**Ристо Малчески**

# ЕЛЕМЕНТАРНА АЛГЕБРА

**ЗА ПРВА ГОДИНА ВО РЕФОРМИРАНОТО ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ**

# С О Д Р Ж И Н А

**ВОВЕД** 5

Листа на користени ознаки 6

**ГЛАВА I**

**ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ** 7

1. Поим за деливост 8
2. Општи признаци за деливост 11
3. Делење со остаток 13
4. Посебни признаци за деливост 17
5. Најголем заеднички делител 21
6. Евклидов алгоритам 25
7. Најмал заеднички содржател 29
8. Прости и сложени броеви 33
9. Основна теорема на аритметиката 37
10. Линеарна Диофантова равенка 41
11. Методи за решавање на нелинеарни Диофантови равенки 45
12. Поим за конгруенција. Основни својства 48
13. Примена на конгруенциите 52
14. Линеарна конгруентна равенка 56

**ГЛАВА II**

**МНОЖЕСТВА И КОМБИНАТОРИКА** 61

1. Поим за множество 62
2. Операции со множества 65
3. Пресликувања (функции) 70
4. Инјекција, сурјекција и биекција. Инверзно пресликување 74
5. Еквивалентни множества. Принцип на еднаквост 78
6. Принцип на збир, производ, вклучување и исклучување 81
7. Принцип на Дирихле 84

**ГЛАВА III**

**ТЕОРЕМА. МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ** 89

1. Математички поим. Содржина и обем на поим 90
2. Дефинирање на поим. Видови поими 92
3. Поим за тврдење. Видови математички тврдења 96
4. Теореми и аксиоми. Условна и категорична форма на теорема 98
5. Директна и обратна теорема. Потребен и доволен услов 100
6. Правила за изведување на заклучоци 105
7. Методи за докажување на теореми 109

**ГЛАВА IV**

**АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ** 115

1. Бинарна релација 116
2. Релација за еквиваленција и релација за подредување 119
3. Бинарна операција. Полугрупа 123
4. Неутрален и инверзен елемент 127
5. Група и прстен 132
6. Поим за поле. Подредено поле 136

**ГЛАВА V**

**ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ПОД ЗНАК НА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ** 141

1. Апсолутна вредност 142
2. Линеарна функција со независно променлива и под знакот за апсолутна вредност 146
3. Линеарна равенка со непозната и под знакот за апсолутна вредност 150
4. Систем линеарни равенки со непознати и под знакот за апсолутна вредност 154
5. Линеарни неравенки со непозната и под знакот за апсолутна вредност 157
6. Примена на методот на замена при решавање на системи линеарни равенки 161
7. Решавање на задачи кои се сведуваат на линеарна равенка и системи линеарни равенки 164

Одговори, упатства и решенија на задачите за вежбање 169

Индекс на поими 180

Литература 182

# В О В Е Д

Пред тебе е учебникот по изборниот предмет ЕЛЕМЕНТАРНА АЛГЕБРА за прва година од гимназиското образование. Тој е работен така, што ќе можеш и самостојно да се здобиваш со новите знаења и умеења што се предвидени со наставната програма по овој предмет.

Материјалот е поделен, согласно со програмата, во пет одделни целини (теми). На почетокот на секоја тема, покрај содржината што е разработена во неа даден е преглед на потребните предзнаења за успешно следење на материјалот кој е разработен во таа глава. Исто така, даден е и прегледот на новите знаења и умеења со кои треба да се стекнеш доколку успешно ги совладаш предвидените содржини. Секоја тема е заокружена целина и е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Темите се означени со римски броеви, додека лекциите се означени со арапски броеви. Во секоја тема, дефинициите, примерите, забелешките и теоремите се нумерирани интегрално за темата. Истото се однесува и на задачите за вежбање кои се дадени по секоја лекција. На крајот од секоја тема е даден тест, со чија помош можеш да ги провериш и да ги оцениш своите знаења и умеења. Што се однесува до тестовите, тие се оформени така што бараат две нивоа на знаења, но при нивното решавање можеш да ги комбинираш нивоата од различните задачи. Притоа, од секоја задача избираш само една подзадача а) или б), а за да го оцениш своето знаење, ги собираш бодовите од решените задачи и како показател, во консултација со твојот професор, можеш да го користиш критериумот кој е даден за секој тест одделно.

Разработуваниот материјал содржи голем број тврдења (теореми), од кои дел треба да ги усвоиш без доказ, што е посебно назначено за секоја теорема. Примерите, кои ги има во доволен број, се целосно решени и се дадени како илустрација на тврдењата што се разработуваат. Затоа, особено е важно добро да ги разработиш, бидејќи само така можеш да се подготвиш за самостојно решавање на задачи, а потоа да преминеш кон решавање на задачите за вежбање.

За полесно користење на учебникот, дефинициите, примерите, теоремите, задачите за вежбање, тестовите и деловите кои се предвидени како незадолжителни т.е. за оние што сакаат да знаат повеќе, се обоени во следниве бои:

- дефиниција
- пример
- теорема
- за оние што сакаат да знаат повеќе
- задачи за вежбање
- провери го своето знаење

Исто така, за полесно користење на учебникот, даден е регистар на поимите со кои ќе се сретнеш во текот на учењето, како и список на користените ознаки.

На крајот од учебникот се дадени одговори, упатства и решенија на задачите за вежбање. Пожелно е пред да го погледнеш одговорот или решението на задачата, да се обидеш самостојно да ја решиш и да извршиш самопроверка. Само така ќе можеш да се здобиеш со самодоверба и ќе можеш успешно да усвојуваш нови знаења и умеења. Се разбира дека за посеопфатно и подлабоко усвојување на предвидениот материјал, пожелно е да користиш и дополнителна литература, па затоа таа е наведена во посебен дел, веднаш по одговорите, упатствата и решенијата на задачите.

Авторот

## ЛИСТА НА СИМБОЛИ

| *Симбол* | *Значење* | *Симбол* | *Значење* |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{N}$ | множество природни броеви | $\tau(n)$ | број на делители на при. бр. $n$ |
| $\mathbf{N}_0$ | мн. природни броеви заедно со $0$ | НЗД | најголем заеднички делител |
| $\mathbf{Z}$ | множество цели броеви | $\otimes$ | множење по модул |
| $\mathbf{Q}$ | множество рационални броеви | $\oplus$ | собирање по модул |
| $\mathbf{I}$ | множество ирационални броеви | $\equiv$ | конгруентен |
| $\mathbf{R}$ | множество реални броеви | НЗС | најмал заеднички содржател |
| $\subseteq$ $(\subset)$ | подмножество (вистинско) | $\sim$ | еквивалентен |
| $\cup$ | унија | $\Leftrightarrow$ | еквиваленција |
| $\cap$ | пресек | $\Rightarrow$ | импликација |
| $\setminus$ | разлика | $\wedge$ | конјункција |
| $\Delta$ | симетрична разлика | $\vee$ | дисјункција |
| $\times$ | Декартов производ | $\neg$ | негација |
| $\in$ | припаѓа | $C_a$ | класа на еквиваленција на $a$ |
| $\notin$ | не припаѓа | $f: A \to B$ | $f$ е пресликување од $A$ во $B$ |
| $\varnothing$ | празно множество | ${}^c A$ | комплемент на множеството $A$ |
| $a \mid b$ | $a$ е делител на $b$ | $I_A$ | идентично пресликување на $A$ |
| $a \nmid b$ | $a$ не е делител на $b$ | $G(f)$ | график на пресликувањето $f$ |
| $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ | декаден запис на природ. број | $\lvert a \rvert$ | апсолутна вредност од $a$ |

# ГЛАВА I

# ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

## СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Поим за деливост**
2. **Општи признаци за деливост**
3. **Делење со остаток**
4. **Посебни признаци за деливост**
5. **Најголем заеднички делител**
6. **Евклидов алгоритам**
7. **Најмал заеднички содржател**
8. **Прости и сложени броеви**
9. **Основна теорема на аритметиката**
10. **Линеарна Диофантова равенка**
11. **Методи за решавање на нелинеарни Диофантови равенки**
12. **Поим за конгруенција. Основни својства**
13. **Примена на конгруенциите**
14. **Линеарна конгруентна равенка**

## *ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА*

*За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:*

- *својствата на природните и целите броеви и операциите со нив;*
- *посебните признаци за деливост со 2, 3, 4, 5, 8 и 9; и*
- *развиена форма на природен број.*

## НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ги утврдиш поимите делив, делител и содржател;
- да одредуваш делители и содржатели на даден број;
- да ги усвоиш општите признаци за деливост;
- да ги усвоиш посебните признаци за деливост;
- да ја усвоиш теоремата за делење со остаток и да можеш да ја применуваш при решавање на задачи;
- да одредуваш НЗД и НЗС и да ја користиш врската меѓу нив при решавање на задачи;
- да го усвоиш поимот за заемно прости броеви и да го користиш при решавање на задачи;
- да го усвоиш Евклидовиот алгоритам и да го користиш при наоѓање на НЗД;
- да дефинираш прост и сложен број и да одредуваш дали еден број е прост или сложен;
- да ги наоѓаш простите броеви помали од даден природен број;
- да можеш да докажеш дека прости броеви има бесконечно многу;
- да ја усвоиш основната теорема на аритметиката и да ја користиш при разложување на сложените броеви на прости множители, наоѓање на НЗД и НЗС;
- да можеш да го пресметуваш бројот на множителите на даден природен број;
- да го усвоиш поимот за линеарна Диофантова равенка со две непознати и алгоритамот за нејзино решавање;
- да решаваш линеарна Диофантова равенка со две непознати со методот на Ојлер;
- да решаваш некои едноставни нелинеарни Диофантови равенки;
- да го усвоиш поимот за конгруенција и нејзините својства;
- да ги користиш конгруенциите при изведување на посебни признаци за деливост;
- да ги усвоиш поимите класа конгруенции по даден модул, потполн систем на остатоци и да ги користиш при решавање на задачи;
- да го усвоиш поимот за линеарна конгруентна равенка со една непозната;
- да ја согледаш врската меѓу линеарната конгруентна равенка со една непозната и линеарната Диофантова равенка со две непознати;
- да можеш да решаваш линеарни конгруентни равенки со една непозната; и
- интуитивно да ги развиваш своите способности за правилно дефинирање на поими и докажување на тврдења.

Теоријата на броеви ги изучува својствата на целите броеви и операциите со нив. Таа, заедно со геометријата, е една од најстарите математички дисциплини. Нејзините темели ги поставиле уште античките математичари: Питагора, Евклид, Диофант, Ератостен и др. Меѓутоа, иако броевите се изучувани повеќе од два милениума и ги проучувале најголемите умови на математичката мисла, сепак за оваа дисциплина не може да се каже дека е исцрпена. Напротив, во теоријата на броевите постојат многу нерешени проблеми. Токму тоа мноштво проблеми, кои можат да се формулираат така што можат да ги разберат и ученици - ја прави теоријата на броеви актуелна.

# 1. ПОИМ ЗА ДЕЛИВОСТ

На сите нас ни се познати множествата

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\},\ \mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}=\{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\} \text{ и } \mathbf{Z}=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

При изучувањето на операциите во овие множества рековме дека собирањето и множењето се секогаш изводливи, т.е.

ако $m,n\in\mathbf{N}$, тогаш $m+n\in\mathbf{N}$ и $mn\in\mathbf{N}$;

ако $m,n\in\mathbf{N}_0$, тогаш $m+n\in\mathbf{N}_0$ и $mn\in\mathbf{N}_0$; и

ако $m,n\in\mathbf{Z}$, тогаш $m+n\in\mathbf{Z}$ и $mn\in\mathbf{Z}$.

Понатаму, за одземањето знаеме дека

ако $m,n\in\mathbf{N}$, тогаш $m-n\in\mathbf{N}$ ако и само ако $m>n$;

ако $m,n\in\mathbf{N}_0$, тогаш $m-n\in\mathbf{N}_0$ ако и само ако $m\geq n$; и

ако $m,n\in\mathbf{Z}$, тогаш $m-n\in\mathbf{Z}$.

Останува да ја разгледаме операцијата делење, која не е секогаш изводлива во множествата $\mathbf{N},\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{Z}$. Имено, ако $m$ и $n\neq 0$ се природни или цели броеви, тогаш количникот $m:n$ не е секогаш природен или цел број. И токму тоа, прашањето кога бројот $m$ е делив со бројот $n\neq 0$, т.е. прашањето за деливоста во множествата $\mathbf{N},\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{Z}$ лежи во основата на теоријата на броевите.

**Дефиниција 1.** За бројот $a\in\mathbf{Z}$ ќе велиме дека е *делив* со бројот $b\in\mathbf{Z}$, $b\neq 0$, ако постои број $q\in\mathbf{Z}$ таков, што е исполнето равенството $a=bq$. Притоа ќе велиме дека $b$ е *делител* на $a$, односно дека $a$ е *содржател* на $b$ и ќе пишуваме $b\mid a$.

Ако бројот $b\in\mathbf{Z}$, $b\neq 0$ не е делител на бројот $a\in\mathbf{Z}$, т.е. ако не постои број $q\in\mathbf{Z}$ таков, што е исполнето равенството $a=bq$, тогаш ќе пишуваме $b\nmid a$.

Ќе велиме дека $b$ е *вистински делител* на $a$ ако $b\mid a$ и $b\neq a$.

**Пример 1. а)** Бидејќи $15 = 5 \cdot 3$, од дефиницијата 1 следува дека $3 \mid 15$ и $5 \mid 15$. Според тоа, броевите 1, 3 и 5 се вистински делители на 15.

**б)** За броевите $17$ и $3$ имаме $17 = 5 \cdot 3 + 2$ и бидејќи

$$5 \cdot 3 < 5 \cdot 3 + 2 < 6 \cdot 3,$$

заклучуваме дека не постои природен број $q$ таков, што $17 = 3q$ што значи дека $3 \nmid 17$.

**в)** Ќе ги определиме сите делители на броевите 84 и 56. Имаме

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 84 & 42 & 28 & 21 & 14 & 12 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 56 & 28 & 14 & 8 \end{array}.$$

Следствено, сите делители на бројот 84 се: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 и 84. Притоа за два различни делители чиј производ е еднаков на 84 ќе велиме дека се *заемно комплементарни делители*. Такви се паровите 1 и 84, 2 и 42, 3 и 28, 4 и 21, 6 и 14, 7 и 12.

Повтори ја претходната дискусија за бројот 56. ♦

Забележуваме дека ако $a, b \in \mathbf{N}$, тогаш и $q \in \mathbf{N}$. Понатаму, ако $b \mid a$, тогаш од $a = bq$ непосредно следуваат равенствата

$$a = (-b)(-q), \; -a = b(-q) \text{ и } -a = (-b)q,$$

од што согласно дефиницијата 1 следува дека

$$(-b) \mid a, \; b \mid (-a) \text{ и } (-b) \mid (-a).$$

Претходно изнесеното ни дава за право, при разгледувањето на деливоста, да се ограничиме на ненегативните цели броеви, т.е. на множеството $\mathbf{N}_0$.

Едно од клучните прашања во теоријата на броеви е прашањето за бројот на делителите на даден природен број. На ова прашање ќе се навратиме во натамошните разгледувања, а овде само ќе забележиме дека од равенството $a = a \cdot 1$ непосредно следува дека секој цел број различен од 0 е делив со бројот 1 и со самиот себе, т.е. $1 \mid a$ и $a \mid a$ ако $a \neq 0$. Исто така, од равенството

$$0 = 0 \cdot q, \text{ за секој } q \in \mathbf{N}$$

следува дека бројот 0 има бесконечно многу делители, т.е. $a \mid 0$ ако $a \neq 0$. Да забележиме дека бројот 0 е единствен цел број кој има бесконечно многу делители. Навистина, ако $a \neq 0$ и $b \mid a$, тогаш од дефиницијата 1 имаме $a = bq$, $a, b, q \in \mathbf{N}$, па затоа

$$a = bq \geq b \cdot 1 = b$$

што значи дека сите делители на бројот $a$ се помали или еднакви на $a$ и таквите броеви се конечно многу.

**Пример 2. а)** Докажи дека збирот на кои било три последователни природни броеви е делив со бројот 3.

**б)** Докажи дека збирот на три последователни степени на бројот 2, чии степенови показатели се природни броеви, е делив со бројот 7.

***Решение.*** **а)** Ако со $k$ го означиме најмалиот од три последователни природни броеви, тогаш другите два броја се броевите $k+1$ и $k+2$. За збирот на овие броеви имаме

$$k+(k+1)+(k+2)=3k+3=3(k+1),$$

што според дефиницијата 1 значи $3\,|\,[k+(k+1)+(k+2)]$, што и требаше да се докаже.

**б)** Според условот на задачата имаме дека степеновите показатели се $k, k+1$ и $k+2$, $k\in\mathbf{N}$. Затоа, за бараниот збир имаме:

$$2^k+2^{k+1}+2^{k+2}=2^k+2\cdot 2^k+2^2\cdot 2^k=2^k(1+2+2^2)=7\cdot 2^k$$

што според дефиницијата 1 значи дека $7\,|\,(2^k+2^{k+1}+2^{k+2})$. ♦

**Теорема 1.** Нека $a,b\in\mathbf{N}$. Ако $a\,|\,b$ и $b\,|\,a$, тогаш $a=b$.

***Доказ.*** Нека $a,b\in\mathbf{N}$, $a\,|\,b$ и $b\,|\,a$. Од $a\,|\,b$ следува дека постои $q\in\mathbf{N}$ таков, што $b=aq$, а од $b\,|\,a$ следува дека постои $p\in\mathbf{N}$ таков, што $a=bp$. Понатаму, од равенствата $b=aq$ и $a=bp$ добиваме

$$b=aq=(bp)q=b(pq), \quad \text{т.е.} \quad b=b(pq).$$

Ако последното равенството го поделиме со $b\neq 0$ го добиваме равенството $pq=1$. Но, $p,q\in\mathbf{N}$ па затоа од последното равенство следува $p=q=1$. Конечно, $a=bp=b\cdot 1=b$. ♦

**Теорема 2.** Нека $a,b,c\in\mathbf{N}$. Ако $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$, тогаш $a\,|\,c$.

***Доказ.*** Нека $a,b,c\in\mathbf{N}$, $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$. Од $a\,|\,b$ следува дека постои $q\in\mathbf{N}$ таков, што $b=aq$, а од $b\,|\,c$ следува дека постои $p\in\mathbf{N}$ таков, што $c=bp$. Понатаму, од равенствата $c=bp$ и $b=aq$ следствено добиваме $c=bp=(aq)p=a(qp)$, што според дефиниција 1 значи дека $a\,|\,c$. ♦

**Пример 3.** Докажи дека разликата на бројот $\overline{xabx}$ и бројот запишан со истите цифри, но по обратен редослед е делива со 9.

***Решение.*** За бројот $\overline{xabx}$ имаме

$$\overline{xabx}=1000x+100a+10b+x,$$

а за бројот запишан со истите цифри, но по обратен редослед, имаме

$$\overline{xbax}=1000x+100b+10a+x.$$

Од последните две равенства наоѓаме

$$\overline{xabx}-\overline{xbax}=1000x+100a+10b+x-(1000x+100b+10a+x)=90(a-b),$$

што значи дека $90\,|\,(\overline{xabx}-\overline{xbax})$. Понатаму, од $90=9\cdot 10$ следува $9\,|\,90$ и бидејќи $90\,|\,(\overline{xabx}-\overline{xbax})$, од теоремата 2 следува дека $9\,|\,(\overline{xabx}-\overline{xbax})$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Докажи дека $12 \mid (3^n + 3^{n+1})$, за секој $n \in \mathbf{N}$.
2. Докажи дека разликата на произволен четирицифрен број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делива со 9.
3. Најди ги сите природни броеви $n$ за кои вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ исто така е природен број.
4. Најди ги сите цели вредности на бројот $n$ за кои изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број.
5. За кои вредности на $n$, изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број?
6. На неколку листа хартија напишани се броевите +1 и -1, на секој лист по еден број. Збирот на сите броеви е 0, а нивниот производ е 1. Докажи дека бројот на листовите е делив со 4.
7. Најди го најголемиот природен број кој го задоволува условот: кои било две соседни цифри формираат број делив со 23.

# 2. ОПШТИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

Честопати се јавува потреба да оцениме дали еден број е делив со друг број - без да го извршиме делењето на тие броеви. Притоа ги користиме таканаречените признаци за деливост на природните броеви. Тоа се тврдења преку кои заклучуваме кога еден број е делив со друг број, без да го вршиме делењето.

Од основното образование, познати ни се признаците за деливост на природен број со 2, 3, 4, 5, 8 и 9, за кои во натамошните разгледувања ќе дадеме докази. Во овој дел ќе се задржиме на признаците за деливост на збир, разлика и производ, кои со едно име ги нарекуваме општи признаци за деливост.

**Теорема 3.** Ако $b \mid a$, тогаш $b \mid (ac)$, за секој $c \in \mathbf{N}$.

***Доказ.*** Навистина, ако $b \mid a$, тогаш постои $q \in \mathbf{N}$ таков, што $a = bq$. Сега, за секој $c \in \mathbf{N}$ добиваме $ac = (bq)c = b(qc)$. Значи, за бројот $ac \in \mathbf{N}$ постои број $qc \in \mathbf{N}$ таков, што $ac = b(qc)$, па од дефиницијата 1 имаме дека $b \mid (ac)$. ♦

**Пример 4.** Докажи дека $8 \mid (9^8 - 1)$.

***Решение.*** Задачата можеме да ја решиме со пресметување на бројот $9^8 - 1$ и потоа директно да провериме дали $8 \mid 9^8 - 1$.

Меѓутоа "поелегантно" решение можеме да дадеме со примена на теоремата 3. Јасно, $8 \mid 8$. Од теоремата 3 имаме

$$8 \mid 8 \cdot (9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1) = (9-1)(9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 + 1)$$
$$= 9^8 + 9^7 + 9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 - 9^7 - 9^6 - 9^5 - 9^4 - 9^3 - 9^2 - 9 - 1 = 9^8 - 1$$

што и требаше да се докаже. ♦

**Теорема 4.** Нека $a=b+c$ и $d\,|\,b$. Тогаш $d\,|\,a$ ако и само ако $d\,|\,c$.

***Доказ.*** Нека $a=b+c$ и $d\,|\,b$, т.е. постои $q$ таков, што $b=dq$. Ако $d\,|\,c$, тогаш постои $p$ таков, што $c=dp$. Според тоа,

$$a=b+c=dq+dp=d(q+p),$$

што според дефиницијата 1 значи дека $d\,|\,a$. Ако $d\,|\,a$, тогаш постои $r$ таков, што $a=dr$. Според тоа,

$$c=a-b=dr-dq=d(r-q),$$

што според дефиницијата 1 значи дека $d\,|\,c$. ♦

**Теорема 5.** Ако $a\,|\,b$ и $a\,|\,c$, тогаш $a\,|\,(bx+cy)$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$.

**Доказ.** Нека $a\,|\,b$ и $a\,|\,c$. Од теоремата 3 имаме дека $a\,|\,(bx)$ и $a\,|\,(cy)$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$. Сега од теоремата 4 следува дека $a\,|\,(bx+cy)$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$. ♦

**Забелешка 1.** Од претходната теорема непосредно следува тврдењето.

Ако $a\,|\,b$ и $a\,|\,c$, тогаш $a\,|\,(b+c)$ и $a\,|\,(b-c)$.

Навистина, за да докажеме дека $a\,|\,(b+c)$, доволно е во теоремата 4 да земеме $x=y=1$, а за да докажеме дека $a\,|\,(b-c)$, доволно е да земеме $x=1$ и $y=-1$. ♦

**Пример 5.** Ако $a$ и $b$ се цели броеви такви, што $31\,|\,(6a+11b)$, тогаш $31\,|\,(a+7b)$. Докажи!

***Решение.*** Од $31\,|\,(6a+11b)$ следува дека постои $m$ таков, што $6a+11b=31m$. Но, тоа значи дека $30a+55b=5(6a+11b)=5\cdot 31m$, т.е. $31\,|\,(30a+55b)$. Од друга страна имаме

$$31a+62b=31(a+2b)=31n\text{, т.е. } 31\,|\,(31a+62b).$$

Конечно, од забелешката 1 следува дека

$$31\,|\,[31a+62b-(30a+55b)]=a+7b,$$

што и требаше да се докаже. ♦

**Теорема 6.** Ако $m\,|\,a$ и $n\,|\,b$, тогаш $mn\,|\,(ab)$.

**Доказ.** Од $m\,|\,a$ и $n\,|\,b$ следува дека постојат $p$ и $q$ такви, што $a=mp$ и $b=nq$. Според тоа, $ab=(mp)(nq)=(mn)(pq)$, што значи дека $mn\,|\,(ab)$. ♦

**Пример 7.** Докажи дека бројот $n$ е делив со броевите 2 и 3, тогаш тој е делив со бројот 6.

***Решение.*** Бидејќи $3\,|\,3$ и $2\,|\,n$ од теоремата 6 следува дека $2\cdot 3\,|\,3n$, т.е. $6\,|\,3n$. Аналогно, $2\,|\,2$ и $3\,|\,n$, па од теоремата 6 имаме $2\cdot 3\,|\,2n$, т.е. $6\,|\,2n$. Конечно, од забелешката 1 следува дека $6\,|\,(3n-2n)=n$, што и требаше да се докаже. ♦

**Забелешка 2.** На крајот од овој дел да забележиме дека теоремата 6 може да се воопшти, т.е. дека важат следниве тврдења, кои ќе ги усвоиме без доказ.

а) Ако $m_1 \mid a_1, m_2 \mid a_2, \ldots, m_k \mid a_k$, тогаш $m_1 m_2 \ldots m_k \mid a_1 a_2 \ldots a_k$.

б) Ако $m \mid a$, тогаш $m^k \mid a^k$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**8.** Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$,

**а)** $(5n+3)^2 - 4$ е делив со 5; **б)** $(4n+5)^2 - 9$ е делив со 8.

**9.** Докажи дека:

**а)** $17 \mid (6^{100} - 19^{50})$, **б)** $11 \mid (3^{30} - 2^{40})$

**10.** Докажи дека:

**а)** $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99}$ е делив со 7;

**б)** $6 + 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^{111}$ е делив со 43.

**11.** Докажи дека збирот:

**а)** $1+2+3+4+\ldots+107+108+109+110$ се дели со 37.

**б)** $1+2+3+4+\ldots+997+998+999+1000$ се дели со броевите 7, 11 и 13.

**12.** **а)** Докажи дека: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$.

**б)** Докажи дека: $7 \mid (8^n - 14n - 1)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**в)** Докажи дека: $19 \mid (7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

# 3. ДЕЛЕЊЕ СО ОСТАТОК

На почетокот рековме дека операцијата делење не е секогаш изводлива во множествата $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Z}$. Меѓутоа, од основно образование знаеме дека во множеството $\mathbf{N}$ за операцијата делење важи таканаречената *теорема за делење со остаток*.

*Ако $a, b \in \mathbf{N}$, тогаш постојат $q, r \in \mathbf{N}_0$ такви, што*

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b.$$

Притоа, како што знаеме, бројот $a$ го нарекуваме *деленик*, $b$*-делител*, $q$*-количник* и $r$*-остаток*.

Така, на пример, за броевите $a = 17$ и $b = 3$ имаме $17 = 3 \cdot 5 + 2$, што значи дека $q = 5$ и $r = 2$, а за броевите $a = 342$ и $b = 38$ имаме $342 = 38 \cdot 9 + 0$, што значи дека $q = 9$ и $r = 0$.

Претходно искажаната теорема за делење со остаток важи и во следниот поопшт облик.

**Теорема 7.** За секој $a \in \mathbf{Z}$ и секој $b \in \mathbf{N}$ постојат единствени цели броеви $q$ и $r$ такви, што

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b. \tag{1}$$

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Да го разгледаме множеството

$$A = \{\ldots, a-3b, a-2b, a-b, a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots\}.$$

Ова множество содржи како негативни така и ненегативни цели броеви. Да го разгледаме множеството $B$ од ненегативни цели броеви кои се содржат во множеството $A$. Како што знаеме, множеството $B$ има најмал елемент кој е природен број или е еднаков на нула. Нека е тоа бројот $a - qb$ и да го означиме со $r$. Тогаш важи (1), бидејќи во спротивно, ако $r \ge b$ тогаш бројот $a-(q+1)b$, кој е помал од $a - qb$, ќе биде природен број или еднаков на нула. Со тоа докажавме дека броевите $q$ и $r$ постојат и дека го задоволуваат (1).

Ќе докажеме дека броевите $q$ и $r$ се единствени. Да претпоставиме дека за броевите $q_1$ и $r_1$ важи

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \le r_1 < b. \tag{2}$$

Ако од (1) го извадиме (2), добиваме

$$0 = b(q - q_1) + (r - r_1). \tag{3}$$

Според тоа, $b \mid (r - r_1)$ и $b \mid (r_1 - r)$, при што или $r - r_1 \ge 0$ или $r_1 - r \ge 0$. Нека $r - r_1 \ge 0$. Ако $r - r_1 > 0$, тогаш од $b \mid (r - r_1)$ и $0 < r - r_1 < b$ добиваме дека природен број е делив со природен број кој е поголем од него, што не е можно. Значи $r - r_1 = 0$, т.е. $r = r_1$. Сега, од (3) добиваме $0 = b(q - q_1)$ и бидејќи $b \ne 0$ имаме $q - q_1 = 0$ т.е. $q = q_1$, што значи дека броевите $q$ и $r$ се единствени. ♦

**Забелешка 3.** Од теоремата 7 непосредно следува дека $b \mid a$ ако и само ако остатокот $r$ од делењето на $a$ со $b$ е 0, т.е. $r = 0$.

Количникот $q$ од теоремата 7 може да биде кој било цел број, а $r$ е некој број од множеството $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, кое го нарекуваме *множество на остатоци на бројот* $b$.

Очигледно, $\{0,1\}$ е множеството на остатоци на бројот 2, бидејќи при делење со 2 се добива остаток 0 или 1. Според тоа, секој цел број можеме да го претставиме во видот

$$2k \text{ или } 2k+1, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Броевите од видот $2k$ ги нарекуваме *парни броеви*, а оние од видот $2k+1$ ги нарекуваме *непарни броеви*.

Слично, при делењето со 3, можни се следниве остатоци: или 0 или 1 или 2, па затоа секој цел број може да се запише во видот:

$$3k \text{ или } 3k+1 \text{ или } 3k+2, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Во првата група (велиме уште и класа), спаѓаат сите цели броеви деливи со 3, во втората се оние кои при делење со 3 даваат остаток 1, а во третата оние кои при делење со 3 даваат остаток 2. Честопати видот $3k+2$ го запишуваме како $3m-1$

$$3k + 2 = 3k + 3 - 1 = 3(k+1) - 1 = 3m - 1.$$

Аналогно, при делењето со 6, можни се следниве остатоци: или 0, или 1, или 2, или 3, или 4, или 5, па затоа секој цел број може да се запише во видот: $6k$, или $6k+1$, или $6k+2$, или $6k+3$, или $6k+4$, или $6k+5$, $k \in \mathbf{Z}$, односно во еден од видовите

$$6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k+3, k \in \mathbf{Z}.$$

Ќе решиме неколку задачи користејќи ја теоремата за делење со остаток.

**Пример 7. а)** Најди најголем природен број кој при делење со 31 ќе дава количник 17.

**б)** При делење на бројот 170 е добиен остаток 11. Со кој број е делено и колкав е соодветниот количник?

**в)** При делење на бројот 237 е добиен количник 13. Со кој број е делен бројот 237 и кои остатоци се добиваат?

***Решение.* а)** Во случајот се дадени $b=31$ и $q=17$, а се бараат $a$ и $r$. Бројот $a$, кој при делење со 31 дава количник 17, можеме да го запишеме во видот

$$a = 31 \cdot 17 + r, 0 \le r < 31.$$

Тој ќе биде најголем, ако остатокот $r$ е најголем, т.е. ако $r=30$. Значи

$$a = 31 \cdot 17 + 30 = 557.$$

**б)** Дадено: $a=170, r=11$; се бараат $b$ и $q$. Треба да важи

$$170 = bq + 11 \text{ или } bq = 159.$$

Бидејќи $159 = 1 \cdot 159$ и $159 = 3 \cdot 53$, постојат четири можности:

$$b=159, q=1 \text{ или } b=53, q=3 \text{ или } b=3,\ q=53 \text{ или } b=1, q=159.$$

Последните две можности отпаѓаат, бидејќи остатокот треба да биде помал од делителот $(0 \le r < b)$. Затоа задачата има две решенија $b=159, q=1$ и $b=53, q=3$.

**в)** Дадено е $a=237, q=37$; се бараат $b$ и $r$. Треба да важи

$$237 = 13b + r, \quad 0 \le r < b$$

и оттука заклучуваме дека $237 \ge 13b$ и $237 < 14b$, т.е. $\frac{237}{13} \ge b$ и $\frac{237}{14} < b$. Единствени природни броеви кои ги задоволуваат последните две неравенства се броевите 17 и 18, па затоа $b=17, r = 237 - 13 \cdot 17 = 16$ или $b=18, r = 237 - 13 \cdot 18 = 3$. ♦

**Пример 8. а)** Докажи дека збирот на четири последователни природни броеви при делење со 4 дава остаток 2.

**б)** Природниот број $a$ не е делив со бројот 5. Најди го остатокот кој се добива при делење на бројот $a^4$ со бројот 5.

***Решение.* а)** Нека $k, k+1, k+2$ и $k+3$ се четири последователни природни броеви. За нивниот збир имаме

$$k + (k+1) + (k+2) + (k+3) = 4(k+1) + 2.$$

Од теоремата за делење со остаток следува дека остатокот при делење на $4(k+1)+2$ со 4 е единствен и е еднаков на 2.

**б)** Бројот $a$ кој не е делив со 5 може да се запише како $5k \pm 1$ или $5k \pm 2, k \in \mathbf{N}$. Квадратот на ваков број е

$$a^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 = 5m + 1$$

или

$$a^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k + 1) - 1 = 5m - 1.$$

Ако последните две равенства ги квадрираме уште еднаш добиваме

$$a^4 = (5m \pm 1)^2 = 25m^2 \pm 10m + 1 = 5(5m^2 \pm 2m) + 1 = 5n + 1.$$

Значи, остатокот при делење на бројот $a^4$ со бројот 5 е 1. ♦

**Теорема 8.** Збирот на природните броеви $a$ и $b$ е делив со природниот број $c$ ако и само ако збирот на остатоците на броевите $a$ и $b$ при делење со бројот $c$ е делив со $c$.

**Доказ.** Според теоремата за делење со остаток, за броевите $a$ и $b$ имаме $a = cq_1 + r_1$ и $b = cq_2 + r_2$. Според тоа,

$$a + b = (cq_1 + r_1) + (cq_2 + r_2) = c(q_1 + q_2) + r_1 + r_2,$$

што значи дека $a + b$ е делив со $c$ ако и само ако $r_1 + r_2$ е делив со $c$. ♦

**Пример 9.** Нека $a, b, c \in \mathbf{N}$. Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7.

***Решение.*** Од теоремата за делење со остаток следува дека секој природен број може да се запише во видот $4k, 4k+1, 4k+2$ или $4k+3$, $k \in \mathbf{N}_0$. Во секој од овие случаи квадратот на бројот може да се запише како

$$16k^2 = 8 \cdot 2k^2, \quad 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1,$$

$$16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 1, \quad 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1.$$

Според тоа, квадратот на произволен природен број при делење со 8 може да има остаток 0, 1 или 4. Собирајќи кои било три остатоци од наведениот вид не можеме да добиеме збир 7, па од теоремата 8 заклучуваме дека збирот $a^2 + b^2 + c^2$ при делење со 8 не може да даде остаток 7. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**13.** Ако еден број се подели со 63, се добива количник $n$ и остаток 59. Колку ќе биде остатокот при делењето на тој број со 21?

**14.** Најди четирицифрен број кој поделен со 131 дава остаток 112, а поделен со 132 дава ист количник и остаток 98.

**15.** Професорката Елисавета му дала на ученикот Методи да подели еден број со друг. Методи добил количник 74 и остаток 22. Потоа извршил проверка: го помножил количникот со делителот и на добиениот производ го додал остатокот, па така добил 30214. Имало грешка. Методи при ова множење (при проверката) во делителот, на местото на десетките, една шестка ја прочитал како нула. Најди ги деленикот и делителот?

**16.** Докажи дека производот на два последователни природни броеви е делив со 2.

**17.** Докажи дека квадратот на секој непарен природен број може да се запише во облик $8p+1,\ p \in \mathbf{N}_0$.

**18.** Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е делив со 9.

**19.** Докажи дека $6 \mid (n^3 - n)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**20.** Докажи дека $3 \mid n(2n^2+1)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**21.** Докажи дека $6 \mid (n^3 + 3n^2 + 2n + 6)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

## 4. ПОСЕБНИ ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ

Од основното образование, познати ни се признаците за деливост на природен број со 2, 3, 4, 5, 8 и 9, кои спаѓаат во групата на посебните признаци за деливост. Во основното образование научи да ги применуваш посебните признаци, без да ги докажуваш. Во овој дел ќе се навратиме на примената на некои посебни признаци, кои и ќе ги докажеме.

Во примерот 3 го искористивме таканареченото декаден запис на природен број. Да се потсетиме: секој двоцифрен број $a = \overline{xy}$ можеме да го запишеме во облик $a = 10x + y$; секој трицифрен број $b = \overline{xyz}$ можеме да го запишеме во облик $b = 100x + 10y + z$ итн. Слично, ако природниот број $m$ е составен од $(n+1)-$на цифра, т.е. $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, тогаш истиот можеме да го запишеме во развиена форма:

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0. \qquad (1)$$

Така, на пример

$$13245 = 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 \text{ и}$$
$$457245 = 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

***Признак за деливост со 2.*** Природниот број $m$ е делив со 2 ако и само ако цифрата на единиците на бројот $m$ е 0, 2, 4, 6 или 8.

**Доказ.** Нека бројот $m$ е запишан во развиена форма (1). Броевите $10, 10^2, \ldots, 10^n$ се деливи со 2, па од теоремата 5 следува дека бројот $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1$ е делив со 2. Според тоа, од теоремата 4 следува дека $2 \mid m$ ако и само ако $2 \mid a_0$, т.е. ако и само ако цифрата на единиците бројот $m$ е 0, 2, 4, 6 или 8. ♦

***Признак за деливост со 4.*** Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$$

е делив со 4 ако и само ако $4 \mid (2a_1 + a_0)$.

**Доказ.** Имаме

$$m = 10^n a_n + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = (10^n a_n + \ldots + 10^2 a_2 + 8a_1) + (2a_1 + a_0).$$

Броевите $8, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$ се деливи со 4, па од теоремата 5 следува дека бројот $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 8a_1$ е делив со 4. Според тоа, од теоремата 4 следува дека $4 \mid m$ ако и само ако $4 \mid (2a_1 + a_0)$. ♦

**Пример 10.** Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката за бројот 434548*6 да биде делив со 4?

***Решение.*** Од признакот за деливост со 4 следува дека дадениот број е делив со 4 ако и само ако $4 \mid (2a_1 + 6)$, каде што $a_1$ е цифрата која стои на местото на ѕвездичката. Со непосредна проверка наоѓаме $a_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ♦

***Признак за деливост со 8.*** Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$$

е делив со 8 ако и само ако $8 \mid (4a_2 + 2a_1 + a_0)$.

**Доказ.** Имаме

$$\begin{aligned} m &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 \\ &= (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^3 a_3 + 96a_2 + 8a_1) + (4a_2 + 2a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Броевите $8, 96, 10^3, \ldots, 10^n$ се деливи со 8, па од теоремата 5 следува дека бројот

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^3 a_3 + 96a_2 + 8a_1$$

е делив со 8. Според тоа, од теоремата 4 следува дека $8 \mid m$ ако и само ако $8 \mid (4a_2 + 2a_1 + a_0)$. ♦

**Пример 11.** Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката за бројот 4341903*6 биде делив со 8?

***Решение.*** Од признакот за деливост со 8 следува дека дадениот број е делив со 8 ако и само ако $8 \mid (4 \cdot 3 + 2a_1 + 6)$, каде што $a_1$ е цифрата што стои на местото на ѕвездичката. Со непосредна проверка наоѓаме $a_1 \in \{3, 7\}$. ♦

***Признак за деливост со 5.*** Природниот број $m$ е делив со 5 ако и само ако цифрата на единиците на бројот $m$ е 0 или 5.

**Доказ.** Нека бројот $m$ е запишан во развиена форма (1). Броевите

$$10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$$

се деливи со 5, па од теоремата 5 следува дека бројот

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1$$

е делив со 5. Според тоа, од теоремата 4 следува дека $5 \mid m$ ако и само ако $5 \mid a_0$, т.е. ако и само ако цифрата на единиците на бројот $m$ е 0 или 5. ♦

**Пример 12.** Докажете дека бројот $n^2 + n + 1$ не е делив со 5 за ниту еден природен број $n$.

***Решение.*** Според признакот за деливост со бројот 5, доволно е да докажеме дека за секој природен број $n$ цифрата на единиците на бројот $n^2 + n + 1$ е различна од 0 и 5. За таа цел ќе ја составиме следнава табела:

| број | цифра на единици | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| $n^2+n+1$ | 1 | 3 | 7 | 3 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 1 |

од каде што гледаме дека за секој природен број $n$, бројот $n^2 + n + 1$ завршува на една од цифрите 1, 3 или 7, што значи дека тој не е делив со 5. ♦

***Признак за деливост со 9.*** Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

е делив со 9 ако и само ако $9 \mid (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$.

**Доказ.** Имаме

$$\begin{aligned} m &= 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \\ &= (10^n - 1) a_n + \ldots + (10^2 - 1) a_2 + (10 - 1) a_1 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \\ &= \underbrace{99..99}_{n \text{ девет.}} a_n + \underbrace{99..99}_{n-1 \text{ девет.}} a_{n-1} + \ldots + 99 a_2 + 9 a_1 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \\ &= 9 \cdot (\underbrace{11..11}_{n \text{ един.}} a_n + \underbrace{11..11}_{n-1 \text{ един.}} a_{n-1} + \ldots + 11 a_2 + a_1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Според тоа, бројот $m$ го запишавме како збир на два броја од кои едниот е делив со 9, па затоа $9 \mid m$ ако и само ако

$$9 \mid (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0). ♦$$

***Признак за деливост со 3.*** Природниот број

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$$

е делив со 3 ако и само ако $3 \mid (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$.

**Доказ.** Имаме

$$m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$$
$$= 9 \cdot (\underbrace{11..11}_{n \text{ един.}} a_n + \underbrace{11..11}_{n-1 \text{ един.}} a_{n-1} + \ldots + 11a_2 + a_1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0).$$

Според тоа, бројот $m$ го запишавме како збир на два броја од кои едниот е делив со 9, што значи и со бројот 3, па затоа $3 \mid m$ ако и само ако

$$3 \mid (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)\,. \blacklozenge$$

**Пример 13.** Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката за бројот 92357*46 да биде делив со 3, а која за бројот да биде делив со 9?

***Решение.*** Од признакот за деливост со 3 следува дека бројот 92357*46 е делив со 3 ако и само ако збирот

$$9 + 2 + 3 + 5 + 7 + a_2 + 4 + 6 = 36 + a_2$$

е делив со 3, каде што $a_2$ е цифрата која стои на местото на ѕвездичката. Но, $3 \mid 36$, па затоа треба $3 \mid a_2$, од што следува дека $a_2 \in \{0,3,6,9\}$.

Аналогно, од признакот за деливост со 3 следува дека бројот 92357*46 е делив со 9 ако и само ако збирот

$$9 + 2 + 3 + 5 + 7 + a_2 + 4 + 6 = 36 + a_2$$

е делив со 9, каде што $a_2$ е цифрата која стои на местото на ѕвездичката. Но, $9 \mid 36$ па затоа треба $9 \mid a_2$, од што следува $a_2 \in \{0,9\}$. ♦

**Пример 14.** Даден е природен број $n$, кој е запишан со 60 цифри седумки и одреден број нули. Докажи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е цел број, но вредноста на дропката $\frac{n-27}{9}$ не е цел број!

***Решение.*** Збирот на цифрите на бројот $n$ е $60 \cdot 7 = 420$, што според признакот за деливост со 3 значи дека $3 \mid n$. Но, $3 \mid 27$, па затоа $3 \mid (n-27)$, што значи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е цел број.

Јасно, $9 \mid 27$ и $9 \nmid n$, па затоа $9 \nmid (n-27)$, т.е. вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ не е цел број. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**22.** Докажи дека: **а)** $5 \mid (2^{2000} - 1)$; **б)** $5 \nmid (n^2 - 7)$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

**23.** Докажи дека: **а)** $81 \mid (10^{1990} - 10)$; **б)** $81 \mid \underbrace{111...111}_{81 \text{ единица}}$.

**24.** Ако $n$ е природен број, тогаш и $(10^n - 4) : 6$ е природен број. Докажи!

**25.** Ако $n$ е природен број, тогаш и $(10^n + 35) : 45$ е природен број. Докажи!

**26.** Дали $8 \mid a$, каде што $a = \underbrace{4444...4444}_{2002 \text{ четворки}}$ .?

**27.** На местото на ѕвездичката, во бројот 63145*, стави соодветна цифра така што при делење на тој број со 3 и со 5 да се добијат еднакви остатоци. Најди ги сите решенија.

**28.** На местото на ѕвездичките стави цифри така што бројот 4*1* да биде делив со 12. Најди ги сите решенија.

**29.** На местото на ѕвездичките стави цифри така што бројот 81** биде делив со 90. Најди ги сите решенија.

**30.** Телефонскиот број на Самоил се состои од два трицифрени броја, од кои секој е делив со 45, а средната цифра им е 8. Најди го бројот на телефонот, ако првиот дел од бројот е помал од вториот.

**31.** Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 11 ако и само ако бројот $a - b + c - d$ е делив со 11.

**32.** Користејќи го тврдењето: "*Природниот број $n$ е делив со* 11 *ако и само ако разликата на збирот на цифрите на непарните места и збирот на цифрите на парните места во декадниот запис е делива со* 11.", провери кои од броевите

а) 1324567396; б) 2619876347; в) 434548363235

е делив со 11. Обиди се да го докажеш признакот за деливост со 11.

**33.** На местото на ѕвездичките, во бројот 1988**, стави цифри така што добиениот број да биде делив со 33. Најди ги сите решенија.

## 5. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ

За бројот 24 имаме $24 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Очигледно, броевите 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24 се делители на бројот 24. Забележуваме дека сите делители на 24 се помали или еднакви на 24 и нив ги има конечно многу. Последното важи за секој природен број. Имено, делителите на секој природен број $a$ се помали или еднакви на бројот $a$, па затоа секој природен број, а со тоа и секој цел број различен од нула, има конечно многу делители.

**Дефиниција 2.** Нека $a, b \in \mathbf{N}$. За бројот $d$ ќе велиме дека е *заеднички делител* на броевите $a$ и $b$ ако $d \mid a$ и $d \mid b$.

Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се заеднички делители на $a$ и $b$, и $d$ е најголемиот меѓу броевите $d_1, d_2, ..., d_k$, во ознака $d = \max\{d_1, d_2, ..., d_k\}$. За бројот $d$ ќе велиме дека е *најголем заеднички делител* на $a$ и $b$.

За најголемиот заеднички делител на броевите $a$ и $b$ најчесто се користат ознаките $(a, b)$ или НЗД$(a, b)$. Ние ќе ја користиме ознаката НЗД$(a, b)$.

За бројот $d$ ќе велиме дека е заеднички делител на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ ако $d \mid a_1, d \mid a_2, ..., d \mid a_n$.

Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се заеднички делители на $a_1, a_2, ..., a_n$. Бројот $d = \max\{d_1, ..., d_k\}$ го нарекуваме *најголем заеднички делител* на $a_1, a_2, ..., a_n$ и ќе го означуваме со НЗД$(a_1, a_2, ..., a_n)$.

**Забелешка 3.** Како што рековме, множеството делители на природниот број $a$ е конечно и бидејќи тоа ги содржи заедничките делители на броевите $a$ и $b$, добиваме дека множеството $d_1, d_2, ..., d_k$ од заедничките делители на $a$ и $b$ е конечно. Но, тоа не е празно, бројот 1 е заеднички делител на $a$ и $b$, па затоа истото има најголем елемент. Според тоа, за секои два природни броја $a$ и $b$ може да се најде НЗД$(a,b)$. Од наполно исти причини е јасно дека за секои $n$ природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ може да се најде НЗД$(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Од досега изнесеното е јасно дека за да го најдеме најголемиот заеднички делител на броевите $a$ и $b$, доволно е да ги определиме сите делители на $a$ и сите делители на $b$ и потоа меѓу нивните заеднички делители да го земеме најголемиот број. Јасно, ваквата постапка секогаш дава резултати, но не е секогаш ефективна. Имено, ако броевите $a$ и $b$ се мали тогаш сé е во ред, но ако станува збор за големи броеви, тогаш може да имаме сериозни тешкотии. Така, на пример, ако $a = 24$ и $b = 56$, тогаш лесно се гледа дека делители на 24 се 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24, а делители на 56 се 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 и 56, па затоа НЗД$(24,56) = 8$. Меѓутоа, ако $a = 1728$ и $b = 1764$, тогаш потребен е голем број пресметувања за со претходната постапка да се констатира дека НЗД$(1728,1764) = 36$. Токму затоа, во овој дел ќе дадеме неколку теореми со чија помош ќе можеме полесно да наоѓаме НЗД.

**Теорема 9.** Ако $a = bq$, тогаш НЗД$(a,b) = b$.

**Доказ.** Од $a = bq$ следува дека $b \mid a$ и бидејќи $b \mid b$, добиваме дека $b$ е заеднички делител на $a$ и $b$. Понатаму, бидејќи НЗД$(a,b) \le b$ и $b$ е заеднички делител на $a$ и $b$, добиваме дека НЗД$(a,b) = b$. ♦

**Теорема 10. а)** Ако $b < a$, тогаш НЗД$(a,b) =$ НЗД$(b, a-b)$.

**б)** За секои $a, b \in \mathbf{N}$ важи НЗД$(a,b) =$ НЗД$(a, a+b)$.

**Доказ. а)** Од теоремата 4 имаме: ако $d \mid a$, тогаш $d \mid b$ ако и само ако $d \mid (a-b)$. Според тоа, секој заеднички делител на $a$ и $b$ е заеднички делител и на $b$ и $a-b$ и, обратно, секој заеднички делител на $b$ и $a-b$ е заеднички делител и на $a$ и $b$, па затоа

$$\text{НЗД}(a,b) = \text{НЗД}(b, a-b).$$

**б)** Од тврдењето под а) имаме: НЗД$(a, a+b) =$ НЗД$(a, a+b-a) =$ НЗД$(a,b)$. ♦

**Пример 15. а)** Најди НЗД$(484,396)$.

**б)** Најди го најголемиот природен број за кој при делење на броевите 845 и 275, со него, и во двата случаи се добива остаток 5.

***Решение.*** **а)** Од теоремата 10 а) следува

$$\begin{aligned}\text{НЗД}(484,396) &= \text{НЗД}(396, 484-396) = \text{НЗД}(396,88) = \text{НЗД}(88, 396-88)\\ &= \text{НЗД}(88,308) = \text{НЗД}(88, 308-88) = \text{НЗД}(88,220) = \text{НЗД}(88, 220-88)\\ &= \text{НЗД}(88,132) = \text{НЗД}(88, 132-88) = \text{НЗД}(88,44) = 44.\end{aligned}$$

Последното равенство следува од теоремата 9 бидејќи $88 = 2 \cdot 44$.

**б)** Бараниот број е заеднички делител на $845-5=840$ и $275-5=270$. Според тоа, треба да најдеме НЗД$(840,270)$. Од теоремата 10 а) имаме

$$\text{НЗД}(840,270)=\text{НЗД}(270,840-270)=\text{НЗД}(270,570)=\text{НЗД}(270,570-270)$$
$$=\text{НЗД}(270,300)=\text{НЗД}(270,300-270)=\text{НЗД}(270,30)$$

и бидејќи $30\,|\,270$ од последното равенство и од теоремата 9 добиваме

$$\text{НЗД}(840,270)=\text{НЗД}(270,30)=30.$$

Значи, најголемиот број со бараното својство е 30. Притоа

$$845=30\cdot 28+5 \text{ и } 275=30\cdot 9+5.\blacklozenge$$

Во претходните разгледувања видовме дека НЗД$(24,56)=8$ и НЗД$(840,270)=30$. Забележуваме дека и во двата случаја најголемиот заеднички делител е поголем од 1. Меѓутоа, делители на бројот 10 се 1, 2, 5 и 10, а делители на бројот 3 се 1 и 3, па затоа НЗД$(10,3)=1$. Постојат бројни примери во кои најголемиот заеднички делител на два броја е 1 и ваквите парови природни броеви се од посебна важност во теоријата на броеви, па затоа и посебно ќе ги разгледаме.

**Дефиниција 3.** За природните броеви $a$ и $b$ ќе велиме дека се *заемно прости* ако НЗД$(a,b)=1$.

За броевите $a_1,a_2,...,a_n$ ќе велиме дека се *заемно прости во целина* ако НЗД$(a_1,a_2,...,a_n)=1$.

За броевите $a_1,a_2,...,a_n$ ќе велиме дека се *заемно прости по парови* ако НЗД$(a_i,a_j)=1$, за $i\neq j$, т.е. секои два броја се заемно прости.

Јасно, ако броевите $a_1,a_2,...,a_n$ се заемно прости по парови, тогаш тие се заемно прости во целина. Меѓутоа, обратното не важи. Имено, за броевите 6, 15 и 35 имаме НЗД$(6,15,35)=1$, т.е. тие се заемно прости во целина, но не се заемно прости по парови бидејќи НЗД$(6,15)=3$ и НЗД$(15,35)=5$.

