

Сава Гроздев, Софија
Катерина Аневска, Скопје

ПАТУВАЊЕ НА ОСТРОВОТ НА ВИТЕЗИТЕ И ЛАЖГОВЦИТЕ

Здраво млади пријатели! Ете одамна не сме се дружеле! Затоа денес ќе ве поканиме на едно мало патување до замислениот остров на витезите и лажговците, остров на кој имало два вида жители, и тоа едните се витези и тие секогаш ја говорат вистината, а другите секогаш лажат. Земете лист и молив, бидејќи нашето патешествие ќе виртуелно, т.е. ќе решаваме задачи поврзани со жителите на овој замислен остров. За да нема забуна, жителите кои секогаш ја говорат вистината ќе ги нарекуваме *витези* и во натамошните разгледувања за нивно означување ќе ја користиме буквата В, а жителите кои секогаш лажат ќе ги нарекуваме *лажговци* и за нивно означување ќе ја користиме буквата Л. Островот на витезите и лажговците е многу популарен во математиката, па затоа на неговите жители му се посветени многу задачи, дел од кои ќе ги разгледаме.

Задача 1. На островот на витезите и лажговците пристигнал патник и прашал еден негов жител дали е витез или лажго. Што му одговорил жителот на островот?

Решение. Ако жителот на островот е витез, тој ќе ја каже вистината, т.е. дека е витез. Ако жителот на островот е лажго, тој ќе излаже, т.е. ќе каже дека е витез. Значи, во секој случај се добива одговор дека жителот е витез. ■

Задача 2. На островот на витезите и лажговците пристигнал патник и за водич зел еден жител на островот. Шетајќи по островот, тие под едно дрво виделе друг жител на островот. Патникот го замолил водичот да појде и да го праша дали е витез или е лажго. Водичот отишол до жителот на островот и кога се вратил соопштил: “Тој кажа дека е лажго”. Што е водичот – витез или лажго?

Решение. За водичот и вториот жител на островот имаме четири можности и тоа: двајцата се витези (ВВ), двајцата се лажговци (ЛЛ), водичот е витез, а вториот патник е лажго (ВЛ) и водичот е лажго, а вториот патник е витез (ЛВ).

Ако е точен случајот ВВ, тогаш вториот жител на водичот му соопштил дека е витез, а водичот истото тоа му го соопштил на патникот, што не е случај. Значи, случајот ВВ не е можен.

Ако е точен случајот ЛВ, тогаш вториот жител вториот жител соопштил дека е витез, а водичот ќе го промени одговорот и ќе соопшти “Тој кажа дека е лажго” и ова ги задоволува условите на задачата.

Ако е точен случајот ВЛ, тогаш вториот жител ќе каже дека е витез, а водичот истото тоа ќе го соопшти на патникот, што не е случај. Значи, случајот ВЛ не е можен.

Ако е точен случајот ЛЛ, тогаш вториот жител ќе каже дека е витез, а водичот ќе го промени одговорот и ќе соопшти “Тој кажа дека е лажго” и ова ги задоволува условите на задачата.

Од досега изнесеното забележуваме дека се можни само случаите ЛВ и ЛЛ, што значи дека водичот на патникот е лажго. ■

Задача 3. Патникот сретнал три жители на островот и на секој од нив му го поставил прашањето: “Колку од другите двајца се витези?”. Првиот одговорил: “Ниту еден”, а вториот - “Еден”. Кој е одговорот на третиот жител и кој од жителите е витез, а кој лажго?

Решение. Нека претпоставиме, дека првиот жител е витез. Бидејќи дал одговор “Нула”, заклучуваме дека останатите двајца се лажговци. Но, тоа значи дека одговорот на вториот жител е точен, што противречи на фактот дека тој е лажго. Значи, првиот жител е лажго и неговиот одговор “Нула” не е вистинит. Според тоа, барем еден од вториот и третиот жител е витез. Ако претпоставиме дека вториот жител е лажго, тогаш добиваме дека третиот жител е витез. Последното значи дека вториот жител ја кажал вистината, што противречи на фактот дека вториот жител е лажго. Значи, вториот жител е витез. Тоа значи дека кога вториот жител одговорил “Еден”, тој ја кажал вистината и како првиот жител е лажго, добиваме дека третиот жител е витез. Јасно, прашањето на патникот неговиот одговор е “Еден”. ■

Во нашите следни разгледувања ќе разгледуваме задачи кои се обопштување на претходната задача. Имено, патникот среќава група од n , ($n \geq 2$) жители и секој од нив го прашува: “Колку од останатите членови на групата се витези?”, при што добива некакви одговори – броеви од 0 до $n - 1$. При решавањето на задачите треба да дознаеме што е можно повеќе за групата, како на пример – колку се витези или колку се лажговци, кој точно е витез или лажливец итн. Во оваа насока може да ни помогнат следниве правила.

Правило 1. На поставеното прашање секој витез во групата дава ист одговор.

Навистина, ако во групата има k витези, тогаш без витез на кој во моментот му е поставено прашањето во групата има $k - 1$ витези и тоа е одговорот кој го соопштува витезот на кој во моментот му е поставено прашањето.

