Илија Јанев

Една задача, повеќе начини за нејзино решавање

Постојат одредени математички задачи кои можат да се решат на еден единствен начин. Тие не потсетуваат на планински врв, кој што може да се "освои" само од една страна. Но, постојат и математички задачи коишто овозможуваат "освојување од повеќе страни", т.е. постојат повеќе патишта што водат до решението на задачата.Ваквите задачи овозможуваат да го, искажеме сето наше богатство на идеи, досетки, проникливост, инвентивност.

Математичкото искуство на секој ученик би било непотполно, ако никогаш не би му се овозможила прилика да се обиде да реши некоја задача на повеќе начини. Со решавање на една задача на повеќе начини, ученикот стекнува самодоверба, истражува и ја гради својата математичка зрелост.

Еве, и во овој број ви нудиме една задача што може да се реши на повеќе начини. Но, пред да ги проследиме понудените решенија, обидете се и сами да ја решите на неколку начини.

Задача.*Пресметај ја должината* BD *на симетралата на аголот* β *во триаголникот* ABC, *ако* $a=6$ cm, $c=12$ cm *и* $\beta=120^\circ$.

Решение I.Нека $\overline{BD}=x$ е симетрала на аголот β на ΔABC. Низ D повлекуваме права $p \parallel BC$ и нека $p\cap AB=\{E\}$.Ќе докажеме дека ΔBDE е рамностран. Навистина:

$$\angle BDE=\frac{1}{2}120^\circ=60^\circ$$

$\angle BDE=\angle DBC=60^\circ$ (наизменични)

Следствено ΔBDE е рамностран па следува дека $\overline{ED}=\overline{EB}=x$. Очигледно е дека $\Delta AED\sim\Delta ABC$, а оттука: $\overline{AE}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{BC}$ или $(12-x):x=12:6$, од каде што $x=4$. Значи, $\overline{BD}=4$ cm.

Решение II.Нека $\overline{BD}=x$ е симетрала на аголот β на ΔABC и нека $CF\parallel BD$ (црт.2). Лесно заклучуваме дека ΔBFC е рамностран, бидејќи има два агли по 60°, и дека $\Delta ABD\sim\Delta AFC$, од каде што $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AF}:\overline{FC}$, $12:x=(12+6):6$. Значи, $\overline{BD}=4$ cm.

Решение III.Нека S е средина на страната AB, тогаш $\overline{AS}=\overline{SB}=3$ cm, па следува дека ΔCSB е рамнокрак, со агли на основата CS од 30° (црт. 3).Бидејќи BD е симетрала на аголот β следува ΔSBO е правоаголен, па имаме:

$$\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{SB}=3 \qquad (1)$$

(катетата наспроти агол од 30° е еднаква на половина од хипотенузата). Низ S повлекуваме $SP\parallel BD$. Бидејќи O е средина на отсечката CS следува дека $\overline{OD}=x$ е средна линија во ΔSCP; тогаш $\overline{SP}=2x$. Од друга страна, пак, SP е средна линија во ΔABD, бидејќи S е средина на AB, па добиваме:

$$\overline{BD}=2\overline{SP}=2\cdot 2x=4x,$$

а оттука:

$$\overline{BO}=\overline{BD}-\overline{OD}=4x-x=3x \qquad (2)$$

Од (1) и (2) наоѓаме дека $x=1$. Следствено, $\overline{BD}=4$ cm.

Решение IV.Нека S е средина на страната AB, тогаш ΔCSB е рамнокрак, со агли при основата од 30° (црт.4). Нека K е симетрична точка на точката B во однос на правата CS. По таков начин го добиваме ромбот $SBCK$, чии дијагонали се преполовуваат во пресечната точка O .Притоа, триаголниците SBK и BCK се рамнострани (бидејќи $\angle BSK=30^\circ+30^\circ=\angle BCK$) со страна од 6 cm.

Значи, $\overline{BK}=6$ cm, а $\overline{OK}=3$ cm. Бидејќи S е средина на отсечката AB и $SK\parallel BC$, следува дека SM е средна линија во ΔABC, т.е. $\overline{SM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$ cm. Но, $\overline{SK}=6$ cm, па значи M е средина на отсечката SK. Следствено, отсечката CM е тежишна линија во ΔSCK. Исто така, и KO е тежишна линија во истио триаголник, па според тоа, нивниот пресек, точката D е тежиште во ΔSCK. Тогаш:

$$\overline{OD}=\frac{1}{3}\overline{OK}=1\text{ cm},\quad \overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BK}=3\text{ cm},\quad \overline{BD}=\overline{BO}+\overline{OD}=4\text{ cm}.$$

Решение V.Нека BD е симетралата на аголот β на ΔABC, тогаш $\angle ABD=\angle CBD=60^\circ$. Конструираме два рамнострани триаголника: ABL со страна 12 cm и BCK со страна 6 cm (црт.5). Нивните висини се однесуваат како $2:1$, т.е.:

$$\overline{AK}:\overline{CO}=2:1.$$

Правоаголните триаголници AKD и COD се слични(Зошто?), па имаме:

$$\overline{KD}:\overline{OD}=\overline{AK}:\overline{CO}=2:1\,.$$

Оттука

$$\overline{OD}=\frac{1}{3}\overline{OK}=1\text{ cm}\,,\ \overline{BD}=\overline{BO}+\overline{OD}=4\text{ cm}\,.$$

Решение VI. Со симетралата $\overline{BD}=x$ на аголот β, триаголникот ABC е поделен на два триаголника ABD и BCD (црт.2), па имаме:

$$P_{ABC}=P_{ABD}+P_{BCD}\text{ , т.е.}$$

$$\frac{12\cdot 6}{2}\sin 120^\circ=\frac{12\cdot x}{2}\sin 60^\circ+\frac{60\cdot x}{2}\sin 60^\circ$$

или $12=2x+x$, $x=4$. Следствено, $\overline{BD}=4$ cm .