**Пример 16. а)** Докажи дека броевите 77 и 96 се заемно прости.

**б)** Докажи дека броевите $n, n+1$ и $2n+1$ се заемно прости по парови.

***Решение.*** **а)** Имаме

$$\text{НЗД}(96,77)=\text{НЗД}(77,96-77)=\text{НЗД}(77,19)=\text{НЗД}(19,77-19)$$
$$=\text{НЗД}(19,58)=\text{НЗД}(19,58-19)=\text{НЗД}(19,39)$$
$$=\text{НЗД}(19,39-19)=\text{НЗД}(19,20)=\text{НЗД}(19,20-19)=1,$$

што значи дека броевите 77 и 96 се заемно прости.

**б)** Од теоремата 10 а) следува

$$\text{НЗД}(n+1,n)=\text{НЗД}(n,n+1-n)=\text{НЗД}(n,1)=1,$$

што значи дека броевите $n$ и $n+1$ се заемно прости. Сега, од теоремата 10 б) имаме

$$1 = \text{НЗД}(n+1, n) = \text{НЗД}(n+1, n+1+n) = \text{НЗД}(n+1, 2n+1)$$

т.е. $n+1$ и $2n+1$ се заемно прости. Конечно, од теоремата 10 а) и од претходното равенство имаме

$$\text{НЗД}(2n+1, n) = \text{НЗД}(2n+1, 2n+1-n) = \text{НЗД}(2n+1, n+1) = 1$$

т.е. $n$ и $2n+1$ се заемно прости. ♦

**Теорема 11.** Ако $\text{НЗД}(a,b) = d$, $a = dx$ и $b = dy$, тогаш

$$\text{НЗД}(x, y) = 1.$$

**Доказ.** Да претпоставиме дека $\text{НЗД}(x, y) = k > 1$. Тогаш постојат природни броеви $x_1$ и $y_1$ такви, што $x = kx_1$ и $y = ky_1$. Од $a = dx$ и $b = dy$ добиваме $a = d(kx_1) = (kd)x_1$ и $b = d(ky_1) = (dk)y_1$. Според тоа $dk \mid a$ и $dk \mid b$. Значи, бројот $dk$ е заеднички делител на $a$ и $b$ поголем од $d$, што не е можно бидејќи $\text{НЗД}(a,b) = d$.

Од добиената противречност следува дека $k = 1$, т.е $\text{НЗД}(x, y) = 1$. ♦

**Пример 17.** Збирот на два природни броја е 252, а нивниот најголем заеднички делител е 36. Кои се тие броеви?

***Решение.*** Нека бараните броеви се $a$ и $b$. Од условот на задачата имаме $a + b = 252$, $a = 36x$ и $b = 36y$, при што $\text{НЗД}(x, y) = 1$. Според тоа, $36x + 36y = 252$, т.е. $x + y = 7$. Во последното равенство ставаме $x = 1,2,3,4,5,6$ и добиваме

$$(x, y) \in \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}.$$

Конечно, со замена во равенствата $a = 36x$ и $b = 36y$ наоѓаме

$$(a, b) \in \{(36,216), (72,180), (108,144), (144,108), (180,72), (216,36)\}. ♦$$

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**34.** Најди НЗД за броевите: а) 135 и 180; б) 63, 135 и 315.

**35.** Нека $a$ и $b$ се два последователни природни броеви и нека $n$ е произволен природен број. Докажи дека $\text{НЗД}(an+b, bn+a)$ е непарен број.

**36.** Дали $21n+4$ и $14n+3$ имаат заеднички делител различен од 1, ако $n$ е природен број.

**37.** Докажи дека се заемно прости броевите $9n+31$ и $2n+7$ за секој $n \in \mathbf{N}$.

**38.** Ако $a$ и $b$ се заемно прости броеви, тогаш $\text{НЗД}(a+b, a-b) \mid 2$. Докажи!

**39.** Збирот на два природни броја е 150, а нивниот најголем заеднички делител е 30. Кои се тие броеви?

**40.** Производот на два природни броја е 8400, а нивниот најголем заеднички делител е 20. Кои се тие броеви?

# 6. ЕВКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

Во следните неколку теореми ќе разработиме алгоритам за наоѓање на НЗД. Притоа ќе ја користиме теоремата за делење со остаток, со чија помош ќе го докажеме таканареченото Евклидов алгоритам.

**Теорема 12.** Ако $a = bq + r$, тогаш НЗД$(a,b) =$ НЗД$(b,r)$.

**Доказ.** Ако НЗД$(a,b) = d$, тогаш постојат $x$ и $y$ такви, што $a = dx$ и $b = dy$. Значи, $dx = dy + r$, па од теорема 4 следува $d \mid r$ и бидејќи $d \mid b$ заклучуваме дека $d \mid$ НЗД$(b,r)$.

Јасно, $d =$ НЗД$(b,r)$, бидејќи ако $d <$ НЗД$(b,r) = d_1$, тогаш според теоремата 4, од равенството $a = bq + r$ следува $d_1 \mid a$ и бидејќи $d_1 \mid b$, добиваме дека постои заеднички делител на $a$ и $b$, што е противречност. ♦

Ќе покажеме како со помош на теоремата за делење со остаток и претходната теорема може да се конструира таканареченото Евклидов алгоритам за наоѓање на НЗД на два броја $a$ и $b$. Имаме

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & 0 \le r_1 < b \\ b = r_1 q_2 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k & 0 \le r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1} & 0 \le r_{k+1} < r_k \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \qquad (1)$$

Бидејќи остатоците $r_i$ опаѓаат со секој следен чекор, т.е.

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_k > r_{k+1} > \dots$$

постапката дефинирана со равенствата (1) ќе заврши по конечен број чекори, т.е. по конечен број чекори ќе добиеме равенство во облик $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0$, т.е. $r_{n+1} = 0$, при што $r_n \ne 0$. Од равенството $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$ следува $r_n \mid r_{n-1}$. Претходно кажаното и теоремата 12 ни овозможуваат да ја докажеме следната теорема.

**Теорема 13.** Последниот остаток $r_n$ различен од нула, добиен со низата равенства (1) е еднаков на најголемиот заеднички делител на броевите $a$ и $b$.

**Доказ.** Ако ги земеме предвид равенствата (1), тогаш од теоремата 12 непосредно ја добиваме следнава низа равенства

$$\text{НЗД}(a,b) = \text{НЗД}(b,r_1) = \text{НЗД}(r_1,r_2) = \text{НЗД}(r_2,r_3) = \dots = \text{НЗД}(r_{n-1},r_n).$$

Но, $r_n \mid r_{n-1}$ што според теоремата 9 значи дека НЗД$(r_{n-1},r_n) = r_n$. Конечно, од последните две равенства наоѓаме

$$\text{НЗД}(a,b) = \text{НЗД}(r_{n-1},r_n) = r_n. \ ♦$$

**Пример 18.** Најди НЗД$(426,312)$.

***Решение.*** Ќе го искористиме Евклидовиот алгоритам. Имаме

$426 = 312 \cdot 1 + 114$; $312 = 114 \cdot 2 + 84$; $114 = 84 \cdot 1 + 30$, $84 = 30 \cdot 2 + 24$; $30 = 24 \cdot 1 + 6$ и $24 = 6 \cdot 4$

што значи НЗД$(426,312) = 6$. ♦

**Теорема 14.** Ако $d =$ НЗД$(a,b)$, тогаш постојат цели броеви $x$ и $y$ такви, што

$$d = ax + by.$$

**Доказ.** Според теоремата 13, во системот равенства (1) на Евклидовиот алгоритам важи $d = r_n =$ НЗД$(a,b)$, каде што $r_n$ е последниот остаток различен од нула. Равенствата (1) ги запишуваме во обликот:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-2} - q_n r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2} \\ r_{n-2} &= r_{n-4} - q_{n-2} r_{n-3} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ r_2 &= b - r_1 q_2 \\ r_1 &= a - b q_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Сега, ако во првото равенство на (2) од второто равенство замениме за $r_{n-1}$, потоа од третото равенство во (2) во новодобиеното равенство замениме за $r_{n-2}$, па во секое новодобиено равенство последователно замениме за $r_{n-3},\dots,r_3,r_2$ и $r_1$, добиваме равенство во облик $d = ax + by$. ♦

Да забележиме дека броевите $x$ и $y$ во претходната теорема се заемно прости, т.е. НЗД$(x,y) = 1$.

Навистина, ако претпоставиме дека НЗД$(x,y) = k > 1$, тогаш постојат $x_1, y_1 \in \mathbf{N}$ такви, што $x = kx_1$ и $y = ky_1$. Слично, од $d =$ НЗД$(a,b)$ следува дека постојат $a_1, b_1 \in \mathbf{N}$ такви, што $a = da_1$ и $b = db_1$. Ако замениме во равенството $d = ax + by$, добиваме

$$d = (da_1)(kx_1) + (db_1)(ky_1) = kd(a_1x_1 + b_1y_1),$$

т.е. $kd \mid d$, што не е можно бидејќи $kd > d$. Од добиената противречност следува дека НЗД$(x,y) = 1$.

Понатаму, ако $d =$ НЗД$(a,b)$, тогаш броевите $x$ и $y$ во равенството $d = ax + by$ не се еднозначно определени. Така, на пример, НЗД$(8,12) = 4$ и $4 = 3 \cdot 12 - 4 \cdot 8 = 5 \cdot 12 - 7 \cdot 8$.

**Пример 19.** Запиши го НЗД$(426,312) = 6$ во облик

$$6 = 426x + 312y.$$

***Решение.*** Од примерот 19 и од теоремата 14 следува:

$$6 = 30 - 24 = 30 - (84 - 2 \cdot 30) = 3 \cdot 30 - 84 = 3(114 - 84) - 84 = 3 \cdot 114 - 4 \cdot 84$$
$$= 3 \cdot 114 - 4(312 - 2 \cdot 114) = 11 \cdot 114 - 4 \cdot 312 = 11(426 - 312) - 4 \cdot 312$$
$$= 11 \cdot 426 - 15 \cdot 312$$

т.е. НЗД$(426,312) = 426 \cdot 11 - 312 \cdot 15$. ♦

**Пример 20.** Докажи дека целите броеви $m$ и $n$ се заемно прости ако и само ако постојат цели броеви $x$ и $y$ такви, што

$$mx + ny = 1. \tag{3}$$

***Решение.*** Нека $m$ и $n$ се заемно прости т.е. НЗД$(m,n) = 1$. Тогаш, од теоремата 14 следува дека постојат цели броеви $x$ и $y$ такви, што $mx + ny = 1$, т.е. важи (3).

Да претпоставиме дека за броевите $m$ и $n$ постојат цели броеви $x$ и $y$ такви, што важи равенството (3). Ако $d \mid m$ и $d \mid n$, тогаш $d \mid (ma + nb)$, за секои цели броеви $a$ и $b$. Земаме $a = x$ и $b = y$ и добиваме дека $d \mid (mx + ny)$, т.е. $d \mid 1$, а тоа е можно само ако $d = 1$, што значи дека $m$ и $n$ се заемно прости. ♦

**Теорема 15. а)** Ако $c \mid a$ и $c \mid b$, тогаш $c \mid$ НЗД$(a,b)$.

**б)** Ако $d \mid a, d \mid b$ и $d = ax + by$, за некои цели броеви $x$ и $y$, тогаш $d =$ НЗД$(a,b)$.

**Доказ. а)** Од теоремата 14 следува дека постојат цели броеви $x$ и $y$ такви, што НЗД$(a,b) = ax + by$. Понатаму, од $c \mid a$ имаме $a = cm$ за некој цел број $m$, а од $c \mid b$ следува $b = cn$ за некој цел број $n$. Заменуваме во равенството НЗД$(a,b) = ax + by$ и добиваме

$$\text{НЗД}(a,b) = ax + by = (cm)x + (cn)y = c(mx + ny),$$

што значи $c \mid$ НЗД$(a,b)$.

**б)** Да претпоставиме дека $d \mid a, d \mid b$ и $d = ax + by$, за некои цели броеви $x$ и $y$. Од тврдењето под а) следува дека $d \mid$ НЗД$(a,b)$. Понатаму, постојат $a_1, b_1 \in \mathbf{N}$ такви, што

$$a = a_1 \cdot \text{НЗД}(a,b) \quad \text{и} \quad b = b_1 \cdot \text{НЗД}(a,b).$$

Ако замениме во $d = ax + by$, добиваме

$$d = [a_1 \cdot \text{НЗД}(a,b)]x + [b_1 \cdot \text{НЗД}(a,b)]y = \text{НЗД}(a,b) \cdot (a_1 x + b_1 y)$$

што значи НЗД$(a,b) \mid d$. Конечно, од $d \mid$ НЗД$(a,b)$ и НЗД$(a,b) \mid d$ следува $d =$ НЗД$(a,b)$. ♦

**Теорема 16.** Ако $k > 0$, тогаш НЗД$(ka,kb) = k \cdot$ НЗД$(a,b)$.

**Доказ.** Нека $d =$ НЗД$(a,b)$. Според тоа, $d \mid a$ и $d \mid b$ и постојат постојат $x$ и $y$ такви, што $d = ax + by$. Но, тоа значи дека $kd \mid ka$, $kd \mid kb$ и постојат $x$ и $y$ такви, што

$$kd = k(ax + by) = (ka)x + (kb)y.$$

Сега, од теоремата 15 б) следува дека

$$\text{НЗД}(ka,kb) = kd = k \cdot \text{НЗД}(a,b). \ ♦$$

**Пример 21.** Најди НЗД$(765,1080)$.

***Решение.*** Дадените броеви завршуваат на 5 и 0, па од признакот за деливост со 5 следува дека $5|765$ и $5|1080$. Имаме, $765=5\cdot 153$ и $1080=5\cdot 216$, па затоа

$$\text{НЗД}(765,1080)=5\cdot\text{НЗД}(153,216).$$

Збирот на цифрите на броевите 153 и 216 е еднаков на 9, па од признакот за деливост со 9 следува дека и двата броја се деливи со 9. Имаме, $153=9\cdot 17$ и $216=9\cdot 24$, па затоа

$$\begin{aligned}\text{НЗД}(765,1080)&=5\cdot\text{НЗД}(153,216)=5\cdot 9\cdot\text{НЗД}(17,24)=45\cdot\text{НЗД}(17,7)\\&=45\cdot\text{НЗД}(7,10)=45\cdot\text{НЗД}(7,3)=45\cdot\text{НЗД}(3,4)=45.\ \blacklozenge\end{aligned}$$

**Теорема 17. а)** Ако $q|ab$ и НЗД$(q,b)=1$, тогаш $q|a$.

**б)** Ако $q|a,\ p|a$ и НЗД$(q,p)=1$, тогаш $qp|a$.

**Доказ. а)** Според теоремата 14, од НЗД$(q,b)=1$ следува дека постојат цели броеви $m$ и $n$ такви, што $1=bm+qn$. Ако последното равенство го помножиме со $a$, добиваме дека постојат цели броеви $m$ и $n$ такви, што

$$a=abm+qan. \tag{4}$$

Од условот на теоремата имаме дека $q|ab$, т.е. постои природен број $k$ таков, што $ab=qk$. Со замена во равенството (4), добиваме

$$a=(qk)m+qan=q(km+an).$$

Конечно, од последното равенство следува дека $q|a$.

**б)** Од $q|a$ и $p|a$ следува дека $a=qm$ и $a=pn$ за некои $m,n\in\mathbf{N}$. Според тоа, $qm=pn$ па затоа $q|pn$. Но, НЗД$(q,p)=1$ и бидејќи $q|pn$, од тврдењето под а) следува $q|n$, што значи дека постои $k\in\mathbf{N}$ таков, што $n=qk$. Конечно, $a=pn=p(qk)=(pq)k$, од што следува дека $pq|a$. ♦

**Пример 22.** Најди ги сите природни броеви $n$ за кои бројот $10^n+8$ е делив со 72!

***Решение.*** Бидејќи збирот на цифрите на бројот $10^n+8=10...08$ е еднаков на 9, заклучуваме дека $9|(10^n+8)$ за секој природен број $n$. Понатаму, од признакот за деливост со 8, имаме дека $8|(10^n+8)$ ако и само ако $8|(4a_2+2a_1+a_0)$. За $n=1$ и $n=2$ имаме

$$10^n+8=18 \text{ и } 10^n+8=108$$

и овие броеви не се деливи со 8. Ако $n\geq 3$, тогаш $a_2=a_1=0$ и $a_0=8$, па затоа $8|(4a_2+2a_1+a_0)$. Според тоа, за $n\geq 3$ имаме $8|(10^n+8)$.

Конечно, од претходно изнесеното и од фактот дека НЗД$(8,9)=1$, со примена на теоремата 17 б) добиваме дека $72|(10^n+8)$ за $n\geq 3$. ♦

**Пример 23.** Докажи дека од $7 \mid \overline{abb}$ следува $7 \mid (a+b+b)$.

**Решение.** Имаме

$$\overline{abb} = 100a + 10b + b = 98a + 7b + 2a + 4b = 7(14a + b) + 2(a + b + b).$$

Понатаму, левата страна на последното равенство е делива со 7 и првиот собирок на десната страна е делив со 7, па затоа и вториот собирок е делив со 7, т.е. $7 \mid 2(a+b+b)$. Но, НЗД$(7,2) = 1$, па од теоремата 17 а) следува дека $7 \mid (a+b+b)$, што и требаше да се докаже. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**41.** Со помош на Евклидовиот алгоритам најди НЗД за броевите:
**а)** 1001 и 7655; **б)** 72135 и 45360
а потоа запиши го НЗД(1001,7655) во обликот $1001x + 7655y$.

**42.** Најди два различни парови цели броеви $x$ и $y$ такви што:
**а)** НЗД$(6,4) = 6x + 4y$; **б)** НЗД$(7,8) = 7x + 8y$

**43.** Ако НЗД$(a,c) = 1$ и НЗД$(b,c) = 1$, тогаш НЗД$(ab,c) = 1$. Докажи!

**44.** Ако НЗД$(a,c) = 1$, тогаш НЗД$(ab,c) \mid b$. Докажи!

**45.** Ако НЗД$(a,b) = 1$, тогаш НЗД$(ac,b) \mid$ НЗД$(c,b)$. Докажи!

**46.** Нека $a$, $b$ и $c$ се природни броеви такви, што НЗД$(a,b,c) = 1$ и $c = \frac{ab}{a-b}$. Докажи дека $a-b$ е квадрат на природен број.

# 7. НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

При воведувањето на поимот за деливост рековме дека ако $a \mid b$, тогаш за бројот $b$ велиме дека е содржател на бројот $a$. Јасно, ако $b$ е содржател на $a$, тогаш и броевите $2b, 3b, 4b, \ldots$ се содржатели на бројот $a$. Така, на пример:

- содржатели на бројот 9 се:

9, 18, 27, **36**, 45, 54, 63, **72**, 81, 90, 99, **108**, 117, 126, ...

- содржатели на бројот 12 се:

12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, 120, 132, 144, ...

Како што можеме да забележиме, броевите 36, 72, 108 ... се заеднички содржатели на броевите 9 и 12. Претходно изнесеното е причина за следната дефиниција.

**Дефиниција 4.** Нека $a, b \in \mathbf{N}$. За бројот $c \in \mathbf{N}$ ќе велиме дека е *заеднички содржател* на $a$ и $b$ ако $c \mid a$ и $c \mid b$.

Од дефиницијата 4 непосредно следува дека за секои $a,b\in\mathbf{N}$, броевите од видот $kab, k\in\mathbf{N}$ се заеднички содржатели на $a$ и $b$. Според тоа, за секои $a$ и $b$ множеството од нивни заеднички содржатели е бесконечно, па затоа истото нема најголем елемент. Природно е да се запрашаме дали меѓу заедничките содржатели на $a$ и $b$ постои најмал содржател. Одговорот на ова прашање е потврден. Навистина, бројот $c_1=ab$ е заеднички содржател на $a$ и $b$. Ако тој не е најмал, тогаш постои природен број $c_2$ таков, што $c_2<c_1$ и $a\,|\,c_2$ и $b\,|\,c_2$. Ако $c_2$ не е најмал меѓу заедничките содржатели на $a$ и $b$, тогаш постои заеднички содржател $c_3$ на $a$ и $b$ таков, што $c_3<c_2$. Бидејќи природните броеви $c_1,c_2,c_3,\ldots$ се намалуваат, по конечен број чекори ќе најдеме најмал природен број $c$ за кој важи $a\,|\,c$ и $b\,|\,c$. Јасно, ова е најмалиот заеднички содржател на $a$ и $b$ и него ќе го означуваме со $c=\text{НЗС}(a,b)$. Да забележиме дека во литературата за најмалиот заеднички содржател на броевите $a$ и $b$ се користи и ознаката $[a,b]$.

Како што видовме, за да го определиме најмалиот заеднички содржател на два броја $a$ и $b$ доволно е последователно да ги испишеме содржателите на едниот и другиот број и потоа меѓу нив да го најдеме најмалиот заеднички содржател, кој сигурно е помал или еднаков на $ab$. Но оваа постапка може да биде долга, па затоа ќе докажеме неколку својства за најмалиот заеднички содржател.

**Теорема 18.** Ако $\text{НЗС}(a,b)=s$ и $S$ е заеднички содржател на $a$ и $b$, тогаш $s\,|\,S$.

**Доказ.** Од теоремата за делење со остаток следува дека постојат $q$ и $r$ такви, што

$$S=sq+r,\quad 0\le r<s.$$

Ако $r\neq 0$, тогаш од $a\,|\,S$, $a\,|\,s$ и од претходното равенство следува дека $a\,|\,r$. Слично $b\,|\,r$, што значи дека најдовме заеднички содржател на $a$ и $b$ кој е помал од $s$. Последното му противречи на фактот дека $\text{НЗС}(a,b)=s$. Од добиената противречност следува $r=0$, т.е. $s\,|\,S$. ♦

**Теорема 19.** Ако $\text{НЗД}(a,b)=1$, тогаш $\text{НЗС}(a,b)=ab$.

**Доказ.** Нека $\text{НЗС}(a,b)=s\le ab$. Тогаш, $s=am$, за некој $m\in\mathbf{N}$. Според тоа, $b\,|\,am$ и бидејќи $\text{НЗД}(a,b)=1$, од теоремата 17 а) следува дека $b\,|\,m$, т.е. $m=bn$, за некој $n\in\mathbf{N}$. Од досега изнесеното имаме

$$s=am=a(bn)=(ab)n$$

и бидејќи $s\le ab$, од последното равенство следува $n=1$, што значи дека $s=ab$, т.е. $\text{НЗС}(a,b)=ab$. ♦

**Пример 24.** Најди: **а)** $\text{НЗС}(20,31)$ и **б)** $\text{НЗС}(n,2n+1)$, $n\in\mathbf{N}$.

***Решение.*** **а)** Имаме

$$\text{НЗД}(20,31)=\text{НЗД}(20,31-20)=\text{НЗД}(20,11)=\text{НЗД}(11,9)=\text{НЗД}(9,2)=1,$$

па затоа од теоремата 19 следува дека $\text{НЗС}(20,31)=20\cdot 31=620$.

**б)** Бидејќи НЗД$(n,2n+1)=1$, за секој $n\in\mathbf{N}$, од теоремата 19 заклучуваме дека НЗС$(n,2n+1)=n(2n+1)$. ♦

**Теорема 20. а)** НЗС$(na,nb)=n\cdot$НЗС$(a,b)$, за секои $n,a,b\in\mathbf{N}$.

**б)** НЗС$(a,b)\cdot$НЗД$(a,b)=ab$, за секои $a,b\in\mathbf{N}$.

**Доказ. а)** Нека НЗС$(a,b)=x$. Значи, $a\mid x$ и $b\mid x$, па затоа $na\mid nx$ и $nb\mid nx$, т.е. $nx$ е заеднички содржател на $na$ и $nb$. Од теоремата 18 следува дека

$$\text{НЗС}(na,nb)\mid nx=n\cdot\text{НЗС}(a,b).$$

Нека НЗС$(na,nb)=s$. Тоа значи дека $na\mid s$, т.е. постои $q\in\mathbf{N}$ таков, што $s=(na)q=n(aq)$, односно $s=ny$, $y=aq$. Јасно, $a\mid y$. Понатаму, $nb\mid s$, па затоа постои $k\in\mathbf{N}$ таков, што $ny=s=(nb)k=n(bk)$, односно $y=bk$. Последното значи $b\mid y$, што заедно со $a\mid y$ повлекува дека $y$ е заеднички содржател на $a$ и $b$. Сега од теоремата 18 следува дека НЗС$(a,b)=x\mid y$, односно $n\cdot$НЗС$(a,b)=nx\mid ny=s=$НЗС$(na,nb)$.

Значи, НЗС$(na,nb)\mid n\cdot$НЗС$(a,b)$ и $n\cdot$НЗС$(a,b)\mid$НЗС$(na,nb)$ па затоа

$$\text{НЗС}(na,nb)=n\cdot\text{НЗС}(a,b).$$

**б)** Нека НЗД$(a,b)=d$ и $m$ и $n$ се такви, што $a=md, b=nd$ и НЗД$(m,n)=1$. Од теоремата 19 и од тврдењето под а) добиваме:

$$ab=(md)(nd)=d\cdot d(mn)=\text{НЗД}(a,b)\cdot[d\cdot\text{НЗС}(m,n)]$$
$$=\text{НЗД}(a,b)\cdot\text{НЗС}(md,nd)=\text{НЗД}(a,b)\cdot\text{НЗС}(a,b).\ ♦$$

**Пример 25. а)** Најди НЗС$(1155,1232)$.

**б)** Стојан има повеќе од 3000 денари, а помалку од 4000 денари. Ако дневно троши или по 150 денари или по 180 денари, по неколку дена му остануваат 30 денари. Колку денари има Стојан?

***Решение.*** **а)** Имаме,

$$\text{НЗД}(1155,1232)=\text{НЗД}(1155,1232-1155)=\text{НЗД}(1155,77)$$

и бидејќи $1155=15\cdot 77$, добиваме дека

$$\text{НЗД}(1155,1232)=\text{НЗД}(1155,77)=77.$$

Сега од теоремата 20 б) следува

$$1155\cdot 1232=\text{НЗД}(1155,1232)\cdot\text{НЗС}(1155,1232)=77\cdot\text{НЗС}(1155,1232),$$

т.е.

$$\text{НЗС}(1155,1232)=1155\cdot 1232:77=18480.$$

**б)** Стојан нека има $x$ денари. Ако троши по 150 денари дневно по неколку дена му остануваат 30 денари, па затоа $150\mid(x-30)$. Слично $180\mid(x-30)$, што значи дека $x-30$ е заеднички содржател на 150 и 180. Имаме, НЗД$(150,180)=30$, па ако ја искористиме теоремата 20 б) добиваме дека

$$150 \cdot 180 = \text{НЗД}(150,180) \cdot \text{НЗС}(150,180) = 30 \cdot \text{НЗС}(150,180)$$

што значи $\text{НЗС}(150,180) = 900$. Но, $x - 30$ е заеднички содржател на 150 и 180, па затоа од теоремата 18 следува дека $900 \mid (x-30)$, односно $x - 30 = 900k, k \in \mathbf{N}$. Понатаму, од условот на задачата имаме $3000 < x < 4000$, што значи $3000 < 900k + 30 < 4000$, од каде што наоѓаме $k = 4$. Конечно, Стојан имал $900 \cdot 4 + 30 = 3630$ денари. ♦

**Пример 26.** Најди ги сите природни броеви $x$ и $y$, за кои

$$\text{НЗД}(x,y) = 6 \text{ и } \text{НЗС}(x,y) = 36.$$

***Решение.*** Од $\text{НЗД}(x,y) = 6$ имаме $x = 6m, y = 6n$ и $\text{НЗД}(n,m) = 1$. Понатаму, од теоремите 19 и 20 а) имаме

$$36 = \text{НЗС}(x,y) = \text{НЗС}(6m,6n) = 6 \cdot \text{НЗС}(m,n) = 6mn \text{ т.е. } mn = 6.$$

Бидејќи $\text{НЗД}(n,m) = 1$, од последната равенка наоѓаме

$$(m,n) \in \{(1,6),(6,1),(2,3),(3,2)\},$$

па затоа

$$(x,y) \in \{(6,36),(36,6),(12,18),(18,12)\}. \ ♦$$

Во претходните разгледувања се задржавме на најмалиот заеднички содржател на два природни броја $a$ и $b$. Аналогно се дефинира и најмалиот заеднички содржател на конечно многу природни броеви $a_1, a_2, ..., a_k$. Притоа, тој може да се определи на следниов начин:

- најпрво определуваме $\text{НЗС}(a_1, a_2) = s_1$,
- потоа определуваме $\text{НЗС}(s_1, a_3) = s_2$ итн.

Последниот елемент $s_{k-1}$ во низата $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$ е најмалиот заеднички содржател на броевите $a_1, a_2, ..., a_k$.

**Пример 27.** Најди го најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3, поделен со 5 дава остаток 4 и поделен со 6 дава остаток 5.

***Решение.*** Ако на бараниот број му додадеме 1, тогаш новодобиениот број се дели со 2, 3, 4, 5 и 6. Бидејќи се бара најмалиот можен број со даденото својство, добиваме дека новодобиениот број е $\text{НЗС}(2,3,4,5,6) = 60$. Според тоа, бараниот број е $60 - 1 = 59$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**47.** Пресметај: **а)** $\text{НЗС}(152,285)$; **б)** $\text{НЗС}(10n+9, n+1)$

**48.** Најди ги природните броеви $x$ и $y$ ако:

**а)** $\text{НЗД}(x,y) = 4$ и $\text{НЗС}(x,y) = 96$; **б)** $xy = 20$ и $\text{НЗС}(x,y) = 10$.

**49.** Пресметај:

**а)** $\text{НЗД}(\text{НЗД}(a,b), \text{НЗС}(a,b))$; **б)** $\text{НЗД}(ab, \text{НЗС}(a,b))$.

**50.** Најди ги сите природни трицифрени броеви кои при делење со 7 даваат остаток 2, при делење со 9 даваат остаток 4 и при делење со 12 даваат остаток 7.

**51.** Никола има толку денари да може да ги подели на делови така, што секој дел да има или 18, или 24, или 30 денари и секогаш да му остане по еден денар. Најди колку најмалку пари треба да има Никола.

**52.** На бројот 1972 допиши му оддесно четири цифри така што добиениот осумцифрен број да биде делив со 5, 7 и 72.

**53.** Методиј ги запишал по ред природните броеви од 1 до 1000. Прво ги прецртал броевите кои се деливи со 4 и броевите кои се деливи со 6, а потоа броевите кои се деливи со 10. Колку броеви останале непрецртани?

## 8. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

Да се потсетиме дека секој природен број има барем еден делител. Поточно, бројот 1 има само еден делител, а секој друг природен број има два или повеќе делители. Така, на пример, броевите 2, 3, 7 и 13 имаат точно два природни делители, а броевите 4, 6, 10, 15 и 20 имаат повеќе од два природни делители. Претходните размислувања укажуваат на можноста во множеството природни броеви **N** да извршиме поделба на дисјунктни подмножества според бројот на делителите и да ги проучуваме овие подмножества. Во таа смисла ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 5.** За природниот број $p$ ќе велиме дека е *прост* ако $p$ има точно два природни делители, т.е. единствени делители на $p$ се 1 и $p$.

Природниот број $m$ кој има повеќе од два природни делители го нарекуваме *сложен број*.

Значи, според бројот на делителите, разликуваме три вида на природни броеви: броеви со еден делител (тоа е бројот 1), броеви со два делители (прости броеви) и броеви со повеќе од два делители (сложени броеви).

Во врска со простите и сложените броеви од посебен интерес се прашањата:

- Колку прости броеви има, а колку сложени?
- Како да ги одредиме сите прости броеви помали од даден број?

Што се однесува до сложените броеви, одговорот на прашањето: "*Колку сложени броеви има*?" е познат. Имено, постојат бесконечно многу сложени броеви, за што доволно е да ги разгледаме броевите од видот $6k, k \geq 1$. Навистина, сите овие броеви се деливи со 1, 2, 3 и 6, што значи дека тие се сложени, а нив ги има бесконечно многу. Малку потешко е да се одговори на прашањето колку прости броеви има. На ова прашање ќе се навратиме подоцна, а сега ќе докажеме две тврдења со чија помош можеме да ги распознаваме простите и сложените броеви.

**Теорема 21.** Секој природен број $n$, поголем од 1, е делив барем со еден прост број.

**Доказ.** Ако природниот број $n$ е прост, тогаш тврдењето е докажано. Имено, тој е делив со самиот себе, што значи барем со еден прост број.

Да претпоставиме дека $n$ е произволен сложен број. Тогаш, тој мора да има барем еден делител различен од 1 и $n$, бидејќи во спротивно ќе биде прост број. Нека најмалиот од сите делители на $n$, различни од 1 и $n$, го означиме со $p$. Ќе докажеме дека $p$ е прост број. Навистина, ако $p$ е сложен број, тогаш тој има делител $q$, $1 < q < p$. Но, тогаш бројот $q$ е делител на $n$, помал од $p$, што му противречи на изборот на $p$. Од добиената противречност следува дека $p$ е прост број. Конечно, сложениот број $n$ е делив со простиот број $p$, што значи барем со еден прост број. ♦

Според дефиницијата 5 прости броеви се, на пример: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и 37. Да забележиме дека единствен парен прост број е бројот 2. Имено, секој парен број поголем од 2 има најмалку три делители, и тоа 1, 2 и самиот број, значи е сложен број.

Според теоремата 21, за да утврдиме дали еден природен број, поголем од 1, е прост или сложен, доволно е да провериме дали тој е делив со последователните прости броеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... Природно е да се запрашаме дали треба да делиме со сите прости броеви кои се помали од разгледуваниот број. Одговорот на ова прашање го дава следната теорема.

**Теорема 22.** Ако природниот број $p, p > 1$ не се дели со простите броеви чии квадрати се помали од $p$, тогаш $p$ е прост број.

**Доказ.** Нека $p$ е сложен број. Постои природен број $a \neq p$ и 1 таков, што $a \mid p$. Значи, $p = ab$ каде што $a$ и $b$ се природни броеви помали од $p$. Нека $a \leq b$. Тогаш, $a^2 \leq ab = p$.

Можни се два случаи: $a$ е прост број или $a$ не е прост број.

Ако $a$ е прост број, тогаш $p$ се дели со прост број чиј квадрат е помал од $p$ и во овој случај тврдењето е докажано.

Ако $a$ не е прост број, тогаш постои прост број $q < a$ таков, што $q \mid a$, па затоа $q \mid p$. Притоа $q^2 < a^2 \leq p$. Според тоа, $p$ се дели со прост број чиј квадрат е помал од $p$, т.е. и во овој случај тврдењето е докажано. ♦

Примената на претходната теорема ќе ја покажеме на следниот пример.

**Пример 28.** Испитај го видот на бројот: **а)** 323 и **б)** 503.

***Решение.*** **а)** Очигледно, според признаците за деливост, бројот 323 не е делив ни со 2, ни со 3, ни со 5. Со непосредно делење се убедуваме дека бројот 323 не е делив ни со 7, ни со 11, ни со 13, но е делив со 17, бидејќи $323 = 17 \cdot 19$. Според тоа, бројот 323 е сложен и неговите делители се 1, 17, 19 и 323.

**б)** Лесно заклучуваме дека бројот 523 не е делив ни со 2, ни со 3, ни со 5, а со непосредно делење заклучуваме дека не е делив ни со 7, 11, 13, 17 и 19. Следниот прост број е 23, но бидејќи $23^2 = 529 > 503$, од теоремата 22 следува дека бројот 503 е прост број. ♦

Од решените примери гледаме дека постапката за одредување на видот на еден природен број бара до толку поголем труд, до колку е бројот поголем. Затоа се изготвуваат таблици на прости броеви. Едноставна постапка за изготвување на таблиците на прости броеви предложил Ератостен (III век пред н.е.) и според него оваа постапка е наречена Ератостеново сито. Таа се состои во следното.

Ги испишуваме сите природни броеви помали или еднакви на бројот $N$. Најпрво ја прецртуваме единицата. Бидејќи првиот прост број е 2, ги прецртуваме сите природни броеви деливи со 2 и поголеми од 2 (тие се сложени). Следниот непрецртан број, кој е прост е бројот 3 и ги прецртуваме сите природни броеви деливи со 3 и поголеми од 3. Следниот непрецртан број е 5. Тој е прост, бидејќи ако не е ќе биде прецртан. Повторувајќи ја постапката јасно е дека можат да се определат сите прости броеви помали од даден природен број $N$. Според теоремата 22 доволно е проверката да ја направиме со прецртување на содржателите на простите броеви кои се помали или еднакви на $\sqrt{N}$.

**Пример 29.** Да се најдат простите броеви кои се помали или еднакви на 66.

***Решение.*** Имаме

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.**

Значи, прости броеви помали од 66 се:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 и 61. ♦

Како што гледаме, простите броеви се многу неправилно распоредени и единствен парен прост број е бројот 2. Меѓутоа, сепак во оваа неправилност на распоредот на простите броеви постојат некои класи на броеви кои ги содржат сите прости броеви поголеми од даден број, што може да се види од следниот пример.

**Пример 30.** Докажи дека секој прост број поголем од 3 е во облик $6k+1$ или $6k-1$, $k \in \mathbf{N}$.

**Решение.** Од теоремата за делење со остаток следува дека секој природен број може да се запише во еден од следниве облици: $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$, $k \in \mathbf{N}_0$. Јасно, $6 \mid 6k$, $2 \mid (6k+2)$, $3 \mid (6k+3)$ и $2 \mid (6k+4)$, па затоа овие броеви се сложени. Според тоа, ако $p$, $p>3$ е прост број, тогаш $p=6k+1$ или $p=6k-1$, $k \in \mathbf{N}$.

Да забележиме, дека обратното тврдење не важи. Навистина, $25=6\cdot 4+1$ и $35=6\cdot 6-1$ се сложени броеви во облик $6k+1$ и $6k-1$. ♦

Да се вратиме на прашањето колку прости броеви има. Како што рековме, одговорот на ова прашање го дал Евклид со следната теорема.

**Теорема 23.** Постојат бесконечно многу прости броеви.

**Доказ.** Да претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви и да ги нумерираме по растечки редослед

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5, \ldots, p_n=p\ . \qquad (1)$$

Да го разгледаме бројот

$$N = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$$

Според тоа, $N = p_i N_i + 1$, за $i = 1,2,\ldots,n$ од што следува дека ниеден од простите броеви во (1) не е делител на $N$. Значи, или бројот $N$ е прост број или има прост делител кој не е меѓу броевите во (1). И во двата случаи заклучуваме дека постои прост број кој е поголем од најголемиот претпоставен прост број $p$, од што следува дека постојат бесконечно многу прости броеви. ♦

Да разгледаме неколку елементарни задачи поврзани со простите броеви.

**Пример 31.** Ако $p$ е прост број, $p > 3$, тогаш $24 \mid (p^2 - 1)$. Докажи!

**Решение.** Ако $p > 3$, тогаш $p = 6k \pm 1$ и ако искористиме дека $k(k \pm 1) = 2m$, добиваме

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 24k^2 + 12k^2 \pm 12k$$
$$= 24k^2 + 12k(k \pm 1) = 24k^2 + 12 \cdot 2m = 24(k^2 + m)$$

што значи $24 \mid (p^2 - 1)$. ♦

**Пример 32.** За произволен природен број $k$ постојат $k$ последователни сложени броеви. Докажи!

**Решение.** Да ги разгледаме броевите

$$a_1 = (k+1)k(k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 + 2$$
$$a_2 = (k+1)k(k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 + 3$$
$$a_3 = (k+1)k(k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 + 4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k-1} = (k+1)k(k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 + k$$
$$a_k = (k+1)k(k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 + (k+1)$$

Јасно, ова се $k$ последователни природни броеви и сите се сложени:

$$2 \mid a_1, 3 \mid a_2, 4 \mid a_3, \ldots, k \mid a_{k-1}, (k+1) \mid a_k. \ ♦$$

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**54.** Докажи дека:

**а)** збирот на кои било пет последователни природни броеви не може да биде прост број.
**б)** при делење на произволен прост број $p$ со 30, остатокот е или прост број или бројот 1.

**55.** Ако броевите $p$, $p+5$ и $p+9$ се прости, тогаш $p = 2$. Докажи!

**56.** Докажи дека:

**а)** за секој $n > 1$ секој број од видот $n^4 + 4$ е сложен;

**б)** бројот $2^{10}+5^{12}$ е сложен.

**57.** За кои природни броеви $p$, броевите $p$ и $3p^2+1$ се прости?

**58.** За кои природни броеви $p$, бројот $p^4+p^2+1$ е прост?

**59.** Ако $p$ е прост број, тогаш бројот $p^{2002}-1$ е сложен. Докажи!

**60.** Докажи дека ако еден од броевите $2^n-1$ и $2^n+1$, каде што $n>2$ е прост број, тогаш вториот број е сложен.

**61.** Докажи дека ако $p$ и $8p^2+1$ се прости броеви, тогаш и бројот $8p^2-1$ е прост.

**62.** Најди ги сите прости броеви $p$ такви, што $2p^2+1=k^5$ за некој $k\in\mathbf{N}$.

**63.** Најди прости броеви $p, q$ и $r$ за кои $p=q^3-r^3$.

**64.** За кои прости броеви $p$ се прости и броевите:

**а)** $p+2$ и $p^2+2$; **б)** $p+10$ и $p+20$; **в)** $p+10$ и $p+14$.

# 9. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АРИТМЕТИКАТА

Честопати одделни аритметички задачи можеме едноставно да ги решиме ако даден природен број го разложиме на производ од прости множители. Притоа, се поставува прашањето дали секој природен број може да се претстави како производ од прости броеви. Се покажува дека секој сложен број е производ од прости броеви. За мали броеви тоа лесно се проверува: $4=2\cdot 2, 12=2\cdot 2\cdot 3$ итн. Пред да го докажеме ова тврдење, кое е познато како *основна теорема на аритметиката,* ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 24.** Ако $p$ е прост број и $p\,|\,ab$, тогаш $p\,|\,a$ или $p\,|\,b$.

**Доказ.** Да претпоставиме дека $p\nmid a$. Тогаш $a$ и $p$ се заемно прости броеви. Но, $p\,|\,ab$, па од теоремата 17 а) следува дека $p\,|\,b$.

Аналогно се докажува дека ако $p\nmid b$, тогаш $p\,|\,a$. ♦

**Теорема 25 (основна теорема на аритметиката).** Секој природен број $N$ на единствен начин може да се запише како производ на прости множители, (редоследот на множителите не е битен).

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Најпрво ќе докажеме дека природниот број $N$ може да се запише како производ на прости множители.

Ако $N$ е прост број, тогаш $N=p$ и теоремата е докажана.

Да претпоставиме дека $N$ не е прост број. Тогаш $N=n_1n_2$. Ако $n_1$ и $n_2$ се прости броеви, тогаш доказот е завршен. Ако $n_1$ или $n_2$ не е прост број, тогаш постапката ја повторуваме и по конечен број чекори (според теоремата 22 сложен број е делив само со простите броеви чии квадрати се помали или еднакви на самиот број) го добиваме претставувањето

$$N=p_1p_2\ldots p_n\text{, каде што } p_i,\ i=1,2,\ldots,n \text{ се прости броеви.}$$

Да ја докажеме единственоста на претставувањето.

Да претпоставиме дека постојат две претставувања:

$$N = p_1 p_2 \ldots p_n = q_1 q_2 \ldots q_k \,,\ n \le k \,.$$

Тогаш $p_1 \mid q_1 q_2 \ldots q_k$ и бидејќи два прости броеви се или меѓусебно еднакви или се заемно прости, од теоремата 25 следува дека $p_1 = q_j$ за некој $j = 1,2,\ldots,k$. Повторувајќи ја постапката за $p_2,\ldots,p_n$ добиваме дека

$$N = p_1 p_2 \ldots p_n = (p_1 p_2 \ldots p_n) q_{n+1} \ldots q_k \,,$$

од што следува $q_{n+1} = \ldots = q_k = 1$, па значи $n = k$ и претставувањето е единствено со точност до редоследот на множителите. ♦

**Пример 33.** Запиши ги броевите 6930 и 32340 како производ на прости множители.

***Решение.*** Имаме

$$\begin{array}{r||l} 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1115 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{r||l} 32340 & 2 \\ 16170 & 2 \\ 8085 & 3 \\ 2695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

од што добиваме $6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. ♦

**Пример 34.** Најди ги сите природни броеви $n$ за кои

$$n(n+1)(2n+1) = 84 \,.$$

***Решение.*** Бројот 84 го разложуваме на прости множители и наоѓаме $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, односно $84 = 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 7 = 3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)$, од што следува $n = 3$. ♦

Како што видовме во претходните два примери, при разложувањето на даден број на прости множители, некои од множителите може повеќекратно да се повторуваат. Ако во разложувањето (1) некои од множителите се еднакви меѓу себе, на пример $p_1$ се јавува $a_1$ пати, $p_2$ се јавува $a_2$ пати итн., $p_k$ се јавува $a_k$ пати, тогаш за $n$ добиваме

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k} \,. \tag{2}$$

Ваквиот запис на бројот $n$ го нарекуваме *каноничен запис*. Како што видовме во примерот 34, каноничните записи на броевите 6930 и 32340 се

$$6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \text{ и } 32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \,.$$

Да забележиме дека со помош на каноничниот запис можеме да дадеме едноставен критериум кога еден природен број е полн квадрат. Имено, од теоремата 24 и од својствата на степените, следува дека:

*Природниот број $n$ е полн квадрат ако степеновите показатели $a_i$, $i=1,2,...,k$ во каноничниот запис (2) се парни броеви.*

**Пример 35.** Со кој најмал природен број $k$ треба да се помножи бројот 720 за да добиеме точен квадрат.

***Решение.*** Го разложуваме бројот 720 на прости множители:

$$720 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 .$$

Простите броеви 2 и 3 имаат парни степенови показатели, а 5 има непарен степенов показател. Следствено, за да добиеме точен квадрат, треба бројот 720 да го помножиме со 5. Навистина

$$720 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2 .$$

Значи бараниот број е $k = 5$. ♦

Со помош на каноничниот запис на дадени природни броеви $n$ и $m$ лесно се определуваат најголемиот заеднички делител и најмалиот заеднички содржател на $n$ и $m$. Имено, ако

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k} \text{ и } m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_k^{b_k}$$

(некои од броевите $a_i$ и $b_j$ можат да бидат еднакви на нула), тогаш

$$\text{НЗД}(m,n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} ... p_k^{c_k} \text{, каде што } c_i = \min\{a_i, b_i\}, i = 1,2,...,k$$

и

$$\text{НЗС}(m,n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} ... p_k^{d_k} \text{, каде што } d_i = \max\{a_i, b_i\}, i = 1,2,...,k .$$

Така, на пример, ако се искористат каноничните записи на броевите $6930 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $32340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$, со помош на претходните формули наоѓаме

$$\text{НЗД}(6930,32340) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 \quad \text{и} \quad \text{НЗС}(6930,32340) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 97020 .$$

**Пример 36.** Колку делители има бројот:

а) $3^6$, б) $p^a$, каде што $p$ е прост број и $a \in \mathbf{N}$,

в) 144 и г) $p^a q^b$, каде што $p, q$ се прости броеви и $a, b \in \mathbf{N}$.

***Решение.*** **а)** Делители на бројот $3^6$ се: $1 = 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ и $3^6$. Нив ги има вкупно $7 = 1 + 6$.

**б)** Делители на бројот $p^a$ се: $1, p, p^2, p^3, ..., p^{a-2}, p^{a-1}$ и $p^a$. Нив ги има вкупно $a+1$, т.е. еден повеќе од степеновиот показател на бројот $p^a$.

**в)** Делители на бројот 144 се: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144. Нив ги има вкупно 15. Забележуваме дека $144 = 2^4 \cdot 3^2$ и за бројот на делителите на бројот 144 важи $15 = 5 \cdot 3 = (4+1) \cdot (2+1)$. До истиот резултат можеме да дојдеме ако делителите на бројот 144 ги запишеме со помош на степените на броевите 2 и 3. Имаме:

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 3, 3\cdot 2, 3\cdot 2^2, 3\cdot 2^3, 3\cdot 2^4, 3^2, 3^2\cdot 2, 3^2\cdot 2^2, 3^2\cdot 2^3, 3^2\cdot 2^4.$$

**г)** Делители на бројот $p^a q^b$ се:

$$\begin{array}{l}
1, p, p^2, p^3, \ldots, p^{a-2}, p^{a-1}, p^a \\
q, qp, qp^2, qp^3, \ldots, qp^{a-2}, qp^{a-1}, qp^a \\
q^2, q^2p, q^2p^2, q^2p^3, \ldots, q^2p^{a-2}, q^2p^{a-1}, q^2p^a \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q^{b-1}, q^{b-1}p, q^{b-1}p^2, q^{b-1}p^3, \ldots, q^{b-1}p^{a-2}, q^{b-1}p^{a-1}, q^{b-1}p^a \\
q^b, q^bp, q^bp^2, q^bp^3, \ldots, q^bp^{a-2}, q^bp^{a-1}, q^bp^a
\end{array}$$

Во секој од погорните $b+1$ редови имаме $a+1$ различни делители на бројот. Од друга страна, тука се содржани сите делители на бројот $p^a q^b$ (зошто?), па заклучуваме дека бројот на делителите на $p^a q^b$ е еднаков на $(a+1)(b+1)$. ♦

Во претходниот пример го разгледавме бројот на сите делители на неколку природни броеви. За даден природен број $n$ со $\tau(n)$ (читај "тау од $n$") го означуваме бројот на делителите на $n$. Така, на пример, имаме

$$\tau(1)=1, \tau(2)=2, \tau(3)=2, \tau(4)=3, \tau(5)=2, \tau(6)=4, \tau(7)=2, \tau(8)=4, \tau(9)=3,$$
$$\tau(10)=4, \tau(11)=2, \tau(12)=6, \tau(13)=2, \tau(14)=4, \tau(15)=4, \tau(16)=5, \tau(17)=2$$

итн. Во примерот 37 б) докажавме дека ако $p$ е прост број, тогаш $\tau(p^a)=a+1$ за секој $a\in\mathbf{N}$, а во примерот 37 г) докажавме дека ако $p,q$ се прости броеви, тогаш $\tau(p^a q^b)=(a+1)(b+1)$ за секои $a,b\in\mathbf{N}$. Може да се докаже следново тврдење.

**Теорема 26. а)** Ако НЗД$(m,n)=1$, тогаш $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$.

**б)** Ако каноничниот запис на бројот $n$ е $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$, тогаш $\tau(n)=(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$.

**Пример 37.** Колку делители има бројот 1200?

***Решение.*** Го разложуваме бројот 1200 на прости множители, т.е. го запишуваме во каноничен вид:

$$1200=12\cdot 10\cdot 10=4\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5=2^4\cdot 3^1\cdot 5^2,$$

па од теоремата 26 имаме $\tau(1200)=(4+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1)=5\cdot 2\cdot 3=30$. Значи, бројот 1200 има вкупно 30 делители. ♦

**Пример 38.** Докажи дека $\tau(n)$ е непарен број ако и само ако $n$ е полн квадрат.

***Решение.*** На секој делител $d$ на бројот $n$ кој е помал од $\sqrt{n}$ му соодветствува делител $\frac{n}{d}$ кој е поголем од $\sqrt{n}$ и обратно. Значи, за секој број $n$, бројот на неговите

делители кои се различни од $\sqrt{n}$ е парен број. Според тоа, ако бројот на делителите на $n$ е непарен број, тогаш $\sqrt{n}$ е делител и обратно, ако $\sqrt{n}$ е делител, тогаш бројот на делителите на $n$ е непарен број. ♦

### ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**65.** Разложи ги на множители броевите:
**а)** 6600; **б)** 2618.

**66.** Со кој најмал природен број $n$ треба да се помножи бројот 5400 за да се добие точен квадрат?

**67.** Најди ги сите природни броеви чиј производ на цифри е еднаков на
**а)** 234; **б)** 105.

**68.** Користејќи го каноничниот запис на природните броеви, најди НЗД и НЗС за броевите $a$ и $b$, ако:
**а)** $a = 2520$, $b = 39600$; **б)** $a = 6600, b = 2618$.

**69.** Колку делители има бројот:
**а)** 396000; **б)** 50400.

**70.** Најди го најмалиот природен број кој има точно 6 делители.

## 10. ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА РАВЕНКА

Во основното образование се запозна со линеарните равенки и научи истите да ги решаваш. Притоа решенијата на овие равенки ги баравме во множеството на реалните броеви $\mathbf{R}$. Сега ќе се запознаеме со таканаречените Диофантови равенки, кои името го добиле според античкиот математичар Диофант, кој живеел во III век пред нашата ера во градот Александрија.

**Дефиниција 6.** Нека $a, b, c \in \mathbf{Z}$ и $ab \neq 0$. Линеарната равенка во облик

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

чии решение $(x, y)$ се подредени парови цели броеви ја нарекуваме *линеарна Диофантова равенка со две непознати.*

Токму барањето решенијата $x$ и $y$ на равенката (1) да се целобројни е клучниот проблем при решавањето на овие равенки. Така, на пример, очигледно е дека равенката $x + y = 11$ има бесконечно многу решенија. Меѓутоа, равенката $6x + 15y = 17$ нема целобројни решенија. Навистина, за секои цели броеви $x$ и $y$ левата страна на последната равенка е делива со 3 и бидејќи $3 \nmid 17$ заклучуваме дека оваа равенка нема целобројни решенија.

Во врска со прашањето кога една линеарна Диофантова равенка со две непознати има решение ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 27.** Линеарната Диофантова равенка (1) има решение ако и само ако $d \mid c$, каде што $d = \text{НЗД}(a,b)$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $d = \text{НЗД}(a,b)$. Да претпоставиме дека $(x_0, y_0)$ е решение на равенката (1). Тогаш $ax_0 + by_0 = c$ и бидејќи $d \mid a$ и $d \mid b$, добиваме $d \mid c$.