Правило 2. Ако барем еден од одговорите кој ги добил патникот е “Нула”, тогаш во групата има барем еден витез.

Навистина, ако во групата сите се лажговци, тогаш оној кој кажал “Нула” ја кажал вистината, што не е можно, бидејќи тој е лажго.

Задача 4. Патник сретнал некоја група жители на островот. На секој член на групата му го поставил прашањето “Колку од останатите членови на групата се витези?” и сите одговори кои ги добил биле “Нула”. Колку витези имало во групата?

Решение. Според Правило 2, во групата има барем еден витез. Ако претпоставиме дека во групата има два или повеќе витези, тогаш според Правило 1 никој од нив не може да даде одговор “Нула”. Значи, во групата има точно еден витез.

Но, задачата се уште не е решена. Имено, за да задачата е решена потребно е да посочиме пример на група кој ги задоволува условите на задачата. Последното е од особена важност, бидејќи е можно ситуацијата опишана во задачата да е невозможна, т.е. да не постои група која на прашањето на патникот одговара само со нули, што значи дека задачата нема решение.

Меѓутоа, лесно се гледа дека група од видот ВЛЛ...Л (бројот на лажговците е произволен број поголем или еднаков на 1), согласно правилата кои важат на островот, одговара само со нули. Според тоа, навистина во групата има само еден витез. ■

Задача 5. Патникот сретнал група од 2018 жители на островот и на секој поединечно му го поставил прашањето “Колку од останатите членови на групата се витези?”. Во одговорите на прашањето имало 2017 нули и една единица. Дали е тоа можно?

Решение. Од Правило 2 следува дека во групата има барем еден витез. Од Правило 1 пак добиваме дека во групата не може да има повеќе од еден витез (во спротивно треба да се добијат барем два еднакви одговори различни од нула). Значи, во групата има точно еден витез. Јасно, тој не дал одговор “Еден”, бидејќи сите освен него се лажговци. Но, тогаш жителот кој дал одговор “Еден” треба да е лажго, што не е можно бидејќи во случајов тој дава точен одговор. Значи, не постои група која ги задоволува условите на задачата. ■

Задача 6. Патник сретнал група од пет жители на островот. На секој одделно му го поставил прашањето: “Колку од останатите членови на групата се витези?”. Првиот одговорил: “Четири”, вториот – “Еден”, третиот – “Нула” и четвртиот – “Четири”. Дали е можно без да го знаеме одговорот на петтиот член на групата, да откриеме кој член е витез, а кој лажго?

Решение. Јасно, во групата нема 5 витези, бидејќи тогаш сите одговори треба да бидат “Четири”. Од истата причина во групата нема 3 или 4 витези. Од Правило 2 следува дека во групата има најмалку еден витез. Според тоа, во групата има 1 или 2 витеза. Да претпоставиме дека во групата има 1 витез. Тогаш неговиот одговор на прашањето на патникот е “Нула”. Но, тогаш членот на групата кој дал одговор “Еден” е лажго и дал точен одговор, што е противречност. Според тоа, во групата има 2 витеза и секој од нив дал одговор “Еден”. Бидејќи меѓу првите четири одговори има само еден одговор “Еден”, заклучуваме дека петтиот член на групата дал одговор “Еден” и тој е витез. Сега не е тешко да по редослед групата е ЛВЛЛВ. ■

Задача 7. Патник сретнал група од шест жители на островот. На секој одделно му го поставил прашањето: “Колку од останатите членови на групата се витези?”. Како одговори добил една единица и пет тројки. Дали може патникот да го определи бројот на витезите во групата?

Решение. Групата има шест членови, па затоа можни се случаите: ЛЛЛЛЛЛ, ЛЛЛЛЛВ, ЛЛЛЛВВ, ЛЛЛВВВ, ЛЛВВВВ, ЛВВВВВ и ВВВВВВ.

Како одговори една единица и пет тројки може да се добијат само во случаите ЛЛЛЛЛЛ и ЛЛВВВВ, па затоа патникот не може да го определи бројот на витезите во групата. ■

Задача 8. Патник сретнал група од седум жители на островот. На секој одделно му го поставил прашањето: “Колку од останатите членови на групата се витези?”. Како одговори добил три двојки, две тројки и две петки. Докажи, дека сите членови на групата се лажговци.

Решение. Според Правило 1 бројот на витезите во групата може да биде 0 или 3. Ако е 3, тогаш тие како одговори ги дале трите двојки. Но, тогаш два члена на групата кои дале одговор “Три” ја кажале вистината, а треба да се лажговци, што е противречност. Од друга страна, лесно се проверува дека група од видот ЛЛЛЛЛЛЛЛ може да ги соопшти одговорите од условот на задачата. ■

Се надеваме дека не се изморивте од откривањето колку членови на дадена група се витези, а колку лажговци. Вакви и слични задачи има мно-

гу, но интересни се и следниве две задачи кои ви предлагаме внимателно да ги проучите.

