



Задачи

1. Две кружници ω_1 и ω_2 со центри во O_1 и O_2 соодветно, се сечат во точките A и B , и притоа O_1 лежи на ω_2 . Нека P е произволна точка која лежи на кружницата ω_1 . Правите BP , AP и O_1O_2 ја сечат кружницата ω_2 по втор пат во точките X , Y и C , соодветно. Докажи дека четириаголникот $XPYC$ е паралелограм.
2. Најди ги сите четириаголници $ABCD$ такви што четирите триаголници DAB , CDA , BCD и ABC се слични еден на друг.
3. Три кружници ω_1, ω_2 и ω_3 минуваат низ една заедничка точка P . Тангентата на ω_1 повлечена во точката P ги сече ω_2 и ω_3 по втор пат во точките $P_{1,2}$ и $P_{1,3}$, соодветно. Точките $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ и $P_{3,2}$ се дефинирани на сличен начин. Докажи дека симетралите на отсечките $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$ се сечат во една точка (се конкурентни).
4. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека K е точка на правата AD таква што $\overline{BK} = \overline{AB}$. Нека претпоставиме дека P е произволна точка на AB , и нека симетралата на отсечката PC ја сече опишаната кружница околу триаголникот APD во точките X, Y . Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ABK минува низ ортоцентарот на триаголникот AXY .
5. Даден е триаголник ABC со агол $\angle A = 60^\circ$. Точките E и F се пресеците на симетралите на аглите во темињата B и C со спротивните страни, соодветно. Точките P и Q се избрани така што четириаголниците $BFPE$ и $CEQF$ се паралелограми. Докажи дека $\angle PAQ > 150^\circ$ (се разгледува аголот PAQ кој во својата внатрешност не ја содржи страната AB од триаголникот ABC).

Време: 4 часа и 30 минути

Секој проблем се вреднува со максимум 8 поени.