Обратно, да претпоставиме дека $d \mid c$. Тогаш постои цел број $k$ таков, што $c = kd$. Од друга страна, бидејќи $d = \text{НЗД}(a,b)$ постојат цели броеви $x'$ и $y'$ такви, што $ax'+by'=d$. Ако последното равенство го помножиме со $k$, добиваме

$$akx'+bky'=dk$$

т.е.

$$a(kx')+b(ky')=c\,.$$

Според тоа, подредениот пар $(x_0, y_0) = (kx', ky')$ е решение на равенката (1). ♦

Очигледно, доказот на теоремата 27 и Евклидовиот алгоритам го даваат и методот за решавање на линеарната Диофантова равенка со две непознати.

**Пример 39.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$16x - 34y = 7\,.$$

***Решение.*** Бидејќи $\text{НЗД}(16,34) = 2 \nmid 7$, од теоремата 27 следува дека разгледуваната равенка нема целобројни решенија. Навистина, за секои цели броеви $x$ и $y$ левата страна $16x - 34y = 2(8x - 17y)$ е делива со 2, а десната страна не е делива со 2, $2 \nmid 7$. ♦

**Пример 40.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$13x + 32y = 5\,.$$

***Решение.*** Имаме $a = 13$ и $b = 32$. Бидејќи $\text{НЗД}(13,32) = 1$, од теоремата 27 следува дека равенката има решение. Сега, користејќи го Евклидовиот алгоритам, имаме

$$32 = 2 \cdot 13 + 6$$
$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$
$$6 = 6 \cdot 1$$

па затоа $1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2 \cdot (32 - 2 \cdot 13) = 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32$ т.е. $5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32 = 1$. Ако последното равенство го помножиме со 5, добиваме

$$13 \cdot 25 + 32 \cdot (-10) = 5$$

што значи дека едно решение на равенката $13x + 32y = 5$ е подредениот пар $(25,-10)$. Лесно се проверува дека решенија на равенката се и подредените парови

$$(25 + 32t, -10 - 13t)\text{, за } t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\,.\ ♦$$

Во претходната теорема одговоривме кога линеарна диофантова равенка со две непознати има решение, а во пример 41 покажавме како се наоѓа едно нејзино решение. Во следната теорема ќе ги окарактеризираме решенијата на равенката (1) во случај кога истите постојат.

**Теорема 28.** Ако $d = \text{НЗД}(a,b)$, $d \mid c$ и $(x_0, y_0)$ е едно решение на Диофантовата равенка $ax + by = c$, тогаш сите нејзини решенија се дадени со:

$$x = x_0 + \tfrac{b}{d}t \text{ и } y = y_0 - \tfrac{a}{d}t \text{, каде што } t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \qquad (2)$$

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Ако $(x_0, y_0)$ е решение на равенката $ax + by = c$, тогаш со замена $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ и $y = y_0 - \frac{a}{d}t$ добиваме

$$ax + by = a(x_0 + \tfrac{b}{d}t) + b(y_0 - \tfrac{a}{d}t) = ax_0 + by_0 = c \text{, за секој } t = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots$$

т.е. со (2) се дадени решенија на равенката $ax + by = c$.

Ќе докажеме дека секое решение на равенката $ax + by = c$ е во облик (2). Ако $(x, y)$ е произволно решение на $ax + by = c$, тогаш последователно добиваме

$$ax + by = ax_0 + by_0 ,$$

$$a(x - x_0) = b(y - y_0) ,$$

$$\tfrac{a}{d}(x - x_0) = \tfrac{b}{d}(y - y_0) .$$

Од $d = \text{НЗД}(a,b)$ следува $\text{НЗД}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$, па затоа $\frac{a}{d} \mid (y - y_0)$ и $\frac{b}{d} \mid (x - x_0)$, т.е. $x - x_0 = \frac{b}{d}t$ и $y - y_0 = \frac{a}{d}t$, каде што $t$ е цел број. Според тоа, решението $(x, y)$ е во облик (2). ♦

**Пример 41.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката $69x + 111y = 9000$.

***Решение.*** Бидејќи $\text{НЗД}(69,111) = 3$, дадената равенка ја делиме со 3 и ја добиваме еквивалентната равенка $23x + 37y = 3000$. Користејќи го Евклидовиот алгоритам наоѓаме $23 \cdot (-8) + 37 \cdot 5 = 1$. Последното равенство го множиме со 3000 и добиваме

$$23 \cdot (-24000) + 37 \cdot 15000 = 3000 .$$

Конечно, од претходната теорема следува дека сите решенија на Диофантовата равенка $69x + 111y = 9000$ се дадени со

$$x = -24000 + 37t, \quad y = 15000 - 37t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \ ♦$$

Во претходниот дел видовме кога линеарната Диофантова равенка со две непознати има решение и дадовме постапка за нејзино решавање. Овде ќе презентираме уште еден метод за решавање на ваков тип равенка. Овој метод му припаѓа на швајцарскиот математичар Леонард Ојлер (1707-1783 год.) и затоа е наречен *Ојлеров метод*. Ојлеровиот метод ќе го објасниме на следниот пример.

**Пример 42.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$738x + 621y = 45 .$$

***Решение.*** Нека $(x, y)$ е решение на дадената равенка. Бидејќи $621 < 725$, го изразуваме $y$ преку $x$. Ако ги искористиме равенствата $738 = 621 + 117$ и $45 = 0 \cdot 621 + 45$, добиваме

$$y=\frac{-738x+45}{621}=-x+\frac{-117x+45}{621}.$$

Понатаму, бидејќи $x$ и $y$ се цели броеви добиваме дека и $\frac{-117x+45}{621}$ треба да биде цел број, односно $\frac{-117x+45}{621}=t$, од што ја наоѓаме Диофантовата равенка $621t=-117x+45$, која има помали коефициенти од почетната равенка. Ја повторуваме постапката и го изразуваме $x$ со помош на $t$. Добиваме

$$x=\frac{-621t+45}{117}=-5t+\frac{-36t+45}{117},$$

односно $x=-5t+u$, каде што $u=\frac{-36t+45}{117}$. Ја повторуваме постапката и го изразуваме $t$ со помош на $u$. Имаме

$$t=\frac{-117u+45}{36}=-3u+1+\frac{-9u+9}{36}=-3u+1+v,$$

каде што $v=\frac{-9u+9}{36}$. Од последното равенство добиваме $u=-4v+1$, $v\in\mathbf{Z}$. Ако сега последователно се вратиме наназад добиваме:

$$\begin{aligned}
t&=-3u+1+v=-3(-4v+1)+1+v=13v-2\\
x&=-5t+u=-5(13v-2)+(-4v+1)=-69v+11\\
y&=-x+t=-(-69v+11)+(13v-2)=82v-13,\quad v\in\mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Всушност, со последните две равенства се дадени сите решенија $(x,y)$ на равенката $738x+621y=45$. ♦

**Пример 43.** Илија требало да реши 73 задачи за 19 дена. Првите 11 дена тој решавал еднаков број задачи секој ден, а останатите 8 дена повторно решавал еднаков број задачи. Колку задачи решавал Илија секој ден?

**Решение.** Нека бројот на задачите кои ги решавал Илија во секој од првите 11 дена го означиме со $x$, а бројот на задачите, кои ги решавал во секој од преостанатите 8 дена со $y$. Од условот на задачата имаме $11x+8y=73$. Бидејќи НЗД$(8,11)=1$, заклучуваме дека последната равенка има решение во множеството на целите броеви.

Ако го искористиме методот на Ојлер, за решението на равенката наоѓаме

$$x=3-8k,\quad y=5+11k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Од условот на задачата следува дека $x,y\in\mathbf{N}$, а тоа е можно само за $k=0$. Конечно, $x=3, y=5$ е решение на задачата, што значи дека Илија првите 11 дена решавал по 3, а вторите 8 дена по 5 задачи дневно. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**71.** Која од наведените Диофантови равенки има решение:
**а)** $3x+7y=2002$; **б)** $30x+25y=174$; **в)** $3x+15y=1234$.

**72.** Реши ги Диофантовите равенки:
**а)** $48x+7y=5$; **б)** $11x+30y=31$; **в)** $21x-12y=72$.

**73.** Продавачот Арсо треба да наполни 99 кг брашно во кеси од по 2, 3 и 5 кг. По колку кеси од секоја тежина ќе наполни Арсо, ако вкупно наполнил 22 кеси?

**74.** Пекарот Теодор треба да направи 100 векни леб тешки 5, 3 и 0,5 кг. Колку од кои векни леб треба да направи Теодор ако нивната вкупна тежина е 100 кг.

**75.** Збирот на цифрите на бројот $X$ е $Y$, а збирот на цифрите на бројот $Y$ е $Z$. Ако $X+Y+Z=60$, најди го бројот $X$.

# 11. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА НЕЛИНЕАРНИ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

Диофантовите равенки се еден од најбогатите и најразновидните делови на теоријата на броеви. Веќе научивме да ги наоѓаме решенијата на линеарна Диофантова равенка со две непознати. Меѓутоа, решавањето на нелинеарните Диофантови равенки не е така едноставно, па затоа не треба да не́ чуди што за да се докаже дека Диофантовата равенката $x^n+y^n=z^n$, $n>2$, која ја поставил францускиот математичар Пјер Ферма, нема решение во множеството природни броеви, биле потребни повеќе од двесте години.

Што се однесува до решавањето на нелинеарните Диофантови равенки, треба да споменеме дека не постојат универзални алгоритми, но сепак да споменеме дека некои елементарни, но доста важни постапки даваат решение на голем број нелинеарни Диофантови равенки. Овие постапки најчесто се засноваат на следниве идеи:

- разложување на множители,
- дискусија на количник,
- дискусија на последната цифра и
- разгледување на остатоци при делење со даден број.

**Пример 44.** Во множеството на целите броеви реши ја Диофантовата равенка

$$x^2+y^2+z^2-2z+4y-6z=-11.$$

***Решение.*** Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3.$$

Последната равенка во множеството на целите броеви има решение ако секој од квадратите е еднаков на 1, па затоа сите тројки решенија ги добиваме со комбинирање на решенијата

$$x-1=1,\quad y+2=1,\quad z-3=1,\quad x-1=-1,\quad y+2=-1,\quad z-3=-1.$$

Според тоа, решенија се

$$(x,y,z)\in\{(0,-1,2);(0,-1,4);(0,3,2);(0,3,4);(2,-1,2);(2,-1,4);(2,3,2);(2,3,4)\}.\ \blacklozenge$$

**Пример 45.** Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки

**а)** $x^2-4y^2=17$, **б)** $xy-4x-2y+5=0$

***Решение.*** **а)** Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$(x-2y)(x+2y)=17\,. \qquad (1)$$

Бидејќи 17 е прост број, од (1) ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=17 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+2y=-17 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=17 \\ x+2y=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-2y=-17 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

чии решенија соодветно се подредените парови: $(9,4)$, $(-9,-4)$, $(9,-4)$ и $(-9,4)$.

**б)** Дадената равенка ја запишуваме во обликот $(x-2)(y-4)=3$. Бидејќи 3 е прост број, од последната равенка имаме:

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y-4=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=-1 \\ y-4=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=3 \\ y-4=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-2=-3 \\ y-4=-1 \end{cases}$$

од што следува дека $(x,y)\in\{(3,4),(1,1),(5,5),(-1,3)\}$. ♦

**Пример 46.** Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки

**а)** $xy+7x-3y=23$, **б)** $x^2-xy+2x-3y=6$

***Решение.*** Равенките од оваа задача ќе ги решиме со дискусија на количник.

**а)** Последователно, еквивалентно ја трансформираме равенката и добиваме $x(x+y)=3y+23$, односно $x=\frac{3y+23}{y+3}$, од што следува $x=3+\frac{2}{y+7}$. Бидејќи $x$ е цел број, последната равенка има решение ако и само ако $(y+7)\,|\,2$, т.е. ако и само ако $y+7\in\{-2,-1,1,2\}$, што значи $y\in\{-9,-8,-6,-5\}$. Конечно, ако најдените вредности за $y$ ги замениме во $x=3+\frac{2}{y+7}$, за решението на почетната равенка добиваме

$$(x,y)\in\{(5,-6),(1,-8),(4,-5),(1,-9)\}\,.$$

**б)** Од $x^2-xy+2x-3y=6$, имаме

$$y=\frac{x^2+2x-6}{x+3}=\frac{x^2+3x-x-3-3}{x+3}=x-1-\frac{3}{x+3}\,.$$

Значи, $(x+3)\,|\,3$ т.е. $x+3\in\{-3,-1,1,3\}$. Според тоа, множеството решенија на дадената равенка е $\{(-2,-6),(-4,-2),(0,-2),(-6,-6)\}$. ♦

Во следниот пример ќе разгледаме две Диофантови равенки кои ќе ги решиме со дискусија на последната цифра.

**Пример 47.** Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки

**а)** $x^2+5y=2002$ и

**б)** $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$, каде што $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)k$.

***Решение.*** **а)** За секој цел број $y$, цифрата на единиците на бројот $5y$ е 0 или 5. Понатаму, за секој цел број $x$, цифрата на единиците на неговиот квадрат $x^2$ е една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Според тоа, ако $5y \geq 0$, тогаш цифрата на единиците на бројот $x^2 + 5y$ е една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Аналогно се добива дека во случај кога $5y < 0$, цифрата на единиците на бројот $x^2 + 5y$ е една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

Конечно, за секои $x, y \in \mathbf{Z}$ цифрата на единиците на бројот $x^2 + 5y$ е 0, 1, 4, 5, 6 или 9 и таа е различна од цифрата на единиците на бројот 2002. Значи, равенката нема решение во множеството на целите броеви.

**б)** Ако $x = 1$, тогаш $y = \pm 1$.

Ако $x = 2$, тогаш $y^2 = 3$, па $y$ не е цел број.

Ако $x = 3$, тогаш $y^2 = 1 + 2 + 6$, што значи $y = \pm 3$.

Ако $x = 4$, тогаш $y^2 = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ па $y$ не е цел број.

Нека $m \geq 5$. Тогаш $m!$ е делив со 10, па затоа $m! = 10t$, од што следува

$$1!+2!+3!+4!+5!+\ldots+x! = 33 + 10k .$$

Бројот $33 + 10k$ завршува на цифрата 3, а бројот $y^2$ завршува на една од цифрите 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствени решенија на дадената равенка се подредените парови

$$(1,-1), (1,1), (3,-3), (3,3) . \blacklozenge$$

Во следниот пример ќе разгледаме Диофантова равенка која ќе ја решиме со разгледување на остатоците при делење со даден број.

**Пример 48.** Во множеството на целите броеви реши ја Диофантовата равенка

$$x^2 = 9y + 5 .$$

***Решение.*** Секој природен број може да се запише во еден од облиците

$$3k, 3k + 1 \text{ или } 3k + 2 .$$

Според тоа, неговиот квадрат има облик

$$3 \cdot 3k^2, 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ или } 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 ,$$

т.е. при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Од друга страна

$$9y + 5 = 3(3k + 1) + 2 ,$$

т.е. остатокот при делење со 3 е 2. Значи на двете страни на равенката, при делење со 3 секогаш добиваме различни остатоци, па затоа дадената равенка нема решение. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**76.** Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки:

**а)** $x^2+2x+13=y^2$; **б)** $x^2-7xy+12y^2=7$.

**77.** Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки:

**а)** $x^2y=y^3+10$; **б)** $y^4+x=xy+9$.

**78.** Во множеството на природните броеви реши ги Диофантовите равенки:

**а)** $x!+2y=5555$; **б)** $5^x+6^y=1234567$.

**79.** Во множеството на целите броеви реши ги Диофантовите равенки:

**а)** $x^2+y^2+z^2=1988$; **б)** $x^2+4y^2=1988$.

# 12. ПОИМ ЗА КОНГРУЕНЦИЈА. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Во претходните разгледувања видовме дека броевите кои при делење со еден ист број даваат ист остаток се од посебен интерес во теоријата на броеви. Токму затоа тие биле предмет на разработка на многу знаменити математичари, што довело до поимот конгруенција во множеството на целите броеви, т.е. методот на конгруенции во множеството на целите броеви. Овој метод е формален аритметички метод заснован на разгледување на својствата на целите броеви кои имаат еднакви остатоци при делење со еден ист број. Методот прв го разработил германскиот математичар Гаус (1777-1855) иако многу резултати биле познати и порано.

**Дефиниција 7.** Нека $a,b\in\mathbf{Z}$ и $m\in\mathbf{N}$. Ако $m\mid(a-b)$, тогаш ќе велиме дека бројот $a$ *е конгруентен* со бројот $b$ по модул $m$ и ќе пишуваме $a\equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$.

Ако $m\nmid(a-b)$, тогаш ќе велиме дека бројот $a$ *не е конгруентен* со бројот $b$ по модул $m$ и ќе пишуваме $a\not\equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$.

**Пример 49. а)** Да ги разгледаме броевите $a=78, b=85$ и $m=7$. Бидејќи $a-b=78-85=-7=-7\cdot 1$, од дефиницијата 7 добиваме

$$78\equiv 85\,(\mathrm{mod}\ 7).$$

**б)** За броевите $a=123, b=97$ важи $a-b=123-97=26$ и бидејќи $3\nmid 26$ заклучуваме дека $123\not\equiv 97\,(\mathrm{mod}\ 3)$. ♦

**Теорема 29.** Нека $a,b\in\mathbf{Z}$ и $m\in\mathbf{N}$. Тогаш:

**а)** $a\equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$ ако и само ако постои цел број $k$ таков, што $a=b+km$.

**б)** $a\equiv b\,(\mathrm{mod}\ m)$ ако и само ако при делење со $m$, броевите $a$ и $b$ имаат еднакви остатоци.

**Доказ. а)** Од дефиницијата 7 следува дека $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (a-b)$. Понатаму, $m \mid (a-b)$ ако и само ако постои цел број $k$ таков, што $a-b=km$, т.е. постои цел број $k$ таков, што $a=b+km$.

**б)** Нека $a=mp+r$ и $b=mq+s$, $p,q,r,s \in \mathbf{Z}$ и $0 \le r,s < m$. Тогаш $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (a-b)$, што значи ако и само ако $m \mid [(mp+r)-(mq+s)]$. Според тоа, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако

$$m \mid [m(p-q)+(r-s)].$$

Според тоа, $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $m \mid (r-s)$. Но, $-m < r-s < m$, па затоа $a \equiv b \pmod{m}$ ако и само ако $r-s=0$, т.е. ако и само ако $r=s$. ♦

**Пример 50. а)** При делење на броевите 63, 64, 65, 66, 67, 68 и 69 со бројот 7 се добива количник 9 и остатоци 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соодветно. Од теоремата 29 б) следува дека

$$63 \equiv 0 \pmod{7};\ 64 \equiv 1 \pmod{7},\ 65 \equiv 2 \pmod{7},\ 66 \equiv 3 \pmod{7},$$
$$67 \equiv 4 \pmod{7};\ 68 \equiv 5 \pmod{7} \text{ и } 69 \equiv 6 \pmod{7}.$$

**б)** Од теоремата 29 б) имаме дека $37 \equiv 25 \pmod{12}$. Навистина, при делењето на 37 и 25 со 12 се добива остаток 1. ♦

Во следните теореми ќе докажеме неколку важни својства на конгруенциите. Притоа ќе сметаме дека бројот $m$ е природен број.

**Теорема 30. а)** За секој $a \in \mathbf{Z}$ важи $a \equiv a \pmod{m}$.

**б)** Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $b \equiv a \pmod{m}$.

**в)** Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогаш $a \equiv c \pmod{m}$

**Доказ. а)** Од $a-a=0$, за секој $a \in \mathbf{Z}$ следува $a \equiv a \pmod{m}$, за секој $a \in \mathbf{Z}$.

**б)** Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $m \mid (a-b)$. Од $b-a=(-1)(a-b)$ следува $m \mid (b-a)$, па од дефиницијата 7 заклучуваме дека $b \equiv a \pmod{m}$.

**в)** Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогаш $m \mid (a-b)$ и $m \mid (b-c)$. Според тоа, $m \mid [(a-b)+(b-c)]=a-c$, па затоа $a \equiv c \pmod{m}$. ♦

**Теорема 31.** Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, тогаш

$$a+c \equiv b+d \pmod{m},\ a-c \equiv b-d \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bd \pmod{m}.$$

**Доказ.** Нека $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$. Од дефиницијата 7 имаме дека $m \mid (a-b)$ и $m \mid (c-d)$. Според тоа

$$m \mid (a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d),$$
$$m \mid (a-b)-(c-d)=(a-c)-(b-d)$$

и

$$m \mid [c(a-b)+b(c-d)]=ac-bd$$

што значи дека

$$a+c \equiv b+d \pmod{m},\ a-c \equiv b-d \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bd \pmod{m}. ♦$$

Да забележиме дека претходната теорема всушност покажува дека релацијата $\equiv$ по даден модул е согласна со операциите собирање, одземање и множење на конгруенции.

Меѓутоа, релацијата $\equiv$ *не е согласна* со релацијата делење на цели броеви (дури и кога последната е дефинирана). Имено, во конгруенцијата

$$8 \equiv -4 \pmod{12}$$

броевите 8 и $-4$ се деливи со 2 и со 4, меѓутоа ако поделиме со 2, односно со 4 добиваме $4 \equiv -2 \pmod{12}$ односно $2 \equiv -1 \pmod{12}$, што не е точно.

Понатаму, од теоремите 30 а) и 31 непосредно следуваат следните тврдења.

**Теорема 32. а)** Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш

$$a + c \equiv b + c \pmod{m},\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bc \pmod{m},$$

за секој $c \in \mathbf{Z}$.

**б)** Ако $a \equiv b \pmod{m}$, тогаш $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, за секој $n \in \mathbf{N}$. ♦

**Пример 51.** Докажи дека за секои прости броеви $p$ и $q$, $p, q > 3$, важи или

$$p \equiv q \pmod{6} \text{ или } p + q \equiv 0 \pmod{6}.$$

***Решение.*** Како што знаеме, секој прост број поголем од 3 е во облик $6k+1$ или $6t-1$. Ќе разгледаме три случаи:

**а)** ако $p = 6k+1$ и $q = 6t+1$, тогаш од теоремата 29 б) следува дека $p \equiv q \pmod{6}$;

**б)** ако $p = 6k-1$ и $q = 6t-1$, тогаш од теоремата 29 б) следува дека $p \equiv q \pmod{6}$; и

**в)** ако $p = 6k+1$ и $q = 6t-1$, тогаш $p \equiv 1 \pmod{6}$ и $q \equiv -1 \pmod{6}$ и од теоремата 31 следува дека

$$p + q \equiv 1 + (-1) \pmod{6}, \text{ т.е. } p + q \equiv 0 \pmod{6}. \ ♦$$

**Пример 52. а)** Докажи дека $10 \mid 3^{1988} - 1$.

**б)** Најди го остатокот од делењето на бројот $4^{56}$ со 9.

***Решение.*** **а)** Од $3^4 = 81$ следува $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Сега од теоремата 32 б) добиваме $(3^4)^{497} \equiv 1^{497} \pmod{10}$, т.е. $3^{1998} \equiv 1 \pmod{10}$, што значи $10 \mid 3^{1988} - 1$.

**б)** Ќе го побараме оној степен на бројот 4 кој е конгруентен со 1 по модул 9. Последователно имаме $4 \equiv 4 \pmod{9}$, $4^2 \equiv 7 \pmod{9}$ бидејќи $16 = 9 \cdot 1 + 7$, $4^3 \equiv 1 \pmod{9}$ бидејќи $64 = 9 \cdot 7 + 1$. Бидејќи $56 = 18 \cdot 3 + 2$, последната конгруенција ја степенуваме на 18 и добиваме $4^{54} \equiv 1 \pmod{9}$. Понатаму, ако ги помножиме конгруенциите $4^2 \equiv 7 \pmod{9}$ и $4^{54} \equiv 1 \pmod{9}$ добиваме $4^{54} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 7 \pmod{9}$, т.е. $4^{56} \equiv 1 \pmod{9}$.

Значи, остатокот од делењето на бројот $4^{56}$ со 9 е 7. ♦

Како што рековме, релацијата $\equiv$ не е согласна со релацијата делење на цели броеви (дури и кога последната е дефинирана). Во следната теорема ќе докажеме кога двете страни во една конгруенција може да се поделат со некој број.

**Теорема 33. а)** Ако НЗД$(a,m)=1$ и $ab \equiv ac \pmod{m}$, тогаш

$$b \equiv c \pmod{m}.$$

**б)** Ако НЗД$(a,m)=d$ и $ab \equiv ac \pmod{m}$, тогаш $b \equiv c \pmod{q}$ каде што $q=\frac{m}{d}$.

**в)** Ако НЗД$(a,m)=d$, $q=\frac{m}{d}$ и $b \equiv c \pmod{q}$, тогаш

$$ab \equiv ac \pmod{m}.$$

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). б)** Нека НЗД$(a,m)=d$ и $ab \equiv ac \pmod{m}$. Постојат цели броеви $p$ и $q$ такви, што $m=dq$ и $a=dp$ и важи НЗД$(p,q)=1$. Од $ab \equiv ac \pmod{m}$ следува дека постои $k \in \mathbf{Z}$ таков, што $ab=ac+mk$. Ако последното равенство го поделиме со $d$ го добиваме равенството $pb=pc+qk$ од што следува $p(b-c)=qk$. Но, НЗД$(p,q)=1$, па затоа од последното равенство следува $q \mid (b-c)$, т.е. $b \equiv c \pmod{q}$, каде што $q=\frac{m}{d}$.

**а)** Следува од тврдењето под б) за $d=1$.

**в)** Бидејќи НЗД$(a,m)=d$, добиваме $a=dp$ и $m=dq$, за некои цели броеви $p$ и $q$. Понатаму, од $b \equiv c \pmod{q}$ следува дека постои $k \in \mathbf{Z}$ таков, што $b=c+qk$. Последното равенство го множиме со $a$ и добиваме дека $ab=ac+aqk$ и ако замениме за $a=dp$ добиваме дека

$$ab=ac+(dq)(pk)=ac+m(pk),$$

односно $ab-ac=m(pk)$. Според тоа, $m \mid (ab-ac)$, т.е. $ab \equiv ac \pmod{m}$. ♦

**Теорема 34.** Ако $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$ и НЗС$(m,n)=k$, тогаш $a \equiv b \pmod{k}$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека НЗД$(m,n)=t$. Тогаш $n=pt$ и $m=qt$, каде што НЗД$(p,q)=1$ и НЗС$(m,n)=pqt$. Од $n \mid (a-b)$ и $m \mid (a-b)$ следува дека $pt \mid (a-b)$ и $qt \mid (a-b)$, т.е. $a-b=ptr$ и $a-b=qts$. Значи, $ptr=qts$, т.е. $pr=qs$ и бидејќи НЗД$(p,q)=1$ добиваме $p \mid s$ т.е. $s=pu$. Со замена во $a-b=qts$ добиваме $a-b=qtpu$, т.е. $pqt \mid (a-b)$. Но, НЗС$(m,n)=pqt=k$, па затоа $a \equiv b \pmod{k}$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**80.** **а)** Докажи дека квадратот на секој цел број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.
**б)** Докажи дека квадратот на секој цел број е конгруентен со 0, 1 или 4 по модул 8.

**81.** На која цифра завршува бројот:
**а)** $6^{811}$; **б)** $2^{1000}$; **в)** $3^{333}$

**82.** **а)** Докажи дека $(a-b) \mid (a^k-b^k)$ за секој $n \in \mathbf{N}$ и секои $a,b \in \mathbf{Z}$.

**б)** Докажи дека $(a+b) \mid (a^{2k+1}+b^{2k+1})$ за секој $n \in \mathbf{N}$ и секои $a,b \in \mathbf{Z}$.

**83.** Најди го остатокот при делењето на

**а)** $(5^{100}+55)^{100}$ со 24; **б)** $(17^{17}+116)^{21}$ со 8.

**84.** Докажи дека за секој ненегативен цел број $n$ важи:

**а)** $11 \mid (2^{6n+1}+3^{2n+2})$; **б)** $37 \mid (2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})$;

**в)** $57 \mid (7^{n+2}+8^{2n+1})$; **г)** $17 \mid (2^{5n+3}+5^{n}\cdot 3^{n+2})$.

**85.** Докажи дека за секој природен број $n$ остатокот од делењето на $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ со 17 е 0.

**86.** "Читачот на мисли" Марко му рекол на својот пријател Доротеј да замисли еден број меѓу 1 и 999, да го помножи со 143 и да го каже трицифрениот број составен од последните три цифри од производот. Потоа, Марко на Доротеј ќе му го соопшти замислениот број. Како?

## 13. ПРИМЕНА НА КОНГРУЕНЦИИТЕ

При проучувањето на деливоста на целите броеви се задржавме на некои посебни признаци за деливост, а во претходниот дел ги разгледавме конгруенциите и ги докажавме нивните својства. Овде ќе покажеме како конгруенциите можат да се искористат за наоѓање на посебните признаци за деливост. За таа цел прво ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 35.** Нека $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0$, каде што $a_0,\ a_1,\ldots,a_{k-1},a_k$ се цели броеви. Ако $a\equiv b \pmod m$, тогаш $f(a)\equiv f(b) \pmod m$.

**Доказ.** Од теоремата 32 б) следува $a^t\equiv b^t \pmod m$ за $t=0,1,\ldots,k$. Сега од теоремата 32 а) следствено добиваме

$$a_ta^t\equiv a_tb^t \pmod m \text{ за } t=0,1,\ldots,k$$

$$a_ka^k+a_{k-1}a^{k-1}+\ldots+a_1a+a_0\equiv a_kb^k+a_{k-1}b^{k-1}+\ldots+a_1b+a_0 \pmod m$$

односно $f(a)\equiv f(b) \pmod m$. ♦

Ќе покажеме како претходната теорема може да се искористи за добивање на некои посебни признаци за деливост.

***Признак за деливост со 9.*** Секој природен број е конгруентен со збирот на своите цифри по модул 9.

**Доказ.** Нека $n$ е природен број чиј декаден запис е

$$n=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\ldots+a_110+a_0,$$

каде што $a_0,a_1,\ldots,a_{k-1},a_k\in\{0,1,2,\ldots,9\}$. Ставаме

$$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Тогаш, бидејќи $10\equiv 1 \pmod 9$ од теоремата 35 следува

$$f(10)\equiv f(1) \pmod 9, \text{ т.е. } n=a_k+a_{k-1}+\ldots+a_1+a_0 \pmod 9.\ ♦$$

**Пример 53.** Од

$$56786457455 = 5+6+7+8+6+4+5+7+4+5+5 \equiv 62 \equiv 6+2 \equiv 8 \pmod 9$$

следува дека бројот 56786457455 не е делив со бројот 9. Но,

$$5673897567 = 5+6+7+3+8+9+7+5+6+7 \equiv 63 \equiv 6+3 \equiv 9 \equiv 0 \pmod 9$$

па затоа бројот 5673897567 е делив со бројот 9. ♦

***Признак за деливост со 11.*** Ако природниот број $n$ има декаден запис

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

тогаш

$$n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}.$$

**Доказ.** Нека $n$ е природен број чиј декаден запис е

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

каде што $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Ставаме

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Тогаш, бидејќи $10 \equiv -1 \pmod{11}$, од теоремата 35 следува

$$f(10) \equiv f(-1) \pmod{11},$$

т.е.

$$n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}. \ ♦$$

**Пример 54.** Од

$$43419027549 \equiv 9-4+5-7+2-0+9-1+4-3+4 \equiv 18 \equiv 8-1 \equiv 7 \pmod{11}$$

следува дека бројот 43419027549 е конгруентен со 7 по модул 11, т.е. не е делив со 11.

Но, бидејќи

$$47859679 \equiv 9-7+6-9+5-8+7-4 \equiv 0 \pmod{11}$$

добиваме дека бројот 47859679 е конгруентен со 0 по модул 11, т.е. овој број е делив со 11. ♦

***Признак за деливост со 7.*** Ако природниот број $n$ има декаден запис

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

тогаш $n$ е делив со 7 ако и само ако збирот

$$\{(a_0 + 3a_1 + 2a_2) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) + \ldots\} -$$
$$- \{(a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_9 + 3a_{10} + 2a_{11}) + \ldots\}$$

е делив со 7.

**Доказ.** Нека $n$ е природен број чиј декаден запис е

$$n = a_k 10^k + \ldots + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

каде што $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots, a_{k-1}, a_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Бидејќи

$$10^0 \equiv 1 \pmod 7,\ 10^1 \equiv 3 \pmod 7,\ 10^2 \equiv 2 \pmod 7,\ 10^3 \equiv 6 \equiv (-1) \pmod 7,$$

$$10^4 \equiv 4 \equiv (-3) \pmod 7,\ 10^5 \equiv 5 \equiv (-2) \pmod 7,\ 10^6 \equiv 1 \pmod 7 \text{ итн.}$$

следува дека

$$10^{6k} \equiv 1 \pmod 7,\ 10^{6k+1} \equiv 3 \pmod 7,\ 10^{6k+2} \equiv 2 \pmod 7,$$

$$10^{6k+3} \equiv (-1) \pmod 7,\ 10^{6k+4} \equiv (-3) \pmod 7,\ 10^{6k+5} \equiv (-2) \pmod 7.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} n &= a_k 10^k + \ldots + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= a_0 + 10a_1 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + a_4 10^4 + a_5 10^5 + a_6 10^6 + a_7 10^7 + \ldots \\ &\equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 + (-1)a_3 + (-3)a_4 + (-2)a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + \ldots \pmod{11} \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

**Пример 55.** Од

$$\begin{aligned} 43419027549 &\equiv 9 + 3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 7 - 3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 9 + 3\cdot 1 + 2\cdot 4 - 3 - 3\cdot 4 \\ &\equiv 23 \equiv 3 + 3\cdot 2 \equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

следува дека бројот 43419027549 е конгруентен со 2 по модул 7, т.е. не е делив со 7.

Но, бидејќи $959679 \equiv 9 + 3\cdot 7 + 2\cdot 6 - 9 - 3\cdot 5 - 2\cdot 9 \equiv 0 \pmod 7$, добиваме дека бројот 959679 е конгруентен со 0 по модул 7, т.е. овој број е делив со 7. ♦

**Пример 56.** Докажи дека ако бројот $n$ е делив со 99, тогаш збирот на неговите цифри не е помал од 18.

**Решение.** Нека $99 \mid n$. Тогаш $9 \mid n$, па затоа и збирот на цифрите $A$ на $n$ е делив со 9. Бидејќи $n$ е природен број, $A > 0$, па единствен број кој е делив со 9 и е помал од 18 е 9. Ако $A = 9$, тогаш од

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

следува $A = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$. Од друга страна, бидејќи $11 \mid n$ следува

$$11 \mid \{(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0\}$$

и бидејќи

$$-9 \le (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0 \le 9$$

добиваме дека

$$(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \ldots - a_1 + a_0 = 0,$$

т.е. $a_0 + a_2 + \ldots = a_1 + a_3 + \ldots$. Според тоа $9 = 2(a_0 + a_2 + \ldots)$, што е противречност. ♦

Ќе разгледаме уште една примена на конгруенциите при докажување на деливост на броеви. За таа цел, најпрво ќе се осврнеме на таканаречената *модуларна аритметика*.

Да се потсетиме на алгоритамот за делење со остаток на цели броеви, според кој за цел број $a$ и природен број $m$ постојат цели броеви $q$ и $r$, $0 \le r < m$ такви, што

$$a = qm + r .$$

Од последното равенство следува дека $a = qm + r \equiv r \pmod{m}$, што значи дека секој цел број е конгруентен по модул $m$ со барем еден од броевите $0, 1, \ldots, m-1$. Следната теорема покажува дека секој цел број е конгруентен по модул $m$ точно со еден од броевите $0, 1, \ldots, m-1$.

**Теорема 36.** Секој цел број е конгруентен по модул $m$ со еден и само еден од броевите $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

**Доказ.** Нека $a$ е цел број. Јасно, $a \equiv r \pmod{m}$ за некој $r$, $0 \le r < m$. Да претпоставиме дека $a \equiv r \pmod{m}$ и $a \equiv s \pmod{m}$, за $0 \le r, s < m$. Тогаш, $s \equiv r \pmod{m}$, т.е. $m \mid (s - r)$ и бидејќи $-m < s - r < m$, добиваме дека $s - r = 0$, т.е. $s = r$, што и требаше да се докаже. ♦

За секој $r \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$ со $C_m(r)$ да го означиме множеството од сите цели броеви кои се конгруентни со $r$ по модул $m$. Од претходната теорема следува дека $C_m(r) \cap C_m(s) = \varnothing$ за $r \ne s$ и дека $C_m(0) \cup C_m(1) \cup \ldots \cup C_m(m-1) = \mathbf{Z}$.

**Дефиниција 8.** Множеството $C_m(r)$ го нарекуваме *класа на конгруенции по модул* $m$.

За множеството $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ ќе велиме дека е *комплетен систем на остатоци по модул* $m$ ако $a_r \in C_m(r)$ за $r = 0,1,\ldots,m-1$.

Може да се докаже *дека секое множество од* $m$ *последователни цели броеви е комплетен систем на остатоци по модул* $m$. Така, на пример, множествата $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $\{1, 2, \ldots, m\}$ се комплетни системи на остатоци по модул $m$. Ако $m$ е непарен број, тогаш и множеството $\{-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-1}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2}\}$ е комплетен систем на остатоци по модул $m$.

Фактот дека $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ е комплетен систем на остатоци по модул $m$ значи дека секоја комбинација на збирови, производи и разлики од овие броеви, по модул $m$ е повторно некој од тие броеви. Ова доведува до таканаречената модуларна аритметика. Во следните две табели се дадени операциите собирање и множење по модул 5.

| $a \setminus b$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

$a + b \pmod{5}$

| $a \setminus b$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| **3** | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| **4** | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

$ab \pmod{5}$

**Пример 57.** Од таблицата за множење по модул 5 следува дека $0^2, 1^2, 2^2, 3^2$ и $4^2$ се конгруентни по модул 5 само од некој од броевите 0, 1 и 4. Но, 0, 1, 2, 3 и 4 е комплетен систем на остатоци по модул 5, па затоа квадрат на природен број при делење со 5 не дава остаток 2 и 3. ♦

**Пример 58.** Докажи дека за секој природен број $n$, бројот $n^3 + 5n$ е делив со 6.

***Решение.*** Комплетен систем на остатоци по модул 6 е 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Според тоа, доволно е да испитаме дали $n^3 + 5n$ е делив со 6 за $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. При множење со модул 6 имаме

$$0^3 = 0, \quad 1^3 = 1, \quad 2^3 = 2, \quad 3^3 = 3, \quad 4^3 = 4, \quad 5^3 = 5.$$

Според тоа, $n^3 + 5n \equiv n + 5n \equiv 6n \equiv 0 \pmod 6$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**87.** Најди критериум за деливост со: **а)** 13; **б)** 99; **в)** 17.

**88.** Најди ги класите на конгруенција по модул $m$ за

**а)** $m = 2$; **б)** $m = 3$; **в)** $m = 4$; **г)** $m = 6$.

**89.** Состави таблица за собирање и множење по модул $m$ за:

**а)** $m = 2$; **б)** $m = 3$; **в)** $m = 4$; **г)** $m = 6$.

**90.** Докажи дека за секој природен број $n$ броевите: $n(2n+1)(7n+1)$; $n^3 + 11n$ и $n^3 + 17n$ се деливи со 6.

**91.** Докажи дека за секој природен број $n$ бројот $4n^7 + 4$ не е делив со 19.

**92.** Докажи дека за секој природен број $n$ бројот $n^2(n^2 - 1)$ е делив со 4.

# 14. ЛИНЕАРНА КОНГРУЕНТНА РАВЕНКА

На крајот од оваа тема ќе се осврнеме на линеарната конгруентна равенка со една непозната, која е во тесна врска со линеарната Диофантова равенка со две непознати. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 9.** Нека $a, b \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{N}$. Равенката во облик

$$ax \equiv b \pmod n \tag{1}$$

ја нарекуваме *линеарна конгруентна равенка со една непозната.* За целиот број $x_0$ ќе велиме дека е решение на (1) ако $ax_0 \equiv b \pmod n$.

Во следната теорема е даден потребниот и доволен услов за бројот $x_0$ да е решение на равенката (1).

**Теорема 37.** Бројот $x_0$ е решение на равенката (1) ако и само ако постои цел број $y_0$ таков, што подредениот пар $(x_0, y_0)$ е решение на Диофантовата равенка $ax - ny = b$.

**Доказ.** Нека $x_0$ е решение на конгруентната равенка (1). Тогаш, постои цел број $y_0$ таков, што $ax_0 - b = y_0 n$. Според тоа,

$$ax_0 - y_0 n = b$$

од што следува дека парот $(x_0, y_0)$ е решение на Диофантовата равенка $ax - ny = b$.

Обратно, ако парот $(x_0, y_0)$ е решение на Диофантовата равенка $ax - ny = b$, тогаш $ax_0 - y_0 n = b$, т.е. $ax_0 - b = y_0 n$. Од последното равенство следува $n \mid (ax_0 - b)$, па затоа $ax_0 \equiv b \pmod{n}$, што значи дека $x_0$ е решение на конгруентната равенка (1). ♦

Сега лесно се докажува следната теорема, која непосредно следува од теоремите 37, 27 и 28.

**Теорема 38.** Линеарната конгруентна равенка (1) има решение ако и сако ако $d = \text{НЗД}(a, n) \mid b$ и во овој случај, ако $x_0$ е едно решение на (1), тогаш нејзиното општо решение е дадено со

$$x \equiv x_0 \pmod{\tfrac{n}{d}}. \qquad (2)$$

**Доказ.** Според теоремата 37 равенката (1) има решение ако и само ако равенката $ax - ny = b$ има решение. Сега од теоремата 27 имаме дека равенката $ax - ny = b$ има решение ако и само ако $d = \text{НЗД}(a, n) \mid b$. Понатаму, според теоремата 28 сите решенија на равенката $ax - ny = b$ се дадени со

$$x = x_0 + \tfrac{n}{d} t \text{ и } y = y_0 - \tfrac{a}{d} t, \text{ каде } t = 0, \pm 1, \ldots.$$

Според тоа, за сите решенија на равенката (1) важи

$$x = x_0 + \tfrac{n}{d} t, \text{ каде што } t = 0, \pm 1, \ldots,$$

а тоа значи дека тие се дадени со (2). ♦

**Пример 59.** Линеарната конгруентна равенка

$$42x \equiv 60 \pmod{91}$$

нема решение, бидејќи $\text{НЗД}(42,91) = 7 \nmid 60$. ♦

**Пример 60.** Реши ја линеарната конгруентна равенка

$$42x \equiv 50 \pmod{76}.$$

***Решение.*** Од $\text{НЗД}(42,76) = 2 \mid 50$ следува дека дадената равенка има решение. Ако ја примениме теоремата 33 б), можеме да скратиме со $\text{НЗД}(42,76) = 2$ и добиваме

$$21x \equiv 25 \pmod{38}.$$

Понатаму, $0 \equiv 38 \pmod{38}$, па ако ги собереме последните две конгруенции наоѓаме

$$21x \equiv 63 \pmod{38}.$$

Но, НЗД$(21,38) = 1$, па од теоремата 33 а) следува дека во последната конгруенција можеме да скратиме со 21, со што добиваме

$$x \equiv 3 \pmod{38}.$$

Јасно, решенијата по модул 76 се дадени со

$$x \equiv 3 \pmod{76} \text{ и } x \equiv 41 \pmod{76}. \ \blacklozenge$$

Во последниот пример добивме две решенија кои не се конгруентни по модул 76. Од теоремата 38 непосредно следува дека линеарната конгруентна равенка (1) во случај кога има решение, таа има $d$ неконгруентни решенија, $d = \text{НЗД}(a,n)$ и ако $x_0$ е едно нејзино решение, тогаш сите неконгруентни решенија на (1) се дадени со:

$$x_0, x_0 + \tfrac{n}{d}, x_0 + \tfrac{2n}{d}, \ldots, x_0 + \tfrac{(d-1)n}{d}.$$

**Пример 61.** Реши ја линеарната конгруентна равенка

$$11x \equiv 25 \pmod{60}.$$

***Решение.*** Бидејќи $1 = \text{НЗД}(11,60)$, равенката има точно едно неконгруентно решение. Решението $x$ мора да биде деливо со 5 бидејќи

$$11x = 25 + 60k \text{ за некој } k \in \mathbf{Z}.$$

Нека $x = 5y$. Тогаш

$$55y \equiv 25 \pmod{60}$$

и ако поделиме со 5 добиваме

$$11y \equiv 5 \pmod{12}$$
$$-y \equiv 5 \pmod{12}$$
$$y \equiv -5 \pmod{12}$$
$$y \equiv 7 \pmod{12}.$$

Затоа $x \equiv 35 \pmod{60}$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**93.** Која од линеарните конгруентни равенки има решение:
**а)** $4x + 5 \equiv 0 \pmod{6}$; **б)** $2x + 2 \equiv 0 \pmod{3}$; **в)** $21x \equiv 12 \pmod{15}$.

**94.** Со непосредна проверка на системите на остатоци најди ги сите решенија на линеарната конгруентна равенка
**а)** $2x + 5 \equiv 0 \pmod{3}$; **б)** $2x - 3 \equiv 0 \pmod{6}$

**95.** Реши ги линеарните конгруентни равенки:
**а)** $21x \equiv 1 \pmod{17}$; **б)** $72x \equiv 2 \pmod{10}$

## ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

**1.** **а)** Докажи дека $48 \mid (n^3 + 3n^2 - n - 3)$ за секој непарен број $n$. (8 б)

**б)** Докажи дека $17 \mid (6^{2n} + 19^n - 2^{n+1})$ за секој природен број $n$. (15 б)

**2.** **а)** Докажи дека за два природни броја $a$ и $b$ барем еден од броевите: $a, b, a+b$ или $a-b$ се дели со бројот 3. (5 б)

**б)** При делење на некој број со бројот 72 се добива количник $n$ и остаток 68. Колкави ќе бидат количникот и остатокот ако истиот број се подели со 24? (10 б)

**3.** **а)** Ако $n$ е природен број поголем од 1, докажи дека $\frac{10^n+35}{45}$ е природен број. (8 б)

**б)** Најди го најмалиот четирицифрен број кој при делење со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2. (15 б)

**4.** **а)** Докажи дека при делење на произволен прост број $p$ со бројот 30, остатокот е или прост број или 1. (15 б)

**б)** Докажи дека за секој прост број поголем од 3, производот на неговите соседни броеви е делив со 24. (20 б)

**5.** **а)** Арсо имал 99 килограми сирење во пакувања од 2, 3 и 5 кгр. Колку сирење имал Арсо, ако бројот на пакувањата е 22? (15 б)

**б)** Во множеството на целите броеви реши ја равенката $x^2 + y^4 = 2x - 1$. (20 б)

**6.** **а)** Провери дали бројот $3^{103} + 5^{105}$ е делив со 7. (15 б)

**б)** Реши ја линеарната конгруентна равенка $14x \equiv 15 \pmod{45}$. (20 б)

***Забелешка.*** При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Бодови:** | 41-55 | 56-70 | 71-85 | 86-100 |
| **Оценка:** | 2 | 3 | 4 | 5 |

# ГЛАВА II

# МНОЖЕСТВА И КОМБИНАТОРИКА

## СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Поим за множество**
2. **Операции со множества**
3. **Пресликувања**
4. **Инјекција, сурјекција и биекција. Инверзно пресликување**
5. **Еквивалентни множества. Принцип на еднаквост**
6. **Принцип на збир, производ, вклучување и исклучување**
7. **Принцип на Дирихле**

## *ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА*

*За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:*

- *множествата и операциите со нив;*
- *елементите од математичката логика; и*
- *линеарната функција.*

## НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ги утврдиш операциите со множествата;
- да научиш да ги докажуваш основните својства на операциите со множествата;
- да ги усвоиш поимите пресликување, инјекција, сурјекција и биекција;
- да ја усвоиш дефиницијата за еквивалентни множества и да докажуваш еквивалентност на две множества;
- да ги усвоиш комбинаторните принципи за збир, разлика, производ, вклучување и исклучување;
- да се запознаеш со принципот на Дирихле и да го користиш при решавање на задачи; и
- интуитивно да ги развиваш своите способности за правилно дефинирање на поими и докажување на тврдења.

Теоријата на множества лежи во основата на секоја современа математичка дисциплина. Нејзин основач е германскиот математичар Георг Кантор (1845-1918). Со поимот множество тесно е поврзан поимот пресликување. Може да се каже дека предмет на проучување на современата математика се различните множества и пресликувањата кои се определени на овие множества. Токму затоа, во оваа тема ќе ги изучуваме овие два важни математички поими, при што ќе се задржиме на конечните множества и на основните комбинаторни принципи, меѓу кои посебно место има принципот на Дирихле.

## 1. ПОИМ ЗА МНОЖЕСТВО

Поимот *множество* е основен поим во современата математика и него не го дефинираме, туку сметаме дека интуитивно е јасно што е тоа множество. Георг Кантор за поимот множество го искажал следниот опис:

*Множеството го подразбираме како севкупност од определени и различни објекти кои со нашата интуиција или интелект мисловно ги опфаќаме во една целина.*

Како синоним на зборот множество ќе ги користиме зборовите: *севкупност, фамилија и класа*. Објектите од кои е составено едно множество ги нарекуваме негови *елементи* или *точки*.

За означување на множествата најчесто ги користиме големите букви од латинската азбука: $A, B, C, D, \ldots$, а за означување на елементите на едно множество ги користиме малите букви од латинската азбука: $a, b, c, d, x, y, z, \ldots$.

За едно множество ќе сметаме дека е определено, ако за секој објект можеме да кажеме дали му припаѓа или не му припаѓа на тоа множество. Во врска со припадноста на даден елемент на едно множество ги воведуваме следните ознаки.

Нека $A$ е множество. Ако елементот $x$ му припаѓа на множеството $A$, тогаш пишуваме $x \in A$, а ако елементот $x$ не му припаѓа на множеството $A$, тогаш пишуваме $x \notin A$.

Постојат повеќе начини на задавање на множествата, од кои овде ќе споменеме два.

*i) Задавање на множествата со помош на набројување на неговите елементи.* При овој начин елементите на дадено множество се наведуваат во големи загради и притоа редоследот на елементите во заградите не е битен.

**Пример 1. а)** Ако множеството $A$ е составено од арапските цифри, тогаш тоа го запишуваме на следниот начин: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

**б)** Записот на множеството $B$ составено од самогласките на македонската азбука е: $B = \{\text{а, е, и, о, у}\}$. ♦

*ii) Задавање на множествата со наведување на својството на неговите елементи.* Во секоја математичка задача најчесто ги разгледуваме елементите на точно определено множество $A$, кое понекогаш го нарекуваме основно множество. Притоа потребно е да ги одделиме елементите кои задоволуваат одредено својство $P$ (пишуваме $P(x)$), или не го задоволуваат својството $P$. Со помош на својството $P$ одделуваме множество од сите елементи на $A$, кои го имаат својството $P$. Ова множество го означуваме со $\{x \in A \,|\, P(x)\}$ или $\{x \,|\, P(x)\}$.

**Пример 2. а)** Нека $M$ е множеството од сите природни броеви кои при делење со 3, даваат остаток 2. Според тоа, во овој случај својството $P$ е природни броеви кои при делење со 3, даваат остаток 2. Ова множество можеме да го запишеме на следниот начин:

$$M = \{n \in \mathbf{N} \,|\, n \text{ при делење со 3 дава остаток } 2\}$$

или кратко

$$M = \{n \in \mathbf{N} \,|\; n = 3k + 2, k \in \mathbf{N}\}.$$

**б)** Множеството $X$ од сите рационални броеви кои се поголеми од $\frac{1}{2}$ и се помали од $\frac{4}{3}$ го запишуваме на следниот начин:

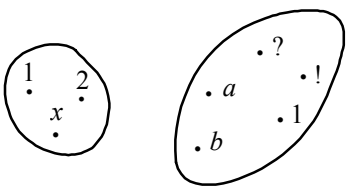
$$X = \{p \in \mathbf{Q} \,|\, \tfrac{1}{2} < p < \tfrac{4}{3}\}. \blacklozenge$$

*iii) Претставување на множествата со помош на Венови дијаграми.* Заради полесно расудување во геометријата, а исто така и во алгебрата, се користат цртежи, шеми, скици и слично. Слично се постапува и во теоријата на множествате, каде што множествата се претставуваат како дел од рамнината ограничен со затворена линија. Ваквите цртежи ги нарекуваме Венови дијаграми.

**Пример 3.** За множествата

$$A = \{1, 2, x\} \text{ и } B = \{a, b, ?, 1, !\}$$

Веновите дијаграми се дадени на цртежот десно. ♦




Дали постојат природни броеви кои се поголеми од 1 и се помали од 2? Јасно, не постои ниту еден таков природен број. Слично, не постојат квадрати кои не се паралелограми, а исто така не постојат луѓе кои се повисоки од 6 м итн.

Претходните разгледувања природно иницираат да воведеме множество без елементи, кое го нарекуваме *празно множество*. Притоа сметаме дека постои само едно празно множество, кое го означуваме со симболот $\varnothing$.

Да ги разгледаме множествата $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ и $C = \{b, c, a\}$. Забележуваме дека секој елемент на множеството $A$ е елемент и на множеството $B$, а множествата $A$ и $C$ се составени од исти елементи. Во математиката, а и во природата воопшто, имаме низа вакви ситуации, па затоа природна е следната дефиниција.

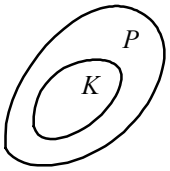
**Дефиниција 1.** За множеството $A$ ќе велиме дека е *подмножество* од множеството $B$ ако од $x \in A$ следува $x \in B$. Притоа означуваме $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$.