Задача 9. На еден остров живееле две племиња Фитумиту и Бајтата, кои по ликовите не се разликувале едни од други. Секој Фитупиту секогаш ја зборувал само вистината, а секој Бајтата секогаш лажел. Еден странски патник запрашал еден случаен минувач (М) на кое племе припаѓа, но не го дочул одговорот. Тогаш се обратил до двајца домородци А и В кои слушнале што одговорил М и ги запрашал што одговорил минувачот. На тоа прашање домородецот А рекол дека минувачот се нарекол себеси Бајтата, а домородецот В рекол дека минувачот се нарекол себеси Фитупиту. На прашањето на странецот дали со нивните одговори минувачот го излагал, и двајцага домородци А и В одговориле дека минувачот не го излагал.

На кои племиња припаѓаат допородците А, В и М? Зошто на второто прашање и двајцата домородци А и В одговориле исто?

Решение. Најпрво да забележиме дека секој домородец на прашањето на кое племе припаѓа тој самиот, секогаш одговара дека е Фитумиту. Бидејќи домородецот В рекол дека минувачот се нарекол себеси Фитумиту што е вистина, а домородецот А рекол дека минувачот се нарекол Бајтата, заклучуваме дека домородецот В е Фитумиту, а домородецот А е Бајтата.

На второто прашање на странецот (дали минувачот го излагал) домородецот Фитумиту В одговорил дека минувачот не го излагал, па затоа заклучуваме дека минувачот М е Фитумиту.

Домородецот Бајтата А на второто прашање од странецот одговорол дека минувачот ја кажал вистината, бидејќи тој веќе го зема за точно тврдењето што самиот го искажал дека "домородецот се нарекол себеси Бајтата". Ако тоа е точно тогаш минувачот М излагал, па затоа сега домородецот А вели дека минувачот М ја зборувал вистината. Всушност А се заплеткал во сопствените лаги. ■

Задача 10. Еден патник се нашол на раскрсница од која излегуваат два патишта од кои само едниот води до Охридското езеро и не знае како да дојде до езерото, т.е. дали да оди по левиот или по десниот пат. Пред куќата покрај раскрсницата седат двајца браќа од кои едниот постојано ја зборува вистината, а другиот секогаш лаже. На патникот му е познато дека и двајцата на секое прашање одговараат само со "Да!" или со "Не!", но не знае кој од нив лаже, а кој ја зборува вистината.

Дали може патникот само на еден од браќата да му постави едно и единствено прашање, па од одговорот да заклучи по кој пат треба да оди? Кое е тоа прашање?

Решение. Патникот може да го постави следното прашање: "Што ќе одговори твојот брат, ако го прашам, дали овој пат (покажува, да кажеме, на левиот пат) води до езерото?" Ако добие одговор дека братот тоа ќе го потврди, тогаш патникот треба да оди по десниот пат, т.е. по оној пат кој не го покажал, а ако добие одговор дека братот тоа ќе го негира, тогаш треба да оди по левиот пат, т.е. по оној пат кој го покажал.

Ако така постапи, тогаш сигурно го избрал правиот пат.

Навистина, ако патникот зборува со братот кој лаже, а овој му каже дека неговиот брат ќе го упати на левиот пат, тогаш тоа не е вистина, т.е. неговиот брат, кој секогаш зборува вистина, би го упатил на десниот пат, па значи тоа е вистинскиот пат. Ако патникот зборува со братот кој зборува вистина па овој му каже дека неговиот брат би го упатил на левиот пат, тогаш тоа е навистина така, т.е. братот кој лаже би го упатил да оди по левиот пат, па тој пат е неисправен, а исправен е десниот пат.

Значи, од било кој да добие одговор дека ќе биде упатен на левиот пат, треба да оди по десниот пат.

Ако патникот разговара со братот кој лаже, а овој му каже дека неговиот брат ќе го упати на десниот пат, тоа повторно не е вистина па братот кој зборува вистина би го упатил на левиот пат, кој во овој случај е вистинскиот пат. Исто така, ако разговара со братот кој ја зборува вистината, па овој му каже дека ќе биде упатен на десниот пат, тогаш тоа е навистина така, па тој пат не е добар и треба да оди по левиот пат.

Значи, и во двата случаи, од било кој да добие одговор дека ќе биде упатен на десниот пат, треба да оди по левиот пат.

Според тоа, ако патникот оди по спротивниот пат од оној за кој ќе добие одговор дека ќе му биде препорачан од братот на човекот со кој разговара, тогаш може да биде сигурен дека оди по вистинскиот пат. ■

Млади пријатели, на крајот од ова наше дружење ви предлагаме самостојно да ја решите следнава задача.

Задача 11. Патник сретнал група од седум жители на островот. На секој одделно му го поставил прашањето: "Колку од останатите членови на групата се витези?". Како одговори добил една нула, три единици, а останатите бтри броеви биле поголеми од 3. Колку витези има во групата?

Литература

1. Гроздев, С. Задачите на РУ, 5. – 6. Клас Европeјско кенгуру 2008-2013, Архимед 2013
2. Тренчевски, К., Малчески, Р., Димовски, Д. Занимлива математика, МММ, 1994