k при каждом k.
Найти все такие перестановки.
Фольклор

Задача 4.(9-10)
В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Доказать, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45^o.
А. Толпыго

Задача 5.(8-10)
Дан выпуклый четырёхугольник ABCD (площади S_{ABCD}). Каждая его сторона разбита на K равных частей. Точки деления, принадлежащие стороне AB, соединены прямыми с точками деления, принадлежащими стороне CD, так что первая, считая от A, точка деления соединена с первой точкой деления, считая от D, вторая, считая от A, - со второй, считая от D, и т. д. (первая серия прямых), а точки деления, принадлежащие стороне BC, аналогичным образом соединены с точками деления, принадлежащими стороне DA (вторая серия прямых). Образовалось K^2 маленьких четырёхугольников. Из них выбрано K четырёхугольников таким образом, что каждые два выбранных четырёхугольника разделены хотя бы одной прямой первой серии и хотя бы одной прямой второй серии.
Доказать, что сумма площадей выбранных четырёхугольников равна S_{ABCD}/K.
А. Анджанс, Рига

Задача 6.(8-10)
В квадрате со стороной 1 проведено конечное количество отрезков, параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18.
Докажите, что среди частей, на которые разбивается квадрат этими отрезками, найдётся такая, площадь которой не меньше 0,01.
А. Берзиньш, А. Анджанс, Рига