За множествата $A$ и $B$ ќе велиме дека се *еднакви* ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Притоа пишуваме $A = B$.

Ако $A \subseteq B$ и $B$ содржи елемент кој не му припаѓа на $A$, тогаш ќе велиме дека $A$ е *вистинско подмножество* од $B$ и пишуваме $A \subset B$ или $B \supset A$.

За празното множество сметаме дека е подмножество од секое множество $A$. Од претходната дефиниција непосредно следува дека $A \subseteq A$, но $A$ не е вистинско подмножество на самото себе.

**Пример 4. а)** Со $K$ да го означиме множеството од сите квадрати, а со $P$ множеството од сите правоаголници. Бидејќи секој квадрат е правоаголник, но не секој правоаголник е квадрат, добиваме дека $K \subset P$. Со помош на Венов дијаграм, последново е прикажано на цртежот десно.




**б)** Нека

$$M = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 3k + 1, k \in \mathbf{N}\} \text{ и } P = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 6k + 1, k \in \mathbf{N}\}.$$

Ако $n \in P$, тогаш $n = 6k + 1$, за некој $k \in \mathbf{N}$. Но, тоа значи дека $n = 3(2k) + 1$ и бидејќи $2k \in \mathbf{N}$ добиваме дека $n \in M$. Според тоа, $P \subseteq M$. Понатаму, бидејќи $4 \in M$, но $4 \notin P$, заклучуваме дека $P \subset M$.

**в)** Множествата $A = \{1\}$ и $B = \{1, 1\}$ се еднакви, бидејќи елементот 1 е единствен елемент како на множеството $A$, така и на множеството $B$. Слично,

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Последното е во согласност со претходно кажаното дека *множеството е целина на различни елементи*, односно дека *секој елемент во множеството се смета само по еднаш.* ♦

Во врска со претходно воведените поими, ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 1.** За секои множества $A, B$ и $C$ точни се следните тврдења.

*i*) $A = A$,

*ii*) Ако $A = B$, тогаш $B = A$.

*iii*) Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогаш $A \subseteq C$.

*iv*) Ако $A = B$ и $B = C$, тогаш $A = C$.

**Доказ.** Ќе го докажеме тврдењето *iii*).

Да претпоставиме дека $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$. Ако $x \in A$, тогаш според дефиницијата 1 од $A \subseteq B$ следува дека $x \in B$. Понатаму, бидејќи $B \subseteq C$, повторно од дефиницијата 1 добиваме дека $x \in C$. Според тоа, од $x \in A$ следува дека $x \in C$, а тоа значи дека $A \subseteq C$.

Слично се докажуваат и останатите три тврдења. Обиди се нив самостојно да ги докажеш. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**1.** Со набројување на неговите елементи запиши го:
**а)** множеството од сите цели броеви меѓу 3 и 12;
**б)** множеството од сите природни броеви деливи со 3 и помали од 25;
**в)** множеството од сите делители на бројот 120.

**2.** Со помош на својството кое го има, запиши го секое од множествата во задачата 1.

**3.** Запиши ги со набројување на нивните елементи множествата:

**а)** $A = \{2^x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x < 7\}$; **б)** $B = \{n \mid 3n = 7\}$;

**в)** $C = \{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ и } n \mid 12\}$; **д)** $D = \{3 \cdot 2^n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ и } -4 < n < 6\}$.

**4.** Дадени се множествата:

$$A = \{1, 3, 7, 15, 31\}, \qquad B = \{5, 11, 23, 47, 95\},$$

$$C = \{2^x - 1 \mid x \in \mathbf{N}, x \le 5\}, \qquad D = \{3 \cdot 2^x - 1 \mid x \in \mathbf{N}, x \le 5\}.$$

Кои од нив се меѓусебно еднакви?

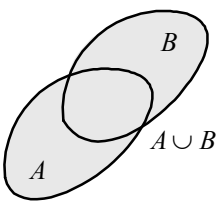
**5.** Дадени се множествата: $\mathbf{N}$, $P = \{n \mid n = 2k, k \in \mathbf{N}\}$, $M = \{n \mid n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}\}$. Каков однос постои меѓу множествата:
**а)** $\mathbf{N}$ и $P$; **б)** $\mathbf{N}$ и $M$; **в)** $M$ и $P$.

# 2. ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

Во досегашните разгледувања се осврнавме на поимите множество, подмножество и еднакви множества. Во практиката најчесто се среќаваме со проблеми во кои треба истовремено да ги разгледуваме елементите кои им припаѓаат на две или повеќе множества, потоа заедничките елементи на две или повеќе множества, па елементите кои му припаѓаат на едно, а не му припаѓаат на друго множество и слично. Претходно кажаното природно ги наметнува операциите со множествата на кои подетално ќе се осврнеме.

**Дефиниција 2.** *Унија* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат барем на едно од множествата $A$ и $B$. Притоа означуваме $C = A \cup B$.

Според тоа, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Претставувањето на унијата на множествата $A$ и $B$ со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно. Јасно, $x \notin A \cup B$ ако и само ако $x \notin A$ и $x \notin B$.




**Пример 5.** Најди ја унијата на множествата

**а)** $A = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n < 9\}$ и $B = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n \ge 5\}$

**б)** $A = \{n \mid n = 3k + 1, k \in \mathbf{N}_0\}$ и $B = \{n \mid n = 3k + 2, k \in \mathbf{N}_0\}$.

***Решение.*** **а)** За дадените множества имаме

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B = \{5, 6, 7, 8, \ldots, k, \ldots\},$$

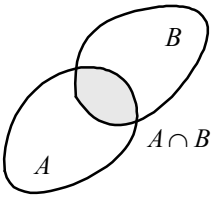
па затоа $A \cup B = \mathbf{N}$.

**б)** Очигледно

$$A \cup B = \{n \mid n = 3k+1 \text{ или } n = 3k+2, k \in \mathbf{N}_0\} = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } 3 \nmid n\} \ . \ \blacklozenge$$

**Дефиниција 3.** *Пресек* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, кое се состои од сите елементи кои му припаѓаат на секое од множествата $A$ и $B$. Притоа означуваме $C = A \cap B$.

Според тоа, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Претставувањето на пресекот на множествата $A$ и $B$ со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно. Јасно, $x \notin A \cap B$ ако и само ако $x \notin A$ или $x \notin B$.




**Пример 6.** Најди го пресекот на множествата

**а)** $A = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n < 9\}$ и $B = \{n \mid n \in \mathbf{N} \text{ и } n \geq 5\}$

**б)** $A = \{n \mid n = 3k+1, k \in \mathbf{N}_0\}$ и $B = \{n \mid n = 4k+1, k \in \mathbf{N}_0\}$.

***Решение.*** **а)** За дадените множества имаме

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B = \{5, 6, 7, 8, \ldots, k, \ldots\},$$

па затоа $A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$.

**б)** Очигледно

$$A \cap B = \{n \mid n = 3k+1 \text{ или } n = 4k+1, k \in \mathbf{N}_0\} = \{n \mid n = 12k+1, k \in \mathbf{N}_0\} \ . \ \blacklozenge$$

**Дефиниција 4.** За множествата $A$ и $B$ ќе велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \varnothing$.

**Пример 7. а)** Множествата $A$ и $B$ од примерот 5 б) се дисјунктни. Навистина, ако $n \in A \cap B$, тогаш $n \in A$ и $n \in B$. Но, тоа значи дека при делење со 3, бројот $n$ истовремено дава остаток 1 и остаток 2, а тоа не е можно.

**б)** Множествата $A$ и $B$ од примерот 6 б) не се дисјунктни. На пример $13 \in A \cap B$. $\blacklozenge$

Во следната теорема се дадени некои својства на пресекот и унијата на две множества.

**Теорема 2.** За секои множества $A, B$ и $C$, точни се следните тврдења.

*i)* $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

*ii)* $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$.

*iii)* $A \cap A = A$; $A \cup A = A$, (закони за идемпотентност).

*iv)* $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$, (комутативни закони).

*v)* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (асоцијативни закони).

*vi)* $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$, (закони за апсорпција).

*vii)* $x \notin A \cap B$ ако и само ако $x \notin A$ или $x \notin B$, и
$x \notin A \cup B$ ако и само ако $x \notin A$ и $x \notin B$.

**Доказ.** Ќе го докажеме првото равенство во *v)*. Имаме

$$x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cap C) \Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ и } x \in C))$$
$$\Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ и } x \in C) \Rightarrow (x \in A \cap B \text{ и } x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

што значи $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Од друга страна имаме

$$x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow (x \in A \cap B \text{ и } x \in C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow ((x \in A \text{ и } x \in B) \text{ и } x \in C)$$
$$\Rightarrow (x \in A \text{ и } (x \in B \text{ и } x \in C)) \Rightarrow (x \in A \text{ и } x \in B \cap C)$$

што значи $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Конечно, од

$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) \text{ и } A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$$

следува $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Слично се докажуваат останатите тврдења. Обиди се самостојно да ги докажеш. ♦

**Теорема 3 (дистрибутивни закони).** За секои множества $A, B$ и $C$, точни се следниве тврдења:

*i)* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

*ii)* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

**Доказ.** *i)* Нека $x \in (A \cup B) \cap C$. Според тоа, $x \in A \cup B$ и $x \in C$, што значи дека $x \in A$ или $x \in B$, и $x \in C$. Затоа, $x \in A$ и $x \in C$, или $x \in B$ и $x \in C$. Но, тоа значи дека $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$, т.е. $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Конечно,

$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Ако $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, тогаш $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Затоа, $x \in A$ и $x \in C$, или $x \in B$ и $x \in C$, што значи дека $x \in A$ или $x \in B$, и $x \in C$, односно $x \in A \cup B$ и $x \in C$. Но, тоа значи дека $x \in (A \cup B) \cap C$. Конечно,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C.$$

Бидејќи

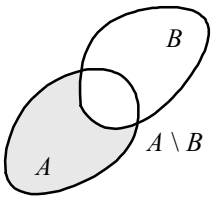
$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C) \text{ и } (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C,$$

добиваме

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Равенството под *ii)* се докажува аналогно. Обиди се самостојно да го докажеш. ♦

**Дефиниција 5.** *Разлика* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, кое се состои од сите елементи на множеството $A$ кои не му припаѓаат на множеството $B$. Означуваме $C = A \setminus B$.




Според тоа, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Претставувањето на разликата на множествата $A$ и $B$ со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно. Јасно, $x \notin A \setminus B$ ако и само ако $x \notin A$ или $x \in B$.

**Пример 8. а)** Најди ја разликата на множествата

$$A = \{n \mid n > 4, n \in \mathbf{N}\} \text{ и } B = \{n \mid n < 14, n \in \mathbf{N}\}.$$

**б)** Најди ја разликата на множествата

$$A = \{n \mid -7 < n < 7, n \in \mathbf{Z}\} \text{ и } B = \{n \mid \tfrac{12}{n} \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}.$$

***Решение.*** **а)** Имаме

$$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \ldots\} \text{ и } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\},$$

па затоа $A \setminus B = \{14, 15, 16, 17, \ldots\} = \{n \mid n \geq 14, n \in \mathbf{N}\}$.

**б)** Имаме

$$A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ и } B = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

па затоа $A \setminus B = \{-5, 0, 5\}$. ♦

Тврдењата искажани во следната теорема непосредно следуваат од дефиницијата на разликата на множествата. Обиди се самостојно да ги докажеш.

**Теорема 4.** За секои множества $A$ и $B$ важи.

*i)* $A \setminus \varnothing = A$, $A \setminus A = \varnothing$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

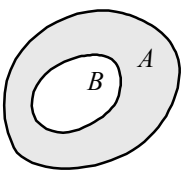
*ii)* $x \notin A \setminus B$ ако и само ако $x \notin A$ или $x \in B$.

*iii)* Ако $A \subseteq B$, тогаш $A = B \setminus (B \setminus A)$.

*iv)* $A \setminus B = \varnothing$ ако и само ако $A \subseteq B$.

*v)* $A \setminus B = A$ ако и само ако $A \cap B = \varnothing$. ♦

**Дефиниција 6.** Нека е дадено множеството $A$ и $B \subseteq A$. *Комплемент* на $B$ во однос на $A$ го нарекуваме множеството ${}^{c}B = A \setminus B$.




Според тоа, ${}^{c}B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Претставувањето на комплементот на множеството $B$ во однос на множеството $A$ со Венов дијаграм е дадено на цртежот десно. Јасно, $x \notin {}^{c}B$ ако и само ако $x \in B$.

**Пример 9. а)** Најди го комплементот на множеството $A = \{3, 4, 5\}$ во однос на множеството $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

**б)** Најди го комплементот на множеството $A=\{n \mid n=2k, k\in \mathbf{N}\}$ во однос на множеството $\mathbf{N}$.

***Решение.*** **а)** Од дефиницијата 6 имаме ${}^cA = U \setminus A = \{1, 2, 6, 7, 8\}$.

**б)** Имаме ${}^cA = \mathbf{N} \setminus A = \mathbf{N} \setminus \{n \mid n=2k, k\in \mathbf{N}\} = \{n \mid n \neq 2k, k\in \mathbf{N}\} = \{n \mid n=2k-1, k\in \mathbf{N}\}$. ♦

Во врска со поимот комплемент на множество ќе ја докажеме следната теорема. Тврдењата искажани во оваа теорема се познати како Де Морганови закони.

**Теорема 5.** Нека $A, B \subseteq X$. Тогаш, точни се равенствата

*i)* ${}^c({}^cA) = A$

*ii)* $A \subseteq B$ ако и само ако ${}^cB \subseteq {}^cA$.

*iii)* ${}^c(A\cup B) = {}^cA \cap {}^cB$.

*iv)* ${}^c(A\cap B) = {}^cA \cup {}^cB$.

**Доказ.** Ќе го докажеме првото и третото тврдење. Останатите тврдења се докажуваат аналогно. Обиди се самостојно да ги докажеш.

*i)* Равенството ${}^c({}^cA) = A$ следува од $x\in {}^c({}^cA) \Leftrightarrow x\notin {}^cA \Leftrightarrow x\in A$.

*iii)* $x\in {}^c(A\cup B) \Leftrightarrow x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\notin A$ и $x\notin B \Leftrightarrow x\in {}^cA$ и $x\in {}^cB \Leftrightarrow x\in {}^cA\cap {}^cB$. ♦

**Дефиниција 7.** *Декартов производ* на множествата $A$ и $B$ го нарекуваме множеството $C$, во ознака $C = A\times B$, кое се состои од сите подредени парови $(x, y)$, каде што $x\in A$, $y\in B$. Притоа, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ако и само ако $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Според тоа, $C = \{(x, y) \mid x\in A, y\in B\}$.

Декартовиот производ на непразното множество $A$ со самото себе го нарекуваме *квадрат* на множеството $A$ и го означуваме $A^2$.

Аналогно дефинираме Декартов производ на множествата $A_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Имено,

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{(a_1, a_2,\ldots,a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\ldots,n\}.$$

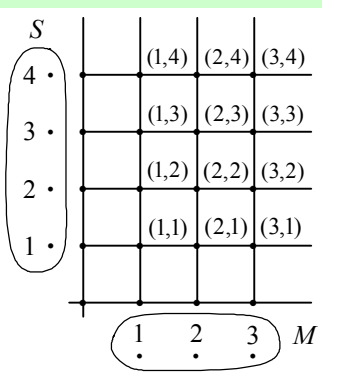
**Пример 10. а)** За множествата

$$M = \{1, 2, 3\} \text{ и } S = \{1, 2, 3, 4\}$$

Декартовиот производ е

$$M\times S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$

На цртежот десно е даден графички приказ на Декартовиот производ на множествата $M$ и $S$.




**б)** За множеството $A = \{x, y, z\}$ Декартовиот квадрат е

$$A^2 = \{(x,x), (x,y), (x,z), (y,x), (y,y), (y,z), (z,x), (z,y),, (z,z)\}.$$

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**6.** Најди ја унијата на множествата: **а)** $A=\{n \mid n=4k+1, k\in \mathbf{N}\}$ и $B=\{n \mid n=4k+3, k\in \mathbf{N}\}$;
**б)** $A=\{x \mid -1\le x<2, x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x \mid 2\le x<4, x\in \mathbf{R}\}$;
**в)** $A=\{x \mid x\le -2, x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x \mid x\ge 2, x\in \mathbf{R}\}$.

**7.** Најди го пресекот на множествата: **а)** $A=\{n \mid n=4k+1, k\in \mathbf{N}\}$ и $B=\{n \mid n=6k+1, k\in \mathbf{N}\}$;
**б)** $A=\{x \mid -1\le x<2, x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x \mid 0<x<4, x\in \mathbf{R}\}$;
**в)** $A=\{x \mid x>-2, x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x \mid x<2, x\in \mathbf{R}\}$;
**г)** $A=\{x \mid x<-2, x\in \mathbf{R}\}$ и $B=\{x \mid x\ge -2, x\in \mathbf{R}\}$.

**8.** Најди непразни множества $A, B$ и $C$ такви, што
**а)** $A\cup B=A\cup C$, но $B\ne C$; **б)** $A\cap B=A\cap C$, но $B\ne C$.

**9.** Докажи дека за секои множества $A, B$ и $C$ важи

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A).$$

**10.** Дадени се множествата: $P=\{n \mid n=2k, k\in \mathbf{N}\}$, $M=\{n \mid n=3k, k\in \mathbf{N}\}$. Најди ги множествата:
**а)** $P\cap M$; **б)** $P\cup M$; **в)** $P\setminus M$ и **г)** $M\setminus P$.

**11.** Ако $A$ и $B$ се подмножества од множеството $X$, докажи дека ${}^{c}(A\setminus B)={}^{c}A\cup B$ и $A\setminus B=A\cap {}^{c}B$.

**12.** Докажи дека за секои множества $A, B$ и $C$ важи
**а)** $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; **б)** $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
**в)** $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$; **г)** $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

**13.** Најди ги елементите на множеството $G=\{(x,y) \mid 2x-y=1, x\in A, y\in B\}$, каде што $A=\{-1, 2, 3\}$ и $B=\{-3, -1, 2, 5, 7\}$.

**14.** Дадени се множествата $A=\{4, 5, 8\}$, $B=\{4, 6, x, 8\}$ и $C=\{5, 3, 8, x, y\}$. Најди ги елементите $x$ и $y$ ако $A\cup B=\{4, 5, 6, 8, 9\}$ и $B\cap C=\{4, 8, 9\}$.

**15.** Дадени се множествата $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 4, 5\}$. Најди го множеството $X$ ако $A\cup X=A$ и $B\cap X=A\setminus(A\setminus B)$. Колку решенија има задачата?

**16.** Најди ги множествата $A, B$ и $C$ ако
$A\cup B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$, $A\setminus B=\{1, 3, 5\}$, $C\setminus B=\{2, 4\}$ и $(A\cap B)\setminus C=\{6\}$.

# 3. ПРЕСЛИКУВАЊА (ФУНКЦИИ)

Во табелата

| години на живот | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| висина во см | 50 | 70 | 80 | 90 | 95 | 100 | 103 | 105 |

е прикажано како просечно се менува висината на детето по години, од денот на раѓање (нула години) до навршени седум години. Ова со други зборови може да се искаже: *висината на детето зависи од годините на живот.* Се разбира ова е само еден едноставен пример од следниот вид: *една големина е функција од друга големина.* Во секојдневниот живот се среќаваме со многу важни примери од овој вид:

- плоштината на квадратот е функција од должината на неговата страна,
- плоштината на кругот е функција од должината на неговиот радиус,
- периметарот на кружницата е функција од должината на нејзиниот радиус,
- патот што го поминува тело кое слободно паѓа е функција од изминатото време од моментот кога почнало паѓањето итн.

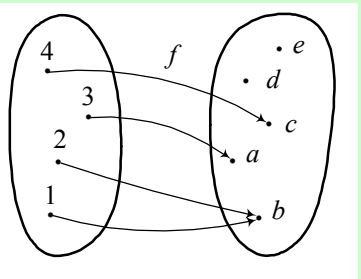
При разгледување на многу проблеми од посебен интерес е да се откријат ваквите функции (зависности) на една големина од друга. Токму затоа, *според мислењето на многу математичари, поимот за функција (пресликување) е еден од најважните математички поими, воопшто*. Ќе дадеме прецизна дефиниција на овој поим.

**Дефиниција 8.** Нека $A$ и $B$ се две непразни множества. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило $f$, еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека $f$ е *пресликување* (*функција*) од $A$ во $B$ и пишуваме $f : A \to B$.

За елементот $y \in B$ велиме дека е *слика* на елементот $x \in A$ и пишуваме $y = f(x)$. Множеството $A$ го нарекуваме *домен*, а множеството $B$ - *кодомен* на пресликувањето $f$.

Од дефиницијата 8 можеме да заклучиме дека едно пресликување е зададено ако се зададени неговиот домен, кодомен и правилото со кое на секој елемент од доменот му се придружува единствен елемент од кодоменот. Да разгледаме неколку примери.

**Пример 11. а)** Ако $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, тогаш со




$$f(1) = b,\ f(2) = b,\ f(3) = a,\ f(4) = c \tag{1}$$

е зададено пресликување $f : A \to B$.

Во многу случаи пожелно е пресликувањата графички да се претставуваат. Така, даденото пресликување графички можеме да го претставиме како на цртежот лево.

Исто така, наместо правилото на пресликувањето да го запишуваме во обликот (1), тоа можеме да го направиме со помош на записот

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & b & a & c \end{pmatrix}, \tag{2}$$

што значи дека во првиот ред ги запишуваме елементите на доменот $A$, а во вториот ред нивните слики кои му припаѓаат на кодоменот $B$.

Според тоа, ако $f : A \to B$ и $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), \ldots$, тогаш за правилото $f$ можеме да го користиме и записот

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

**б)** Нека $A$ е произволно непразно множество. Тогаш, со $I_A(x) = x$, за секој $x \in A$ е определено пресликување $I_A : A \to A$ кое го нарекуваме *идентично* пресликување.

**в)** Нека се дадени множествата $\mathbf{N}$ и $M = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Јасно, со правилото $f(k) = 2k$, е зададено пресликување $f : \mathbf{N} \to M$. ♦

**Дефиниција 9.** За две пресликувања $f: A \to B$ и $g: C \to D$ ќе велиме дека *се еднакви* ако $A = C$, $B = D$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$.

**Пример 12. а)** Да ги разгледаме пресликувањата

$$f: A \to B \text{, каде што } A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 2, 3, 4\},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и

$$g: C \to D \text{, кадешто } C = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ D = \{1, 2, 3\},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Како што забележуваме, $A = C$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$, но бидејќи $B \neq D$ според дефиницијата 9 имаме дека овие пресликувања не се еднакви.

**б)** За пресликувањата

$$f: A \to B \text{, каде што } A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и

$$g: C \to D \text{, каде што } C = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ D = \{1, 2, 3\},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

имаме $A = C$, $B = D$, но $f(2) = 1 \neq 2 = g(2)$, па затоа тие не се еднакви. ♦

При изучувањето на линеарната функција во осмо одделение се запозна со нејзиниот график, кој е права. Овде, имајќи го предвид значењето на овој поим, истиот ќе го воведеме за произволно пресликување. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 10.** Нека $f: A \to B$. *График* на пресликувањето (функцијата) $f$ го нарекуваме множеството $G(f) = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B,\ y = f(x)\}$.

Јасно, $G(f) \subseteq A \times B$.

**Пример 13. а)** Графикот на пресликувањето $f$ од примерот 12 а) е множеството

$$G(f) = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,1), (5,3)\}.$$

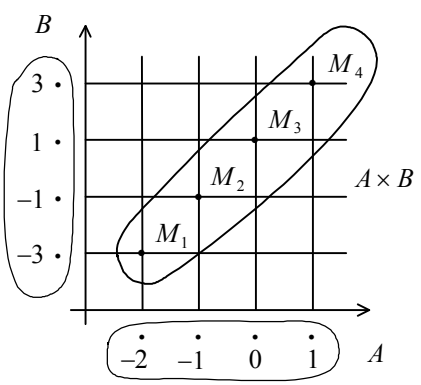
**б)** Графикот на пресликувањето $f$ од примерот 11 в) е множеството

$$G(f) = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

**в)** Нека $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$ и нека правилото $f$ е дадено со формулата $f(x) = 2x + 1$, $x \in A$. Имаме $f(-2) = -3$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ и $f(1) = 3$, па затоа

$$G(f) = \{(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)\}.$$

На цртежот десно е даден шематски приказ на графикот на ова пресликување. ♦




Една од најважните математички операции е таканаречената композиција на пресликувањата, која се дефинира на следниот начин.

**Дефиниција 11.** Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се две пресликувања. За секој $x \in A$ ставаме $h(x) = g(f(x))$ и добиваме пресликување $h: A \to C$ кое го нарекуваме *композиција* на пресликувањата $f$ и $g$, и го означуваме со $h = g \circ f$.

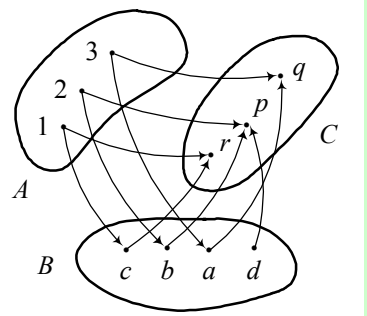
**Пример 14. а)** Нека $A = B = C = \mathbf{R}$ и пресликувањата $f: A \to B$ и $g: B \to C$ нека се дадени со $f(x) = 2x + 5$ и $g(x) = 5x + 3$. Јасно, композициите $g \circ f$ и $f \circ g$ се дефинирани и притоа имаме

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = 5(2x+5) + 3 = 10x + 28$$

и

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x+3) = 2(5x+3) + 5 = 10x + 11.$$

Последното покажува дека дури и во случај кога и двете композиции на пресликувања $g \circ f$ и $f \circ g$ се дефинирани, не важи $f \circ g = g \circ f$.




**б)** Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и пресликувањата $f: A \to A$ и $g: A \to A$ се определени со $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & a & d \end{pmatrix}$. Имаме $f(f(a)) = f(b) = a$, $g(f(b)) = g(a) = c$, $f(g(b)) = f(a) = b$ и $g(g(a)) = g(c) = a$.

**в)** Нека $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{r, p, q\}$ и нека пресликувањата $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се дадени со $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ q & p & r & p \end{pmatrix}$. Тогаш, за композицијата $g \circ f$ имаме $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ r & p & q \end{pmatrix}$. На цртежот лево е даден шематскиот приказ на композицијата $g \circ f$. ♦

**Теорема 6. а)** Ако $f: A \to B$, тогаш $f \circ I_A = f$ и $I_B \circ f = f$.
**б)** Ако $f: A \to B$, $g: B \to C$ и $h: C \to D$, тогаш $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). а)** Пресликувањата $f \circ I_A$ и $f$ имаат исти домени и кодомени и притоа за секој $x \in A$ важи $(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$, па затоа $f \circ I_A = f$.

Аналогно се докажува дека $I_B \circ f = f$.

**б)** Пресликувањата $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ имаат ист домен $A$ и кодомен $D$ и притоа за секој $x \in A$ важи

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

од што следува $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**17.** Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $f$ и $g$ се пресликувања од $A$ во $A$ определени со $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

**а)** Пресметај $f(f(1)), f(g(2)), g(f(4))$ и $f(g(4))$.

**б)** Најди ги графовите на $f$ и $g$.

**в)** Дали постои $x \in A$ таков, што $f(x) = g(x)$?

**18.** Нека $A=B=C=\mathbf{R}$ и нека пресликувањата $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се дадени со $f(x)=3x-2$ и $g(x)=x+3$.

**а)** Најди ги пресликувањата $f\circ g$ и $g\circ f$, а потоа пресметај $(f\circ g)(7)$ и $(g\circ f)(2)$.

**б)** Определи ги графиците на пресликувањата $f$, $g$, $f\circ g$ и $g\circ f$.

**в)** Дали постои $x\in\mathbf{R}$ таков, што $g(x)=x$?

**19.** Нека $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{p,q,r\}$, $D=\{m,n,o\}$ и нека пресликувањата $f:A\to B$, $g:B\to C$ и $h:C\to D$ се дадени со $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\c&a&b&a\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}a&b&c\\p&q&r\end{pmatrix}$ и $h=\begin{pmatrix}p&q&r\\m&n&o\end{pmatrix}$. Пресметај $g\circ f$, $h\circ g$, $h\circ(g\circ f)$ и $(h\circ g)\circ f$.

**20.** Дадено е пресликувањето $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&5&6\end{pmatrix}$ на множеството $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ во самото себе. Најди ги пресликувањата $f^2\overset{\text{деф}}{=}f\circ f$, $f^3\overset{\text{деф}}{=}f^2\circ f$, $f^4\overset{\text{деф}}{=}f^3\circ f$, $f^5\overset{\text{деф}}{=}f^4\circ f$ итн. и шематски прикажи ги нивните графици. Кои од овие пресликувања се еднакви?

**21.** Нека $A=B=C=\mathbf{R}$ и нека пресликувањата $f:A\to B$ и $g:B\to C$ се дадени со $f(x)=2x+1$ и $g(x)=x^2+1$. Најди ги формулите на пресликувањата $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$, $g^3$ и $f\circ g^3$.

**22.** Нека $A$ е множеството чии елементи се подмножествата на множеството $\{1,2\}$, т.е.: $\varnothing$, $\{1,2\}$, $\{1\}$ и $\{2\}$, и нека пресликувањето $f:A\to A$ е определено со $f(X)={}^cX$, каде што комплементот на $X$ се бара во однос на множеството $\{1,2\}$.

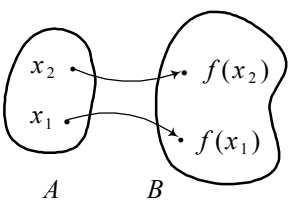
**а)** Пресметај $f(\varnothing)$, $f(\{1,2\})$, $f(\{1\})$ и $f(\{2\})$.

**б)** Реши ја по $X$ равенката $f(X)=\{1\}$.

**в)** Дали пресликувањето $f$ го задоволува равенството $f(f(X))=X$?

# 4. ИНЈЕКЦИЈА, СУРЈЕКЦИЈА И БИЕКЦИЈА. ИНВЕРЗНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ

Проучувањето на пресликувањата довело до поделба според нивните својства. Во овој дел ќе се осврнеме на изучување на три важни видови пресликувања, а тоа се инјективните, сурјективните и биективните пресликувања, кои заземаат важно место во математиката воопшто.




**Дефиниција 12.** За пресликувањето $f:A\to B$ ќе велиме дека е *инјекција* ако од $x_1\neq x_2$ следува $f(x_1)\neq f(x_2)$, т.е. различни елементи имаат различни слики (цртеж горе).

**Пример 15. а)** Нека $A=\{a,b,c,d\}$ и пресликувањата $f:A\to A$ и $g:A\to A$ се определени со $f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}$ и $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&a&a&d\end{pmatrix}$. Јасно, пресликувањето $f$ е инјекција, но пресликувањето $g$ не е инјекција бидејќи $b\neq c$, но $g(b)=a=g(c)$.

**б)** Нека се дадени множествата $\mathbf{N}$ и $M=\{2n\mid n\in\mathbf{N}\}$ и нека пресликувањето $f:\mathbf{N}\to M$ е определено со $f(k)=2k$, за секој $k\in\mathbf{N}$. Ќе докажеме дека ова пресликување е инјекција.

Навистина, за секои $k, n \in \mathbf{N}$ такви, што $k \neq n$ важи $2k \neq 2n$ што значи $f(k) \neq f(n)$ т.е. $f$ е инјекција.

**в)** Ќе докажеме дека пресликувањето $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ за кое важи $f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}$, за секој $x \in \mathbf{R}$ не е инјекција.

Навистина, за $x = 0$ од $f(0) - [f(0)]^2 \geq \frac{1}{4}$ следува $[f(0) - \frac{1}{2}]^2 \leq 0$, па затоа $f(0) = \frac{1}{2}$. Понатаму, за $x = 1$ од $f(1) - [f(1)]^2 \geq \frac{1}{4}$ следува $[f(1) - \frac{1}{2}]^2 \leq 0$, па затоа $f(1) = \frac{1}{2}$.

Според тоа, $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, што значи дека два различни елементи имаат иста слика, па затоа $f$ не е инјекција. ♦

**Теорема 7.** Ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се инјекции, тогаш и $g \circ f$ е инјекција.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $f$ и $g$ се инјекции. Ако $x_1, x_2 \in A$ се такви, што $x_1 \neq x_2$, тогаш бидејќи $f$ е инјекција, добиваме $f(x_1) \neq f(x_2)$. Понатаму, од $f(x_1) \neq f(x_2)$ и фактот дека $g$ е инјекција имаме $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, односно

$$(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2),$$

што значи дека $g \circ f$ е инјекција. ♦

**Дефиниција 13.** За пресликувањето $f : A \to B$ ќе велиме дека е *сурјекција* ако за секој $y \in B$ постои $x \in A$ таков, што $y = f(x)$, т.е. секој елемент на $B$ е слика на барем еден елемент на $A$.

**Пример 16. а)** Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$ и пресликувањата $f : A \to B$ и $g : B \to A$ се определени со $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Јасно, пресликувањето $f$ е сурјекција, но пресликувањето $g$ не е сурјекција бидејќи $d$ не е слика на ниту еден елемент од множеството $B$.

**б)** Нека се дадени множествата $\mathbf{N}$ и $M = \{2n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ и нека пресликувањето $f : \mathbf{N} \to M$ е определено со $f(k) = 2k - 1$, за секој $k \in \mathbf{N}$. Ќе докажеме дека ова пресликување е сурјекција.

Нека $k \in \mathbf{N}$. Тогаш $2k - 1 \in M$ и притоа важи $f(k) = 2k - 1$. Според тоа, за произволен $k$ од $\mathbf{N}$ најдовме елемент во $M$ кој е слика на $k$, што значи дека $f$ е сурјекција. ♦

**Теорема 8.** Ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се сурјекции, тогаш и $g \circ f$ е сурјекција.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $f$ и $g$ се сурјекции и нека $z \in C$ е произволен. Бидејќи $g$ е сурјекција, добиваме дека за секој $z \in C$ постои барем еден $y \in B$ таков, што $z = g(y)$. Може да постојат и повеќе елементи во $B$ со ова својство. Избираме еден од овие елементи $y$ и бидејќи $f$ е сурјекција, следува дека постои елемент $x \in A$ таков, што $y = f(x)$. Според тоа, за секој $z \in C$ постои $x \in A$ таков, што $g(f(x)) = g(y) = z$, што значи дека $g \circ f$ е сурјекција. ♦

**Дефиниција 14.** За пресликувањето $f: A \to B$ ќе велиме дека е *биекција* ако тоа е и инјекција и сурјекција.

Според тоа, $f$ е биекција ако секој елемент $y \in B$ е слика на барем еден елемент $x \in A$ и различни елементи од $A$ со $f$ се пресликуваат во различни елементи од $B$.

**Пример 17. а)** Очигледно, за секое непразно множество $A$ идентичното пресликување $I_A$ е биекција. Провери!

**б)** Во примерот 16 б) докажавме дека пресликувањето $f: \mathbf{N} \to M$, $M = \{2n-1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ определено со $f(k) = 2k-1$, за секој $k \in \mathbf{N}$ е сурјекција. Но, ова пресликување е и инјекција. Навистина, за секои $k, n \in \mathbf{N}$ такви, што $k \neq n$, важи $2k \neq 2n$, па затоа $2k-1 \neq 2n-1$, што значи $f(k) \neq f(n)$, т.е. $f$ е инјекција.

Конечно, $f$ е сурјекција и инјекција, па значи е биекција.

**в)** Нека $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \neq 0$. Да го разгледаме пресликувањето $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определено со $f(x) = ax + b$.

Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш од $a \neq 0$ следува $ax_1 \neq ax_2$, па затоа

$$f(x_1) = ax_1 + b \neq ax_2 + b = f(x_2),$$

што значи дека $f$ е инјекција. Понатаму, за секој $y \in \mathbf{R}$ важи $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbf{R}$ и притоа

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y - b + b = y,$$

т.е. $f$ е сурјекција.

Конечно, $f$ е сурјекција и инјекција, па значи е биекција. ♦

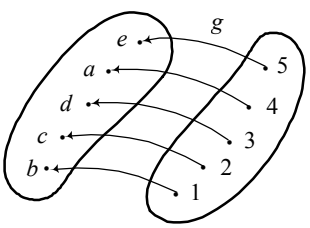
Од теоремите 7 и 8 непосредно следува точноста на следната теорема.

**Теорема 9.** Ако пресликувањата $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се биекции, тогаш и нивната композиција $g \circ f$ е биекција.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $f$ и $g$ се биекции. Тоа значи дека $f$ и $g$ се инјекции, па од теоремата 7 следува дека $g \circ f$ е инјекција. Понатаму, $f$ и $g$ се сурјекции, па од теоремата 8 следува дека $g \circ f$ е сурјекција.

Конечно, $g \circ f$ е инјекција и сурјекција, па значи тоа е биекција. ♦

Нека $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $f: A \to B$ е дадено со $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Ова пресликување е биекција. Во врска со пресликувањето $f$ да го разгледаме пресликувањето $g: B \to A$ зададено со $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & d & a & e \end{pmatrix}$. Како што можеме да забележиме, "старите" слики сега се оригинали, а "старите" оригинали сега се "нови" слики (види цртеж). Во овој



случај велиме дека пресликувањето $g$ е инверзно пресликување за пресликувањето $f$.

Претходно разгледаниот пример непосредно ја иницира следната дефиниција за инверзно пресликување.

**Дефиниција 15.** Ако $f: A \to B$ е биекција, тогаш со $g(y) = x$, за секој $y \in B$, ако и само ако $y = f(x)$ дефинираме пресликување $g: B \to A$ кое го нарекуваме *инверзно* на пресликувањето $f$. За инверзното пресликување ја прифаќаме ознаката $g = f^{-1}$.

**Пример 18.** Нека $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \neq 0$. Во примерот 17 в) докажавме дека пресликувањето $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определено со $f(x) = ax + b$ е биекција. Според тоа, постои инверзното пресликување $f^{-1}$.

За да го најдеме $f^{-1}$, ставаме $y = ax + b$ и добиваме $x = \frac{y-b}{a}$. Сега, од равенството $f^{-1}(y) = x$ добиваме $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Конкретно, за пресликувањето $f(x) = 2x - 1$ имаме $a = 2$ и $b = -1$, па со замена добиваме дека неговото инверзно пресликување е $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. ♦

**Теорема 10.** Ако $f: A \to B$ е биекција, тогаш инверзното пресликување $f^{-1}: B \to A$ е биекција.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Од дефиницијата 2.12 следува дека $f^{-1}$ е пресликување од $B$ во $A$.

Ако $y_1 \neq y_2$, тогаш $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$ бидејќи во спротивно еден ист елемент од $A$ со $f$ ќе се преслика во два различни елементи од $B$, што не е можно бидејќи $f$ е пресликување. Значи $f^{-1}$ е инјекција.

Ако $x \in A$, тогаш $x = f^{-1}(y)$ каде што $y = f(x)$, што значи дека $f^{-1}$ е сурјекција.

Конечно, $f^{-1}$ е инјекција и сурјекција, па значи е биекција. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**23.** Докажи дека пресликувањата

**а)** $f: \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = |x|$; **б)** $f: \mathbf{R} \to [1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$.

се сурјекции, но не се инјекции.

**24.** Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $f: A \to A$ е определено со:

**а)** $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **б)** $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; **в)** $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Дали $f$ е биекција? Во случај на потврден одговор најди го инверзното пресликување.

**25.** За пресликувањето $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ најди го инверзното пресликување ако

**а)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$; **б)** $f(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$; **в)** $f(x) = 4x - \frac{1}{12}$.

# 5. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА. ПРИНЦИП НА ЕДНАКВОСТ

Нека $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ и нека пресликувањето $f:A\to B$ е дадено со $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Лесно се гледа дека $f$ е биекција, т.е. меѓу множествата $A$ и $B$ постои биекција. Ваквите множества имаат посебна улога во математиката и за нив ќе велиме дека се еквивалентни. Попрецизно, ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 16.** За множествата $A$ и $B$ велиме дека се *еквивалентни*, со ознака $A\sim B$, ако постои биекција $f$ од $A$ во $B$.

**Пример 19. а)** Множествата $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ и $B=\{+,-,*,\in,\otimes,\oplus,\times\}$ се еквивалентни. Навистина, пресликувањето $f:A\to B$ определено со $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ + & - & * & \in & \otimes & \oplus & \times \end{pmatrix}$ е биекција, па затоа $A\sim B$.

**б)** Во примерот 17 б) докажавме дека пресликувањето $f:\mathbf{N}\to M$, $M=\{2n-1\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ определено со $f(k)=2k-1$, за секој $k\in\mathbf{N}$ е биекција, што значи дека $\mathbf{N}\sim M$ т.е. множеството природни броеви е еквивалентно со множеството непарни природни броеви.

**в)** Ќе докажеме дека $[0,1]\sim[a,b]$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$, $b>a$. За таа цел да го разгледаме пресликувањето $f(x)=b+(b-a)(x-1)$.

Ако $x_1\neq x_2$, тогаш следствено добиваме

$$x_1-1\neq x_2-1$$
$$(b-a)(x_1-1)\neq(b-a)(x_2-1)$$
$$b+(b-a)(x_1-1)\neq b+(b-a)(x_2-1),$$

што значи $f(x_1)\neq f(x_2)$, т.е. $f$ е инјекција. Од друга страна, за секој $y\in[a,b]$ имаме $0\le y-a\le b-a$ и ако поделиме со $b-a>0$ добиваме $0\le\frac{y-a}{b-a}\le 1$, па затоа

$$f(\tfrac{y-a}{b-a})=b+(b-a)(\tfrac{y-a}{b-a}-1)=b+(b-a)\tfrac{y-b}{b-a}=b+(y-b)=y$$

што значи дека $f$ е и сурјекција.

Според тоа, $f$ е инјекција и сурјекција, па е биекција, што според дефиницијата 16 значи $[0,1]\sim[a,b]$. ♦

Во следната теорема ќе докажеме три важни својства на еквивалентните множества, кои ни се потребни за натамошните разгледувања.

**Теорема 11.** За секои множества $A$, $B$ и $C$ важи

*i)* $A\sim A$.
*ii)* Ако $A\sim B$, тогаш $B\sim A$.
*iii)* Ако $A\sim B$ и $B\sim C$, тогаш $A\sim C$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** *i)* Според примерот 17 а) идентичното пресликување $I_A : A \to A$ е биекција, па затоа $A \sim A$.

*ii)* Нека $A \sim B$. Тоа значи дека постои биекција $f : A \to B$. Сега, од теоремата 11 следува дека инверзното пресликување $f^{-1} : B \to A$ е биекција, па затоа $B \sim A$.

*iii)* Нека $A \sim B$ и $B \sim C$. Тоа значи дека постојат биекции $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Сега, од теоремата 9 следува дека композицијата $g \circ f : A \to C$ е биекција, па затоа $A \sim C$. ♦

**Пример 20. а)** Нека се дадени множествата $\mathbf{N}$ и $P = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Во примерот 15 докажавме дека пресликувањето $f : \mathbf{N} \to P$ определено со $f(k) = 2k$, за секој $k \in \mathbf{N}$ е инјекција. Лесно се докажува дека ова пресликување е сурјекција, па значи тоа е биекција. Според тоа, $P \sim \mathbf{N}$.

Според примерот 19 б) имаме дека $\mathbf{N} \sim M$, кадешто $M = \{2n-1 \mid n \in \mathbf{N}\}$, па од теоремата 11 *iii*) следува дека $P \sim M$, што значи дека множеството парни природни броеви е еквивалентно со множеството непарни природни броеви.

**б)** Нека $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ се такви што $a < b$ и $c < d$. Според примерот 19 в) имаме $[0,1] \sim [a,b]$ и $[0,1] \sim [c,d]$. Сега од теоремата 11 *iii*) следува дека $[a,b] \sim [c,d]$. ♦

Во следната дефиниција ќе го воведеме поимот за конечно множество и во натамошните разгледувања под поимот множество ќе ги подразбираме конечните множества. За таа цел, за секој природен број $k$ нека $\mathbf{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

**Дефиниција 17.** Нека $k \in \mathbf{N}$. За множеството $M$ ќе велиме дека се состои од $k$ елементи ако $M \sim \mathbf{N}_k$. Притоа ќе пишуваме $|M| = k$. По дефиниција земаме дека $|\varnothing| = 0$.

За множеството $M$ ќе велиме дека е *конечно* ако постои $k \in \mathbf{N}$ таков, што $|M| = k$. Во спротивно ќе велиме дека множеството $M$ е *бесконечно*.

Да забележиме дека според теоремата 11 *i*) имаме $\mathbf{N}_k \sim \mathbf{N}_k$, за секој $k \in \mathbf{N}$, па затоа од дефиницијата 17 имаме дека $|\mathbf{N}_k| = k$.

**Теорема 12.** Нека $k \neq 0$. Тогаш, $|M| = k$ ако и само ако $M$ може да се запише во обликот $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $|M| = k$. Тоа значи дека $M \sim \mathbf{N}_k$, т.е. постои биекција $f : \mathbf{N}_k \to M$. Да означиме $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(k) = a_k$. Тогаш,

$$M = \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Обратно, нека $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Тогаш пресликувањето $f : \mathbf{N}_k \to M$ определено со биекција. Навистина, за секој $a_i \in M$ имаме $f(i) = a_i$, што значи дека $f$ е сурјекција. Понатаму, од $i \neq j$ следува $a_i \neq a_j$, па затоа $f(i) \neq f(j)$, т.е. $f$ е и инјекција. Според тоа, $|M| = k$. ♦

Од дефиницијата на конечно множество и од претходните разгледувања следува точноста на тврдењата искажани во следната теорема.

**Теорема 13. а) (принцип на еднаквост).** Ако $|M| = k$ и $M \sim L$, тогаш $|L| = k$.

**б)** Ако $|M| = |L| = k$, тогаш $M \sim L$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). а)** Од $|M|=k$ имаме $\mathbf{N}_k \sim M$. Понатаму, бидејќи $\mathbf{N}_k \sim M$ и $M \sim L$, од теоремата 11 *iii*) следува дека $\mathbf{N}_k \sim L$, што значи дека $|L|=k$.

**б)** Нека $|M|=|L|=k$. Тогаш $\mathbf{N}_k \sim M$ и $\mathbf{N}_k \sim L$, па од теоремата 11 *iii*) следува дека $M \sim L$. ♦

Од теоремата 13 непосредно следува дека конечните множества $M$ и $L$ се еквивалентни ако и само ако имаат ист број на елементи.

**Пример 21.** На колку начини на тројца ученици може да им се поделат 8 исти моливи, така што секој од нив да добие барем еден молив?

***Решение.*** Осумте моливи ќе ги наредиме во низа и на празните места меѓу нив, кои ги има 7, ќе поставуваме две "прегради" како на следниот цртеж.

$$\bullet^{1} \quad \bullet^{2}| \quad \bullet^{3} \quad \bullet^{4} \quad \bullet^{5} \quad \bullet^{6}| \quad \bullet^{7} \quad \bullet$$

Празните места да ги означиме со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Поделбата на цртежот е определена со броевите 2 и 6, т.е. со бројот 26. Сите поделби се определени со следните броеви:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | |
| 34 | 35 | 36 | 37 | | |
| 45 | 46 | 47 | | | |
| 56 | 57 | | | | |
| 67 | | | | | |

Вакви двоцифрени броеви има 21, па од принципот на еднаквост следува дека бројот на поделбите на 8 исти моливи на тројца ученици така што секој од нив да добие барем по еден молив е 21. ♦

Принципот на еднаквост го користиме во случај кога сакаме да го определиме бројот на елементи на некое множество $B$, кога можеме да воспоставиме биекција со некое множество $A$, чиј број на елементи ни е познат или лесно можеме да го пресметаме. Иако формулацијата на овој принцип е едноставна, неговата примена не мора да биде едноставна. Причината за тоа е во фактот што треба да ги препознаеме елементите кои ги пребројуваме. Со други зборови, при решавање на конкретен комбинаторен проблем со пребројување на елементите, треба да се занемарат својствата и фактите кои фигурираат во формулацијата и на елементите да им се придружат апстрактни елементи кои лесно можеме да ги преброиме. Така, во примерот 21 секоја поделба ја поистоветивме со еден двоцифрен број и, како што видовме, таквите броеви лесно ги преброивме.

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**26.** Докажи дека множествата $A=\{3k \mid k \in \mathbf{N}\}$, $B=\{3k+1 \mid k \in \mathbf{N}\}$ и $C=\{3k+2 \mid k \in \mathbf{N}\}$ се еквивалентни меѓу себе.

**27.** Докажи дека множествата $A=\{3k \mid k \in \mathbf{N}\}$ и $B=\{3^k \mid k \in \mathbf{N}\}$ се еквивалентни.

**28.** Докажи дека множествата $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$ и $B = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, ...\}$ се еквивалентни.

**29.** Докажи дека $[0,1) \sim (0,1]$.

**30.** Докажи дека за секои непразни множества $X$ и $Y$ важи $X \times Y \sim Y \times X$.

**31.** На колку начини на тројца ученици можат да им се поделат 10 исти тетратки, така што секој од нив да добие барем една тетратка?

# 6. ПРИНЦИП НА ЗБИР, ПРОИЗВОД, ВКЛУЧУВАЊЕ И ИСКЛУЧУВАЊЕ

Честопати во практиката се среќаваме со проблеми да извршиме пребројување на елементите од дадено множество или да одговориме на прашањето колку елементи од едно множество задоволуваат даден услов. Ваквите проблеми се предмет на проучување на математичката дисциплина комбинаторика, област која и покрај тоа што се занимава со конечните множества обилува со мноштво нерешени проблеми. Овде ние ќе се запознаеме со четирите основни принципи на комбинаториката, а тоа се принципот на збир, производ, вклучување и исклучување, при што посебно ќе се осврнеме на нивната примена во решавањето на елементарни задачи.

Во следните разгледувања под поимот множество ќе подразбираме конечно множество.

**Теорема 14 (принцип на збир).** Ако $A \cap B = \varnothing$, тогаш $|A \cup B| = |A| + |B|$.

**Доказ (За оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $A \cap B = \varnothing$ и $f : A \to \mathbf{N}_n$, $g : B \to \mathbf{N}_m$ се биекции. Ќе докажеме дека пресликувањето $h : A \cup B \to \mathbf{N}_{n+m}$ определено со

$$h(a) = f(a),\ a \in A \text{ и } h(b) = g(b) + n,\ b \in B$$

е биекција. Нека $x, y \in A \cup B$ и $x \neq y$. Можни се два случаи и тоа:

а) $x$ и $y$ му припаѓаат на едно од множествата $A$ и $B$, да кажеме $A$. Тогаш, од дефиницијата на пресликувањето $h$ следува дека $h(x) = f(x)$ и $h(y) = f(y)$ и бидејќи $f$ е биекција, имаме $f(x) \neq f(y)$, што значи $h(x) \neq h(y)$.

б) $x$ и $y$ му припаѓаат на различни множества, да кажеме $x \in A$ и $y \in B$. Тогаш $h(x) = f(x) \leq n < n + 1 \leq g(y) + n = h(y)$, т.е. $h(x) \neq h(y)$.

Според тоа, во секој случај од $x \neq y$ следува $h(x) \neq h(y)$, т.е. $h$ е инјекција.

Нека $p \in \mathbf{N}_{n+m}$. Можни се два случаи и тоа:

а) $p \leq n$ и во тој случај бидејќи $f$ е биекција, постои $z \in A$ таков, што $f(z) = p$. Но тоа, значи дека постои $z \in A \cup B$ таков, што $h(z) = f(z) = p$.

б) $p > n$ и во овој случај $1 \leq p - n \leq m$. Но $g$ е биекција, па затоа постои $z \in B$ таков, што $g(z) = p - n$. Значи постои $z \in A \cup B$ таков, што $p = (p - n) + n = g(z) + n = h(z)$.

Според тоа, во секој случај постои $z \in A \cup B$ таков, што $h(z) = p$, т.е. $h$ е сурјекција.

Конечно, $h$ е инјекција и сурјекција, па значи е биекција. Значи, $A \cup B \sim \mathbf{N}_{n+m}$ од што следува $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$. ♦

Да забележиме дека принципот на збир важи и во случај кога имаме $k$, $k \geq 2$ по парови дисјунктни множества. Имено, точна е следната теорема.

**Теорема 15.** Ако $A_1, A_2, ..., A_k$ е фамилија од $k$, $k \geq 2$ по парови дисјунктни множества, т.е. множества за кои важи $A_i \cap A_j = \varnothing$, за $i \neq j$, тогаш

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k|. \blacklozenge$$

**Пример 22.** Во примерот 21 дадовме решение на проблемот на поделба на 8 еднакви моливи на тројца ученици, при што секој ученик добива барем по еден молив. Истата задача ќе ја решиме користејќи го принципот на збир.

Нека сите поделби на моливите на тројца ученици го формираат множеството $A$. Ова множество ќе го разбиеме на подмножества $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, при што подмножеството $A_1$ ги содржи поделбите при кои првиот ученик добива еден молив, $A_2$ поделбите при кои првиот ученик добива два молива итн. Така, за множествата $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ја имаме следнава табела

| $i$ | $A_i$ | $\lvert A_i \rvert$ |
|---|---|---|
| 1 | (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) | 6 |
| 2 | (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) | 5 |
| 3 | (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) | 4 |
| 4 | (1,3), (2,2), (3,1) | 3 |
| 5 | (1,2), (2,1) | 2 |
| 6 | (1,1) | 1 |
| Вкупно | | 21 |

Сега од принципот на збир имаме

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| = 21. \blacklozenge$$

**Теорема 16 (принцип на производ).** За секои множества $A$ и $B$ важи

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Нека $A$ и $B$ се конечни множества такви што $|A| = m$ и $|B| = n$. Тогаш, од теоремата 12 имаме $A = \{a_1, ..., a_m\}$ и $B = \{b_1, ..., b_n\}$.

За множеството $A \times B$ имаме

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a_1, b_1), ..., (a_m, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_m, b_2), ..., (a_1, b_n), ..., (a_m, b_n)\} \\ &= \{(a_1, b_1), ..., (a_m, b_1)\} \cup (a_1, b_2), ..., (a_m, b_2)\} \cup ... \cup (a_1, b_n), ..., (a_m, b_n)\} \qquad (1) \\ &= (A \times \{b_1\}) \cup (A \times \{b_2\}) \cup ... \cup (A \times \{b_n\}). \end{aligned}$$

Понатаму, $A \times \{b_i\} \cap A \times \{b_j\} = \varnothing$, за $i \neq j$ и бидејќи $|A \times \{b_i\}| = m$ за секој $i = 1,2,...,n$ од (1) и од принципот на збир добиваме

$$|A \times B| = |A \times \{b_1\}| + |A \times \{b_2\}| + ... + |A \times \{b_n\}| = \underbrace{m + m + ... + m}_{n \text{ пати}} = mn = |A| \cdot |B|. \blacklozenge$$

Принципот на производ го има следното обопштување.

**Теорема 17.** Нека $k \geq 2$. Тогаш

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_k|$$

за секои множества $A_i, i = 1,2,...,k$. $\blacklozenge$

**Пример 23.** Меѓу градовите $A$ и $B$ има три директни пата, меѓу градовите $B$ и $C$ има два директни пата, а меѓу градовите $C$ и $D$ има пет директни пата. На колку различни начини може да се стигне од градот $A$ во градот $D$, ако треба само по еднаш да се влезе во секој од градовите $B$ и $C$?

***Решение.*** Со $X, Y, Z$ да ги означиме множествата патишта меѓу градовите $A$ и $B$, $B$ и $C$, $C$ и $D$ соодветно. Тогаш, секоја можност за патување од $A$ до $D$ при наведените услови е елемент на множеството $X \times Y \times Z$ и елементите на ова множество ги даваат сите можности за патување. Од принципот на производ (теорема 17) следува дека бараниот број е

$$|X \times Y \times Z| = |X| \cdot |Y| \cdot |Z| = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30. \blacklozenge$$

**Теорема 18. а) (принцип на исклучување).** Ако $A \subseteq M$, тогаш

$$|M \setminus A| = |M| - |A|.$$

**б) (принцип на вклучување).** За произволни множества $A$ и $B$ важи

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

**Доказ. а)** Од $M = A \cup (M \setminus A)$ и $A \cap (M \setminus A) = \varnothing$, според принципот на збир следува $|M| = |A| + |M \setminus A|$, односно $|M \setminus A| = |M| - |A|$.

**б)** Нека $M = A \cup B$. Тогаш од принципот на исклучување следува дека $|M| = |A| + |M \setminus A|$. Но, бидејќи $M \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, т.е. $B = (M \setminus A) \cup (B \cap A)$ и $(M \setminus A) \cap (A \cap B) = \varnothing$ од принципот на збир следува дека $|B| = |M \setminus A| + |A \cap B|$. Според тоа,

$$|A \cup B| = |A| + |M \setminus A| = |A| + |B| - |A \cap B|. \blacklozenge$$

Во случај на три и четири множества, принципот на вклучување го има следниов облик:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

и

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

**Пример 24.** Во едно одделение има 35 ученици. Од нив, десет ученици имаат оценка пет по математика, 20 ученици имаат оценка пет по историја, додека 27 ученици имаат барем една оценка пет по предметите математика и историја. Колку ученици имаат оценка пет по двата предмети?

***Решение.*** Нека $A$ е множеството ученици што имаат оценка пет по математика и $B$ е множеството ученици што имаат оценка пет по историја. Од условите на задачата имаме $|A| = 10, |B| = 20$ и $|A \cup B| = 27$, а се бара $|A \cap B|$. Од принципот на вклучување имаме $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, односно $27 = 10 + 20 - |A \cap B|$, па затоа $|A \cap B| = 3$. $\blacklozenge$

**Пример 25.** Најди го бројот на природните броеви помали од 100 кои не се деливи ниту со 2, ниту со 3, ниту со 7.

***Решение.*** Нека $M = \{n \mid 1 \le n < 100, n \in \mathbf{N}\}$ и со $A$, $B$ и $C$ да ги означиме множествата од природните броеви помали од 100 кои се деливи со 2, 3 и 7 соодветно. Тогаш, $|A| = 49$, $|B| = 33$, $|C| = 14$, $|A \cap B| = 16$, $|A \cap C| = 7$, $|B \cap C| = 4$ и $|A \cap B \cap C| = 2$. Прво од принципот на исклучување, а потоа од принципот на вклучување имаме

$$|M \setminus (A \cup B \cup C)| = |M| - |A \cup B \cup C| =$$
$$= |M| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$
$$= 99 - 49 - 33 - 14 + 16 + 7 + 4 - 2 = 28.$$

Според тоа, природни броеви кои се помали од 100 и не се деливи ниту со 2, ниту со 3, ниту со 7 има вкупно 28. ♦

### ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**32.** Колку четирицифрени броеви има, кои се деливи со 5 и во чиј декаден запис нема повторување на цифрите?

**33.** Во рамнината се дадени 7 точки, така што никои три не се колинеарни. Колку прави се определени со овие точки?

**34.** На колку начини може да се поделат 8 исти моливи, 9 исти тетратки и 10 исти книги на тројца ученици, така што секој од нив да добие барем по еден предмет од секој вид?

**35.** Во едно одделение има 30 ученици. На колку начини може да се избере претседател, благајник и секретар на одделенската заедница, под услов еден ученик да нема две задолженија?

**36.** Колку петцифрени броеви има, кои се запишуваат со помош на пет различни цифри?

**37.** Во едно одделение има 30 ученици. Секој ученик има оценка пет по географија или по математика. Од нив: 5 ученици имаат пет по математика и по географија; 16 ученици имаат пет по историја и по географија; 20 ученици имаат пет по географија и 25 ученици имаат пет по историја. Колку ученици имаат пет по историја или по географија, а колку ученици имаат пет по математика?

**38.** Од 100 ученици: 24 не учат ниту еден од јазиците: англиски, руски и германски; 48 учат англиски; 8 и англиски и руски; 26 учат германски; 8 учат и германски и англиски; 13 учат и германски и руски; и 28 учат руски јазик. Колку ученици ги учат сите три јазици?

## 7. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле е еден од наједноставните комбинаторни принципи, но тој често се користи во решавањето на разни комбинаторни задачи, па затоа истиот посебно ќе го разгледаме. Наједноставно кажано, овој принцип тврди дека ако, на пример, четири зајаци се сместени во три кафези, тогаш барем во еден кафез ќе има два зајаци.

Во следната теорема ќе дадеме прецизна формулација на принципот на Дирихле.

**Теорема 19 (принцип на Дирихле - елементарен случај).** Нека $n$ е природен број. Ако $n+1$ предмети се распоредени на произволен начин во $n$ кутии, тогаш барем во една кутија има два предмета.

**Доказ.** Да претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет. Бидејќи има само $n$ кутии, добиваме дека во нив се распоредени најмногу $n \cdot 1 = n$ предмети, што ѝ противречи на претпоставката дека се распоредени $n+1$ предмети. ♦

Да забележиме дека принципот на Дирихле кажува дека постои кутија во која има барем два предмети, но не дава начин, односно алгоритам како таа кутија да се најде. Ќе разгледаме неколку примери.

**Пример 26.** Докажи дека во група од 367 луѓе секогаш има барем двајца што имаат роденден во ист ден.

***Решение.*** Годината има најмногу 366 денови (предвид ја земаме и престапната година) и роденденот на секој од групата луѓе е во некој од овие денови. Бидејќи $367 = 366 + 1$, од принципот на Дирихле следува дека барем двајца луѓе од групата имаат роденден во ист ден. ♦

**Пример 27.** Дали може броевите $-1, 0, 1$ да се распоредат во квадратна $5 \times 5$ таблица така, што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала да биде различен.

***Решение.*** Збирот на пет броеви од множеството $\{-1, 0, 1\}$ може да биде број $a$ таков, што $-5 \le a \le 5$, што значи дека збирот може да прими најмногу 11 различни вредности. Но, квадратната $5 \times 5$ таблица има вкупно 12 колони, редови и дијагонали, па од принципот на Дирихле (теорема 19) следува дека барем два збира на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала мораат да бидат еднакви. ♦

**Пример 28.** Дадени се пет произволни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат барем два броја такви, што нивната разлика е делива со 4.

***Решение.*** Секој природен број при делење со 4 дава остаток 0, 1, 2 или 3. Значи постојат само четири можности. Според тоа, меѓу пет природни броеви мора да има барем два кои имаат ист остаток при делење со 4. Јасно, разликата на овие два броја е делива со 4. ♦

**Пример 29.** Нека $a_1, ..., a_n$ се цели броеви. Докажи дека постојат $p, q \in \{0,1,2,...,n\}$, $p < q$ такви, што $n \mid (a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q)$.

***Решение.*** Ги формираме збировите

$$b_1 = a_1$$
$$b_2 = a_1 + a_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Ако еден од овие збирови е делив со $n$, да кажеме $b_k$, тогаш земаме $p = 0, q = k$ и задачата е решена. Нека ниеден од овие збирови не е делив со $n$. Од теоремата за делење со остаток имаме $b_i = ns_i + r_i$, $0 < r_i < n$ за секој $i = 1,2,...,n$. Бидејќи имаме $n$ остатоци $r_1, r_2, ..., r_n$ и тие примаат $n-1$ вредности $1,2,...,n-1$, според принципот на Дирихле заклучуваме дека барем два од овие остатоци се еднакви, т.е. постојат $p$ и $q$ такви, што $r_p = r_q$ и тоа е бараното решение, бидејќи

$$a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_q = b_q - b_p = n(s_q - s_p). ♦$$

Принципот на Дирихле може да се искаже и во поопшта форма, со чија помош можеме да решаваме посложени комбинаторни проблеми. Тоа ќе го направиме во следната теорема.

**Теорема 20 (принцип на Дирихле - општ случај).** Нека $kn+r$ предмети $r \geq 1$ се сместени во $n$ кутии. Тогаш, барем во една кутија се сместени најмалку $k+1$ предмети.

**Доказ.** Да претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по $k$ предмети. Бидејќи има само $n$ кутии добиваме дека во нив се распоредени најмногу $nk$ предмети, што ѝ противречи на претпоставката дека се распоредени $kn+r > nk$ предмети. ♦

Ќе разгледаме неколку примери.

**Пример 30.** Во Република Македонија има повеќе од 2150000 жители и на главата на секој од нив има најмногу по 300000 влакна. Докажи дека во Македонија има барем 8 луѓе со ист број влакна на главата.

***Решение.*** Сите жители ќе ги поделиме во групи според бројот на влакната на главата. Вакви групи има 300001, т.е. група со 0 влакна, група со 1 влакно, ..., група со 300000 влакна, а луѓе има најмалку 2150000. Бидејќи $2150000 = 7 \cdot 300001 + 49993$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека мора да постои група во која има најмалку 8 луѓе со ист број влакна на главата. Доколку тоа не е случај, во секоја група ќе има најмногу по 7 луѓе, па нивниот број ќе биде 2100007, а тоа му противречи на бројот на жителите во Републиката. ♦

**Пример 31.** Во едно одделение 40 ученици правеле три писмени задачи. Никој не добил оценка помала од 3 и секој добил по три различни оценки. Харалампие забележал дека во одделението има најмногу 7 ученици кои имаат иста оценка на секоја од трите писмени задачи.

Дали Харалампие е во право?

***Решение.*** За секој ученик постојат 6 можности, т.е. секој ученик ја добил следната подредена тројка оценки: (3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4) и (5, 4, 3). Затоа, учениците според добиените оценки можеме да ги поделиме на 6 групи. Во одделението има 40 ученици, а според добиените оценки се поделени во 6 групи. Од принципот на Дирихле следува дека постои група во која има најмалку 7 ученици, што значи дека Харалампие е во право. ♦

**Пример 32.** Дадени се 10 различни природни броеви помали од 26. Докажи дека меѓу сите можни разлики на паровите различни броеви од дадените 10 броја, постојат барем три еднакви разлики.

***Решение.*** Дадените 10 броеви да ги подредиме по големина, т.е. нека

$$1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7 < n_8 < n_9 < n_{10} < 26.$$

Ќе докажеме дека меѓу следните девет разлики

$$n_2 - n_1, n_3 - n_2, n_4 - n_3, n_5 - n_4, n_6 - n_5, n_7 - n_6, n_8 - n_7, n_9 - n_8, n_{10} - n_9$$

има барем три еднакви броеви, со што задачата ќе биде решена. Ако меѓу овие 9 разлики нема барем три еднакви, тогаш меѓу нив има најмногу 2 единици, 2 двојки, 2 тројки, 2 четворки и 2 петки. Одовде добиваме дека

$$\begin{aligned} n_{10} - n_1 &= (n_{10} - n_9) + (n_9 - n_8) + (n_8 - n_7) + (n_7 - n_6) + (n_6 - n_5) \\ &\quad + (n_5 - n_4) + (n_4 - n_3) + (n_3 - n_2) + (n_2 - n_1) \\ &\geq 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 25, \end{aligned}$$

т.е. дека $n_{10} \geq n_1 + 25 \geq 26$, што му противречи на фактот дека $n_{10} < 26$. Значи, меѓу посочените 9 разлики мора да има барем три еднакви. ♦

Принципот на Дирихле е познат и во таканаречената геометриска форма. Во овој случај нема да дадеме некои посебни теориски објаснувања, туку истиот ќе го објасниме со примери.

**Пример 33.** Во квадрат со страна $1m$ на произволен начин се сместени 51 точка. Докажи дека меѓу овие 51 точка, постојат три точки кои можат да се покријат со круг чиј радиус е $\frac{1}{7}m$.

***Решение.*** Квадратот да го поделиме на 25 еднакви квадрати со страна $0{,}2m$. Според принципот на Дирихле, постои квадрат со страна $0{,}2m$ кој содржи барем 3 од дадените 51 точка. Земаме 3 точки кои лежат во еден квадрат со страна $0{,}2m$. Но, $\frac{2}{7} > 0{,}2\sqrt{2}$, што значи дека дијагоналата на квадратот е помала од дијаметарот на круг со радиус $\frac{1}{7}m$, па затоа квадратот може да се покрие со круг со радиус $\frac{1}{7}m$, т.е. 3 од дадените 51 точка можат да се покријат со круг со радиус $\frac{1}{7}m$. ♦

**Пример 34.** Во круг со радиус $1m$ на произволен начин се распоредени 51 точка така, што кои било 3 од нив не се колинеарни. Докажи дека постојат 3 точки меѓу нив кои формираат триаголник чија плоштина е помала од $12{,}6dm^2$.

***Решение.*** Кругот го делиме на 25 складни исечоци чиј централен агол е $360^\circ : 25 = 14{,}4^\circ$. Според принципот на Дирихле, постои исечок во кој се наоѓаат барем три точки. Избираме произволни три од тие точки. Плоштината на триаголникот формиран од овие три точки е помала од плоштината на кружниот исечок. Плоштината на кружниот исечок е $\frac{\pi}{25}m^2 < 0{,}126m^2 = 12{,}6dm^2$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**39.** На еден шаховски турнир учествувале $n$ шахисти, при што секој шахист играл со секој шахист по една партија. Докажи дека во секој момент на турнирот постојат барем двајца шахисти со еднаков број дотогаш одиграни партии!

**40.** Дадени се пет произволни цели броеви. Докажи дека меѓу нив постојат барем два чија разлика е делива со 3!

**41.** Докажи дека постои природен број кој е делив со 2002, а првите десет цифри му се 1234567890.

**42.** Во едно одделение има 30 ученици и сите го решавале тестот по математика. Еден од нив, Филип, при решавањето на тестот направил 13 грешки, а другите ученици направиле помалку грешки од Филип. Докажи дека барем тројца ученици направиле ист број грешки (можноста дека постои ученик кој не направил грешка не е исклучена).

**43.** Според пописот во 1994 година во Р. Македонија живееле 2150000 жители во 5990 населени места. Докажи дека постојат барем две населени места со еднаков број жители.

**44.** Седумнаесет научници се допишуваат, секој со секого на три различни теми. Секој пар се допишува само на по една тема. Докажи дека постојат барем тројца научници, кои меѓусебно се допишуваат на иста тема!

**45.** Во една шума во облик на квадрат со страна $1km$, растат 4550 борови стебла со дијаметар не поголем од $50cm$. Докажи дека во таа шума постои правоаголна површина со димензии $10m \times 20m$ на која нема борово стебло.

**46.** Во правоаголник со страни $20cm$ и $25cm$ се сместени 120 квадрати со страна $1cm$ без истите да се преклопуваат. Докажи дека во правоаголникот може да се впише круг со дијаметар $1cm$ кој не се сече со ниту еден од квадратите.

## ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

**1.** **а)** Запиши ги со набројување на нивните елементи множествата

$$C = \{n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ и } n \mid 24\} \text{ и } D = \{2 \cdot 3^n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ и } -3 < n < 7\}.$$ (6 б)

**б)** Дадени се множествата $\mathbf{N}$, $P = \{n \mid n = 3k, k \in \mathbf{N}\}$, $M = \{n \mid n = 3k+1, k \in \mathbf{N}\}$. Каков е односот меѓу овие три множества? (10 б)

**2.** **а)** Најди ја $A \cup B, A \cap B$ и $A \setminus B$ ако $A = \{x \mid -1 \le x < 3, x \in \mathbf{R}\}$ и $B = \{x \mid 2 \le x < 4, x \in \mathbf{R}\}$. (6 б)

**б)** Докажи дека $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. (10 б)

**3.** **а)** Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $f, g : A \to A$ се определени со $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Пресметај $f(f(g(5)))$ и $g(f(g(3)))$. (6 б)

**б)** Нека $A = \{4k - 3 \mid k \in \mathbf{N}\}$. Докажи дека пресликувањето $f : \mathbf{N} \to A$ определено со $f(k) = 4k - 3$ е биекција. (10 б)

**4.** **а)** На колку начини на тројца ученици можат да им се поделат 6 исти моливи така што секој од нив да добие по еден молив. (10 б)

**б)** На колку начини на четворица ученици можат да им се поделат 6 исти тетратки така што секој од нив да добие по една тетратка. (18 б)

**5.** **а)** Една кошаркарска екипа има 15 играчи и секој може да игра на секое место. Колку различни петорки може да се составаат? (10 б)

**а)** Колку седумцифрени броеви има кои се запишуваат со помош на 7 различни цифри? (16 б)

**6.** **а)** Во полињата на квадрат $3 \times 3$ се распоредени броевите 1, 2 и 3. Дали е можен распоред при кој збирот на броевите во секоја колона, ред и дијагонала е различен? (15 б)

**б)** Еден ученик на часот по ликовно воспитување обоил дел од својот лист. Знаејќи дека димензијата на листот е $21cm \times 31cm$ и дека ученикот обоил плоштина од $314cm^2$, докажете дека постојат барем две необоени точки на листот, кои се симетрични во однос на една од симетралите на листот. (20 б)

***Забелешка.*** При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш можеш да го искористиш следниот критериум:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Бодови:** | 34-46 | 47-59 | 60-71 | 72-84 |
| **Оценка:** | 2 | 3 | 4 | 5 |

# ГЛАВА III

# ТЕОРЕМА. МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

## СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Математички поим. Содржина и обем на поим**
2. **Дефинирање на поим. Видови поими**
3. **Поим за тврдење. Видови математички тврдења**
4. **Теореми и аксиоми. Условна и категорична форма на теорема**
5. **Директна и обратна теорема. Потребен и доволен услов**
6. **Правила за изведување на заклучоци**
7. **Методи за докажување на теореми**

## *ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА*

*За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:*

- *поимите и теоремите од теоријата на броеви;*
- *елементите од математичката логика;*
- *дефинициите на паралелограм, ромб, правоаголник, кружница, дијаметар на кружница и слично; и*
- *доказите на теоремите за триаголник и четириаголник.*

## НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да се запознаеш со начинот на формирање на математичките поими и да го осознаеш нивниот обем и содржина;
- да ги усвоиш правилата за дефинирање на поим;
- да се запознаеш со видовите тврдења (општо, делумно, потврдно и одречно);
- да се запознаеш со видовите теореми и со нивната структура;
- да научиш да искажуваш теореми во условна и категорична форма;
- да научиш да ги користиш термините: потребен, доволен и потребен и доволен услов;
- да ги усвоиш и да ги користиш методите за докажување на теореми;
- да се запознаеш со одреден број на теореми и теореми признаци;
- да научиш да искажуваш разни варијанти на формулацијата на една иста теорема;
- да се оспособиш да изведуваш строги математички докази на поедноставни математички тврдења.

При изучувањето на теоријата на броеви докажувавме низа тврдења, а и користевме определени поими. Притоа заклучоците ги изведувавме според правила кои беа прифатени интуитивно, т.е. за овие правила не дававме строго логичко објаснување. Во овој дел, врз основа на елементи на математичката логика, овие правила ќе ги објасниме и ќе можеме да ги користиме во експлицитен, т.е. јавен облик. Исто така, ќе се запознаеме и со основните методи за докажување на теореми, при што примената на овие методи ќе ја илустрираме како на веќе докажани теореми, така и на нови примери.

Во овој дел, покрај со теоремите, ќе се запознаеме и со математичките поими, при што посебно внимание ќе им обрнеме на основните (првични) и изведените поими, како и на причините за ваквата поделба на поимите.

## 1. МАТЕМАТИЧКИ ПОИМ. СОДРЖИНА И ОБЕМ НА ПОИМ

Математиката изучува разни математички објекти: *број, точка, множество, права, рамнина, сложен број, триаголник, паралелограм* итн. При изучувањето на овие објекти неопходно е прецизно да се утврди нивното значење. Така, на пример, со реченицата:

"*За природниот број n ќе велиме дека е сложен ако има барем три природни делители.*"

е утврдено значењето на поимот сложен број и тоа е природен број кој има најмалку три природни делители. Да видиме како е дојдено до овој поим.

Во множеството на природните броеви го разгледуваме прашањето за бројот на делителите на даден природен број. Забележуваме дека бројот 1 има само еден природен делител, броевите 2, 3, 5, 7, ... имаат точно два природни делители, а броевите 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... имаат три или повеќе природни делители. Според тоа, во однос на бројот на делителите, заедничка карактеристика на броевите 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... е "*тие имаат барем три природни делители*" и оваа карактеристика ги опфаќа само овие броеви, па затоа нив можеме да ги опфатиме со еден термин, во случајов со терминот *сложен број*.

Значи, *поимот* претставува мисловно репродуцирање, т.е. мисловна копија на дадена класа објекти и се искажува со реченица која содржи определен *договор* за таа класа објекти. Секој математички поим се означува со *термин* кој обично се состои од еден или од неколку збора, но може да биде претставен и со симбол (знак). Во нашиот пример класата објекти е 4, 6, 8, 9, 10, 12, ..., а терминот е *сложен број*.

Од досега изнесеното можеме да заклучиме дека секој математички поим во себе обединува множество објекти или релации, кое го нарекуваме *обем на поимот* и карактеристично својство кое го имаат само елементите на тоа множество, а кое го нарекуваме *содржина на поимот*.

Така, на пример, обемот на поимот сложен број е множеството {4, 6, 8, 9, 10, 12,...} а неговата содржина е претставена со својството*: број што има барем три природни делители*.

Јасно, содржината и обемот на поимот се заемно поврзани. Имено, содржината строго го определува обемот на поимот и обратно, обемот во целост ја определува содржината на поимот. Зависноста меѓу содржината и обемот на поимот во извесна смисла е обратнопропорционална. Имено, ако *содржината на еден поим се збогати*, тогаш *неговиот обем се намалува*, а ако *обемот на поимот* се *зголеми*, тогаш *неговата содржина ќе се осиромаши*.

**Пример 1.** Да ја разгледаме класата: "*отсечки кои минуваат низ центарот на кружницата и чии крајни точки лежат на кружницата*". Очигледно станува збор за класата дијаметри на кружница.

Ако содржината "*минуваат низ центарот на кружницата и чии крајни точки лежат на кружницата*"се осиромаши на: "*чии крајни точки лежат на кружницата*", тогаш ќе ја добиеме класата: "*отсечки чии крајни точки лежат на кружницата*". Очигледно станува збор за класата тетиви на кружница, која ја содржат класата дијаметри на кружница.

Значи, со осиромашување на содржината се зголемува обемот на поимот. ♦

**Пример 2.** Да ја разгледаме класата: "*паралелограм, такви, што во кој било од нив, сите агли се еднакви меѓу себе*". Очигледно се работи за поимот правоаголник, т.е. тоа е класата правоаголници.

Ако содржината "*сите агли се еднакви меѓу себе*" се збогати на: "*сите страни и сите агли се еднакви меѓу себе*", тогаш ќе ја добиеме класата: "*паралелограми такви, што во кој било од нив, сите страни и сите агли се еднакви меѓу себе*". Очигледно се работи за поимот квадрат, т.е. тоа е класата квадрати, која се содржи во класата правоаголници.

Значи, со збогатување на содржината се стеснува обемот на поимот. ♦

При *обопштувањето* на некој поим, неговата содржина се стеснува и обемот се проширува, додека во процесот на *специјализација* се случува обратното: содржината се проширува, а обемот се стеснува.

Како што видовме, обемот на поимот сложен број се содржи во обемот на поимот природен број.

Нека поимот $\boldsymbol{A}$ има обем $O(\boldsymbol{A})$, а поимот $\boldsymbol{B}$ има обем $O(\boldsymbol{B})$. Ако $O(\boldsymbol{A}) \subset O(\boldsymbol{B})$, тогаш за $\boldsymbol{A}$ ќе велиме дека е *видов поим* во однос на $\boldsymbol{B}$, а $\boldsymbol{B}$ дека е *родов поим* во однос на $\boldsymbol{A}$.

**Пример 3.** *Четириаголник* е многуаголник со четири страни. *Паралелограм* е четириаголник кај кој спротивните страни, две по две, се паралелни.

Според тоа, паралелограм е вид на четириаголник, а четириаголник е вид на многуаголник. Значи, поимот многуаголник е родов поим во однос на поимот паралелограм, но исто така и поимот четириаголник е родов поим во однос на поимот паралелограм. Јасно, за паралелограм поимот четириаголник е *најблискиот род*.♦

Да разгледаме уште еден пример.

**Пример 4.** Дијаметар на кружница е тетива чии крајни точки лежат на кружницата.

Од множеството тетиви на една кружница ние издвоивме едно подмножество со помош на својството "тетиви што минуваат низ центарот на кружницата". Со ова својство наполно се определени дијаметрите на кружницата, т.е. тоа е *нивно карактеристично својство*. Значи, со него се издвојува еден вид тетива, па затоа ова својство го нарекуваме *видова одлика* за поимот дијаметар. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**1.** Одреди го обемот и содржината на следниве поими:
а) паралелограм, б) ромбоид,
в) ромб, г) трапез,
д) рамнокрак триаголник, ѓ) средна линија на триаголник
е) инјективно пресликување и ж) прост број.

**2.** За секој од поимите од претходната задача наведи го неговиот најблизок род. За кои од тие поими можеш да укажеш на "род" што не е "најблизок"? За секој од овие поими наведи и по еден вид (ако има).

**3.** Определи ги видовите одлики на поимот квадрат, ако тој се смета за:
а) вид паралелограм; б) вид ромб; в) вид правоаголник.

# 2. ДЕФИНИРАЊЕ НА ПОИМ. ВИДОВИ ПОИМИ

Реченицата со која се открива содржината на еден поим ја нарекуваме *дефиниција* на тој поим. Со други зборови, со дефиницијата се набројуваат суштинските својства со чија помош се издвојуваат сите објекти и само тие коишто ги имаат споменатите својства.

Така, со реченицата: "*Дијаметар на кружница е тетива чии крајни точки лежат на кружницата.*" се дефинира поимот дијаметар. Таа се состои од:

- *дефиниран поим*, т.е. поимот што се дефинира, а тоа е дијаметар на кружница,
- *логичка врска*, (во примерот "е", а може да биде и "го нарекуваме", "се нарекува", "го викаме" и сл.) и
- *дефинирачки поим,* т.е. родовиот поим со видовите одлики, а тоа е: тетива што минува низ центарот на кружницата.

Како што веќе видовме, поимите најчесто се наоѓаат во родов-видов однос. Затоа *дефиницијата според најблискиот род и видовите одлики* е најдобар и најраспространет начин на дефинирање на поими. Меѓутоа, дефиницијата може да се даде и преку род што не е најблизок до дефинираниот поим, што може да се види од следниот пример.

**Пример 5.** Дијаметар на кружница е отсечка која минува низ центарот на кружницата и чии крајни точки лежат на кружницата. ♦

Јасно, во такви случаи потребни се повеќе видови признаци, чиј број може да се намали само ако се изнајде најблискиот род за дефинирање на нов вид, а тоа во дадениот случај е тетива на кружница.

Се поставува прашање каков треба да биде односот меѓу дефинираниот и дефинирачкиот поим. Одговорот на ова прашање е дека тие треба да се *еквивалентни* и во тој случај велиме дека дефиницијата е *логички издржана* (*правилна*). Затоа секоја реченица којашто претставува дефиниција на некој поим, мора да се подразбира во смисла "*ако и само ако*", дури и тогаш кога е искажана само со условот "*ако*". Така, на пример, дефиницијата за сложен број треба да се сфати во следнава смисла: "*Природниот број n е сложен ако и само ако има барем три природни делители.*"

***а) Правила за дефинирање.*** При дефинирањето на поимите треба да се запазуваат основните правила за дефинирање. Имено, дефиницијата треба:

1. ***да биде потполна, јасна и без непотребни податоци***, т.е. да биде логички совршена, без да вклучува својства коишто се логички зависни едно од друго како што е во примерот: "*Четириаголникот кај кој спротивните страни пар по пар се паралелни и еднакви се вика паралелограм.*" Во овој пример е вклучено својството "*за еднаквост на спротивните страни*" кое е последица од својството "*спротивните страни пар по пар се паралелни*".
2. ***да биде усогласена***, т.е. обемот на дефинираниот поим да се совпаѓа со обемот на дефинирачкиот поим. На пример, дефиницијата: "*Четириаголникот кај кој спротивните страни пар по пар се паралелни се вика паралелограм.*" е усогласена. Доколку дефиницијата не е усогласена, тогаш можни се грешки во кои обемот на дефинирачкиот поим е *поширок* од обемот на поимот што се дефинира, како на пример: "*Дијаметар на кружница е отсечка што минува низ центарот на кружницата.*", или *потесен*, како на пример: "*Ромб е правоаголник со две еднакви соседни страни.*". Така, во првиот случај обемот ги опфаќа сите отсечки кои минуваат низ центарот на кружницата, па тука спаѓаат и отсечките чии крајни точки не лежат на кружницата и тие, како што знаеме, не се нејзини дијаметри. Во вториот случај обемот ги опфаќа само квадратите, т.е. ваквата дефиниција на ромб не е согласна со класата на ромбови.
3. ***да не се влегува во логички бесмислен круг***, т.е. не смее $A$ да се дефинира со $B$, а потоа $B$ да се дефинира со $A$, како што тоа е направено во следниов случај: "*Еден агол се вика прав ако неговите краци се заемно нормални*", а потоа "*За две прави ќе велиме дека се заемно нормални ако се сечат под прав агол*".
4. ***во дефиницијата не смее да се допушта тавтологија***, т.е. објектот да се дефинира сам со себе иако се искажува со други зборови, бидејќи во тој случај ништо не се дефинира, како што е во примерот: "*За две прави ќе велиме дека се нормални ако тие се нормални една на друга.*"
5. ***да не отсуствува родовиот (дефинирачкиот) поим,*** како што е во случајот: "*сложен број е она што има барем три делители*".
6. по можност ***да не е негативна***, како на пример: "*Ако природниот број не е прост, тогаш ќе велиме дека е сложен*" или "*Реалниот број којшто не е рационален, се нарекува ирационален.*"
7. ***да биде "минимална"***, т.е. карактеристичното својство по својата структура треба да биде минимално, на пример: "*Правоаголник е паралелограм со прав агол.*" Да забележиме дека дефиницијата е *минимална ако таа е дадена со помош на најблискиот род*. Претходната дефиниција е минимална, што не е случај со следнава дефиниција на правоаголник: "*Правоаголник е четириаголник што има прав агол и два пара паралелни страни*".

8. ***да не е противречна***, т.е. при дефинирањето на еден поим неговиот обем не смее да биде празно множество, како што е во случајот на следнава "дефиниција": "*За природниот број ќе велиме дека е едноставен ако бројот на неговите делители е еднаков на нула.*" Јасно, не постои природен број кој нема делители, па затоа обемот на претходната "дефиниција" е празно множество, што значи дека во случајот ништо не сме дефинирале.

***б) Основни и изведени поими.*** Во досегашните разгледувања се задржавме на основните правила за дефинирање на поимите, кое може да биде правилно направено на повеќе начини. Со други зборови, постојат повеќе видови дефиниции. Пред да ги разгледаме различните видови дефиниции, ќе направиме класификација на поимите. За таа цел ќе ја разгледаме дефиницијата на поимот квадрат:

"*Квадрат е ромб со прав агол*".

Овој поим е дефиниран со родовиот поим ромб и соодветната одлика (прав агол). Поимот ромб можеме да го дефинираме со поимот паралелограм и соодветна одлика итн. Процесот на изградување на поимите доведува до една од следниве две можности:

1. или еден поим $\boldsymbol{A}$ смее да се дефинира со друг поим $\boldsymbol{B}$ за чие дефинирање е веќе употребен поимот $\boldsymbol{A}$, т.е. ќе допуштиме логички бесмислен круг во дефиницијата,
2. или некои од поимите ќе ги прифатиме без да ги дефинираме.

Секако, втората можност е логична, па затоа таа е прифатена се со цел да не се допушти логички бесмислен круг.

Поимите што не ги дефинираме, т.е. ги прифаќаме без дефиниција, ги нарекуваме *основни поими* бидејќи се во основата на науката и не можат да се изразат со други поими од таа наука.

Една математичка дисциплина обично се гради врз основа на неколку основни поими и врските меѓу нив. Тие овозможуваат да се дефинираат сите други поими од таа дисциплина, кои поими ги нарекуваме *изведени*.

Така, основни поими во геометријата се: *точка, права, рамнина и растојание,* а сите други поими се изведени. Други основни математички поими се: *множество, елемент и број*, кои се среќаваат како основни поими во сите математички дисциплини.

***в) Видови на дефиниции (за оние што сакаат да знаат повеќе).*** Како што веќе рековме, математичките поими може правилно да се дефинираат на повеќе начини. Во таа смисла имаме неколку видови на дефиниции. Ќе наведеме некои од нив.

**1)** ***Дефиниција со помош на најблискиот род и видова одлика***. За овој начин на дефинирање веќе говоревме. Ќе наведеме неколку примери.

**Пример 6. а)** За природниот број $n$ ќе велиме дека е прост ако има точно два природни делители.

**б)** Топка е множеството од сите точки во просторот чиешто растојание до една фиксна точка $O$ е помало или еднакво на даден позитивен број $r$. ♦

Како што веќе рековме, дефиницијата со помош на најблискиот род и видова одлика е најраспространета во математиката, но сепак се користат и други видови дефиниции, како што се:

**2)** ***Генетичка дефиниција.*** Тоа е дефиниција со која се опишува процесот на формирање на поимот што се дефинира.

**Пример 7. а)** Топка е геометриско тело, кое се добива со ротација на круг околу еден негов дијаметар.

**б)** Конус е геометриско тело, кое се добива со ротација на правоаголен триаголник околу една негова катета. ♦

Како што можеме да забележиме, описот на процесот на формирање на поимот, даден во генетичката дефиниција на топка, го занемарува нејзиното карактеристично својство, кое доаѓа до израз во дефиницијата со помош на најблискиот род и видова одлика (пример 6 а)), и е главен недостаток на генетичката дефиниција

**3)** ***Рекурзивна дефиниција.*** Тоа е дефиниција со која се задаваат:

*i)* почетни елементи од класата објекти што се дефинираат,

*ii)* правила за формирање на нови објекти од веќе формираните (тоа најчесто се рекурзивни врски) и

*iii)* ограничување, т.е. логичко толкување дека со *i*) и *ii*) се исцрпуваат сите објекти од разгледуваната класа.

Пример за рекурзивна дефиниција е следниот начин на дефинирање на таканаречената Фибоначиева низа броеви, која има посебна улога во толкувањето на низа природни процеси.

*i)* $a_1 = a_2 = 1$,

*ii)* дадено е правило: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 2,3,4,...$

*iii)* членови на Фибоначиевата низа се сите броеви добиени со *i)* и *ii)* и никои други.

Да забележиме дека според претходната дефиниција, членовите на Фибоначиевата низа се 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... .

**4)** ***Дефиниција искажана со симболички јазик.*** Овој вид на дефиниција честопати се користи во математиката. Така, на пример, од основното образование ти се познати следниве дефиниции искажани со симболичен јазик:

- $a^0 = 1, a \neq 0$,
- $|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0, \end{cases}$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ пати}}$, за $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ итн.

**5)** ***Опис на поим.*** Честопати користиме логички реченици, кои не се дефиниции, но се блиски до дефинициите. Имено, во некои случаи тие ја заменуваат дефиницијата или ја надополнуваат. Кон опис на поимот најчесто се прибегнува кога не е можно да се даде дефиниција на разгледуваниот поим. Таков е случајот со основните поими: точка, права, рамнина итн., кои најчесто ги објаснуваме со некој модел, како на пример:

- *точката* се претставува со допир на моливот до хартијата,
- *правата* ја замислуваме како бескраен затегнат конец, итн.

**6)** ***Индиректна (аксиоматска) дефиниција***. Тоа е дефиниција кога својствата на поимите се откриваат преку аксиоми (почетни тврдења). Така, во елементарната геометрија аксиомите ги откриваат својствата и врските меѓу основните поими: точка, права, рамнина и растојание, без да се дефинираат. Друг пример е воведувањето на множеството на природните броеви $\mathbf{N}$ кое се дефинира со Пеановите аксиоми.

**Пеанови аксиоми.** Множеството $\mathbf{N}$ е непразно и важи:

***i)*** $1 \in \mathbf{N}$.

***ii)*** За секој природен број $k$ постои единствен природен број $k^+$, кој го нарекуваме *следбеник* на $k$.

***iii)*** Ако $k^+ = n^+$, тогаш $k = n$.

***iv)*** $1 \neq k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

***v)*** Ако $S \subseteq \mathbf{N}, 1 \in S$ и од $k \in S$ следува дека $k^+ \in S$, тогаш $S = \mathbf{N}$.

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**4.** Запиши ја дефиницијата на поимот
а) симетрала на отсечка; б) тежишна линија.
Потоа, одреди го дефинирачкиот поим.

**5.** Усоврши ја следнава дефиниција: "Ромб е паралелограм кај кој сите страни се еднакви."

**6.** Дадена е дефиницијата: "Паралелограм е четириаголник кај кој спротивните страни пар по пар се паралелни и еднакви". Анализирај ја и најди минимална дефиниција.

**7.** Искажи ја дефинцијата на поимот трапез. Дали според неа, паралелограмите се трапези?

**8.** Тргнувајќи од дефиницијата на поимот отсечка, наведи ги последователно дефинициите на дефинирачките поими сé додека не дојдеш до некои првични поими.

**9.** Два прости броја $p$ и $q$ се викаат *близнаци*, ако $|p-q|=2$. Такви се на пример, 11 и 13, 17 и 19 итн. По аналогија дефинираме: "Три прости броја $p,q$ и $r$ ги нарекуваме тризнаци ако $|p-q|=|q-r|=2$". Дали оваа дефиниција е противречна?

# 3. ПОИМ ЗА ТВРДЕЊЕ. ВИДОВИ МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

Во математиката, на секој чекор среќаваме реченици со кои се искажува некое својство или врска на математички поими. Ваквите реченици ги нарекуваме тврдења. Попрецизно, под *тврдење* подразбираме логичка форма на мислење, со која се потврдуваат или се одрекуваат некои својства на дадени објекти, појави, процеси, или на некои релации меѓу нив. Тврдењата во кои се среќаваат својства и релации на математички објекти ги нарекуваме *математички тврдења*. Ќе дадеме неколку примери на математички тврдења.

**Пример 8. а)** Еден број е делив со 3 ако збирот на неговите цифри е делив со 3.
**б)** Дијагоналите на паралелограмот заемно се преполовуваат.
**в)** Збирот на внатрешните агли во триаголникот е еднаков на $180^\circ$.
**г)** Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.
**д)** Ако $p \mid a$, тогаш $p \mid ab$, за секој $b \in \mathbf{Z}$.
**ѓ)** Ако еден број е делив со 5, тогаш неговата последна цифра мора да е 0. ♦

Како што можеме да забележиме, секое тврдење се состои од три главни елементи, и тоа:

а) логички *подмет* (или *субјект*) на мислата ($S$) - тоа е оној поим или објект за кој се искажува нешто во тврдењето,

б) логички *прирок* (или *предикат*) на мислата ($P$) - тоа што се искажува,

в) логички *сврзник* (е, има итн.).

**Пример 9. а)** Да го разгледаме тврдењето: "*За секој природен број* $n$, $2^n > n^2$."

Во ова тврдење субјект е "бројот $2^n$", предикат е "поголем од бројот $n^2$", а сврзник е "е".

**б)** Во тврдењето од примерот 8 г) субјект е "дијагоналите на ромбот", предикат е "заемно нормални", а сврзник е "се".

**в)** Во тврдењето од примерот 8 в) субјект е "збирот на внатрешните агли во триаголникот", предикат е "поголем од $180^\circ$", а сврзник е "е". ♦

Во досегашниот дел се запознавме со поимот математичко тврдење и со неговата логичка структура. Што се однесува до поделбата на математичките тврдења, таа може да се направи според повеќе критериуми. Еден од критериумите за поделба на математичките тврдења е дали едно тврдење важи за сите објекти од дадена класа или само за некои од нив, и според овој критериум разликуваме *општо* и *делумно тврдење*. Ако, пак, на објектите од дадена класа им се припишува, односно одрекува некое својство, тогаш имаме *потврдно*, односно *одречно тврдење*. Комбинирајќи ги овие две поделби на тврдењата, ги добиваме следниве видови тврдења:

**1)** ***Општо потврдно тврдење***, кое се искажува во обликот: "*за кој било објект $x$, ако $x$ го има својството $S$, тогаш $x$ го има и својството $P$*". Симболички овој вид на тврдење се запишува со:

$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x)).$$

**Пример 10. а)** Во секој паралелограм спротивните агли се еднакви.

**б)** Во секој рамнокрак трапез дијагоналите се еднакви.

**в)** Секој природен број поголем од 1 е или прост или сложен. ♦

**2)** ***Делумно потврдно тврдење***, кое се искажува во обликот: "*постои објект $x$, којшто го има својството $S$, а го има и својството $P$*". Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\exists x)(S(x) \wedge P(x)).$$

**Пример 11. а)** Некои правоаголници имаат заемно нормални дијагонали.

**б)** Некои триаголници имаа два еднакви агли.

**в)** Во некои триаголници висината и тежишната линија повлечени од едно теме се совпаѓаат. ♦

**3)** ***Општо одречно тврдење***, кое се искажува во обликот: "*ниеден објект $x$, којшто го има својството $S$, го нема својството $P$*". Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow \overline{P}(x)).$$

**Пример 12. а)** Ниеден природен број не е истовремено и прост и сложен број.

**б)** Ниеден триаголник не е истовремено и правоаголен и тапоаголен. ♦

**4)** ***Делумно одречно тврдење***, кое се искажува во обликот: "*постои $x$, којшто го има својството $S$, а го нема својството $P$*". Симболички овој вид тврдење се запишува со:

$$(\exists x)(S(x) \wedge \overline{P}(x)).$$

**Пример 13. а)** Некои трапези немаат еднакви дијагонали.

**б)** Некои триаголници немаат еднакви страни.

**в)** Некои природни броеви немаат повеќе од два природни делители. ♦

### ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**10.** Определи ги субјектот и предикатот за тврдењата од примерот 10.
**11.** Определи ги субјектот и предикатот за тврдењата од примерот 12.
**12.** Запиши ги симболички тврдењата од 10 в), 12 а) и 13 в).
**13.** Наведи по два примера за секој вид тврдења 1) - 4).

## 4. ТЕОРЕМИ И АКСИОМИ. УСЛОВНА И КАТЕГОРИЧКА ФОРМА НА ТЕОРЕМА

**Теореми.** Како што знаеме, тврдењата под а), б), в), г) и д) од примерот 8 се вистинити, т.е. точни, а тврдењето под ѓ) не е вистинито. Јасно, како и секое тврдење, така и математичките тврдења се карактеризираат со нивната вистинитост. Вистинитите тврдења се од посебно значење во математиката. Затоа, за секое математичко тврдење се поставува задачата да се установи неговата вистинитост. Според начинот на утврдување на вистинитоста на математичките тврдења, тие се поделени во две групи, и тоа: *аксиоми* и *теореми*.

**Дефиниција 1.** Математичкото тврдење што е вистинито, а неговата вистинитост е констатирана со доказ, т.е. тоа е логичка последица од други точни тврдења го нарекуваме *теорема* или *изведено тврдење*.

Пред да преминеме на разгледување на структурата на теоремите, да забележиме дека барањето за минималност на дефиницијата е причина за појавата на теоремите. Имено, со запазувањето на ова барање, за да се утврдат другите својства на поимите, кои ги нема во дефиницијата, се појавиле теоремите.

Да ја разгледаме следната теорема за паралелограмот.

**Пример 14.** Ако еден четириаголник е паралелограм, тогаш неговите дијагонали се преполовуваат. ♦

Во оваа теорема се разгледува, прво, математичкиот објект четириаголник при условот: "*тој четириаголник да е паралелограм*", а потоа за таквиот четираголник се тврди дека: "*неговите дијагонали се преполовуваат*". Со други зборови, од претпоставката (условот) дека четириаголникот е паралелограм се заклучува дека неговите дијагонали се преполовуваат.

Како и во претходниот пример, во секоја теорема мора да е јасно искажано:
- под кои услови се разгледува некој математички објект и
- што се тврди за тој објект, т.е. кое негово својство следува.

Условите под кои се разгледува математичкиот објект ги нарекуваме *претпоставки*, а својството кое следува за тој објект го нарекуваме *заклучок на теоремата*.

**Пример 15.** Во теоремата

"*Ако четириаголникот е рамнокрак трапез, тогаш неговите дијагонали се еднакви.*"

претпоставката е "четириаголникот е рамнокрак трапез", а заклучокот е "дијагоналите му се еднакви". ♦

**Аксиоми.** Како што рековме, теорема е математичко тврдење чија вистинитост е констатирана со доказ. Докажувањето на вистинитоста на теоремата е направено со помош на други тврдења чија вистинитост претходно е констатирана. Како и кај математичките поими, и овде постојат две можности:

- или ќе навлеземе во бесмислен логички круг;
- или некои тврдења ќе ги прифатиме за точни, без да ги докажуваме.

Јасно, од логичка гледна точка, втората алтернатива е поприфатлива, па затоа некои тврдења ги прифаќаме за точни без да ги докажуваме.

**Дефиниција 2.** Математичкото тврдење кое без доказ го прифаќаме за точно го нарекуваме *аксиома* или *основно тврдење.*

Аксиомите се тврдења кои лежат во основата на математиката, која во различни свои дисциплини користи различни системи на аксиоми. Притоа за еден систем на аксиоми ќе сметаме дека е добро осмислен ако тој е:

1) ***непротивречен***, што значи дека меѓусебно не смеат да си противречат како аксиомите, така и сите тврдења кои се докажуваат со нивна помош.

2) ***комплетен***, што значи дека при негова реализација секогаш се добива "иста" математичка структура и

3) ***независен***, што значи дека ниедна од аксиомите не смее да може да се докаже со помош на останатите аксиоми, што само по себе значи сведување на минимум на бројот на аксиомите, а со самото тоа и упростување на системот на аксиоми.

***Условна и категорична форма.*** Како што можеме да забележиме, теоремите од примерите 14 и 15 се искажани со користење на формулацијата "*Ако ..., тогаш ...*". Во овој случај велиме дека теоремата е искажана во *условна форма*, т.е. во форма на импликација:

$$p \Rightarrow q\,,$$

и притоа јасно се разграничува условот од заклучокот, т.е. кај оваа формулација делот од реченицата $p$ е услов, а делот од реченицата $q$ е заклучок на теоремата.

Теоремите од примерите 14 и 15 можат да се искажат и на следниов начин:

**Пример 16. а)** Дијагоналите кај паралелограмот се преполовуваат.
**б)** Дијагоналите кај рамнокракиот трапез се еднакви. ♦

Забележуваме дека во овој случај истите теореми се искажани со "категорични" реченици. При ваквото искажување на теоремите велиме, дека тие се дадени во *категорична форма*. Ќе наведеме уште неколку теореми искажани во категорична форма.

**Пример 17. а)** Дијагоналите кај ромбот се заемно нормални.
**б)** Збирот на внатрешните агли во триаголникот е еднаков на $180^\circ$.
**в)** Спротивните агли кај тетивен четириаголник се суплементни.
**г)** Збировите на спротивните страни кај тангентен четириаголник се еднакви. ♦

Забележуваме дека категоричната форма за искажување на теоремите се одликува со краткост во формулацијата, па затоа оваа формулација честопати се применува. Меѓутоа, оваа форма има и еден не така мал недостаток, а тоа е што условот и заклучокот не се експлицитно одделени. Затоа, во случај кога една теорема е искажана во категорична форма пожелно е истата да ја искажеш во условна форма, а потоа да ја докажеш односно користиш. Обиди се теоремите од примерот 17 да ги искажеш во условна форма.

### ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**14.** Дали е теорема следново тврдење:
а) Во секој правоаголник дијагоналите се заемно нормални.
б) Во секој паралелограм аглите што лежат на иста страна се суплементни.

**15.** Определи ги претпоставките и заклучокот на теоремата:
а) Ако еден број е делив со 2 и со 5, тогаш тој е делив со 10.
б) Агли со нормални краци се еднакви или суплементни.

**16.** Определи ги условот и заклучокот на следнава теорема:
а) Цел број чијашто последна цифра е 0, е делив со 5.
б) Еднаквите тетиви во една кружница се на исто растојание од центарот на кружницата.
в) Дијагоналите на квадратот се еднакви меѓу себе.

**17.** Определи ја формата во која е искажана теоремата, а потоа искажи ја во другата форма.
а) Ако два агли се напоредни, тогаш тие се суплементни.
б) Агли со заемно паралелни краци се еднакви или суплементни.
в) Наизменичните агли на трансферзалата на две паралелни прави се еднакви.
г) Ако еден број е делив со 6, тогаш тој е делив со 2 и со 3.
д) Во рамнокрак триаголник, висината и тежишната линија повлечени од врвот се совпаѓаат.

**18.** Избери една теорема и искажи ја во условна форма, а потоа во категорична форма.

## 5. ДИРЕКТНА И ОБРАТНА ТЕОРЕМА. ПОТРЕБЕН И ДОВОЛЕН УСЛОВ

***а) Директна и обратна теорема.*** Како што веќе рековме кај теоремите меѓу условот (претпоставката) $p$ и заклучокот $q$ постои причинско-последична врска која во условна форма се искажува со импликацијата $p \Rightarrow q$. Логично е да се запрашаме што се случува ако претпоставката и заклучокот си ги заменат местата. Во оваа смисла ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 3.** Ако $p \Rightarrow q$ е теорема, тогаш импликацијата $q \Rightarrow p$ ја нарекуваме *обратно тврдење* на теоремата $p \Rightarrow q$, која уште ја нарекуваме и директно тврдење.

**Пример 18. а)** За теоремата

*"Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.",*

обратното тврдење гласи:

*"Ако дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални, тогаш тој е ромб."*

**б)** За теоремата:

*"Дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат."*

обратното тврдење гласи:

*"Четириаголникот во кој дијагоналите се преполовуваат е паралелограм.",* ♦

Бидејќи кај делтоидот дијагоналите се заемно нормални и делтоидот не е ромб, заклучуваме дека обратното тврдење на теоремата во примерот 18 а) не е точно. Меѓутоа, обратното тврдење на теоремата во примерот 18 б) е точно тврдење, т.е. во овој случај обратното тврдење е повторно теорема. Така, ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 4.** Ако обратното тврдење на една теорема е точно, тогаш тоа го нарекуваме *обратна теорема.*

Математиката како наука тежнее записите да се колку што е можно поедноставни и пократки. Токму затоа, ако обратното тврдење $q \Rightarrow p$ на теоремата $p \Rightarrow q$ исто така е теорема, тогаш двете теореми најчесто, со помош на еквиваленција $p \Leftrightarrow q$ се запишуваат како една. Ќе разгледаме неколку примери.

**Пример 19. а)** Теоремите во примерот 18 б) можеме да ги искажеме на следниот начин:

*"Четириаголникот е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат"*

**б)** Теоремата:

*"Ако бројот $n$ е делив со 3, тогаш збирот на неговите цифри е делив со 3."*

и нејзината обратна теорема:

*"Ако збирот на цифрите на бројот $n$ е делив со 3, тогаш тој е делив со 3."*

заедно ги искажуваме на следниов начин:

*"Бројот $n$ е делив со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е делив со 3."*

***б) Потребен и доволен услов.*** Како што веќе рековме, секоја теорема може да се искаже во условна форма, т.е. во форма на импликација $p \Rightarrow q$. Јасно при искажувањето на теоремите во форма на импликација, исказите $p$ и $q$ се во причинско-последична врска, т.е. тие се меѓу себе содржински поврзани. Ваквите импликации ги нарекуваме *условни искази.*

Според тоа, секоја математичка теорема, според својата логичка структура е условен исказ:

$$\text{"Ако } p\text{, тогаш } q\text{."} (p \Rightarrow q),$$

чијашто вистинитост е докажана за множеството објекти за кои е формулирана теоремата.

Ако имаме променлива $x$, тогаш условот $p$ и заклучокот $q$ на теоремата $p \Rightarrow q$ се предикати кои ги означуваме со $p(x)$ и $q(x)$, соодветно, и притоа импликацијата $p(x) \Rightarrow q(x)$ е вистинита за секоја вредност на променливата $x$, што значи дека за секој $x$ е точен исказот $p(x) \Rightarrow q(x)$. Притоа велиме дека исказот $q(x)$ логички следува од исказот $p(x)$, односно дека заклучокот $q$ на теоремата $p \Rightarrow q$ е *логичко следство* од условот $p$, што значи дека кога е вистинито $p$, задолжително е вистинито $q$. Тоа значи дека заклучокот на теоремата $q$ е *неопходно следство* (*потребен услов*) на условот $p$, а условот $p$ на истата теорема е *доволна основа* (*доволен услов*) за нејзиниот заклучок $q$.

Погоре споменатите термини потребен услов и доволен услов имаат посебно значење во математиката, токму поради нивната тесна врска со поимот теорема. Имено, секоја теорема може да се искаже со помош на овие два термини, па затоа на нив подетално ќе се осврнеме.

*Потребен услов* на некое тврдење е таков услов без чие исполнување тврдењето не може да биде точно. Да разгледаме еден пример.

**Пример 20.** Да ја разгледаме теоремата:

"*Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.*"

Заклучокот "*дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални*" е потребен услов за тврдењето "*четириаголникот е ромб*", бидејќи за четириаголник кај кој дијагоналите не се заемно нормални, тврдењето "*четириаголникот е ромб*" со сигурност не е точно, како на пример кај рамнокракиот трапез.

Оваа теорема со помош на терминот потребен услов може да се искаже на следниов начин:

"*Потребен услов за еден четириаголник да биде ромб е неговите дијагонали да се заемно нормални.*" ♦

Од друга страна, потребниот услов на една теорема може да биде исполнет за некоја класа на математички објекти, но не мора да биде последица на претпоставката. Последново ќе го илустрираме на следниот пример.

**Пример 21.** Во теоремата

"*Ако четириаголникот е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви меѓу себе.*",

потребен услов е тврдењето "*четириаголникот има еднакви дијагонали*". Меѓутоа овој услов го задоволува и секој рамнокрак трапез, а како што знаеме рамнокракиот трапез не е паралелограм, што значи дека во случајот на рамнокракиот трапез потребниот услов не е последица од претпоставката. ♦

Од досега изнесеното следува, дека ако теоремата е искажана во условна форма $p \Rightarrow q$, наместо "*Ако* $p$, *тогаш* $q$", во терминот потребен услов таа може да се искаже на еден од следниве начини:

а) "Потребен услов за $p$ е $q$" или

б) "$q$ е потребен услов за $p$",

што значи дека во секоја теорема *последицата е потребен услов за претпоставката.*

*Доволен услов* за едно тврдење е таков услов при чие исполнување даденото тврдење е задолжително вистинито.

**Пример 22.** Во теоремата

"*Ако збирот на цифрите на природниот број $n$ е делив со 9, тогаш тој се дели со 3.*"

претпоставката "*збирот на цифрите на природниот број $n$ се дели со* 9" е доволен услов за тврдењето "*природниот број $n$ е делив со* 3", бидејќи природен број чиј збир на цифри е делив со 9 сигурно е делив со 9, па значи и со 3.

Оваа теорема со помош на терминот потребен услов може да се искаже на следниов начин:

"*Доволен услов за природниот број $n$ да се дели со* 3 *е збирот на неговите цифри да се дели со* 9." ♦

Да забележиме дека во претходниот пример доволниот услов "*збирот на цифрите на природниот број $n$ се дели со* 9" не е и потребен за условот "*природниот број $n$ е делив со* 3". Навистина, постојат и други броеви кои се деливи со 3, а чиј збир на цифри не се дели со 9, а тоа се сите природни броеви чиј збир на цифри се дели со 3, а не се дели со 9. Овој пример, всушност, непосредно укажува на разликата на термините потребен и доволен услов.

Од досега изнесеното следува дека ако теоремата е искажана во условна форма $p \Rightarrow q$, наместо "*Ако $p$, тогаш $q$*", во терминот доволен услов таа може да се искаже на еден од следниве начини:

а) "Доволен услов за $q$ е $p$" или

б) "$p$ е доволен услов за $q$",

што значи дека во секоја теорема *претпоставката е доволен услов за последицата.*

Како што видовме, ако теоремата е искажана во условна форма $p \Rightarrow q$, тогаш претпоставката $p$ е *доволен услов* за заклучокот $q$, а заклучокот $q$ е *потребен услов* за претпоставката $p$. Според тоа, една иста теорема која што е искажана со помош на потребен услов за еден поим може да се искаже со помош на доволен услов за друг поим. Последното ќе го илустрираме на следниот пример.

**Пример 23. а)** Теоремата од примерот 20 во терминот доволен услов се искажува на следниов начин:

"*Доволен услов за еден четириаголник да има заемно нормални дијагонали е тој четириаголник да биде ромб.*"

**б)** Теоремата од примерот 17 в) во терминот доволен услов се искажува на следниов начин:

"*Доволен услов за спротивните агли на еден четириаголник да се суплементни е тој четириаголник да е тетивен.*" ♦

Претходно кажавме дека заклучокот $q$ не е секогаш доволен услов за претпоставката $p$. Меѓутоа, во низа случаи во теоремата $p \Rightarrow q$ заклучокот $q$ е и доволен услов за $p$, и тогаш велиме дека $q$ е *потребен и доволен услов* за $p$ (или $p$ е потребен и доволен услов за $q$). Всушност, во овој случај станува збор за еквиваленција, т.е. $p \Leftrightarrow q$. Последното ќе го илустрираме на следниот пример.

**Пример 24.** Во термините потребен и доволен услов теоремата
"*Четириаголникот е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат.*"
можеме да ја искажеме на следниот начин
"*Потребен и доволен услов за еден четириаголник да биде паралелограм е неговите дијагонали да се преполовуваат*" ♦

Во претходниот дел ги разработивме термините потребен услов, доволен услов и потребен и доволен услов. Обиди се, во овие термини да ги искажеш општите признаци за деливост и посебните признаци за деливост со 2, 3, 4, 5 и 9.

Во врска со поимите потребен услов, доволен услов и потребен и доволен услов може да се направи класификација на теоремите искажани за даден поим. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 5.** Ако со една теорема се дава потребен услов за некој поим, тогаш таа се вика *теорема-својство* за тој поим.

Ако со една теорема се искажува доволен услов за еден поим, тогаш таа се вика *теорема-признак* за тој поим.

Теорема, пак, со која се искажува потребен и доволен услов за еден поим се вика *теорема-карактеристично својство* за тој поим.

**Пример 25. а)** Теоремата "*Потребен услов за еден четириаголник да биде ромб е неговите дијагонали да се заемно нормални.*" е теорема-својство.

**б)** Теоремите искажани во примерот 23 се теореми-признаци.

**в)** Теоремата искажана во примерот 24 е теорема-карактеристично својство. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**19.** Дадени се теоремите:
а) Во секој правоаголник дијагоналите заемно се преполовуваат.
б) Во секој паралелограм аглите што лежат на иста страна се суплементни.
в) Ако еден број е делив со 2 и со 5, тогаш тој е делив со 10.
г) Агли со нормални краци се еднакви или суплементни.
Формулирај го обратното тврдење; дали и тоа е теорема?

**20.** Дадени се теоремите:
а) Ако два агли се напоредни, тогаш тие се суплементни.
б) Ако два агли имаат заемно паралелни краци, тогаш тие се еднакви или суплементни.
в) Ако два агли се наизменични агли на трансверзалата на две паралелни прави, тогаш тие се еднакви.
Запиши ги во категоричка форма, а потоа искажи ги во терминот доволен услов.

**21.** Дадени се теоремите:
а) Цел број чијашто последна цифра е 0 е делив со 5.

б) Еднаквите тетиви во една кружница се на исто растојание од центарот на кружницата.
в) Дијагоналите на квадратот се еднакви меѓу себе.
г) Број што е делив со 6 е делив со 2 и со 3.
Запиши ги во условна форма, а потоа искажи ги во терминот потребен услов.

**22.** а) Дали во теоремите од задачата 20 доволниот услов е и потребен?
б) Дали во теоремите од задачата 21 потребниот услов е и доволен?

# 6. ПРАВИЛА ЗА ИЗВЕДУВАЊЕ НА ЗАКЛУЧОЦИ

При изучувањето на елементите од математичката логика се запозна со конјункцијата, дисјунцијата, негацијата, импликацијата и еквиваленцијата. Притоа научи дека:

1) ***Конјункцијата*** " $p$ и $q$ " на два искази $p$ и $q$ е исказ, вистинит кога обата исказа $p$, $q$ се вистинити, а невистинит - кога барем едниот од нив е невистинит.
2) ***Дисјункцијата*** " $p$ или $q$ " на два искази $p$ и $q$ е исказ, вистинит кога барем едниот од исказите $p$, $q$ е вистинит, а невистинит - кога обата се невистинити.
3) ***Негацијата*** $\neg p$ е вистинит исказ кога исказот $p$ е невистинит, а невистинит кога исказот $p$ е вистинит.
4) ***Импликација*** на исказите $p$ и $q$ се вика исказот, означен со симболот $p \Rightarrow q$, којшто е невистинит кога $p$ е вистинит и $q$ е невистинит, а е вистинит во сите други случаи.
5) ***Еквиваленција*** на исказите $p$ и $q$ се вика исказот, означен со симболот $p \Leftrightarrow q$, којшто е вистинит кога исказите $p$ и $q$ имаат иста вистинитосна вредност, а невистинит кога $p$ и $q$ имаат спротивни вистинитосни вредности.

Исто така, се запозна со исказните формули и научи дека секоја исказна формула може да биде *тавтологија, контрадикција* или *неутрална исказна формула*. Понатаму, од сите логички формули тавтологиите имаат посебно значење, бидејќи секоја тавтологија е некој ***логички закон*** или ***закон на мислењето***.

Во натамошниот дел, користејќи го претходно изнесеното, ќе се запознаеме со некои правила за изведување на заклучоци.

**а) *Модус понен (правило за одделување).*** Да ја разгледаме исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q. \qquad (1)$$

За да утврдиме дека од $p \Rightarrow q$ и $p$ следува заклучокот $q$, доволно е да докажеме дека исказната формула (1) е тавтологија. Последното ќе го направиме користејќи ја следната таблица на вистинитост.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | T |
| $\perp$ | T | T | $\perp$ | T |
| $\perp$ | $\perp$ | T | $\perp$ | T |

Од претходната таблица заклучуваме дека исказната формула (1) е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *модус понен* или *правило за одделување*. Во случајот исказите $p \Rightarrow q$ и $p$ се *претпоставки*, а исказот $q$ е *заклучок*.

Пред да наведеме примери во кои ќе го применуваме ова правило, да забележиме дека истото уште се запишува во вид на шема на следниов начин: $\frac{p \Rightarrow q, p}{q}$. Да споменеме дека во последната шема запирката во броителот го заменува сврзникот "и", а дробната црта зборот "заклучок" или "следува".

**Пример 25. а)** Имаме:

1) Ако $x = a$, тогаш $x^3 = a^3$.
2) $x = a$.
***Заклучок.*** $x^3 = a^3$.

Да ја појасниме примената на модус поненс. Имаме исказ $p: x = a$ и исказ $q: x^3 = a^3$, па затоа во 1) и 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и $p$, од кои следува заклучокот $q$ т.е. $x^3 = a^3$.

**б)** Имаме:

1) Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра.
2) Врне дожд.
***Заклучок.*** Улицата е мокра.

Да ја појасниме примената на модус поненс. Имаме исказ $p$: "*Врне дожд*" и исказ $q$: "*Улицата е мокра*", па затоа во 1) и 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и $p$, од кои следува заклучокот $q$, т.е. "*Улицата е мокра*". ♦

**б) *Модус толенс.*** Да ја разгледаме исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p\,. \qquad (2)$$

За да утврдиме дека од $p \Rightarrow q$ и $\neg q$ следува заклучокот $\neg p$, доволно е да докажеме дека исказната формула (1) е тавтологија. Последното ќе го направиме користејќи ја следната таблица на вистинитост.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | $\perp$ | $\perp$ | T | T | T |
| T | $\perp$ | $\perp$ | T | $\perp$ | $\perp$ | T |
| $\perp$ | T | T | $\perp$ | T | $\perp$ | T |
| $\perp$ | $\perp$ | T | T | T | $\perp$ | T |

Од претходната таблица заклучуваме дека исказната формула (1) е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *модус толенс*. Пред да наведеме примери во кои ќе го применуваме ова правило, да забележиме дека истото уште се запишува во вид на шема на следниот начин: $\frac{p \Rightarrow q, \neg q}{\neg p}$.

**Пример 26. а)** Имаме:

1) Ако $x = 1$, тогаш $x^3 = 1$.
2) $x^3 \neq 1$.
***Заклучок.*** $x \neq 1$.

Да ја појасниме примената на модус толенс. Имаме исказ $p: x=1$ и исказ $q: x^3=1$, па затоа во 1) и 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и $\neg q$, од кои следува заклучокот $\neg p$, т.е. $x \neq 1$.

**б)** Имаме:

1) Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра.
2) Улицата не е мокра.
***Заклучок.*** Не врне дожд.

Да ја појасниме примената на модус толенс. Имаме исказ $p$: "*Врне дожд*" и исказ $q$: "*Улицата е мокра*", па затоа во 1) и 2) се дадени претпоставките $p \Rightarrow q$ и $\neg q$, од кои следува заклучокот $\neg p$, т.е. "*Не врне дожд*".

**в)** Имаме:

1) Ако четириаголник е ромб, тогаш дијагоналите се нормални.
2) Дијагоналите не се нормални.

***Заклучок.*** Четириаголникот не е ромб. ♦

**в)** ***Хипотетички силогизам.*** Да ја разгледаме исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r). \tag{3}$$

Ќе докажеме дека оваа исказна формула е тавтологија. Тоа ќе го направиме користејќи ја следната вистинитосна таблица.

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow r$ | $p \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | $\perp$ | T | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | T |
| T | $\perp$ | T | $\perp$ | T | T | $\perp$ | T |
| T | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | T | $\perp$ | $\perp$ | T |
| $\perp$ | T | T | T | T | T | T | T |
| $\perp$ | T | $\perp$ | T | $\perp$ | T | $\perp$ | T |
| $\perp$ | $\perp$ | T | T | T | T | T | T |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | T | T | T | T | T |

Од претходната таблица заклучуваме дека исказната формула (3) е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *хипотетички силогизам*. Пред да наведеме примери во кои ќе го применуваме ова правило, да забележиме дека истото уште се запишува во вид на шема на следниов начин: $\frac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$.

**Пример 27. а)** Имаме:

1) Ако збирот на цифрите на бројот $n$ е делив со 9, тогаш $n$ е делив со 9.
2) Ако бројот $n$ е делив со 9, тогаш $n$ е делив со 3.
***Заклучок.*** Ако збирот на цифрите на бројот $n$ е делив со 9, тогаш $n$ е делив со 3.

**б)** Имаме:

1) Ако дијагоналите на четириаголник $ABCD$ се преполовуваат, тогаш тој е паралелограм.
2) Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш $\overline{AB} = \overline{CD}$.

***Заклучок.*** Ако дијагоналите на четириаголник $ABCD$ се преполовуваат, тогаш $\overline{AB}=\overline{CD}$. ♦

Да забележиме дека правилото за хипотетички силогизам може да се обопшти. Притоа имаме

$$\frac{p\Rightarrow p_1,\ p_1\Rightarrow p_2,\ p_2\Rightarrow p_3,\ \ldots,p_{k-1}\Rightarrow p_k,\ p_k\Rightarrow q,}{p\Rightarrow q}. \tag{4}$$

**г)** ***Правило на контрапозиција.*** Да ја разгледаме исказната формула

$$(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p). \tag{5}$$

Ќе докажеме дека оваа исказна формула е тавтологија. Тоа ќе го направиме користејќи ја следната вистинитосна таблица.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p\Rightarrow q$ | $\neg q\Rightarrow\neg p$ | $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | $\perp$ | $\perp$ | T | T | T |
| T | $\perp$ | $\perp$ | T | $\perp$ | $\perp$ | T |
| $\perp$ | T | T | $\perp$ | T | T | T |
| $\perp$ | $\perp$ | T | T | T | T | T |

Од претходната таблица заклучуваме дека исказната формула (5) е тавтологија, што значи дека таа е логички закон кој го нарекуваме *правило за контрапозиција*. Пред да наведеме примери во кои ќе го применуваме ова правило, да забележиме дека истото уште се запишува во вид на шема на следниов начин: $\frac{p\Rightarrow q}{\neg q\Rightarrow\neg p}$.

**Пример 28. а)** Имаме:

Ако цифрата на единиците на природниот број $n$ е 0 или 5, тогаш тој е делив со 5.

***Заклучок.*** Ако природниот број $n$ не е делив со 5, тогаш неговата цифра на единици е различна од 0 и 5.

**б)** Имаме:

Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.

***Заклучок.*** Ако дијагоналите не се заемно нормални, тогаш четириаголникот не е ромб. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**23.** Утврди кои од следните заклучоци се правилно изведени и врз основа на кое правило.

**а)** 1) Ако бројот $n$ завршува со нула, тогаш $n$ е делив со 2.
2) Бројот $n$ завршува со нула.
***Заклучок.*** Бројот $n$ е делив со 2.

**б)** 1) Ако бројот $n$ завршува со нула, тогаш $n$ е делив со 2.
2) Бројот $n$ не е делив со 2.
***Заклучок.*** Бројот $n$ не завршува со нула.

**в)** 1) Ако бројот $n$ завршува со нула, тогаш $n$ е делив со 2.
2) Бројот $n$ не завршува со нула.
***Заклучок.*** Бројот $n$ не е делив со 2.

**г)** 1) Ако четириаголникот $ABCD$ е делтоид, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
2) Четириаголникот $ABCD$ е делтоид.
***Заклучок.*** Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.

**д)** 1) Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
2) Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.
***Заклучок.*** Четириаголникот $ABCD$ е ромб.

**24.** Утврди кои од следните заклучоци се правилно изведени и врз основа на кое правило.

**а)** Ако четириаголникот $ABCD$ е делтоид, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
***Заклучок.*** Ако дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ не се заемно нормални, тогаш тој не е делтоид.

**б)** Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
***Заклучок.*** Ако четириаголникот $ABCD$ не е ромб, тогаш неговите дијагонали не се заемно нормални.

**в)** Ако бројот $n$ завршува со една од цифрите 0, 2, 4, 6 или 8, тогаш $n$ е делив со 2.
***Заклучок.*** Ако бројот $n$ не е делив со 2, тогаш $n$ не завршува на цифрата 0, 2, 4, 6 и 8.

**25.** Утврди кои од следните заклучоци се правилно изведени и врз основа на кое правило.

**а)** 1) Ако во четириаголникот $ABCD$ аглите што лежат на иста страна се суплементни, тогаш тој е паралелограм.
2) Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш негови дијагоналите се преполовуваат.
***Заклучок.*** Ако во четириаголникот $ABCD$ аглите што лежат на иста страна се суплементни, тогаш неговите дијагонали се преполовуваат.

**б)** 1) Ако дијагоналите на делтоидот $ABCD$ се преполовуваат, тогаш тој е ромб.
2) Ако четираголникот $ABCD$ е ромб, тогаш триаголниците $BDA$ и $BDC$ се рамнокраки.
***Заклучок.*** Ако дијагоналите на делтоидот $ABCD$ се преполовуваат, тогаш триаголниците $BDA$ и $BDC$ се рамнокраки.

**в)** 1) Ако $a \mid b$ и $a \mid c$, тогаш $a \mid (bx)$ и $a \mid (cy)$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$.
2) Ако $a \mid (bx)$ и $a \mid (cy)$, за секои $x, y \in \mathbf{Z}$, тогаш $a \mid (bx + cy)$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$.
***Заклучок.*** Ако $a \mid b$ и $a \mid c$, тогаш $a \mid (bx + cy)$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$.

# 7. МЕТОДИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ НА ТЕОРЕМИ

При изучувањето на елементите од теоријата на броеви и множествата и комбинаториката усвоивме и докажавме повеќе теореми. Притоа, не се осврнавме посебно на методите за докажување и правилата на логичко заклучување, иако истите преќутно ги користевме. Пред да преминеме на разгледување на методите за докажување на математички тврдења, ќе се осврнеме на прашањето што значи да се докаже една теорема.

Да се докаже една теорема значи да се установи точноста на нејзиниот заклучок со помош на логички расудувања, при што се користат: претпоставките на теоремата, правилата за изведување на заклучоци, дефиниции и други тврдења за кои е констатирано дека се вистинити.

Според тоа, *доказ на теорема* претставува конечна низа од реченици $T_1, T_2, ..., T_k$, такви што секоја од нив е или аксиома, или дефиниција, или тврдење чија вистинитост е претходно докажана според правилата за изведување на заклучоци. Ако постои една таква низа тврдења $T_1, T_2, ..., T_k$ која завршува со тврдењето $T$, тогаш тврдењето $T$ всушност е теоремата која ја докажуваме.

Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на методите на докажување на теоремите, кои според начинот на нивното реализирање ги делиме на *директни и индиректни.*

**а) Директни методи за докажување.** Нека е дадена теоремата $A \Rightarrow B$. Под *директен метод* за докажување на теоремата $A \Rightarrow B$ го подразбираме оној метод кај кој заклучокот $B$ се изведува со директно користење на претпоставката $A$. Претходно споменавме дека директниот метод по својата форма може да биде:

- *метод со напредување (синтетички метод)* при кој се поаѓа од претпоставката и се стигнува до заклучокот и
- *метод со враќање (аналитички метод),* при кој се поаѓа од заклучокот и се стигнува до претпоставката.

**а1) Метод со напредување (синтетички метод).** Да ја разгледаме теоремата $A \Rightarrow B$. За да ја докажеме оваа теорема, треба да докажеме дека нејзиниот заклучок $B$ е логичко следство од претпоставката $A$.

За да докажеме една теорема $A \Rightarrow B$, потребно е да се располага со:

1) определена фамилија $\boldsymbol{F}$ од искази $I_1, I_2, ..., I_k$, кои се вистинити за разгледуваното множество објекти и
2) правила за изведување на заклучоци.

Притоа, ако доказот на тврдењето $A \Rightarrow B$, се реализира според логичката шема:

$$(A \wedge \boldsymbol{F}) \Rightarrow B_1,\ B_1 \Rightarrow B_2,\ ...,\ B_{n-1} \Rightarrow B_n,\ B_n \Rightarrow B$$

каде што $\boldsymbol{F}$ е фамилијата вистинити искази и $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n, B, A$ е конечна низа од реченици, тогаш ќе велиме дека тврдењето е докажано со методот на напредување.

Според тоа, директен доказ со напредување претставува низа од правилни расудувања, таква што заклучокот на секое од нив влегува како претпоставка на некое од следните расудувања, а заклучокот на последното расудување е заклучокот во самата теорема. Ќе разгледаме два примера.

**Пример 29.** Ќе го анализираме доказот на теоремата:

"*Ако* $a, b \in \mathbf{N}$, $a \mid b$ *и* $b \mid a$, *тогаш* $a = b$."

***Претпоставки*** $A$: "$a, b \in \mathbf{N}$, $a \mid b$ и $b \mid a$". ***Заклучок*** $B$: "$a = b$."

***Тврдење*** $B_1$: "постои $q \in \mathbf{N}$ таков, што $b = aq$ и постои $p \in \mathbf{N}$ таков, што $a = bp$", (следува од претпоставките и дефиницијата за деливост).

***Тврдење*** $B_2$: "$b = b(pq)$", (следува од $B_1$: $b = aq$, $a = bp$ и асоцијативниот закон за множење на природни броеви: $b = aq = (bp)q = b(pq)$).

***Тврдење*** $B_3$ : " $pq=1$ , $p,q\in\mathbf{N}$ ", (следува од $B_2$ : $b=b(pq)$ , $b\neq 0$ и законот за кратење).

***Тврдење*** $B_4$ : " $p=q=1$ ", (следува од $B_3$ : $pq=1$ , $p,q\in\mathbf{N}$ и својствата на природните броеви),

***Тврдење*** $B$ : " $a=b$ ", (следува од $B_4$ : " $p=q=1$ и $a=bp=b\cdot 1=b$ ).

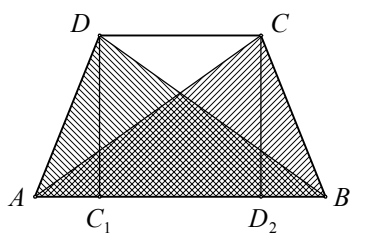
Конечно, имаме $A\Rightarrow B_1$, $B_1\Rightarrow B_2$, $B_2\Rightarrow B_3$, $B_3\Rightarrow B_4$, $B_4\Rightarrow B$ од што според хипотетичкиот силогизам добиваме $A\Rightarrow B$ . ♦

**Пример 29.** Ќе ја докажеме теоремата:

"*Ако еден трапез е рамнокрак, тогаш дијагоналите на тој трапез се еднакви.*"

***Претпоставка*** $p$ : "Трапезот $ABCD$ е рамнокрак."

***Заклучок*** $q$ **:** "Дијагоналите $AC$ и $BD$ се еднакви: $\overline{AC}=\overline{BD}$ ."




Од темињата $C$ и $D$ повлекуваме нормали $CC_1$ и $DD_1$ на страната $AB$ (цртеж горе).

***Тврдење*** $r_1$ : "четириаголникот $CDD_1C_1$ е правоаголник", (следува од конструкцијата и $p$ : трапезот $ABCD$ е рамнокрак).

***Тврдење*** $r_2$ : " $\angle AD_1D=\angle BC_1C=90^\circ$ ", (следува од $r_1$ : четириаголникот $CDD_1C_1$ е правоаголник).

***Тврдење*** $r_3$ : " $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$ ", (следува од $r_2$ : $\angle AD_1D=\angle BC_1C=90^\circ$ , $p$ : трапезот $ABCD$ е рамнокрак и признакот за складност ССА).

***Тврдење*** $r_4$ : " $\angle D_1AD=\angle C_1BC$ ", (следува од $r_3$ : $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$ ).

***Тврдење*** $r_5$ : " $\Delta ABD\cong\Delta BAC$ ", (следува од $r_4$ : $\angle D_1AD=\angle C_1BC$ , $p$ : трапезот $ABCD$ е рамнокрак и признакот за складност САС).

***Тврдење*** $q$ : "дијагоналите $AC$ и $BD$ се еднакви: $\overline{AC}=\overline{BD}$ ", (следува од $r_5$ : $\Delta ABD\cong\Delta BAC$ ).

Конечно, имаме $p\Rightarrow r_1, r_1\Rightarrow r_2, (r_2\wedge p)\Rightarrow r_3, r_3\Rightarrow r_4, (r_4\wedge p)\Rightarrow r_5, r_5\Rightarrow q$ од што според хипотетичкиот силогизам добиваме $p\Rightarrow q$ . ♦

**а2) Метод со враќање (аналитичен метод).** Процесот на размислување при докажување на теоремата $A\Rightarrow B$ со аналитичкиот метод се одвива на следниов начин:

Се тргнува од заклучокот на теоремата $B$ и се избира доволен услов $B_1$ таков, што импликацијата $B_1\Rightarrow B$ и $B_1$ да се вистинити. Потоа се избира доволен услов $B_2$ за $B_1$ таков, што импликацијата $B_2\Rightarrow B_1$ и $B_2$ да се вистинити. Постапката се продолжува сé додека не се добие доволен услов $B_n$ за $B_{n-1}$ таков, што импликацијата $B_n\Rightarrow B_{n-1}$ и $B_n$ да се вистинити и притоа да е вистинита и импликацијата $A\Rightarrow B_n$ . Јасно, при докажувањето на теоремата се користат како условот $A$ , така и фамилијата $\boldsymbol{F}$ од вистинити искази.

Симболички, процесот на размислување со аналитичкиот метод може да се запише со помош на шемата:

$$B_1 \Rightarrow B,\ B_2 \Rightarrow B_1,\ \ldots,\ B_{n-1} \Rightarrow B_n,\ (A \wedge \boldsymbol{F}) \Rightarrow B_n$$

Претходната шема е еквивалентна на шемата

$$(A \wedge \boldsymbol{F}) \Rightarrow B_n,\ B_{n-1} \Rightarrow B_n,\ \ldots,\ B_2 \Rightarrow B_1,\ B_1 \Rightarrow B,$$

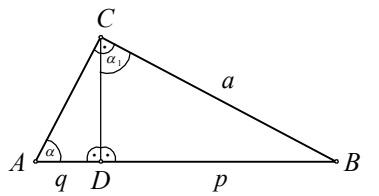
што значи дека секој доказ добиен со аналитичкиот метод може да се запише во облик на доказ добиен со синтетичкиот метод, од што следува дека доказите добиени со аналитичкиот метод се коректни и строги.

**Пример 30.** Да ја докажеме теоремата:

*"Ако во правоаголен триаголник со хипотенуза $c$ ортогоналната проекција на катетата $a$ врз хипотенузата е $p$, тогаш $a^2 = pc$."*

Дадено е $(A)$: $\Delta ABC$ е правоаголен со прав агол во темето $C$, $c = \overline{AB}$, $p = \overline{BD}$ и $a = \overline{BC}$. Треба да докажеме:

$$a^2 = pc \qquad (B)$$




Да тргнеме од равенството $(B)$, кое е еквивалентно на равенството:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{DB},$$

односно на равенството:

$$\overline{BC} : \overline{DB} = \overline{AB} : \overline{BC} \qquad (B_1)$$

кое е пропорција на четири отсечки, па затоа постои можност да имаме слични триаголници за кои овие отсечки се нивни страни. Разгледувањето на цртежот не́ доведува до $\Delta ABC$ и $\Delta CDB$. Значи за да биде точно тврдењето $(B_1)$, доволно е да биде исполнето

$$\Delta ABC \sim \Delta CDB\ . \qquad (B_2)$$

Понатаму, за да биде исполнето тврдењето $(B_2)$ доволно е овие два триаголника да имаат по два еднакви агли, а за тоа да биде исполнето доволно е да биде исполнето (види цртеж)

$$\angle CAB = \angle DCB\ . \qquad (B_3)$$

Последното тврдење е точно ако е исполнето тврдењето:

$$CD \perp AB \text{ и } AC \perp BC\ , \qquad (B_4)$$

кое е очигледно точно бидејќи $\Delta ABC$ е правоаголен и $CD$ е неговата висина.

Според тоа, важи $B_1 \Rightarrow B, B_2 \Rightarrow B_1, B_2 \Rightarrow B_3, B_3 \Rightarrow B_4, A \Rightarrow B_4$, односно важи

$$A \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_3 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow B\ ,$$

со што теоремата е докажана. ♦

**б) Индиректни методи за докажување.** *Индиректен метод* за докажување на теоремата $A \Rightarrow B$ го нарекуваме оној метод при кој вистинитоста на теоремата се докажува со помош на тврдење кое е еквивалентно на теоремата. Од индиректните методи најчесто се користи методот за докажување од спротивното, при кој се докажува дека тврдењето $\neg B$ не е вистинито.

Понекогаш откривањето на импликациите

$$(A \wedge \boldsymbol{F}) \Rightarrow B_1,\ B_1 \Rightarrow B_2,\ ...,\ B_{n-1} \Rightarrow B_n,\ B_n \Rightarrow B$$

при синтетичкиот метод, или на импликациите

$$(A \wedge \boldsymbol{F}) \Rightarrow B_n,\ B_{n-1} \Rightarrow B_n,\ ...,\ B_2 \Rightarrow B_1,\ B_1 \Rightarrow B$$

при аналитичкиот метод на докажување, е доста тешко или речиси невозможно. Во вакви случаи најчесто се користи некоја од следниве еквиваленции:

$$\begin{aligned} &(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\ &(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge A \Rightarrow \neg A) \\ &(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge A \Rightarrow B) \\ &(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge A \Rightarrow C \wedge \neg C) \end{aligned} \tag{1}$$

и потоа преку докажување на импликациите кои се наоѓаат на левата страна од овие еквиваленции се докажува теоремата $A \Rightarrow B$. Всушност овие еквиваленции се и основата на индиректните методи за докажување на теоремите, кои се реализираат со докажување дека негацијата на теоремата не е вистинита.

**Пример 31.** Да го анализираме доказот на теоремата 11 на страница 25:

"*Ако* $d = \text{НЗД}(a,b)$, $a = \alpha d$ *и* $b = \beta d$, *тогаш* $\text{НЗД}(\alpha,\beta) = 1$."

***Претпоставка*** $A$***:*** "$d = \text{НЗД}(a,b)$, $a = \alpha d$ и $b = \beta d$."

***Заклучок*** $B$***:*** "$\text{НЗД}(\alpha,\beta) = 1$."

***Го негираме заклучокот*** $\neg B$: $\text{НЗД}(\alpha,\beta) = k > 1$.

***Тврдење*** $B_1$: "постојат природни броеви $\alpha_1$ и $\beta_1$, такви што $\alpha = k\alpha_1$ и $\beta = k\beta_1$." (следува од $\neg B$).

***Тврдење*** $B_2$: "$(kd) \mid a$ и $(kd) \mid b$", (следува од $A$ и $B_1$).

***Тврдење*** $\neg A$: "$kd$ е заеднички делител на $a$ и $b$, кој е поголем од $d$", (следува од $B_2$).

Значи, $\neg B \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B_2$, $B_2 \Rightarrow \neg A$, па од правилото хипотетички силогизам имаме $\neg B \Rightarrow \neg A$. Според тоа, за теоремата искажана во условна форма $A \Rightarrow B$, ја докажавме импликацијата $\neg B \Rightarrow \neg A$, па од првата еквиваленција во (1) следува точноста на теоремата. ♦

**Пример 32.** Да го анализираме доказот на теоремата:

"*Постојат бесконечно многу прости броеви.*"

***Тврдење*** $p$: "Постојат бесконечно многу прости броеви."

***Тврдење*** $\neg p$: "Постојат конечно многу прости броеви и тоа се броевите:

$$p_1 = 2, p_2 = 3, ..., p_n = p." \tag{2}$$

***Тврдење*** $q$: "Бројот $N = p_1 p_2 p_3 ... p_n + 1$ е прост или има прост делител различен од $p_1 = 2, p_2 = 3, ..., p_n = p$." (следува од $\neg p$ и дефиницијата за деливост).

***Тврдење*** $\neg\neg p$: "Постои прост број кој не се содржи во низата (2)." (следува од $q$).

Точноста на теоремата следува од тавтологијата $p \Leftrightarrow \neg\neg p$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**26.** Користејќи го синтетичкиот метод, докажи ја теоремата:

**а)** *Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.*

**б)** *Ако производот на два природни броја е непарен природен број, тогаш нивниот збир е парен природен број.*

**27.** Користејќи го аналитичкот метод, докажи ја теоремата:

**а)** *Во паралелограм дијагоналите заемно се преполовуваат.*

**б)** *Ако* $a,b \in \mathbf{R}^+$ *и* $a \neq b$, *тогаш* $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

**в)** *Ако* $a$ *и* $b$ *се реални броеви со исти знак, тогаш* $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

**г)** *Ако* $a,b \in \mathbf{R}$, *тогаш* $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$.

**28.** Со индиректен метод, докажи ја теоремата:

**а)** *Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш симетралите на прилегнатите агли на иста страна од тој четириаголник се сечат под прав агол.*

**б)** *Производот на два непарни природни броја е непарен природен број.*

**в)** *Ако квадратот на некој реален број е 2, тогаш тој број не е рационален.*

## ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

**1.** **а)** Одреди го обемот и содржината на следниве поими:
1) тетивен четириаголник, 2) тангентен четириаголник. (6 б)

**б)** Определи ги видовите одлики на поимот правоаголник, ако тој се смета за:
1) вид паралелограм; 2) вид ромбоид; 3) вид четириаголник. (9 б)

**2.** **а)** Запиши ја дефиницијата на висина на триаголник и потоа определи ги дефинираниот, дефинирачкиот поим и логичкиот сврзник. (6 б)

**б)** Запиши ја дефиницијата на еквивалентни множества и потоа определи ги дефинираниот, дефинирачкиот поим и логичкиот сврзник. (8 б)

**3.** **а)** Определи ги условот и заклучокот на следнава теорема: "*Ако* $a \mid b$ *и* $a \mid c$, *тогаш* $a \mid (bx + cy)$ *за секои* $x, y \in \mathbf{Z}$". (6 б)

**б)** Определи ја формата во која е искажана теоремата: "НЗД$(a,b) \mid$ НЗС$(a,b)$, *за секои* $a,b \in \mathbf{N}$". (10 б)

**4.** **а)** Искажи ја во категоричка форма теоремата: "*Ако квадратот на некој реален број е 2, тогаш тој број не е рационален*". (6 б)

**б)** Теоремата од задачата 3 б) запиши ја во условна форма. (10 б)

**5.** **а)** Со директен метод докажи ја теоремата: "*Производот на три последователни парни броеви е делив со* 24". (10 б)

**б)** Со индиректен метод докажи ја теоремата: "*Ако дијагоналите на паралелограмот се заемно нормални, тогаш тој е ромб*". (16 б)

***Забелешка.*** При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниов критериум:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Бодови:** | 22-29 | 30-37 | 38-45 | 46-53 |
| **Оценка:** | 2 | 3 | 4 | 5 |

# ГЛАВА IV

# АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ

## СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Бинарна релација**
2. **Релација за еквиваленција и релација за подредување**
3. **Бинарна операција. Полугрупа**
4. **Неутрален и инверзен елемент**
5. **Група и прстен**
6. **Поим за поле. Подредено поле**

## *ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА*

*За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:*

- *природните, целите, рационалните и реалните броеви и операциите со нив;*
- *множествата и операциите унија, пресек и разлика на множества;*
- *деливоста на целите броеви и модуларната аритметика;*
- *биективните пресликувања; и*
- *полиномите и операциите собирање и множење на полиноми.*

## НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ја усвоиш дефиницијата за бинарна релација, релација на подредување, и релација на еквиваленција;
- да ја усвоиш дефиницијата за бинарна операција, групоид, полугрупа и група;
- да можеш да наведуваш примери на групоиди, полугрупи и групи;
- да се оспособиш да испитуваш дали дадено множество броеви во однос на дадена операција претставува група;
- да наведуваш примери на конечни комутативни групи при класи на остатоци по даден модул;
- да го усвоиш поимот за прстен и да осознаеш дека множеството цели броеви е прстен во однос на операциите собирање и множење; и
- да го усвоиш поимот за поле и да осознаеш дека множествата рационални и реални броеви претставуваат поле во однос на операциите собирање и множење.

При изучувањето на множествата го разгледавме поимот подмножество и притоа видовме дека $A \subseteq B$ ако и само ако од $x \in A$ следува $x \in B$. Последното значи дека за произволни множества $X$ и $Y$ не мора да важи $X \subseteq Y$ или $Y \subseteq X$. Аналогно, при изучувањето на деливоста на природните броеви видовме дека за секои природни броеви $a$ и $b$ не мора да важи $a \mid b$ или $b \mid a$. Претходните два примери на прв поглед немаат ништо заедничко. Меѓутоа, тоа е само на прв поглед, бидејќи овие два примери имаат некои заеднички карактеристики со кои ќе се запознаеме при изучувањето на таканаречените бинарни релации.

Кај множествата ги воведовме операциите пресек и унија на множества и докажавме низа нивни својства. Исто така, при изучувањето на природните, целите, рационалните и реалните броеви во соодветните множества ги воведовме операциите собирање и множење на броеви. И овде, на прв поглед се чини дека меѓу наведените операции со множествата и операциите со броевите нема ништо заедничко, но како што ќе видиме овие два типа операции имаат заеднички карактеристики кои ќе бидат предмет на нашите разгледувања.

## 1. БИНАРНА РЕЛАЦИЈА

Во претходните разгледувања се запознавме со најразлични примери на односи, релации меѓу елементите на некое множество. Така, на пример, со зборовите: поголем помал, еднаков, определени се релации во множеството реални броеви; со зборовите: паралелна, нормална, определени се релации во некое множество прави; со зборовите: роднина, татко, син, определени се релации во некое множество луѓе итн. За секоја од овие релации важно е да знаеме кој елемент, да го означиме со $x$, е во релација со друг елемент, да го означиме со $y$. Да забележиме дека притоа и редоследот на елементите е важен бидејќи елементот $x$ може да е во релација со елементот $y$, но елементот $y$ не мора да е во релација со елементот $x$. Така, на пример, $2 > 1$, но не е $1 > 2$.

За проучување на ваквите соодноси во математиката се воведува поимот бинарна релација и овој поим може да се воведе во произволно множество. Така, ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 1.** Ако $M$ е непразно множество, тогаш секое подмножество $\alpha$ од $M \times M$ го нарекуваме *бинарна релација* во $M$. Притоа наместо $(x, y) \in \alpha$ честопати ќе пишуваме $x\alpha y$ и ќе читаме "$x$ е во релација $\alpha$ со $y$". Ако $(x, y) \notin \alpha$, т.е. ако $x$ не е во релација $\alpha$ со $y$, ќе пишуваме $x \not\alpha y$.

Да забележиме, дека ако $x\alpha y$, тогаш тоа графички се прикажува така што $x$ и $y$ се поврзуваат со стрелка која е насочена од $x$ кон $y$ (види го цртежот во примерот 1).

**Пример 1. а)** Да го разгледаме множеството $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и во него да дефинираме бинарна релација $\alpha$ на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако $x+y=8$.

Значи, ако $x\alpha y$, тогаш $x+y=8$, па затоа $y+x=8$, од што следува дека $y\alpha x$. Понатаму, од претходно изнесеното и од

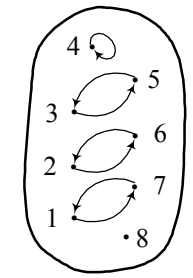
$$1+7=2+6=3+5=4+4=8$$

следува дека

$$\alpha=\{(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1)\}.$$

Да забележиме дека $1\not\alpha 6,\ 7\not\alpha 2,\ldots,\ 8\not\alpha x,$ за $x=1,2,\ldots,8$ бидејќи

$$1+6\neq 8,\ 7+2\neq 8,\ldots,8+x\neq 8,\ \text{за}\ x=1,2,\ldots,8.$$




Графичкиот приказ на релацијата $\alpha$ е даден на цртежот десно.

**б)** Дадено е множеството $A$ чии елементи се имињата на една група ученици:

$$A=\{\text{Ана, Ева, Адам, Марко, Обрен, Ивана, Никола, Мери}\}.$$

Во ова множество е дефинирана релацијата $\alpha$ на следниов начин:

$x\alpha y$ ако и само ако почетната буква на името на $x$ е крајна буква на името на $y$,

за секои $x,y\in A$. Од условот имаме дека дадената релација е:

$\alpha=\{$(Ана, Ана), (Ана, Ева), (Ана, Ивана), (Ана, Никола), (Адам, Ана), (Адам, Ева), (Адам, Ивана), (Адам, Никола), (Марко, Адам), (Мери, Адам), (Обрен, Марко), (Ивана, Мери), (Никола, Обрен)$\}$.

**в)** За секое непразно множество $M$ релациите $\Delta_M=\{(x,x)\mid x\in M\}$ и $\alpha=M\times M$ ги нарекуваме *дијагонала* и *универзална релација* во $M$, соодветно. ♦

Во математиката најчесто се користат релации кои во извесна смисла се правилни, т.е. задоволуваат некои услови.

**Дефиниција 2.** За бинарната релацијата $\alpha$ определена на непразното множество $M$ ќе велиме дека е *рефлексивна* ако $x\alpha x$, за секој $x\in M$.

**Пример 2. а)** Од $(x,x)\in\Delta_M$, за секој $x\in M$ непосредно следува дека дијагоналата на секое непразно множество е рефлексивна релација.

**б)** Дадено е множеството $M=\{1,2\}$ и релацијата $\alpha=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$. Бидејќи $(1,1)\in\alpha$ и $(2,2)\in\alpha$, заклучуваме дека $x\alpha x$ за секој $x\in M$, т.е. релацијата $\alpha$ е рефлексивна.

**в)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x=y$. Јасно, $x=x$ за секој $x\in\mathbf{N}$, што значи дека оваа релација е рефлексивна.

**г)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x<y$. Бидејќи $x\not< x$ за секој $x\in\mathbf{N}$ заклучуваме дека оваа релација не е рефлексивна.

Меѓутоа, ако земеме $x\alpha y$ ако и само ако $x\leq x$, тогаш релацијата е рефлексивна.

**д)** Нека $n$ е фиксиран природен број. Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \equiv y \pmod{n}$.

Од својствата на конгруенциите имаме $x \equiv x \pmod{n}$ за секој $x \in \mathbf{N}$, што значи дека оваа релација е рефлексивна.

**ѓ)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \mid y$. Од својствата на деливоста имаме $x \mid x$ за секој $x \in \mathbf{N}$, што значи дека оваа релација е рефлексивна. ♦

Од дефиницијата на рефлексивноста лесно се гледа дека една релација определена на непразно множество $M$ е рефлексивна ако и само ако ја содржи дијагоналата $\Delta_M$.

**Дефиниција 3.** За бинарната релацијата $\alpha$ определена на непразното множество $M$ ќе велиме дека е *симетрична* ако од $x\alpha y$ следува $y\alpha x$.

**Пример 3. а)** Дадено е множеството $M = \{1,2\}$ и релацијата $\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$. Од $(1,1) \in \alpha$, $(2,1) \in \alpha$ и $(1,2) \in \alpha$ заклучуваме дека релацијата $\alpha$ е симетрична.

**б)** Нека $x, y \in \mathbf{N}$. Ако $x = y$, тогаш $y = x$. Според тоа, релацијата од примерот 2 в) е симетрична.

**в)** Бидејќи $2 < 4$ и $2 \leq 4$, но $4 \not< 2$ и $4 \not\leq 2$ заклучуваме дека релациите од примерот 2 г) не се симетрични.

**г)** Нека $x \equiv y \pmod{n}$. Тогаш, $y \equiv x \pmod{n}$ што значи дека релацијата од примерот 2 д) е симетрична.

**д)** Бидејќи $2 \mid 4$, но $4 \nmid 2$ заклучуваме дека релацијата од примерот 2 ѓ) не е симетрична. ♦

**Дефиниција 4.** За бинарната релацијата $\alpha$ определена на непразното множество $M$ ќе велиме дека е *транзитивна* ако од $x\alpha y$ и $y\alpha z$ следува $x\alpha z$.

**Пример 4. а)** Дадено е множеството $M = \{1,2\}$ и релацијата $\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$. Оваа релација не е транзитивна бидејќи $2\alpha 1$ и $1\alpha 2$, но 2 не е во релација $\alpha$ со 2.

**б)** Нека $x, y, z \in \mathbf{N}$. Ако $x = y$ и $y = z$, тогаш $x = z$. Според тоа, релацијата од примерот 2 в) е транзитивна.

**в)** Нека $x, y, z \in \mathbf{N}$. Од $x < y$ и $y < z$ следува дека $x < z$, што значи дека првата релација во примерот 2 г) е транзитивна. Аналогно се докажува дека и втората релација од истиот пример е транзитивна.

**г)** Нека $x \equiv y \pmod{n}$ и $y \equiv z \pmod{n}$. Тогаш, $x \equiv z \pmod{n}$ што значи дека релацијата од примерот 2 д) е транзитивна.

**д)** Бидејќи од $x \mid y$ и $y \mid z$ следува $x \mid z$ за секои $x, y, z \in \mathbf{N}$, заклучуваме дека релацијата од примерот 2 ѓ) е транзитивна. ♦

**Дефиниција 5.** За бинарната релацијата $\alpha$ определена на непразното множество $M$ ќе велиме дека е *антисиметрична* ако од $x\alpha y$ и $y\alpha x$ следува $x = y$.

**Пример 5. а)** Дадено е множеството $M = \{1,2\}$ и релацијата $\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$. Оваа релација не е антисиметрична бидејќи $2\alpha 1$ и $1\alpha 2$, но $2 \neq 1$.

**б)** Нека $x, y \in \mathbf{N}$. Од $x \leq y$ и $y \leq x$ следува дека $x = y$, што значи дека втората релација во примерот 2 г) е антисиметрична.

**в)** Нека $x, y \in \mathbf{N}$. Порано докажавме дека од $x \mid y$ и $y \mid x$ следува $x = y$, што значи дека релацијата од примерот 2 ѓ) е антисиметрична. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**1.** Дадено е множеството $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ и во него е дефинирана релација $\alpha$ на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако $x^2 = y^2$, за $x, y \in M$.
**а)** Запиши ја релацијата $\alpha$ како множество од подредени парови.
**б)** Прикажи ја графички релацијата $\alpha$.

**2.** Дадено е множеството $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ и во него е дефинирана релација $\alpha$ на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако, $x - y = -1$ за $x, y \in M$.
**а)** Запиши ја релацијата $\alpha$ како множество од подредени парови.
**б)** Прикажи ја графички релацијата $\alpha$.

**3.** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ релацијата $\alpha$ е дефинирана на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако $3 \mid x$ и $3 \mid y$. Докажи дека оваа релација е симетрична и транзитивна.

**4.** Нека $A$ е множеството прави во рамнината. Испитај ги својствата на релацијата $\alpha$ во множеството $A$ дефинирана со:
**а)** $a\alpha b$ ако и само ако $a \parallel b$;
**б)** $a\alpha b$ ако и само ако $a \perp b$.

**5.** Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ и во него релациите:
**а)** $\alpha_1$ определена со $x\alpha_1 y$ ако и само ако $x + y = 10$;
**б)** $\alpha_2$ определена со $x\alpha_2 y$ ако и само ако $x + y$ е парен број;
**в)** $\alpha_3$ определена со $x\alpha_3 y$ ако и само ако $x \cdot y$ е парен број.
Испитај ги својствата на секоја од овие релации.

# 2. РЕЛАЦИЈА НА ЕКВИВАЛЕНЦИЈА И РЕЛАЦИЈА НА ПОДРЕДУВАЊЕ

Досега се запознавме со поимот бинарна релација и четирите карактеристични релации: рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна релација. Во овој дел со помош на овие четири релации ќе воведеме уште две релации, *еквиваленција и подредување*, за кои може да се каже дека се најважните бинарни релации во математиката.

**Дефиниција 6.** За релацијата $\alpha$ ќе велиме дека е *релација на еквиваленција (еквиваленшност)* ако таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Симболот ~ (читај: *тилда*) најчесто се користи како симбол за означување на еквивалентностите.

**Пример 6. а)** Дадено е множеството $M = \{1,2\}$ и релацијата $\alpha = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$. Бидејќи $(2,2) \notin \alpha$, заклучуваме дека оваа релација не е рефлексивна, па затоа не е ниту релација на еквиваленција.

**б)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x = y$. Од примерите 2 в), 3 б) и 4 б) следува дека оваа релација е релација на еквиваленција.

**в)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x < y$. Според примерот 3 в) оваа релација не е симетрична, па затоа таа не е релација на еквиваленција.

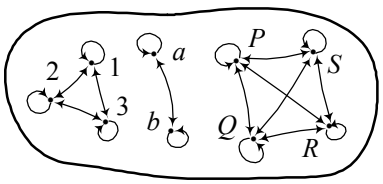
Повторно од примерот 3 в) следува дека релацијата $x\alpha y$ ако и само ако $x \le y$, не е симетрична, што значи дека таа не е релација на еквиваленција.

**г)** Нека $n$ е фиксиран природен број. Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \equiv y \pmod{n}$. Од примерите 2 д), 3 г) и 4 г) следува дека оваа релација е релација на еквиваленција.

**д)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \mid y$. Во примерот 3 д) докажавме дека оваа релација не е симетрична, па затоа не е релација на еквиваленција. ♦

Да го разгледаме множеството

$$A = \{1,2,3,a,b,P,Q,R,S\}$$



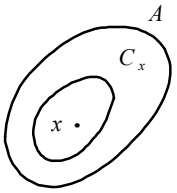

и бинарната релација ~ прикажана со наведениот граф лево. Лесно се проверува дека оваа релација е рефлексивна, симетрична и транзитивна, односно дека е релација на еквиваленција. На цртежот забележуваме дека елементите на множеството $A$ со оваа релација се *распределени* во три класи. Едната класа ја сочинуваат елементите $1,2,3$; втората класа елементите $a,b$; третата класа елементите $P,Q,R,S$. Како што можеме да забележиме, кои било два елементи од една класа се во релација меѓу себе, при што велиме дека се еквивалентни.

Во каков однос се елементите од различните класи, да кажеме 1 и $a$, $a$ и $Q$? Очигледно $1 \not\sim a$, $Q \not\sim a$ и воопшто, кој било елемент од една класа не е во релација ~ со кој било елемент од друга класа, односно елементите од различните класи не се еквивалентни.

Претходно кажаното важи за која било релација на еквиваленција. Имено, како што понатаму ќе докажеме, не секоја релација на еквиваленција ѝ соодветствува поделба на елементите на класи, кои ги нарекуваме класи на еквиваленција. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 7.** Нека $A$ е непразно множество и $\sim$ е релација на еквиваленција во $A$. Ако $x \in A$, тогаш множеството елементи од $A$ кои се еквивалентни со $x$ го нарекуваме *класа на еквиваленција на елементот* $x$ и го означуваме со $C_x$ (цртеж десно). Според тоа,

$$C_x = \{y \mid y \sim x \text{ и } y \in A\}. \qquad (1)$$



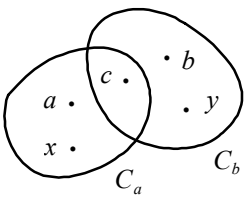

За претходно дадената релација на еквиваленција имаме

$$C_1 = C_2 = C_3 = \{1,2,3\}, \quad C_a = C_b = \{a,b\}, \quad C_P = C_Q = C_R = C_S = \{P,Q,R,S\}.$$

Нека $C_x$ е класата на еквиваленција на елементот $x$ и нека $y, z \in C_x$. Од дефиницијата на класата на еквиваленција имаме $y \sim x$ и $z \sim x$. Но, $\sim$ е симетрична па затоа од $z \sim x$ следува $x \sim z$. Според тоа, $y \sim x$ и $x \sim z$ и бидејќи $\sim$ е транзитивна, добиваме $y \sim z$. Со тоа ја докажавме следната теорема.

**Теорема 1.** Ако $A$ е непразно множество и $\sim$ е релација на еквиваленција во $A$, тогаш кои било два елементи од една класа на еквиваленција се еквивалентни меѓу себе. ♦

Нека сега $C_a$ и $C_b$ се две произволни класи на еквиваленција (цртеж десно). Јасно, тие имаат или барем еден заеднички елемент или се дисјунктни, т.е. $C_a \cap C_b \neq \varnothing$ или $C_a \cap C_b = \varnothing$.




Нека $C_a \cap C_b \neq \varnothing$ и нека $c$ е еден од заедничките елементи, т.е. $c \in C_a$ и $c \in C_b$, што значи $c \sim a$ и $c \sim b$. Нека $x \in C_a$. Но, $c \in C_a$ па од теоремата 1 следува дека $x \sim c$. Понатаму, $c \sim b$ и бидејќи $\sim$ е релација на еквиваленција добиваме дека $x \sim b$, што значи $x \in C_b$. Според тоа, од $x \in C_a$ следува $x \in C_b$, па затоа $C_a \subseteq C_b$. Аналогно се докажува дека $C_b \subseteq C_a$. Конечно, од $C_a \subseteq C_b$ и $C_b \subseteq C_a$ следува $C_b = C_a$.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

**Теорема 2.** Нека $A$ е непразно множество и $\sim$ е релација на еквиваленција во $A$. Ако две класи на еквиваленција имаат барем еден заеднички елемент, тогаш тие се еднакви. ♦

Од претходно изнесеното следува дека кои било две класи на еквиваленција $C_a$ и $C_b$ или се еднакви или немаат заеднички елементи, т.е. или $C_a = C_b$ или $C_a \cap C_b = \varnothing$.

Заради последното својство на класите на еквиваленција, множеството $A$ со класите на еквиваленција е поделено на меѓусебно дисјунктни множества. Од овие множества формираме ново множество и го добиваме таканареченото *фактор-множество*, кое обично го означуваме се $A_{/\sim}$. Според тоа, $A_{/\sim}$ е множеството од сите класи на еквиваленција.

Во последниот пример класите на еквиваленција се: $\{1,2,3\}, \{a,b\}$ и $\{P,Q,R,S\}$. Според тоа, фактор-множеството е дадено со $A_{/\sim} = \{\{1,2,3\}, \{a,b\}, \{P,Q,R,S\}\}$.

**Пример 7. а)** Според примерот 6 б) во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x = y$ е релација на еквиваленција. Лесно се гледа дека за секој $x \in \mathbf{N}$ важи $C_x = \{x\}$, т.е. оваа релација има бесконечно многу класи на еквиваленција.

**б)** Според примерот 6 б) во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \equiv y \pmod 3$ е релација на еквиваленција. Како што знаеме $x \equiv y \pmod 3$ ако и само ако $x$ и $y$ при делење со 3 даваат исти остатоци. Според тоа, класите на еквиваленција се

$$\{3k+1 \mid k \in \mathbf{N}_0\}, \quad \{3k+2 \mid k \in \mathbf{N}_0\}, \quad \{3k+3 \mid k \in \mathbf{N}_0\}$$

што значи фактор-множеството е

$$\mathbf{N}_{/\alpha} = \{\{3k+1 \mid k \in \mathbf{N}_0\}, \{3k+2 \mid k \in \mathbf{N}_0\}, \{3k+3 \mid k \in \mathbf{N}_0\}\}. \blacklozenge$$

Покрај релацијата за еквиваленција во математиката важна улога има релацијата за подредување. За неа ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 8.** Нека $A$ е непразно множество. За релацијата $\alpha$ ќе велиме дека е *релација на подредување (подредување)* на $A$ ако таа е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Нека $\alpha$ е релација на подредување на $A$. Ако за елементите $x, y \in A$ важи $x\alpha y$ или $y\alpha x$, тогаш ќе велиме дека тие се *споредливи*.

Ако секои два елементи на $A$ се споредливи, ќе велиме дека релацијата $\alpha$ е *потполно подредување* во $A$ и дека множеството $A$ е *потполно подредено множество*, а во спротивно ќе велиме дека релацијата $\alpha$ е релација на *делумно подредување* и множеството $A$ е *делумно подредено множество*.

**Пример 8. а)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена $x\alpha y$ ако и само ако $x \le y$. Во примерите 2 г), 4 в) и 5 б) докажавме дека оваа релација е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична, што значи таа е релација на подредување. Јасно, вака дефинираната релација на подредување е потполно подредување во $\mathbf{N}$, што значи дека $\mathbf{N}$ е потполно подредено множество.

**б)** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \mid y$. Во примерите 2 ѓ), 4 д) и 5 в) докажавме дека оваа релација е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична, па затоа таа е релација на подредување. Јасно, со оваа релација множеството $\mathbf{N}$ не е потполно подредено бидејќи, на пример, ниту $2 \mid 3$ ниту $3 \mid 2$, односно во ова множество постојат елементи кои не се споредливи со оваа релација.

**в)** Во множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ да ја разгледаме релацијата $\alpha$ определена со $x\alpha y$ ако и само ако $x \mid y$. Како и кај природните броеви се докажува дека оваа релација е рефлексивна и транзитивна. Меѓутоа, таа не е антисиметрична, бидејќи, на пример, $2 \mid (-2)$ и $(-2) \mid 2$, но $2 \ne -2$. Според тоа, релацијата "$x$ е делител на $y$" $\blacklozenge$

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**6.** Во множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ е дефинирана релација $\alpha$ на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако $4\,|\,(x-y)$.

**а)** Докажи дека $\alpha$ е релација на еквиваленција.

**б)** Најди го фактор-множеството $\mathbf{Z}_{/\alpha}$.

**7.** Во множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ е дефинирана релација $\alpha$ на следниов начин: $x\alpha y$ ако и само ако $x^2+x=y^2+y$. Испитај дали $\alpha$ е релација на еквиваленција.

**8.** Најди ја релацијата на еквиваленција $\alpha$ на множеството $A$ ако нејзиното фактор-множество е $A_{/\alpha}=\{\{a,b,c,d,e\},\{f,g,h\}\}$.

**9.** **а)** Докажи дека релацијата $\alpha=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b)\}$ дефинирана во множеството $A=\{a,b,c,d\}$ е релација на еквиваленција.

**б)** Најди го фактор-множеството $A_{/\alpha}$.

**10.** За множеството $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ најди барем една релација на еквиваленција која има три класи на еквиваленција такви, што едната има три елементи, а останатите две имаат по два елементи.

**11.** Дадено е множеството $A=\{a,b,c,d,e\}$ и во него релацијата

$$\alpha=\{(a,a),(b,b),(c,b),(d,e),(e,e),(d,d),(c,c),(b,e),(d,b),(c,e)\}.$$

**а)** Докажи дека $\alpha$ е релација на подредување во множеството $A$.

**б)** Претстави ја шематски релацијата $\alpha$.

**12.** Дадено е множеството $A=\{1,2,3\}$.

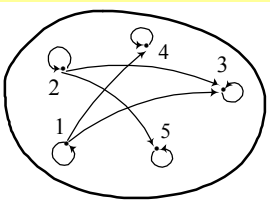
**а)** Најди го неговото партитивно множество $\mathbf{P}(A)=\{X\,|\,X\subseteq A\}$.

**б)** Докажи дека релацијата $\alpha$ определена со $X\alpha Y$ ако и само ако $X\subseteq Y$ е релација за подредување во $\mathbf{P}(A)$.

**13.** Во множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$ релацијата $\alpha$ е дадена со шемата на цртежот десно.

**а)** Запиши ја релацијата $\alpha$ како множество од подредени парови.

**б)** Докажи дека $\alpha$ е релација за подредување во множеството $A$.




# 3. ВНАТРЕШНА БИНАРНА ОПЕРАЦИЈА. ПОЛУГРУПА

Познати ни се повеќе примери при кои од два елементи $x$ и $y$ од едно множество $G$, попрецизно од подредениот пар $(x,y)\in G^2$, се преминува на нов елемент $z\in G$. Така, на пример, во множеството на целите броеви $\mathbf{Z}$ тоа е случај со собирањето, множењето и одземањето на целите броеви, во теоријата на множества тоа е случај со унијата, пресекот и разликата на множествата итн. Наведените примери имаат заеднички карактеристики кои овде подетално ќе ги разгледаме. Така, ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 9.** Ако $G$ е множество, тогаш секое пресликување $f: G \times G \to G$ го нарекуваме *внатрешна бинарна операција* на $G$.

Според тоа со секоја бинарна операција на $G$ на секој подреден пар $(x, y) \in G \times G$ еднозначно му се придружува елемент $z \in G$. Притоа пишуваме $z = xfy$ или $f: (x, y) \to z$. Вообичаено операцијата $f$ ќе ја означуваме со еден од следниве симболи: $*, \circ, \otimes, \oplus, \Delta, +, -, \cdot, :, \cap, \cup, \backslash, \ldots$. Во оваа смисла ќе пишуваме $x * y, x + y, x - y, x \cdot y, \ldots$ .

Заради пократко искажување, наместо терминот внатрешна бинарна операција овде ќе го користиме терминот *операција*.

**Пример 9. а)** Нека $G$ е множеството природни броеви $\mathbf{N}$. Собирањето и множењето на природни броеви се примери на операции во ова множество. Од друга страна одземањето и делењето не се операции во множеството природни броеви бидејќи, на пример, не постои природен број $z$ таков, што $z = 2 - 3$ и не постои природен број $t$ таков, што $t = 2 : 3$.

Меѓутоа, во множеството $\mathbf{N}$ одземањето и делењето се изводливи за некои парови природни броеви. Во ваков случај велиме дека станува збор за *делумна операција*.

**б)** Нека $G$ е множеството природни броеви $\mathbf{N}$. Бидејќи за секои $x, y \in \mathbf{N}$ важи НЗД$(x, y) \in \mathbf{N}$, НЗС$(x, y) \in \mathbf{N}$, $\min\{x, y\} \in \mathbf{N}$, $x + y + xy \in \mathbf{N}$ заклучуваме дека со

$$x * y = \text{НЗД}(x, y),\ x \circ y = \text{НЗД}(x, y),\ x \Delta y = \min\{x, y\} \text{ и } x \bullet y = x + y + xy$$

се дефинирани операции на $\mathbf{N}$. На пример, $6 * 15 = 3,\ 6 \circ 15 = 30,\ 6 \Delta 15 = 6,\ 6 \bullet 15 = 111$.

Пресметај: $12 * 14,\ 12 \circ 14,\ 12 \Delta 14,\ 12 \bullet 14$. ♦

Да се потсетиме, ако $M_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ е множеството на остатоци при делење на природните броеви со 4, тогаш збирот и производот на кои било елементи од ова множество повторно е елемент од истото множеството, што значи дека собирањето и множењето по модул 4 се операции на $M_4$. Ако со $\oplus$ го означиме собирањето по модул 4, а со $\otimes$ множењето по модул 4, тогаш овие операции можеме да ги претставиме со помош на следните таблици.

| $\oplus$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\otimes$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 0 | 2 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 3 | 2 | 1 |

Честопати операциите над множествата можеме да ги дефинираме со таблици, како што тоа го направивме во случајот со собирањето и множењето по модул 4. Таблиците од овој вид ги нарекуваме *Келиеви шеми* и тие најчесто се користат кога множеството над кое ја дефинираме операцијата е конечно.

Во сите претходни случаи беше дадено непразно множество и операција дефинирана на тоа множество. Токму изучувањето на непразните множества со некои опера-

ции е основна задача на современата алгебра. Секако, наједноставен случај е кога имаме непразно множество со една операција. Во оваа смисла ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 10.** Ако $*$ е операција на непразното множеството $G$, тогаш подреденият пар $(G,*)$ го нарекуваме *групоид*. Притоа $G$ го нарекуваме *носител* на групоидот, а $*$ - негова *операција*.

**Пример 10. а)** Нека $\mathbf{N}$ е множеството природни броеви. Бидејќи збир и производ на два броја е природен број, заклучуваме дека $(\mathbf{N},+)$ и $(\mathbf{N},\cdot)$ се групоиди.

Од друга страна, одземањето и делењето не се операции во множеството природни броеви $\mathbf{N}$, па затоа $(\mathbf{N},-)$ и $(\mathbf{N},:)$ не се групоиди.

**б)** Нека $M$ е произволно непразно множество и $\mathbf{P}(M)=\{X \mid X \subseteq M\}$ е неговото *партитивно множество (булеан)*. Од дефинициите на унија, пресек и разлика на множества следува дека $(\mathbf{P}(M),\cup)$; $(\mathbf{P}(M),\cap)$ и $(\mathbf{P}(M),\setminus)$ се групоиди, чиј заеднички носител е $\mathbf{P}(M)$, а операциите се $\cup,\cap$ и $\setminus$, соодветно.

**в)** Од разгледувањата во примерот 9 а) непосредно следува дека $(\mathbf{N},*)$, $(\mathbf{N},\circ)$, $(\mathbf{N},\Delta)$ и $(\mathbf{N},\bullet)$ се групоиди.

**г)** Ако со $M_n=\{1,2,\ldots,n-1\}$ го означиме комплетниот систем на остатоци по модул $n$ и со $\oplus$ и $\otimes$ ги означиме операциите собирање и множење по модул $n$ соодветно, тогаш $(M_n,\oplus)$ и $(M_n,\otimes)$ се групоиди. Како и во случаите $n=4$ и $n=5$, точноста на ова тврдење непосредно следува од фактот дека при наведените операции збир и производ на елементи од $M_n$ резултатот е елемент од $M_n$. ♦

При проучувањето на множествата видовме дека за операциите пресек и унија на множества произволни множества $A, B$ и $C$ важи

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \text{ и } (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

Исто така, знаеме дека за операциите собирање и множење на природни броеви важи

$$(x+y)+z=x+(y+z) \text{ и } (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z), \text{ за секои } x,y,z\in\mathbf{N}.$$

Меѓутоа, за операцијата разлика на множества равенствата од наведениот облик не се исполнети. Така, на пример, ако $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,4,5\}$, $C=\{1,2,4\}$, тогаш

$$(A\setminus B)\setminus C=\{2,3\}\setminus\{1,2,4\}=\{3\}\neq\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}\setminus\{5\}=A\setminus(B\setminus C).$$

Претходно изнесеното е една од причините за проучувањето на групоидите чии операции го задоволуваат таканареченият асоцијативен закон. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 11.** За групоидот $(G,*)$ ќе велиме дека е *асоцијативен (полугрупа)* ако за секои $x,y,z\in G$ важи

$$x*(y*z)=(x*y)*z. \tag{1}$$

**Пример 11. а)** Од својствата на операциите пресек и унија на множества следува дека групоидите $(\mathbf{P}(M),\cup)$ и $(\mathbf{P}(M),\cap)$ од примерот 10 б) се полугрупи. Меѓутоа, од погоре изнесеното следува дека групоидот $(\mathbf{P}(M),\setminus)$ не е полугрупа.

**б)** Од својствата на природните и целите броеви следува дека групоидите $(\mathbf{N},+)$, $(\mathbf{N},\cdot)$, $(\mathbf{Z},+)$ и $(\mathbf{Z},\cdot)$ се полугрупи.

Групоидот $(\mathbf{Z},-)$ не е полугрупа. Навистина, $6-(4-3)=5\neq -1=(6-4)-3$, што значи дека асоцијативниот закон за операцијата одземање во множеството цели броеви не важи.

**в)** Лесно се покажува дека групоидите $(M_n,\oplus)$ и $(M_n,\otimes)$ од примерот 10 г) се полугрупи. Обиди се да докажеш дека за операциите собирање и множење по модул $n$ важи асоцијативниот закон.

**г)** Да го разгледаме групоидот $(\mathbf{N},\bullet)$ каде што $x\bullet y=x+y+xy$ за секои $x,y\in\mathbf{N}$. За секои $x,y,z\in\mathbf{N}$ важи

$$(x\bullet y)\bullet z=(x+y+xy)\bullet z=x+y+xy+z+z(x+y+xy)=x+y+z+xy+yz+zx+xyz$$
$$=x+y+z+yz+x(y+z+yz)=x\bullet(y+z+yz)=x\bullet(y\bullet z)$$

што значи дека $(\mathbf{N},\bullet)$ е полугрупа. ♦

За операциите унија и пресек на множества знаеме дека за секои множества $A$ и $B$ важи $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$. Исто така, за собирањето и множењето на целите броеви знаеме дека $x+y=y+x, x\cdot y=y\cdot x$, за секои $x,y\in\mathbf{Z}$. Меѓутоа, за одземањето на целите броеви и за разликата на множествата не важат равенства од наведениот облик. Имено, $3-4=-1\neq 1=4-3$ и $\{1,2,3\}\setminus\{4,3,2\}=\{1\}\neq\{4\}=\{4,3,2\}\setminus\{1,2,3\}$.

Претходно изнесеното е една од причините за проучувањето на групоидите чии операции го задоволуваат комутативниот закон. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 12.** За групоидот $(G,*)$ ќе велиме дека е *комутативен* ако за операцијата * важи комутативниот закон, т.е. ако за секои $x,y\in G$ важи

$$x*y=y*x. \tag{2}$$

Полугрупата $(G,*)$ ја нарекуваме *комутативна* ако таа е е комутативен групоид.

**Пример 12. а)** Од својствата на операциите пресек и унија на множества следува дека полугрупите $(\mathbf{P}(M),\cup)$ и $(\mathbf{P}(M),\cap)$ од примерот 10 б) се комутативни. Меѓутоа, од погоре изнесеното следува дека групоидот $(\mathbf{P}(M),\setminus)$ не е комутативен.

**б)** Од својствата на природните и целите броеви следува дека полугрупите $(\mathbf{N},+)$, $(\mathbf{N},\cdot)$, $(\mathbf{Z},+)$ и $(\mathbf{Z},\cdot)$ се комутативни. Но, како што веќе видовме групоидот $(\mathbf{Z},-)$ не е комутативен.

**в)** Полугрупите $(M_n,\oplus)$ и $(M_n,\otimes)$ од пример 10 г) се комутативни. Последното може да се заклучи и од Келиевите шеми. Имено, еден групоид е комутативен ако и само ако неговата Келиева шема е симетрична во однос на главната дијагонала повлечена од левиот горен агол (зошто?).

**г)** Да ја разгледаме полугрупата $(\mathbf{N},\bullet)$ каде што $x \bullet y = x + y + x \cdot y$ за секои $x, y \in \mathbf{N}$. Бидејќи

$$x \bullet y = x + y + x \cdot y = x + y + y \cdot x = y \bullet x \text{ за секои } x, y \in \mathbf{N},$$

заклучуваме дека полугрупата $(\mathbf{N},\bullet)$ е комутативна. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**14.** Во множеството $\mathbf{N}$ дефинираме $m*n = m^n$. Докажи дека $(\mathbf{N},*)$ е групоид! Пресметај $2*3$, $3*2$, $(2*2)*3$ и $2*(2*3)$! Што заклучуваш?

**15.** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ дефинираме операции $*, \circ$ и $\Delta$ со:

$$x*y = \text{НЗД}(x,y),\ x \circ y = \text{НЗС}(x,y),\ x\Delta y = \min\{x,y\}.$$

**а)** Дали групоидите $(\mathbf{N},*), (\mathbf{N},\circ), (\mathbf{N},\Delta)$ се полугрупи?

**б)** Дали групоидите $(\mathbf{N},*), (\mathbf{N},\circ), (\mathbf{N},\Delta)$ се комутативни?

**16.** Во множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ дефинираме операција $*$ со: $x*y = x + y + 1$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$. Дали $(\mathbf{Z},*)$ е групоид? Во случај на потврден одговор провери дали овој групоид е:

**а)** полугрупа; и **б)** комутативен.

**17.** Нека $A$ и $B$ се произволни множества. *Симетрична разлика* го нарекуваме множеството $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Притоа пишуваме $C = A\Delta B$.

Нека $M$ е произволно непразно множество и $\mathbf{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$ е неговото партитивно множество (булеан). Докажи дека $(\mathbf{P}(M),\Delta)$ е комутативна полугрупа.

**18.** Даден е групоидот $(\mathbf{Z},*)$, каде $x*y = x + 2y - 3$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$.

**а)** Пресметај $[2*(-3)]*1$, $(4*1)*(2*3)$.

**б)** Дали овој групоид е полугрупа? Дали групоидот е комутативен?

**в)** Реши ги равенките $3*x = 10$, $(-2*x)*(x*3) = 2$.

**19.** Даден е групоидот $(\mathbf{Z},*)$, каде што $x*y = 2xy + 3(x+y) + 3$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$.

**а)** Пресметај $[4*(-12)]*2$, $[(4*(-3))*(2*7)]*(-1)$.

**б)** Дали овој групоид е полугрупа? Дали групоидот е комутативен?

# 4. НЕУТРАЛЕН И ИНВЕРЗЕН ЕЛЕМЕНТ

Нека $M$ е дадено множество и $\mathbf{P}(M)$ е неговото партитивно множество. Во групоидот $(\mathbf{P}(M),\cup)$ важи $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ за секое множество $A \in \mathbf{P}(M)$. Слично, во групоидот $(\mathbf{P}(M),\cap)$ важи $A \cap M = M \cap A = A$ за секое множество $A \in \mathbf{P}(M)$.

Од друга страна, во групоидот $(\mathbf{P}(M),\setminus)$ важи $A \setminus \varnothing = A$ за секое множество $A \in \mathbf{P}(M)$, но за секое множество $B$ важи $B \setminus M = \varnothing$, што значи дека равенството $B \setminus M = M$ не е исполнето за ниту едно множество $B \in \mathbf{P}(M)$.

Понатаму, како што знаеме, во групоидот $(\mathbf{N},\cdot)$ важи $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ за секој $n \in \mathbf{N}$, но во групоидот $(\mathbf{N},+)$ не постои елемент $k$ таков, што $k + n = n + k = n$ за кој било $n \in \mathbf{N}$.

Последното не е точно за групоидот $(\mathbf{N}_0,+)$. Имено, во овој групоид важи $n+0=0+n=n$ за секој $n\in\mathbf{N}_0$.

Како што можеме да видиме, кај некои групоиди постојат елементи кои во извесна смисла се неутрални во однос на операциите во тие групоиди, додека кај некои групоиди тоа не е случај. Ваквата ситуација е непосредна причина за воведување на нов апстрактен поим и тоа е поимот за единичен (неутрален) елемент. Така ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 13.** Нека е даден групоидот $(G,*)$. Елементот $e_l\in G$ го нарекуваме *лева единица* на $G$ ако

$$e_l * x = x, \text{ за секој } x\in G. \tag{1}$$

Елементот $e_d\in G$ го нарекуваме *десна единица* на $G$ ако

$$x * e_d = x, \text{ за секој } x\in G. \tag{2}$$

Елементот $e\in G$ го нарекуваме *единица* на $G$ ако тој е и лева и десна единица на $G$.

Да забележиме дека ако групоидот $(G,*)$ е комутативен, тогаш левата единица истовремено е и десна единица и обратно. Навистина, ако $e_l$ е лева единица, тогаш $e_l * x = x$, за секој $x\in G$. Ако во последното равенство го примениме комутативниот закон добиваме $x=e_l * x = x * e_l$, за секој $x\in G$, што значи дека $e_l$ е и десна единица. Случајот со десната единица се разгледува аналогно.

Покрај термините лева единица, десна единица и единица, кои се вообичаени за мултипликативните групоиди (на пример, групоид со операција множење на броеви), кога станува збор за адитивни групоиди (на пример, групоид со операција собирање на броеви, т.е. кога наместо $x*y$ пишуваме $x+y$), ќе го користиме терминот нулти елемент (нула). Во овој случај единицата ќе ја нарекуваме *нула* и ќе ја означуваме со 0. Според тоа, 0 е нула на групоидот $(G,+)$ ако $x+0=x=0+x$, за секој $x\in G$.

**Пример 13. а)** На почетокот од овој дел видовме дека групоидот $(\mathbf{N},+)$ нема нулти елемент, додека бројот 1 е единица за групоидот $(\mathbf{N},\cdot)$.

Меѓутоа, како за групоидот $(\mathbf{N}_0,+)$, така и за групоидот $(\mathbf{Z},+)$ бројот 0 е нулти елемент, т.е. $x+0=0+x=x$ за секој $x\in\mathbf{Z}$. Што се однесува до групоидот $(\mathbf{Z},\cdot)$, имаме $1\cdot x = x\cdot 1 = x$ за секој $x\in\mathbf{Z}$, што значи дека бројот 1 е единица во $(\mathbf{Z},\cdot)$.

Што се однесува до групоидот $(\mathbf{Z},-)$, тој има десна единица и тоа е бројот 0. Навистина, од својствата на целите броеви знаеме дека $x-0=x$ за секој $x\in\mathbf{Z}$. Од друга страна, за овој групоид да има лева единица, потребно е да постои цел број $y$ таков, што $y-x=x$ за секој $x\in\mathbf{Z}$. Последното не е можно, бидејќи за $x=0$ добиваме дека $y=0$, од што ќе следува дека $0-x=x$ за секој $x\in\mathbf{Z}$, што е противречност.

**б)** Да ја разгледаме полугрупата $(M_n,\oplus)$. Имаме $x\oplus 0 = 0\oplus x = x$ за секој $x\in M_n$, што значи дека 0 е нулти елемент во оваа полугрупа.

Во полугрупата $(M_n,\otimes)$ е исполнето равенството $x\otimes 1=1\otimes x=x$ за секој $x\in M_n$, што значи дека 1 е единичен елемент во оваа полугрупа.

**в)** Да ја разгледаме полугрупата $(\mathbf{N},\bullet)$, каде што $x\bullet y=x+y+x\cdot y$ за секои $x,y\in\mathbf{N}$. Како што знаеме, оваа полугрупа е комутативна, па затоа ако таа има лева единица, ќе има и десна единица, т.е. ќе има единица. Нека $e$ е единица во $(\mathbf{N},\bullet)$. Тогаш

$$x=x\bullet e=x+e+x\cdot e \text{ за секој } x\in\mathbf{N}.$$

Во множеството природни броеви равенството $x=x+(e+e\cdot x)$ не е можно, бидејќи кога на еден природен $x$ се додаде друг природен број $e+e\cdot x$, добиваме број кој е поголем од бројот $x$. Од досега изнесеното следува дека полугрупата $(\mathbf{N},\bullet)$ нема единица.

**г)** Од операциите собирање и множење на целите броеви следува дека $(\mathbf{Z},\bullet)$, каде што $x\bullet y=x+y+x\cdot y$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$ е комутативна полугрупа. Ќе провериме дали оваа полугрупа има неутрален елемент. Нека $e$ е неутрален елемент во $(\mathbf{Z},\bullet)$. Тогаш, $x=x\bullet e=x+e+x\cdot e$ за секој $x\in\mathbf{Z}$, т.е. $0=e\cdot(1+x)$ за секој $x\in\mathbf{Z}$. Во множеството $\mathbf{Z}$ последното равенство е можно ако и само ако $e=0$. Според тоа, бројот 0 е неутрален елемент во полугрупата $(\mathbf{Z},\bullet)$. Навистина, $x\bullet 0=x+0+x\cdot 0=x$ за секој $x\in\mathbf{Z}$. ♦

Во примерот 13 б) видовме дека $(M_n,\oplus)$ и $(M_n,\otimes)$ имаат нула и единица, соодветно. Како што знаеме, за $n=4$ тие ги имаат следниве Келиеви шеми:

| $\oplus$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\otimes$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 0 | 2 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 3 | 2 | 1 |

Забележуваме дека во Келиевата шема на $(M_4,\oplus)$ редот и колоната кои соодветствуваат на 0 се идентични со главниот ред и колона, соодветно. Слично, во Келиевата шема на $(M_4,\otimes)$ редот и колоната кои соодветствуваат на 1 се идентични со главните ред и колона, соодветно.

Претходно изнесеното, всушност, важи за секоја Келиева шема. Имено, елементот $x$ е лева единица во групоидот $(G,*)$ ако и само ако редот која му соодветствува на $x$ е идентичен со главниот ред во Келиевата шема на $(G,*)$. Елементот $y$ е десна единица во групоидот $(G,*)$ ако и само ако колоната која му соодветствува на $y$ е идентична со главната колона во Келиевата шема на $(G,*)$.

Да ги разгледаме групоидите $(G,\bullet)$ и $(G,\circ)$ чии Келиеви шеми се:

| $\bullet$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | *d* | *a* | *b* | *c* |
| ***b*** | *c* | *d* | *a* | *b* |
| ***c*** | *b* | *c* | *d* | *a* |
| ***d*** | *a* | *b* | *c* | *d* |

| $\circ$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | *d* | *c* | *b* | *a* |
| ***b*** | *a* | *d* | *c* | *b* |
| ***c*** | *b* | *a* | *d* | *c* |
| ***d*** | *c* | *b* | *a* | *d* |

Од Келиевата шема гледаме дека елементот $d$ е лева единица за $(G,\bullet)$, меѓутоа овој групоид нема десна единица. Слично, елементот $d$ е десна единица за $(G,\circ)$, меѓутоа овој групоид нема лева единица.

Како што видовме, еден групоид може да има десна или лева единица, но не мора да има единица. Логично е да се запрашаме дали еден групоид може да има различни десна и лева единица. Одговорот на ова прашање го дава следната теорема.

**Теорема 3.** Ако $e_l$ е лева, а $e_d$ десна единица на групоидот $(G,*)$, тогаш $e_l = e_d$.

**Доказ.** Нека $e_l$ и $e_d$ се соодветно лева и десна единица на групоидот $(G,*)$. Бидејќи $e_l$ е лева единица, за елементот $e_d$ добиваме $e_d = e_l * e_d$. Но, $e_d$ е десна единица, па за елементот $e_l$ добиваме $e_l * e_d = e_l$. Конечно, од последните две равенства следува дека $e_d = e_l * e_d = e_l$. ♦

Од претходната теорема непосредно следува дека во еден групоид $G$ има најмногу една единица (зошто?). Притоа, тој може да има произволно многу леви (десни) единици, но ако има само една десна (лева) единица, тогаш сите тие се меѓу себе еднакви.

Да се вратиме на групоидот $(M_4,\oplus)$ во кој 0 е нултиот елемент. Забележуваме дека $1 \oplus 3 = 2 \oplus 2 = 0 \oplus 0 = 0$. Слично, за групоидот $(M_4,\otimes)$ во кој 1 е единичниот елемент имаме $1 \otimes 1 = 3 \otimes 3 = 1$, но не постојат елементи $x$ и $y$ такви, што $x \otimes 2 = y \otimes 0 = 1$.

Последното укажува на потребата, при проучувањето на групоид $(G,*)$ со неутрален елемент $e$ да се најдат сите оние елементи $x$ за кои постои елемент $y$ таков, што $x * y = y * x = e$. Во таа смисла ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 14.** Нека $(G,*)$ е групоид со неутрален елемент $e$. За еден елемент $x \in G$ ќе велиме дека е *инверзибилен* ако постои $x' \in G$ таков што $x * x' = x' * x = e$. Притоа елементот $x'$ го нарекуваме *инверзен елемент* на $x$.

Јасно, единицата $e$ е инверзен елемент на самата себе.

**Пример 14. а)** Бројот 1 е единица за групоидот $(\mathbf{N},\cdot)$ и е единствен инверзибилен елемент. Навистина, од својствата на природните броеви имаме дека $xy = 1$ ако и само ако $x = y = 1$.

За групоидот $(\mathbf{Z},\cdot)$ бројот 1 е единица. За да ги најдеме инверзибилните елементи во овој групоид треба во множеството $\mathbf{Z}$ да ја решиме Диофантовата равенка $xy = 1$. Решенија на последната равенка се $x = y = 1$ и $x = y = -1$. Според тоа, во овој групоид единствени инверзибилни елементи се 1 и -1.

За групоидот $(\mathbf{Z},+)$ бројот 0 е нулти елемент и бидејќи $x + (-x) = 0$ за секој $x \in \mathbf{Z}$, добиваме дека секој елемент во овој групоид е инверзибилен.

**б)** Како што видовме во групоидот $(M_4,\oplus)$ важи $1 \oplus 3 = 2 \oplus 2 = 0 \oplus 0 = 0$, што значи дека 1 е инверзен на 3, 2 е инверзен на самиот себе и 0 е инверзен на самиот себе. Заради комутативноста добиваме дека 3 е инверзен на 1. Слично, за секој природен број $n$ секој елемент на групоидот $(M_n,\oplus)$ има инверзибилен (зошто?).

За групоидот $(M_4,\otimes)$ видовме дека 1 и 3 се инверзни на самите себе, но 0 и 2 не се инверзибилни. Понатаму, од множењето по модул 5 (стр. 57) следува дека во групоидот

$(M_5,\otimes)$ секој елемент различен од 0 е инверзибилен и тоа: 1 и 4 се инверзни на самите себе, 2 на 3 и обратно.

Забележуваме дека 5 е прост број, а 4 е сложен број. Провери дали за бројот $n=7$ во групоидот $(M_n,\otimes)$ секој елемент различен од 0 е инверзибилен. Дали ова важи за $n=6$?

**в)** Во примерот 13 г) видовме дека 0 е неутрален елемент на комутативниот групоид $(\mathbf{Z},\bullet)$, каде што $x\bullet y=x+y+x\cdot y$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$. За да ги најдеме инверзибилните елементи, треба во множеството $\mathbf{Z}$ да ја решиме Диофантовата равенка $x+y+x\cdot y=0$. Јасно, $y\neq -1$. Последната равенка ја трансформираме и добиваме $x=-\frac{y}{1+y}$, што значи дека $(1+y)\,|\,y$. Но, броевите $y$ и $1+y$ се заемно прости, па затоа последниот услов е можен ако и само ако $y=0$ и притоа $x=0$. Конечно, единствен инверзибилен елемент во групоидот $(\mathbf{Z},\bullet)$ е 0. ♦

Од дефиницијата 14 имаме дека ако во групоидот $(G,*)$ со неутрален елемент $e$ елементот $x'$ е инверзен на $x$, тогаш $x$ е инверзен на $x'$. Логично е да се запрашаме дали производ на инверзибилни елементи е инверзибилен елемент. Одговорот на ова прашање го дава следната теорема.

**Теорема 4.** Ако $x$ и $y$ се инверзибилни елементи во полугрупата $(G,*)$ со единица $e$, тогаш и $x*y$ е инверзибилен во $(G,*)$ и притоа важи дека неговиот инверзен елемент е $y'*x'$, каде што $x'$ и $y'$ се инверзните елементи на $x$ и $y$, соодветно.

**Доказ.** Нека $x$ и $y$ се инверзибилни елементи во полугрупата $(G,*)$ со единица $e$. Тогаш

$$(x*y)*(y'*x')=x*(y*y')*x'=x*e*x'=x*x'=e$$

$$(y'*x')*(x*y)=y'*(x'*x)*y=y'*e*y=y'*y=e$$

од што следува точноста на тврдењето. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**20.** **а)** Докажи дека за групоидот $(\mathbf{N},*)$ каде што $m*n=m^n$ за секои $m,n\in\mathbf{N}$ бројот 1 е десна единица!

**б)** Докажи дека за групоидот $(\mathbf{P}(M),\setminus)$ празното множество $\varnothing$ е десна единица.

**21.** Во множеството природни броеви $\mathbf{N}$ дефинираме операции $*,\circ$ и $\Delta$ со:

$$x*y=\text{НЗД}(x,y),\ x\circ y=\text{НЗС}(x,y),\ x\Delta y=\min\{x,y\}.$$

Дали групоидите $(\mathbf{N},*),(\mathbf{N},\circ),(\mathbf{N},\Delta)$ имаат неутрални елементи? Во случај на потврден одговор најди ги инверзибилните елементи во овие групоиди.

**22.** Даден е групоидот $(\mathbf{Z},*)$, каде што $x*y=x+y+1$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$. Дали овој групоид има неутрален елемент? Во случај на потврден одговор најди ги инверзибилните елементи на групоидот.

**23.** Докажи дека за комутативната полугрупа $(\mathbf{P}(M),\Delta)$ празното множество $\varnothing$ е неутрален елемент и дека секој елемент е инверзибилен на самиот себе.

# 5. ГРУПА И ПРСТЕН

Во претходните разгледувања се запознавме со поимите групоид, асоцијативен и комутативен групоид, неутрален и инверзибилен елемент и разгледавме повеќе примери во врска со овие поими. Притоа дадовме примери на групоиди во кои важат комутативниот и асоцијативниот закон, кои имаат неутрален елемент и секој елемент е инверзибилен. Вакви примери се групоидите $(M_5,\oplus)$ и $(\mathbf{Z},+)$. Токму ваквите примери лежат во основата на посложените алгебарски структури, како што се група и прстен, кои се од посебно значење во математиката.

**Дефиниција 15.** За групоидот $(G,*)$ ќе велиме дека е *група* ако е полугрупа со единица, во која секој елемент е инверзибилен, т.е. ако

*i)* $(x*y)*z = x*(y*z)$, за секои $x,y,z \in G$,

*ii)* постои $e \in G$ таков, што $x*e = e*x = x$ за секој $x \in G$ и

*iii)* за секој $x \in G$ постои еднозначно определен елемент $x' \in G$ таков, што $xx' = x'x = e$.

За групата ќе велиме дека е *комутативна (абелова)* ако е комутативна како групоид, т.е. ако $x*y = y*x$ за секои $x,y \in G$.

**Пример 15. а)** Од примерот 14 а) непосредно следува дека групоидите $(\mathbf{N},\cdot)$ и $(\mathbf{Z},\cdot)$ не се групи. Имено, во $(\mathbf{N},\cdot)$ единствен инверзибилен елемент е 1, а во $(\mathbf{Z},\cdot)$ единствени инверзибилни елементи се 1 и -1. Исто така, групоидот $(\mathbf{N},+)$ не е група, бидејќи нема неутрален елемент.

Од примерите 11 б), 13 а) и 14 а) непосредно следува дека групоидот $(\mathbf{Z},+)$ е група и таа според примерот 12 б) е комутативна.

**б)** Од примерите 11 в), 12 в), 13 б) и 14 б) следува дека за секој $n \in \mathbf{N}$ групоидот $(M_n,\oplus)$ е комутативна група.

За секој $n \in \mathbf{N}$ елементот 0 не е инверзибилен во групоидот $(M_n,\otimes)$ (зошто?). Тоа значи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ групоидот $(M_n,\otimes)$ не е група. Меѓутоа, ако на множеството $M_5 \setminus \{0\}$ множењето по модул 5 го дефинираме како и во групоидот $(M_5,\otimes)$, забележуваме дека во овој случај добиваме нов групоид $(M_5 \setminus \{0\},\otimes)$ (провери?). Дали ова е исполнето за групоидот $(M_4,\otimes)$? А за групоидите $(M_6,\otimes)$ и $(M_7,\otimes)$?

Со непосредна проверка добиваме дека на претходно опишаниот начин при $n=7$ добиваме нов групоид $(M_7 \setminus \{0\},\otimes)$, а при $n=6$ не добиваме групоид. Јасно, Келиевите шеми на групоидите $(M_5 \setminus \{0\},\otimes)$ и $(M_7 \setminus \{0\},\otimes)$ се добиваат од Келиевите шеми на групоидите $(M_5,\otimes)$ и $(M_7,\otimes)$ со бришење на редот и колоната во кои главен елемент е 0. Сега лесно можеш да провериш дека групоидите $(M_5 \setminus \{0\},\otimes)$ и $(M_7 \setminus \{0\},\otimes)$ се комутативни групи.

Какви се броевите 5 и 7? На каков заклучок наведуваат претходните разгледувања? Провери го својот заклучок за $n=11$!

**в)** Нека е дадено множеството $A$ чии елементи се сите биекции од множеството $\{1,2,3\}$ во множеството $\{1,2,3\}$, а операцијата $\circ$ нека е композицијата на пресликувања. Ќе покажеме дека $(A,\circ)$ е група, но не е Абелова (комутативна) група.

Јасно, ако $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ и $g:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ се биекции, тогаш според теоремата 9, стр. 77, композиција на биекции е биекција, што значи дека $(A,\circ)$ е групоид. Понатаму, според теоремата 6 б), стр. 74, за композицијата на пресликувања важи асоцијативниот закон, т.е. $(A,\circ)$ е полугрупа. Од теоремата 6 а), стр. 74, за идентичното пресликување $I$ имаме дека важи $f\circ I=I\circ f=f$ за секој $f\in A$, што значи дека $I$ е единица во полугрупата $(A,\circ)$. Конечно, од теоремата 10, стр. 78, имаме дека инверзното пресликување на секоја биекција $f$ е биекција, што значи дека секој елемент $f$ е инверзибилен. Значи, $(A,\circ)$ е полугрупа со единица во која секој елемент е инверзибилен, т.е. $(A,\circ)$ е група.

Лесно се наоѓа дека елементи на множеството $A$ се биекциите:

$$I=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Со непосредна проверка наоѓаме дека

$$f_2\circ f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=f_3,\ f_1\circ f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=f_4$$

што значи дека групата $(A,\circ)$ не е комутативна. ♦

Од својствата на целите броеви знаеме дека од $x+y=z+y$ следува $x=z$. Претходно докажавме дека $(\mathbf{Z},+)$ е група, па логично се наметнува прашањето дали законот за кратење важи за секоја група. Пред да дадеме одговор на ова прашање ќе дефинираме што значи групоид со кратење.

**Дефиниција 16.** За групоидот $(G,*)$ ќе велиме дека е *групоид со кратење* ако од $x*z=y*z$ или $z*x=z*y$ следува $x=y$.

**Пример 16. а)** Од својствата на природните броеви следува дека $(\mathbf{N},\cdot)$ и $(\mathbf{N},+)$ се групоиди со кратење.

**б)** Нека $M$ е непразно множество. Да го разгледаме групоидот $(\mathbf{P}(M),\cup)$. Ако $A$ е произволно непразно подмножество од $M$, тогаш $A\cup M={}^cA\cup M$, но $A\neq{}^cA$. Според тоа, и $(\mathbf{P}(M),\cup)$ не е групоид со кратење. Сега да го разгледаме групоидот $(\mathbf{P}(M),\cap)$. За секое непразно подмножество $A$ од $M$ важи $A\cap\varnothing={}^cA\cap\varnothing$, но $A\neq{}^cA$. Според тоа, $(\mathbf{P}(M),\cap)$ не е групоид со кратење. ♦

**Теорема 5.** Секоја група е групоид со кратење.

**Доказ.** Нека $(G,*)$ е група, $e$ е единица во $G$ и со $z'$ да го означиме инверзниот елемент на $G$. Ако $x*z=y*z$. Тогаш,

$$x = x * e = x * (z * z') = (x * z) * z' = (y * z) * z' = y * (z * z') = y * e = y .$$

Аналогно се докажува дека од $z * x = z * y$ следува $x = y$, т.е. секоја група е групоид со кратење. ♦

Во досегашните разгледувања имавме случаи кога над едно исто множество се дефинирани две и повеќе операции. Во математиката од посебен интерес се случаите кога над едно исто множество се дефинирани две операции и кога меѓу нив постои заемна врска. Во таа смисла ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 17.** Нека на множеството $G$ е определена низа операции: $\bullet, *, \oplus, \otimes, \ldots$. Тогаш, велиме дека $(G, \bullet, *, \oplus, \otimes, \ldots)$ е *алгебарска структура со носител* $G$.

За алгебарската структура $(G, *, \circ)$ ќе велиме дека е *прстен* ако

а) групоидот $(G, *)$ е комутативна група;

б) $(G, \circ)$ е полугрупа; и

в) важат левиот и десниот дистрибутивен закон на операцијата $\circ$ во однос на операцијата $*$, т.е. важи

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \text{ и } (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z), \text{ за секои } x, y, z \in G .$$

Ако полугрупата $(G, \circ)$ е комутативна, ќе велиме дека $(G, *, \circ)$ е *комутативен прстен*. Ако $(G, \circ)$ е полугрупа со единица, ќе велиме дека $(G, *, \circ)$ е *прстен со единица*.

**Пример 17. а)** Во примерот 15 а) видовме дека $(M_5, \oplus)$ е комутативна група. Понатаму, од примерите 12 а) и 13 б) имаме дека $(M_5, \otimes)$ е комутативна полугрупа со единица. Понатаму, од својствата на конгруенциите непосредно следува дека за собирањето и множењето по модул 5 важи

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \text{ за секои } x, y, z \in M_5 .$$

Провери! Според тоа, алгебарската структура $(M_5, \oplus, \otimes)$ е комутативен прстен со единица.

Претходно кажаното, всушност, важи за секој $n \in \mathbf{N}$. Според тоа, за секој $n \in \mathbf{N}$ алгебарската структура $(M_n, \oplus, \otimes)$ е комутативен прстен со единициа.

**б)** Во примерот 15 а) видовме дека $(\mathbf{N}, +)$ не е група, па затоа алгебарската структура $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ не е прстен.

Според примерот 15 а) групоидот $(\mathbf{Z}, +)$ е комутативна група, а според примерите 12 а) и 13 а) групоидот $(\mathbf{Z}, \cdot)$ е комутативна полугрупа со единица. Понатаму, од својствата на целите броеви знаеме дека за секои $x, y, z \in \mathbf{Z}$ важи

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z .$$

Од досега изнесеното следува дека алгебарската структура $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ е прстен и тоа е прстенот на целите броеви. ♦

**Решливост на линеарна равенка (за оние што сакаат да знаат повеќе).** Како што знаеме, во множеството природни броеви равенката од облик $x+a=b$ има решение по $x$ ако и само ако $b>a$. Меѓутоа, истата равенката во множеството цели броеви има решение за секои $a,b\in\mathbf{Z}$. Исто така, видовме дека групоидот $(\mathbf{N},+)$ не е група, а групоидот $(\mathbf{Z},+)$ е група и тоа комутативна. Аналогното својство за линеарните равенки во целите броеви важи за линеарните равенки во секоја група. Ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 6.** Нека $(G,*)$ е група и $a,b\in G$. Тогаш, постои единствен елемент $x\in G$ таков што $a*x=b$.

**Доказ.** Нека $e$ е неутралниот елемент на $G$. Со $a'$ да го означиме инверзниот елемент на $a$ и да го разгледаме елементот $x=a'*b$. Имаме $a*x=a*(a'*b)=(a*a')*b=e*b=b$, т.е. постои елемент $x\in G$ со саканото својство. Единственоста на елементот $x\in G$ следува од единственоста на инверзниот елемент $a'$ и ако во $a*x=b$ помножиме од лево со $a'$. ♦

Аналогно се докажува дека постои единствен елемент $y\in G$ таков, што $y*a=b$.

Навистина, да го разгледаме $y=b*a'$. Имаме $y*a=(b*a')*a=b*(a'*a)=b*e=b$, т.е. постои елемент $y\in G$ со саканото својство. Единственоста на елементот $y\in G$ следува од единственоста на инверзниот елемент $a'$ и ако во $y*a=b$ помножиме од десно со $a'$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**24.** Со $A$ да го означиме множеството од сите парни цели броеви и $x*y=x+y$, за секој $x,y\in A$. Докажи дека $(A,*)$ е комутативна група.

**25.** Даден е групоидот $(\mathbf{Z},*)$ каде што $x*y=x+y+1$ за секои $x,y\in\mathbf{Z}$. Дали овој групоид е комутативна група?

**26.** Во множеството $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ е дефинирана операција $\circ$ на следниов начин: $x\circ y=2xy$, за секои $x,y\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$. Докажи дека $(\mathbf{Q}\setminus\{0\},\circ)$ е комутативна група.

**27.** Дадени се пресликувањата $f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$ и нека $S=\{f_1,f_2,f_3\}$. Докажи дека $(S,\circ)$ е група, каде што со $\circ$ е означена композицијата на пресликувања.

**28.** Нека $A=\{1,3,\frac{1}{3},9,\frac{1}{9},27,\frac{1}{27},\ldots,3^n,\frac{1}{3^n},\ldots\}$ и $x*y=xy$, за секои $x,y\in A$. Докажи дека $(A,*)$ е комутативна група.

**29.** Нека $f$ и $g$ се пресликувања од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$ дефинирани со $f(x)=x$, $g(x)=1-x$ за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека $(S,\circ)$ е група, каде што $S=\{f,g\}$ и со $\circ$ е означена композицијата на пресликувања.

**30.** Дадено е множеството $A=\{2k\mid k\in\mathbf{Z}\}$ и во него операции собирање и множење на цели броеви. Дали алгебарската структура $(A,+,\cdot)$ е комутативен прстен?

**31.** Со $\mathbf{Z}[x]$ да го означиме множеството полиноми по $x$ со целобројни коефициенти. Ако со $+$ и $\cdot$ ги означиме операциите собирање и множење на полиноми, тогаш $(\mathbf{Z}[x],+,\cdot)$ е комутативен прстен со единица. Докажи!

**32.** Нека $M$ е произволно непразно множество и $\mathbf{P}(M)$ е неговото партитивно множество. Дали алгебарската структура $(\mathbf{P}(M),\Delta,\cap)$ е прстен?

# 5. ПОИМ ЗА ПОЛЕ. ПОДРЕДЕНО ПОЛЕ

Да ги разгледаме комутативните прстени со единица $(M_4,\oplus,\otimes)$ и $(M_5,\oplus,\otimes)$. Келиевите шеми на групоидите $(M_4,\oplus)$ и $(M_4,\otimes)$ се:

| $\oplus$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\otimes$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 0 | 2 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 3 | 2 | 1 |

а на групоидите $(M_5,\oplus)$ и $(M_5,\otimes)$ се:

| $\oplus$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| $\otimes$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| **3** | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| **4** | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Како што можеме да забележиме, меѓу групоидите $(M_4,\otimes)$ и $(M_5,\otimes)$ постои суштинска разлика. Имено, во групоидот $(M_5,\otimes)$ секој ненулти елемент има инверзен елемент, а тоа не е случај во групоидот $(M_4,\otimes)$, во кој елементот 2 нема инверзен елемент. Секако, оваа разлика меѓу групоидите $(M_4,\otimes)$ и $(M_5,\otimes)$ прави суштинска разлика и меѓу комутативните прстени со единица $(M_4,\oplus,\otimes)$ и $(M_5,\oplus,\otimes)$ и токму тоа е една од причините за воведување на нов алгебарски поим, а тоа е поимот за поле.

**Дефиниција 18.** За алгебарската структура $(G,*,\circ)$ ќе велиме дека е *поле* ако

**а)** групоидот $(G,*)$ е комутативна група;

**б)** $(G',\circ)$ е комутативна група, каде што $G'$ е множеството $G$ без неутралниот елемент на $(G,*)$; и

**в)** важи дистрибутивниот закон на операцијата $\circ$ во однос на операцијата $*$, т.е. важи $x\circ(y*z)=x\circ y*x\circ z$ за секои $x,y,z\in G$.

**Пример 18. а)** Комутативниот прстен $(M_5,\oplus,\otimes)$ е поле. Навистина:

*i)* $(M_5,\oplus)$ е комутативна група,

*ii)* $(M_5',\otimes)$, каде што $M_5'=M_5\setminus\{0\}$, е комутативна група и

*iii)* $x\otimes(y\oplus z)=x\otimes y\oplus x\otimes z$, за секои $x,y,z\in M_5$.

Дали комутативните прстени $(M_6,\oplus,\otimes)$ и $(M_7,\oplus,\otimes)$ се полиња?

**б)** Да го разгледаме множеството рационални броеви $\mathbf{Q}=\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbf{Z},n\neq 0\}$ во кое операциите собирање и множење се определени со

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \text{ и } \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$

соодветно, што значи дека $(\mathbf{Q},+)$ и $(\mathbf{Q},\cdot)$ се групоиди. Како што знаеме, за операциите собирање и множење на рационални броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон (провери!).

Понатаму, за секој елемент $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$ важи $\frac{m}{n}+0=\frac{m}{n}$, т.е. 0 е неутрален елемент во $(\mathbf{Q},+)$. Исто така, за секој $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$ и $\frac{-m}{n}\in\mathbf{Q}$ и притоа важи $\frac{m}{n}+\frac{-m}{n}=\frac{m\cdot n-m\cdot n}{n^2}=0$, т.е. за секој елемент во $(\mathbf{Q},+)$ постои спротивен (инверзен) елемент. Според тоа, $(\mathbf{Q},+)$ е комутативна група.

Понатаму, за секој елемент $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$ важи $\frac{m}{n}\cdot 1=\frac{m}{n}$, т.е. 1 е неутрален елемент во $(\mathbf{Q},\cdot)$. Исто така, за секој $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ имаме $m\neq 0$. Затоа $\frac{n}{m}\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ и важи $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=\frac{m\cdot n}{n\cdot m}=1$, т.е. за секој елемент во $(\mathbf{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ постои инверзен елемент. Според тоа, $(\mathbf{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ е комутативна група.

Конечно, за рационалните броеви множењето е дистрибутивно во однос на собирањето (провери!).

Од досега изнесеното следува дека алгебарската структура $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ е поле, кое во литературата е познато како *поле на рационални броеви*. ♦

Да се потсетиме: ако $\alpha_0\in\mathbf{Z},\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $\alpha_i<10$ за $i\geq 1$, тогаш бројот

$$a=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{10^k} \tag{1}$$

го нарекуваме *конечна десетична дропка* и го означуваме со

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\,. \tag{2}$$

Притоа $\alpha_0$ е цел дел од бројот $a$, а $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k$ се децимали на бројот $a$. Слично, ако $\alpha_0\in\mathbf{Z},\ \alpha_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $\alpha_i<10$ за $i\geq 1$, тогаш записот

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots \tag{3}$$

го нарекуваме *бесконечна десетична дропка*. Притоа, $\alpha_0$ го нарекуваме цел дел од бесконечната десетична дропка $a$, а $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots$ се децимали на $a$. Понатаму, за бесконечната десетична дропка (3) ќе велиме дека е *периодична* ако постојат природни броеви $k$ и $p$ такви, што $\alpha_{k+i+1}=\alpha_{k+p+i+1}$ за секој $i\in\mathbf{N}$. Записот $\underline{\alpha_{k+i+1}\alpha_{k+i+2}\ldots\alpha_{k+p+i}}$ го нарекуваме *периода* на периодичната бесконечна десетична дропка. Притоа пишуваме:

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\underline{\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{k+p}}\,. \tag{4}$$

Како што знаеме, множеството бесконечни периодични десетични дропки всушност е множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$, а множеството бесконечни непериодични десетични дропки го нарекуваме множество ирационални броеви и го означуваме со $\mathbf{I}$. На пример, $\frac{1}{50}=0{,}0200\ldots$, $-\frac{466}{74}=-6{,}\underline{297}$ и $\frac{256}{39}=6{,}\underline{564102}$ итн. се рационални броеви, а $-\sqrt{2}=-1{,}414213562\ldots$ и $\pi=3{,}141592654$ се ирационални броеви.

Ирационалните броеви, заедно со рационалните, го формираат множеството на реалните броеви, кое го означуваме со $\mathbf{R}$, т.е. $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$. Како што знаеме, во множеството реални броеви се воведени операциите собирање и множење на реални броеви и за нив важи:

*i*) $x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$;

*ii*) $(x + y) + z = x + (y + z), \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$;

*iii*) $x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$;

*iii*) за секој $x \in \mathbf{R}$ постои $-x \in \mathbf{R}$ таков, што $x + (-x) = 0$;

*iv*) за секој $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ постои $x' \in \mathbf{R}$ таков, што $x \cdot x' = 1$; и

*v*) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, за секои $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Од својствата *i*) - *v*) следува дека $(\mathbf{R},+)$ и $(\mathbf{R} \setminus \{0\},\cdot)$ се комутативни групи за кои важи *v*). Според тоа, алгебарската структура $(\mathbf{R},+,\cdot)$ е поле, кое во литературата е познато под името *поле на реални броеви*.

Како што видовме, множеството реални броеви $\mathbf{R}$ се добива кога на множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ му го додадеме множеството ирационални броеви $\mathbf{I}$. Логично е да се запрашаме дали $(\mathbf{I},+)$ и $(\mathbf{I},\cdot)$ се групоиди. Одговорот на ова прашање е негативен. Имено, $-\sqrt{2}, \sqrt{2} \in \mathbf{I}$, но $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \notin \mathbf{I}$ и $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -1 \notin \mathbf{I}$, т.е. збир и производ на два ирационални броја не мора да биде ирационален број.

Како што знаеме, во множеството $\mathbf{R}$ е воведена релација на подредување $\leq$ за која важи:

а) $x \leq y$ или $y \leq x$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$;

б) ако $x \leq y$, тогаш $x + z \leq y + z$, за секој $z \in \mathbf{R}$; и

в) ако $x \leq y$ и $z > 0$, тогаш $x \cdot z \leq y \cdot z$

Понатаму, со $x < b$ ако $x \leq y$ и $x \neq y$ во множеството $\mathbf{R}$ воведуваме нова релација која како и во случајот на природните броеви е само транзитивна. Бидејќи $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, претходно наведените релации и нивните својства се исполнети и за рационалните броеви.

**Дефиниција 19.** Ако $(G,*,\circ)$ е поле и на $G$ е определена релација на подредување $\alpha$, тогаш за $(G,*,\circ)$ ќе велиме дека е *подредено поле*.

**Пример 19.** Од примерот 19 б) и од претходните разгледувања следува дека $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ и $(\mathbf{R},+,\cdot)$ се подредени полиња. ♦

Ќе докажеме дека за секои $x, y \in \mathbf{Q}$ такви што $x, y > 0$, тогаш постои природен број $n$ таков што $nx > y$. Од $x, y > 0$ следува $x = \frac{m}{k}, y = \frac{p}{k}$, каде што $m, k, p \in \mathbf{N}$, (зошто?). Нека $n = pk + 1$. Тогаш,

$$nx = (pk + 1) \cdot \frac{m}{k} > pk \cdot \frac{m}{k} = pm \geq \frac{p}{k} = y.$$

Секое подредено поле кое го задоволува претходно наведеното тврдење го нарекуваме *Архимедово поле*. Значи, $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ е Архимедово поле. Овде ќе забележиме дека и $(\mathbf{R},+,\cdot)$ е Архимедово поле, но поради комплицираноста, доказот нема да го разгледуваме.

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**33.** Дадено е множеството $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ и во него операциите собирање и множење на реални броеви. Докажи дека алгебарската структура $(\mathbf{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot)$ е поле.

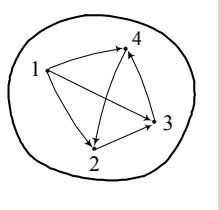
**34.** Дадено е множеството $\mathbf{Q}(\sqrt{6}) = \{a + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ и во него операциите собирање и множење на реални броеви. Докажи дека алгебарската структура $(\mathbf{Q}(\sqrt{6}),+,\cdot)$ е поле.

**35.** Дали алгебарската структура $(\mathbf{Z}[x],+,\cdot)$ од задачата 31 е поле? Одговорот да се образложи.

**36.** Дали алгебарската структура $(\mathbf{P}(M),\Delta,\cap)$ од задачата 32 е поле? Одговорот да се образложи.

**37.** Да го разгледаме множеството $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ и во него да дефинираме операции собирање и множење со: $(a,b)+(x,y) = (a+x, b+y)$ и $(a,b)\cdot(x,y) = (a\cdot x - b\cdot y, b\cdot x + a\cdot y)$. Докажи дека алгебарската структура $(\mathbf{R}^2,+,\cdot)$ е поле, при што $(0,0)$ и $(1,0)$ се нултиот и единичниот елемент во однос на собирањето и множењето, соодветно.

## ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ




**1.** **а)** На цртежот лево во множеството $A = \{1,2,3,4\}$ графички е прикажана релацијата $\alpha$. Запиши ја како подмножество од $A \times A$ и определи ги нејзините својства. (5 б)

**б)** Во множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ е дефинирана релација $\alpha$ на следниот начин: $x\alpha y$ ако и само ако $3x^2 + 2x = 3y^2 + 2y$. Испитај дали е $\alpha$ релација на еквиваленција. (9 б)

**2.** **а)** Во множеството $\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ дефинираме $m*n = m^n$. Докажи дека $(\mathbf{Z}\setminus\{0\},*)$ е групоид! Пресметај $2*3$, $3*2$, $(2*2)*3$ и $2*(2*3)$! Што заклучуваш? (5 б)

**б)** Докажи дека $(\mathbf{Z},*)$, каде што $x*y = x\cdot y + 3x - 2y - 3$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$ е групоид. Дали овој групоид е: 1) комутативен; 2) асоцијативен. (9 б)

**3.** **а)** Дадени се пресликувањата $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и нека $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Докажи дека $(S,\circ)$ е група, каде со $\circ$ е означена композицијата на пресликувања. Дали оваа група е комутативна? (10 б)

**б)** Даден е групоидот $(\mathbf{Z},*)$, што каде $x*y = x + y + 3$ за секои $x, y \in \mathbf{Z}$. Дали овој групоид е комутативна група? Одговорот да се образложи! (18 б)

**4.** Дадено е множеството $\mathbf{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ и во него операциите собирање и множење на реални броеви. Докажи дека алгебарската структура $(\mathbf{Q}(\sqrt{3}),+,\cdot)$ е поле. (20 б)

***Забелешка.*** При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш можеш да го искористиш следниот критериум:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Бодови:** | 23-31 | 32-39 | 40-48 | 49-56 |
| **Оценка:** | 2 | 3 | 4 | 5 |

# ГЛАВА V

# ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ПОД ЗНАК ЗА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

## СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Апсолутна вредност**
2. **Линеарна функција со независно променлива и под знакот за апсолутна вредност**
3. **Линеарна равенка со непозната и под знакот за апсолутна вредност**
4. **Системи линеарни равенки со непозната и под знакот за апсолутна вредност**
5. **Линеарни неравенки со непозната и под знакот за апсолутна вредност**
6. **Примена на методот на замена при решавање на системи линеарни равенки**
7. **Решавање на задачи кои се сведуваат на линеарна равенка и системи линеарни равенки**

## *ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА*

*За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:*

- *поим за апсолутната вредност;*
- *линеарните равенки;*
- *линеарните неравенки;*
- *линеарната функција;*
- *системите линеарни равенки и методите за нивно решавање; и*
- *системите линеарни неравенки и методите за нивно решавање.*

## НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ги утврдиш својствата на апсолутна вредност на реален број;
- да умееш да ги користиш интервалите при запишување функција со повеќе формули ако таа е зададена со апсолутни вредности и да црташ нејзин график;
- да умееш да решаваш линеарни равенки со повеќе апсолутни вредности;
- да умееш да решаваш линеарни неравенки со апсолутни вредности;
- да умееш да решаваш системи од две линеарни равенки што содржат апсолутни вредности
- да умееш да решаваш посложени примери на системи од две линеарни равенки со две непознати користејќи замена;
- да умееш да решаваш проблеми што се сведуваат на линеарни равенки или ситеми линеарни равенки.

Во основното образование, а и во оваа учебна година ги разработуваше линеарната функција, линеарните равенки и неравенки, системите линеарни равенки и неравенки и решаваше проблеми кои се сведуваат на линеарни равенки. Исто така, при изучувањето на реалните броеви се запозна со поимот апсолутна вредност на реален број. Овде ќе се запознаеме со линеарните равенки, неравенки и системи под знакот на апсолутна вредност. Всушност, во овој дел ќе ги поврземе претходно усвоените знаења и ќе извршиме нивно проширување со што ќе добиеш посеопфатни знаења за линеарните равенки, системите линеарни равенки и нивната примена.

## 1. АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Во основното образование се запозна со поимот апсолутна вредност, а овој поим го користевме и во нашите претходни разгледувања. Така, на пример, $|-2|=2$, $|\sqrt{5}|=\sqrt{5}$, $|-1{,}232|=1{,}232$ итн. Да се потсетиме на дефиницијата на апсолутната вредност.

**Дефиниција 1.** *Апсолутна вредност* на реалниот број $a$ го нарекуваме реалниот број $|a|$ дефиниран со

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ако } a\geq 0 \\ -a, & \text{ако } a<0. \end{cases} \qquad (1)$$

**Пример 1.** Пресметај $2\cdot|a|+7\cdot|b|+1$ ако $a=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

***Решение.*** Од дефиницијата на апсолутната вредност имаме

$$2\cdot|a|+7\cdot|b|+1=2\cdot|-\frac{\sqrt{3}}{4}|+7\cdot|\frac{\sqrt{3}}{2}|+1=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{2}+1=\frac{8\sqrt{3}}{2}+1=4\sqrt{3}+1. \ \blacklozenge$$

**Забелешка 1. а)** Непосредно од дефиницијата на апсолутната вредност следува дека $|a|\geq 0$ и $\sqrt{a^2}=|a|$, за секој $a\in\mathbf{R}$.

**б)** Нека $b>0$ и $|a|=b$. Тогаш, за $a\geq 0$ имаме $a=b$, а за $a<0$ важи $-a=b$, т.е. $a=-b$. Значи, од $|a|=b$ следува $a\in\{-b,b\}$, но важи и обратното од $a\in\{-b,b\}$ следува $|a|=b$.

Понатаму, на пример, $|5|=5=|-5|$, $-5\leq 5=|-5|$ и $-5\leq 5=|5|$. Ќе докажеме дека последното важи за секој реален број $a$, т.е. ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 1.** За секој реален број $a$ важи $|a|=|-a|$, $a\leq|a|$ и $-a\leq|a|$.

**Доказ.** Јасно, ако $a=0$, тогаш $|a|=0=|-a|$. Ако $a>0$, тогаш $|a|=a$ и бидејќи $-a<0$, имаме $|-a|=-(-a)=a=|a|$. Ако $a<0$, тогаш $|a|=-a$ и бидејќи $-a>0$, имаме $|-a|=-a=|a|$.

Понатаму, ако $a=0$, тогаш $|a|=0\geq 0=a$. Ако $a>0$, тогаш $|a|=a$, па затоа $a\leq|a|$. Ако $a<0$, тогаш $|a|=-a>0>a$ .

Останува да го докажеме второто неравенство. Ако $a=0$, тогаш $|a|=0\geq 0=-a$. Ако $a>0$, тогаш $|a|=a>0>-a$. Ако $a<0$, тогаш $|a|=-a\geq -a$. ♦

Во следната теорема во врска со апсолутните вредности ќе докажеме две неравенства, кои имаат голема примена во математиката.

**Теорема 2.** *i)* $|a+b|\leq|a|+|b|$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$.

*ii)* $||a|-|b||\leq|a-b|$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$.

**Доказ.** *i)* Од теоремата 1 следува $a\leq|a|$ и $b\leq|b|$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$. Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме $a+b\leq|a|+|b|$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$. Аналогно од теоремата 1 следува $-a\leq|a|$ и $-b\leq|b|$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$, од што добиваме $-(a+b)\leq|a|+|b|$.

Конечно, ако $a+b\geq 0$, тогаш $|a+b|=a+b\leq|a|+|b|$, а ако $a+b<0$, тогаш $|a+b|=-(a+b)\leq|a|+|b|$, што и требаше да се докаже.

*ii)* Имаме:

$$|a|=|(a-b)+b|\leq|a-b|+|b| \text{ и } |b|=|(b-a)+a|\leq|b-a|+|a|,$$

од што следува $|a|-|b|\leq|a-b|$ и $-(|a|-|b|)\leq|a-b|$, од што, како и во доказот под *i)*, следува дека $||a|-|b||\leq|a-b|$. ♦

Да забележиме дека тврдењето *i*) од теоремата 2 може да се обопшти. Имено, важи следното тврдење, кое овде нема да го докажеме.

За секои реални броеви $a_1,a_2,\ldots,a_n$ точно е неравенството

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|. \tag{2}$$

Да ги разгледаме броевите $a=-4$ и $b=3$. Имаме $a\cdot b=-12$, $\frac{a}{b}=-\frac{4}{3}$, $|a|=4$, $|b|=3$, $|a\cdot b|=12$ и $|\frac{a}{b}|=\frac{4}{3}$, што значи дека $|a\cdot b|=12=|a|\cdot|b|$ и $|\frac{a}{b}|=\frac{4}{3}=\frac{|a|}{|b|}$. Последните равенства важат за секои реални броеви $a$ и $b$, што може да се види од следната теорема.

**Теорема 3.** *i)* $|ab|=|a|\cdot|b|$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$.

*ii)* $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$, $b\neq 0$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** *i)* Можни се следните четири случаи:

1) ако $a<0, b<0$, тогаш $ab>0$, па затоа $|a|\cdot|b|=(-a)(-b)=ab=|ab|$.

2) ако $a<0, b\geq 0$, тогаш $ab\leq 0$, па затоа $|a|\cdot|b|=(-a)b=-ab=|ab|$.

3) ако $a\geq 0, b<0$, тогаш $ab\leq 0$, па затоа $|a|\cdot|b|=a(-b)=-ab=|ab|$.

4) ако $a\geq 0, b\geq 0$, тогаш $ab\geq 0$, па затоа $|a|\cdot|b|=ab=|ab|$.

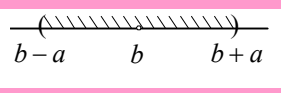
*ii)* Ако $b>0$, тогаш $\frac{1}{b}>0$ и $\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{b}=\frac{1}{|b|}$, а ако $b<0$, тогаш $\frac{1}{b}<0$ и $\left|\frac{1}{b}\right|=-\frac{1}{b}=\frac{1}{-b}=\frac{1}{|b|}$. Сега од *i)* следува $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\left|\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\frac{1}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$. ♦

Да разгледаме неколку својства на апсолутната вредност поврзани со неравенствата. За таа цел ќе ја докажеме следната теорема.

**Теорема 4.** *i)* Ако $a>0$, тогаш $|x|<a$ ако и само ако $-a<x<a$.
*ii)* Ако $a>0$, тогаш $|x-b|<a$ ако и само ако $b-a<x<b+a$.
*iii)* Ако $a>0$, тогаш $|x|>a$ ако и само ако $x<-a$ или $x>a$.
*iv)* Ако $a>0$, тогаш $|x-b|>a$ ако и само ако $b-a<x$ или $x>b+a$.

**Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе).** *i)* Нека $|x|<a$, $a>0$. Ако $x\geq 0$, тогаш $x=|x|<a$, а ако $x<0$, тогаш $-x=|x|<a$ т.е. $x>-a$. Според тоа, $x<a$ и $x>-a$ односно $-a<x<a$ и тоа е интервалот $(-a,a)$.

Нека $-a<x<a$, $a>0$. Ако $x\geq 0$, тогаш $|x|=x<a$, а ако $x<0$, тогаш $|x|=-x<a$. Според тоа, во секој случај $|x|<a$.

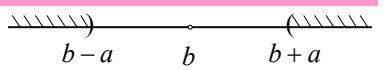



*ii)* Нека $a>0$. Според *i)* неравенството $|x-b|<a$ е еквивалентно со неравенствата $-a<x-b<a$, кои се еквивалентни со неравенствата $b-a<x<b+a$ и тоа е интервалот $(b-a,b+a)$ претставен на цртежот десно.

*iii)* Нека $a>0$. Да претпоставиме дека $|x|>a$. Ако $x\geq 0$, тогаш $x=|x|>a$, а ако $x<0$, тогаш $-x=|x|>a$, т.е. $x<-a$. Според тоа, $x<-a$ или $x>a$ и тоа е множеството $(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$.

Обратно, нека $x<-a$ или $x>a$. Ако $x\geq 0$, тогаш $|x|=x>a$, а ако $x<0$, тогаш $|x|=-x>a$. Според тоа, во секој случај $|x|>a$.

*iv)* Нека $a>0$. Според *iii)* $|x-b|>a$ ако и само $-a<x-b$ или $x-b>a$, т.е. ако и само ако $b-a<x$ или $x>b+a$ ако и само ако $x\in(-\infty,b-a)\cup(b+a,\infty)$ (цртеж десно). ♦




Да забележиме дека тврдењата од претходната теорема важат и во случај кога знаците за неравенства $<$ и $>$ се заменат со знаците за неравенства $\leq$ и $\geq$. Притоа, наместо отворени интервали имаме затворени, односно полузатворени интервали. Обиди се овие тврдења самостојно да ги искажеш.

**Пример 2. а)** Најди ги сите реални броеви $x$ за кои важи $|x-\frac{1}{4}|<\frac{3}{4}$.

**б)** Најди ги сите реални броеви $x$ за кои важи $|x-\frac{1}{3}|\geq\frac{2}{3}$.

***Решение.*** **а)** Од второто тврдење во теоремата 4 следува $-\frac{3}{4}<x-\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$, односно $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$. Според тоа, $-\frac{1}{2}<x<1$, што значи дека $x\in(-\frac{1}{2},1)$.

**б)** Од четвртото тврдење во теоремата 4 и од претходната забелешка имаме $x-\frac{1}{3}\geq\frac{2}{3}$ или $x-\frac{1}{3}\leq-\frac{2}{3}$, односно $x\geq\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ или $x\leq\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$. Според тоа, $x\geq 1$ или $x\leq-\frac{1}{3}$, што значи дека бараното множество е $(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[1,\infty)$. ♦

**Пример 3.** Најди ги сите природни броеви $n$ со следните својства: постојат броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ кои му припаѓаат на интервалот $(-1,1)$ и за кои важи равенството

$$|x_1|+|x_2|+...+|x_n|=2003+|x_1+x_2+...+x_n|. \qquad (3)$$

**Решение.** Нека $n$ е број со саканото својство, т.е. постојат броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ кои му припаѓаат на интервалот $(-1,1)$ и за кои важи (3). Бидејќи $|x_i|\geq 0$ и $|x_i|<1$, за секој $i=1,2,...,n$ од равенството (3) добиваме

$$2003\leq 2003+|x_1+x_2+...+x_n|=|x_1|+|x_2|+...+|x_n|<n\cdot 1=n.$$

Значи, потребно е $n\geq 2004$.

Ќе докажеме дека секој природен број $n\geq 2004$ го има саканото својство. Ако $n\geq 2004$ е парен број, тогаш земаме

$$x_1=x_3=...=x_{n-1}=\frac{2003}{n}, \quad x_2=x_4=...=x_n=\frac{2003}{n}.$$

Броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ му припаѓаат на интервалот $(-1,1)$ и за нив важи (3), провери. Ако $n\geq 2004$ е непарен број ставаме

$$x_1=x_3=...=x_n=\frac{2003}{n-1}, \quad x_2=x_4=...=x_{n-1}=\frac{2003}{n-1}.$$

Броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ му припаѓаат на интервалот $(-1,1)$ и за нив важи (3), провери.

Конечно, бараните природни броеви се сите природни броеви поголеми или еднакви на 2004. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**1.** Пресметај $3\cdot|x|-4\cdot|y|+2$ ако:

**а)** $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{4}$; **б)** $x=-\frac{\sqrt{3}}{6}$, $y=\frac{3\sqrt{3}}{8}$; и **в)** $x=-\sqrt{18}$, $y=2\sqrt{2}$.

**2.** Пресметај $x\cdot|y|+y\cdot|z|+z\cdot|x|$ ако:

**а)** $x=-2, y=3, z=-4$; **б)** $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{4}$; и **в)** $x=-\sqrt{3}, y=2\sqrt{3}, z=\sqrt{12}$.

**3.** Пресметај $|2\cdot|x-1|-3\cdot|y+2|+|z-2||$ ако:

**а)** $x=-2, y=3, z=-4$; **б)** $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$; и **в)** $x=\sqrt{3}, y=-2\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$.

**4.** За кои реални броеви се исполнети неравенствата:

**а)** $|x|<2$; **б)** $|x|\geq -1$; **в)** $|x|\geq 3$; **г)** $|x+2|\geq 2$; и **д)** $|x-3|\leq 5$.

Добиените множества претстави ги на бројна оска.

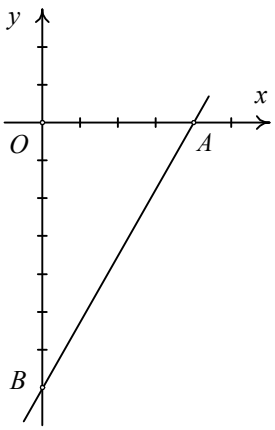
**5.** Докажи дека $2\cdot|ab|\leq a^2+b^2$ за секои $a,b\in\mathbf{R}$.

**6.** Докажи дека ако $|b|<\frac{|a|}{2}$, тогаш $\frac{1}{|a-b|}<\frac{2}{|a|}$.

**7.** Докажи дека за секои реални броеви $a$ и $b$ такви, што $a^2+b^2=1$ важи $|a+b|\leq\sqrt{2}$.

# 2. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА СО НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

При изучувањето на линеарната функција $y = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$ видовме дека за $a \neq 0$ нејзиниот график е права која минува низ точките $A(0,b)$ и $B(-\frac{b}{a},0)$, а за $a = 0$ тоа е права која минува низ точката $C(0,b)$ и е паралелна со $x-$оската. Така, на пример, графикот на линеарната функција $y = \frac{3}{2}x - 6$ е правата која минува низ точките $A(4,0)$ и $B(0,-6)$, (црт. десно).




Природно е да се запрашаме: што претставува графикот на линеарната функција кај која независно променливата се јавува и под знакот на апсолутната вредност. Пред да одговориме на поставеното прашање, ќе покажеме како дадена линеарна функција, што го содржи знакот за апсолутна вредност, може да се запише со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност. Последното ќе го објасниме со неколку примери.

**Пример 4. а)** Функцијата $f(x) = |x-5|$, $x \in \mathbf{R}$ запиши ја со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутната вредност.

**б)** Функцијата $f(x) = 2|x-3| + 3|x+1| + 4$, $x \in \mathbf{R}$ запиши ја со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност.

***Решение.* а)** Од дефиницијата на апсолутна вредност имаме

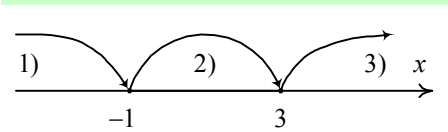
$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{ако } x-5 \geq 0 \\ -(x-5) & \text{ако } x-5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-5, & \text{ако } x \geq 5 \\ -(x-5) & \text{ако } x < 5, \end{cases}$$

па затоа дадената функција ја запишуваме со помош на две формули

$$f(x) = \begin{cases} x-5, & \text{ако } x \geq 5 \\ -(x-5) & \text{ако } x < 5. \end{cases}$$

**б)** Прво ги одредуваме вредностите на променливата $x$, за кои изразите под знакот на апсолутната вредност се анулираат, т.е. добиваат вредност нула. Имаме, $x-3=0$ и $x+1=0$, па оттука $x=3$ и $x=-1$. Броевите $-1$ и $3$ го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,-1)$, $[-1,3)$ и $[3,+\infty)$.

Одделно ја разгледуваме функцијата на секој од овие интервали (цртеж лево). Имаме:




1) ако $x \in (-\infty,-1)$, тогаш $|x-3| = -(x-3)$ и $|x+1| = -(x+1)$, па затоа

$$f(x) = -2(x-3) - 3(x+1) + 4 = -5x + 7.$$

2) ако $x \in [-1, 3)$, тогаш $|x-3| = -(x-3)$ и $|x+1| = x+1$, па затоа

$$f(x) = -2(x-3) + 3(x+1) + 4 = x + 13.$$

3) ако $x \in [3, +\infty)$, тогаш $|x-3| = x-3$ и $|x+1| = x+1$, па затоа

$$f(x) = 2(x-3) + 3(x+1) + 4 = 5x + 1.$$

Од претходно изнесеното добиваме

$$f(x) = \begin{cases} -5x+7, & \text{ако } x \in (-\infty, -1) \\ x+13, & \text{ако } x \in [-1, 3) \\ 5x+1, & \text{ако } x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

што и требаше да се најде. ♦

При запишувањето на една формула во која имаме апсолутни вредности со помош на повеќе формули без апсолутни вредности, всушност се "ослободуваме" од апсолутните вредности. Притоа, ако имаме повеќе изрази под знакот за апсолутна вредност, истите на различните интервали ги земаме со различни предзнаци + или -. При оваа постапка се можни грешки, па затоа можеме да направиме помошна таблица во која за секој израз на поодделните интервали ќе го запишеме соодветниот предзнак. Така, за примерот 4 б) оваа таблица го има обликот:

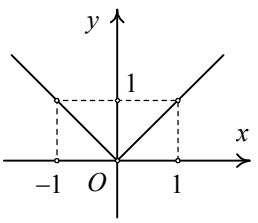
| | $(-\infty,-1)$ | $[-1,3)$ | $[3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| случај | 1) | 2) | 3) |

Во претходниот пример видовме дека ако линеарната функција ја содржи независно променливата и под знакот на апсолутната вредност, тогаш неа можеме да ја запишеме со повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност. Според тоа, графикот на ваквата функција можеме да го нацртаме на следниот начин:

1. со аналогна постапка како во примерот 4 б) дадената функција ја запишуваме со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност и
2. на секој од добиените интервали ја цртаме функцијата која е добиена од почетната функција при ослободувањето од апсолутната вредност.

**Пример 5.** Нацртај го графикот на функцијата

**а)** $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$ и **б)** $f(x) = |x+1|$, $x \in \mathbf{R}$.



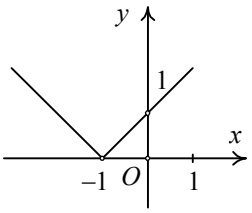

***Решение.*** **а)** Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \geq 0 \\ -x, & \text{ако } x < 0 \end{cases},$$

што значи дека на интервалот $(-\infty, 0)$ графикот на почетната функција всушност е графикот на функцијата $f_1(x) = -x$, а на интервалот $[0, +\infty)$ тоа е графикот на функцијата $f_2(x) = x$. Ако ги нацртаме графиците на функциите $f_1$ и $f_2$ на соодветните интервали, го добиваме графикот на функцијата $f(x) = |x|$ (цртеж горе десно).

**б)** Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{ако } x\geq -1 \\ -(x+1), & \text{ако } x<-1 \end{cases},$$




што значи дека на интервалот $(-\infty,-1)$ графикот на почетната функција всушност е графикот на функцијата $f_1(x)=-(x+1)=-x-1$, а на интервалот $[-1,+\infty)$ тоа е графикот на функцијата $f_2(x)=x+1$. Ако ги нацртаме графиците на функциите $f_1$ и $f_2$ на соодветните интервали го добиваме графикот на функцијата $f(x)=|x+1|$ (цртеж горе десно). ♦

**Забелешка 2.** Во примерот 5 ги разгледавме графиците на функциите $f(x)=|x|$ и $f(x)=|x+1|$. Забележуваме дека графикот на функцијата $f(x)=|x+1|$ може да се добие со транслација по $x-$оската на графикот на функцијата $f(x)=|x|$ за должина $-1$. Аналогно, графикот на функцијата од видот $f(x)=|x+a|$, $x\in\mathbf{R}$ се добива со транслација по $x-$оската на графикот на функцијата $f(x)=|x|$ за должина $-a$ (зошто?). Користејќи го ова својство, нацртај ги графиците на функциите $f(x)=|x-\frac{1}{2}|$ и $f(x)=|x+3|$, $x\in\mathbf{R}$.

Слично, графикот на функцијата $f(x)=|x|+1$ $x\in\mathbf{R}$ може да се добие со транслација по $y-$оската на графикот на функцијата $f(x)=|x|$ за должина 1, а графикот на функцијата $f(x)=|x|+b$, $x\in\mathbf{R}$ може да се добие со транслација по $y-$оската на графикот на функцијата $f(x)=|x|$ за должина $b$ (зошто?). Користејќи го ова својство, нацртај ги графиците на функциите $f(x)=|x|+3$ и $f(x)=|x|-2$, $x\in\mathbf{R}$.

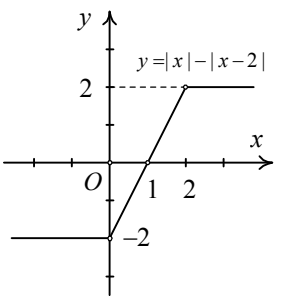
Што можеш да заклучиш за графикот на функцијата $f(x)=|x+a|+b$, $x\in\mathbf{R}$? Дали можеш да го нацрташ со помош на графикот на функцијата $f(x)=|x|$, $x\in\mathbf{R}$? Нацртај ги графиците на функциите $f(x)=|x-2|+3$ и $f(x)=|x+\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbf{R}$.

**Пример 6.** Нацртај го графикот на функцијата

**а)** $f(x)=|x|-|x-2|$, $x\in\mathbf{R}$ и **б)** $f(x)=||x|-1|-1|$, $x\in\mathbf{R}$.

***Решение.*** **а)** Прво ги одредуваме вредностите на променливата $x$, за кои изразите под знакот на апсолутната вредност се анулираат, т.е. добиваат вредност нула. Имаме, $x=0$ и $x=2$. Броевите 0 и 2 го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,0)$, $[0,2)$ и $[2,+\infty)$.

Одделно ја разгледуваме функцијата на секој од овие интервали. Имаме:




1) ако $x\in(-\infty,0)$, тогаш $|x|=-x$ и $|x-2|=-(x-2)$, па затоа $f(x)=-x+(x-2)=-2$.

2) ако $x\in[0,2)$, тогаш $|x|=x$ и $|x-2|=-(x-2)$, па затоа $f(x)=x+(x-2)=2x-2$.

3) ако $[2,+\infty)$, тогаш $|x|=x$ и $|x-2|=x-2$, па затоа $f(x)=x-(x-2)=2$.

Понатаму, на секој од интервалите $(-\infty,0)$, $[0,2)$ и $[2,+\infty)$ ги

цртаме графиците на добиените функции со што го добиваме графикот на функцијата $f(x)=|x|-|x-2|$, цртеж лево.

**б)** Аналогно, како и во претходните примери, последователно ги наоѓаме реалните броеви за кои се анулира изразот под знакот за апсолутна вредност. Имаме, $||x|-1|=1$ и од забелешката 1 б) следува $|x|-1\in\{-1,1\}$. Понатаму, од $|x|-1=-1$ наоѓаме $|x|=0$ па затоа $x=0$, а од $|x|-1=1$ наоѓаме $|x|=2$, што според забелешката 1 б) значи $x=-2$ или $x=2$. Броевите $-2, 0$ и $2$ го разбиваат множеството реални броеви на четири дисјунктни интервали $(-\infty,-2)$, $[-2,0)$, $[0,2)$ и $[2,+\infty)$.

Одделно ја разгледуваме функцијата на секој од овие интервали. Имаме:

1) ако $x\in(-\infty,-2)$, тогаш последователно наоѓаме

$$f(x)=|||x|-1|-1|=||-x-1|-1|=|-x-1-1|=|-x-2|=-x-2.$$

2) ако $x\in[-2,0)$, тогаш последователно наоѓаме

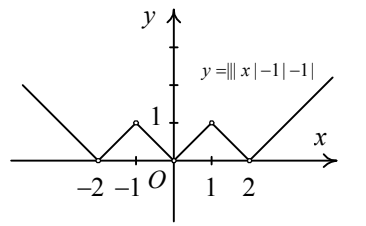
$$f(x)=|||x|-1|-1|=||-x-1|-1|=||x+1|-1|=\begin{cases}|-(x+1)-1|, & x\in[-2,-1)\\ |x+1-1|, & x\in[-1,0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}|x+2|, & x\in[-2,-1)\\ |x|, & x\in[-1,0)\end{cases}=\begin{cases}x+2, & x\in[-2,-1)\\ -x, & x\in[-1,0).\end{cases}$$

3) ако $x\in[0,2)$, тогаш последователно наоѓаме

$$f(x)=|||x|-1|-1|=||x-1|-1|=\begin{cases}|-(x-1)-1|, & x\in[0,1)\\ |x-1-1|, & x\in[1,2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}|x|, & x\in[0,1)\\ |x-2|, & x\in[1,2)\end{cases}=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ 2-x, & x\in[1,2).\end{cases}$$




4) ако $x\in[2,+\infty)$, тогаш последователно добиваме

$$f(x)=|||x|-1|-1|=||x-1|-1|=|x-1-1|=|x-2|=x-2.$$

Од претходно изнесеното следува дека функцијата $f(x)=|||x|-1|-1|$ се запишува со шест формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност. Ако на секој од најдените интервали го конструираме графикот на соодветната функција, тогаш го добиваме графикот на почетната функција (цртеж горе десно). ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**8.** Функцијата:

**а)** $f(x)=|x-4|+2|x+1|$, $x\in\mathbf{R}$; **б)** $f(x)=|2|x-1|+1|-3$, $x\in\mathbf{R}$; и

**в)** $f(x)=3|x-4|+||x+2|-1|$, $x\in\mathbf{R}$

запиши ја со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност.

**9.** Нацртај го графикот на функцијата:

**а)** $f(x)=1-|x|$, $x\in\mathbf{R}$; **б)** $f(x)=3|x-2|-4$, $x\in\mathbf{R}$; и **в)** $f(x)=4-2|x+1|$, $x\in\mathbf{R}$.

**10.** Нацртај го графикот на функцијата:

**а)** $f(x)=|x|+|x-2|$, $x\in\mathbf{R}$; **б)** $f(x)=|3x-2|-2|x+1|$, $x\in\mathbf{R}$; и

**в)** $f(x)=4-2|x+3|-|2x+1|$, $x\in\mathbf{R}$.

**11.** Нацртај го графикот на функцијата:

**а)** $f(x)=||x|-2|$, $x\in\mathbf{R}$; **б)** $f(x)=|3-2|x-1||$, $x\in\mathbf{R}$; и

**в)** $f(x)=3+||x-1|+2|$, $x\in\mathbf{R}$.

**12.** Нацртај го графикот на функцијата:

**а)** $f(x)=|||x|+1|+1|$, $x\in\mathbf{R}$; **б)** $f(x)=|||x-1|-2|-3|$, $x\in\mathbf{R}$; и

**в)** $f(x)=2-||x-2|+|x+1||$, $x\in\mathbf{R}$.

## 3. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО НЕПОЗНАТА И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Честопати сме соочени со потребата да решиме линеарна равенка во која непознатата се среќава и под знакот за апсолутна вредност. Ваквите равенки можеме да ги решаваме на повеќе начини, но ние во нашите разгледувања ќе се задржиме на методот на интервали, кој се состои во следново:

1. со аналогна постапка, како во примерот 4 б), од дадената равенка добиваме повеќе линеарни равенки кои не го содржат знакот за апсолутна вредност и чии решенија им припаѓаат на соодветните интервали и
2. ја решаваме секоја од добиените равенки и проверуваме дали решението му припаѓа на соодветниот интервал:
   - ако решението му припаѓа на соодветниот интервал, тогаш тоа е решение на почетната равенка;
   - ако решението не му припаѓа на соодветниот интервал, тогаш тоа не е решение на почетната равенка и го отфрламе.

Во примерот 6 б) решававме елементарни равенки со непозната под знакот на апсолутна вредност, при што се користевме само со својството $|b|=a>0$ ако и само ако $b\in\{-a,a\}$. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на посложени примери преку кои ќе ги разгледаме основните типови на линеарни равенки од овој вид.

**Пример 7.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $|4x+3|=9$.

***Решение.*** Од забелешката 1 б) имаме дека $|4x+3|=9$ ако и само ако $4x+3\in\{9,-9\}$ т.е. $4x+3=9$ или $4x+3=-9$. Според тоа, решавањето на равенката се сведува на решавање на две линеарни равенки со една непозната, чии решенија се $x=\frac{3}{2}$ и $x=-3$. Значи, решение на дадената равенка се броевите $-3$ и $\frac{3}{2}$, т.е. множеството решенија е $M=\{-3,\frac{3}{2}\}$. ♦

**Пример 8.** Во множеството реши ја равенката:

**а)** $|2x+6|=3x+4$; **б)** $\sqrt{x^2-4x+4}=3x-8$.

***Решение.*** **а)** Бидејќи

$$|2x+6|=\begin{cases}2x+6, & 2x+6\ge 0\\ -2x-6, & 2x+6<0\end{cases}=\begin{cases}2x+6, & x\ge -3\\ -2x-6, & x<-3\end{cases}=\begin{cases}2x+6, & x\in[-3,+\infty)\\ -2x-6, & x\in(-\infty,-3),\end{cases}$$

дадената равенка треба да ја решаваме на секој од интервалите $(-\infty,-3)$ и $[-3,+\infty)$.

Ако $x\in(-\infty,-3)$, тогаш $|2x+6|=3x+4 \Leftrightarrow -2x-6=3x+4$, т.е. $x=-2$ и бидејќи $-2\notin(-\infty,-3)$, добиваме дека $-2$ не е решение на почетната равенка. Ако, пак, $x\in[-3,+\infty)$, тогаш $|2x+6|=3x+4 \Leftrightarrow 2x+6=3x+4$, т.е. $x=2$ и бидејќи $2\in[-3,+\infty)$, заклучуваме дека 2 е решение на почетната равенка.

Значи, равенката има само едно решение: $x=2$.

**б)** Од забелешка 1 а) имаме $\sqrt{x^2 4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$, па затоа дадената равенка е еквивалентна на равенката $|x-2|=3x-8$. Понатаму,

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & x-2\ge 0\\ -x+2, & x-2<0\end{cases}=\begin{cases}x-2, & x\ge 2\\ -x+2, & x<2\end{cases}=\begin{cases}x-2, & x\in[2,+\infty)\\ -x+2, & x\in(-\infty,2),\end{cases}$$

па дадената равенка треба да ја решаваме на секој од интервалите $(-\infty,2)$ и $[2,+\infty)$.

Ако $x\in(-\infty,2)$, тогаш $|x-2|=3x-8 \Leftrightarrow -x+2=3x-8$, т.е. $x=\frac{5}{2}$ и бидејќи $\frac{5}{2}\notin(-\infty,2)$, добиваме дека $\frac{5}{2}$ не е решение на почетната равенка. Ако, пак, $x\in[2,+\infty)$, тогаш $|x-2|=3x-8 \Leftrightarrow x-2=3x-8$, т.е. $x=3$ и бидејќи $3\in[2,+\infty)$ заклучуваме дека 3 е решение на почетната равенка.

Значи, равенката има само едно решение: $x=3$. ♦

**Забелешка 3.** Равенките од примерот 8 се од видот $|f(x)|=g(x)$. Равенка од овој вид може да се реши и на следниот начин. Ги решаваме равенките $f(x)=g(x)$ и $f(x)=-g(x)$, а потоа проверуваме дали најдените решенија ја задоволуваат и почетната равенка. Така, на пример, за равенката од примерот 8 а) имаме $f(x)=2x+6$ и $g(x)=3x+4$, па затоа

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x+6=3x+4 \Leftrightarrow x=2 \text{ и}$$

$$f(x)=-g(x) \Leftrightarrow 2x+6=-3x-4 \Leftrightarrow x=-2.$$

Сега, од $|2\cdot(-2)+6|=2\ne -2=3\cdot(-2)+4$ заклучуваме дека $x=-2$ не е решение на почетната равенка, а бидејќи $|2\cdot 2+6|=10=3\cdot 2+4$, заклучуваме дека $x=2$ е решение на почетната равенка.

**Пример 9.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

**а)** $|3x+6|+|x|=2x+6$ и **б)** $2|x-3|+3|x+1|=5x-3$.

***Решение.*** **а)** Броевите $-2$ и $0$, за кои се анулираат апсолутните вредности на десната страна на равенката, го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,-2)$, $[-2,0)$ и $[0,+\infty)$. Со запишување на десната страна со повеќе формули без знакот за апсолутна вредност, добиваме

$$|3x+6|+|x|=\begin{cases}-4x-6, & \text{ако } x\in(-\infty,-2)\\ 2x+6, & \text{ако } x\in[-2,0)\\ 4x+6, & \text{ако } x\in[0,+\infty).\end{cases}$$

Според тоа, за да ја решиме почетната равенка треба да ги решиме равенките:

$$\begin{aligned}-4x-6&=2x+6, \quad x\in(-\infty,-2)\\ 2x+6&=2x+6, \quad x\in[-2,0)\\ 4x+6&=2x+6, \quad x\in[0,+\infty),\end{aligned}$$

Решението на првата равенка, бројот $x=-2$ не му припаѓа на интервалот $(-\infty,-2)$, па значи во овој случај почетната равенка нема решение.

Втората равенка е идентитет за секој $x\in\mathbf{R}$, па значи и за $x\in[-2,0)$.

Решението на третата равенка $x=0$ припаѓа на интервалот $[0,+\infty)$, па затоа тоа е решение и на почетната равенка.

Конечно, решение на почетната равенка е множеството $M=[-2,0)\cup\{0\}=[-2,0]$.

**б)** Броевите $3$ и $-1$, за кои се анулираат апсолутните вредности на десната страна на равенката, го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,-1)$, $[-1,3)$ и $[3,+\infty)$. Со запишување на десната страна со повеќе формули без знакот за апсолутна вредност добиваме

$$\begin{aligned}-5x+3&=5x-3, \quad x\in(-\infty,-1)\\ x+9&=5x-3, \quad x\in[-1,3)\\ 5x-3&=5x-3, \quad x\in[3,+\infty).\end{aligned}$$

Решението на првата равенка, бројот $x=\frac{3}{5}$ не му припаѓа на интервалот $(-\infty,-1)$, па значи во овој случај почетната равенка нема решение. Решението на втората равенка $x=3$ не му припаѓа на интервалот $[-1,3)$, па значи во овој случај почетната равенка нема решение. Третата равенка е идентитет за секој $x\in\mathbf{R}$, па значи и за $x\in[3,+\infty)$.

Конечно, решение на почетната равенка е множеството $M=[3,+\infty)$. ♦

**Пример 10.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$||3x+6|+x|=4.$$

***Решение.*** Според забелешката 1 б), добиваме дека почетната равенка е еквивалентна на равенките:

1) $|3x+6|+x=4$ 2) $|3x+6|+x=-4$

Ако ја искористиме постапката од забелешката 3, од равенката 1) ги добиваме равенките $3x+6=4-x$ и $3x+6=x-4$ чии решенија се $x=-\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{5}{2}$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x=-\frac{1}{2}$ е решение на 1), а $x=-\frac{5}{2}$ не е решение на 1).

Повторно според забелешка 3, за равенкатата 2) ги наоѓаме равенките $3x+6=-4-x$ и $3x+6=x+4$ чии решенија се $x=-\frac{5}{2}$ и $x=-1$, соодветно. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x=-\frac{5}{2}$ и $x=-1$ не се решенија на 2).

Конечно, множеството решенија на дадената равенка е $M=\{-\frac{1}{2}\}$. ♦

**Пример 11.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$||2x-3|+x-4|=4x+3.$$

***Решение.*** Ја применуваме постапката од забелешката 3. Од почетната равенка ги добиваме равенките $|2x-3|+x-4=4x+3$ и $|2x-3|+x-4=-4x-3$ кои се еквивалентни на равенките:

1) $|2x-3|=3x+7$ 2) $|2x-3|=1-5x$.

Понатаму, повторно според забелешката 3 од равенката 1) ги наоѓаме равенките:

1а) $2x-3=3x+7$ 1б) $2x-3=-3x-7$

чии решенија се $x=-10$ и $x=-\frac{4}{5}$. Со непосредна проверка наоѓаме дека ниту едно од овие решенија не е решение на почетната равенка. Сега за равенката 2) ја применуваме постапката од забелешката 3 и ги добиваме равенките:

2а) $2x-3=1-5x$ 2б) $2x-3=5x-1$

чии решенија се $x=\frac{4}{7}$ и $x=-\frac{2}{3}$. Со замена во почетната равенка наоѓаме само дека $x=-\frac{2}{3}$ е решение на истата.

Конечно, множеството решенија на почетната равенка е $M=\{-\frac{2}{3}\}$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**13.** Во множеството реални броеви реши ја равенката:

**а)** $|5x+2|=1$; **б)** $|3-2x|=\frac{1}{3}$; и **в)** $|\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}|=5$.

**14.** Во множеството реални броеви реши ја равенката:

**а)** $|x+2|=2x$; **б)** $|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x|=x+1$; и **в)** $\frac{|3x-5|}{2}=\frac{7x+4}{5}-x$.

**15.** Во множеството реални броеви реши ја равенката:

**а)** $|x-1|=5|2x+1|$; **б)** $|x+1|+|x-1|=2$; **в)** $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$;

**г)** $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$; и **д)** $|x+2|+|x+1|=|x+3|$

**16.** Во множеството реални броеви реши ја равенката:

**а)** $|x+1|+|x-3|=10x$; **б)** $|2x-3|-|x+1|=5x-10$; и **в)** $|x|+|x+1|+9=x$.

**17.** Во множеството реални броеви реши ја равенката:

**а)** $||x-3|-3|+2x=3$; **б)** $|2-|1-|x|||=1$;

**в)** $||x|+|x+2||=2$; и **г)** $|||x+2|-|x-3||=1-2x$.

**18.** Во множеството реални броеви реши ја равенката:

**а)** $\frac{|x|-4}{1+|x|}+3=0$; и **б)** $\frac{x-6|x|+14}{|x-2|+|x+2|}=\frac{3}{2}$.

# 4. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО НЕПОЗНАТИ И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Во претходните разгледувања преку примери видовме како се решаваат линеарни равенки во кои непознатата е и под знакот за апсолутна вредност. Овде ќе разгледаме како се решаваат системи од две линеарни равенки со две непознати, при што барем во една од равенките имаме непозната и под знакот за апсолутна вредност.

**Пример 12.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=1 \\ |x|+|y|=5. \end{cases}$$

***Решение.*** Од првата равенка ја изразуваме непознатата $x$ и добиваме $x=1-y$. Заменувајќи го овој израз за $x$ во втората равенка, ја добиваме равенката $|1-y|+|y|=5$ која е еквивалентна на равенката

$$|y-1|+|y|=5.$$

Броевите $1$ и $0$, за кои се анулираат апсолутните вредности на десната страна на равенката, го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,0)$, $[0,1)$ и $[1,+\infty)$. Со запишување на десната страна со повеќе формули без знакот за апсолутна вредност добиваме

$$\begin{aligned} -y+1-y&=5, \quad y\in(-\infty,0) \\ -y+1+y&=5, \quad y\in[0,1) \\ y-1+y&=5, \quad y\in[1,+\infty). \end{aligned}$$

Решението на првата равенка, бројот $y=-2$ му припаѓа на интервалот $(-\infty,0)$, па значи во овој случај системот има решение $y=-2$, $x=3$. Втората равенка е противречна, па значи во овој случај системот нема решение. Решението на третата равенка, бројот $y=3$ му припаѓа на интервалот $[1,+\infty)$, па значи во овој случај системот има решение $y=3$, $x=-2$.

Конечно, решение на системот е множеството $M=\{(-2,3),(3,-2)\}$. ♦

**Пример 13.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$$

***Решение.*** Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка ја добиваме равенката:

$$|y-1|=9-4y. \qquad (1)$$

За да ја решиме равенката (1), ја применуваме постапката од забелешката 3. Од равенката (1) ги добиваме равенките $y-1=9-4y$ и $y-1=4y-9$ чии решенија се $y=2$ и

$y=\frac{8}{3}$ соодветно. Со непосредна проверка наоѓаме дека $y=2$ е решение на равенката (1), а $y=\frac{8}{3}$ не е решение на оваа равенка.

Со замена на $y=2$ во втората равенка на системот, ја добиваме равенката $|x+1|=4$. Според забелешката 1 б) од последната равенка добиваме $x+1=4$ и $x+1=-4$ т.е. $x=3$ и $x=-5$.

Конечно, решение на системот е множеството $M=\{(-5,2),(3,2)\}$. ♦

**Пример 14.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}|x-3|+|y+2|=1\\|x+1|-|y-1|=2\end{cases}$$

и скицирај го множеството решенија во координатен систем.

***Решение.*** Во системот непозната $x$ се јавува двапати под знакот за апсолутна вредност и во случајот изразите под знакот за апсолутна вредност се анулираат за $3$ и $-1$. Броевите $-1$ и $3$, за кои се анулираат апсолутните вредности кои го содржат $x$, го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,-1)$, $[-1,3)$ и $[3,+\infty)$. Затоа, решенијата на системот ќе ги побараме на секој од овие интервали одделно.

а) Ако $x\in(-\infty,-1)$, тогаш системот го добива видот:

$$\begin{cases}-x+3+|y+2|=1\\-x-1-|y-1|=2.\end{cases} \tag{2}$$

Ако ги одземеме равенките на системот (2), по средувањето ја добиваме равенката

$$|y+2|+|y-1|=-5,$$

која нема решение бидејќи нејзината лева страна е позитивна за секој реален број $y$, а нејзината десна страна е негативна.

б) Ако $x\in[-1,3)$, тогаш системот го добива видот:

$$\begin{cases}-x+3+|y+2|=1\\x+1-|y-1|=2.\end{cases} \tag{3}$$

Ги собираме равенките на системот (3) и ја добиваме равенката

$$|y+2|-|y-1|=-1.$$

Броевите $-2$ и $1$ за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутната вредност го делат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$ и $[1,+\infty)$. На интервалите $(-\infty,-2)$ и $[1,+\infty)$ равенката нема решение (провери!), а на интервалот $[-2,1)$ решение е $y=-1$ и бидејќи $x=|y-1|+1=3\notin[-1,3)$, заклучуваме дека во овој случај системот нема решение.

в) Ако $x\in[3,+\infty)$, тогаш системот го добива видот:

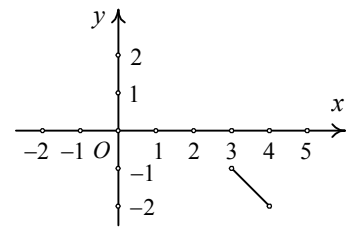
$$\begin{cases}x-3+|y+2|=1\\x+1-|y-1|=2.\end{cases} \tag{4}$$

Ги одземаме равенките на системот (4) и ја добиваме равенката

$$|y+2|+|y-1|=3.$$

Броевите $-2$ и $1$ за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутната вредност го делат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$ и $[1,+\infty)$.

На интервалот $(-\infty,-2)$ равенката го добива обликот $-y-2-y+1=3$, па затоа $y=-2$ и $x=|y-1|+1=4$ и бидејќи $4\in[3,+\infty)$ добиваме дека решение на системот е подредениот пар $(4,-2)$.




На интервалот $[-2,1)$ го добиваме идентитетот $3=3$, па затоа решение е секој $y\in[-2,1)$ и притоа мора да важи $y=-x+2$. Според тоа, во овој случај решение на системот е делот од правата $y=-x+2$ за кој важи $x\in[3,+\infty)$ и $y\in[-2,1)$.

На интервалот $[1,+\infty)$ имаме $y+2+y-1=3$ т.е. $y=1$ и $x=|y-1|+1=1$, а $1\notin[3,+\infty)$ добиваме дека во овој случај системот нема решение.

На цртежот лево е скицирано множеството решенија. ♦

**Пример 14.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}|x-y|=12y-11\\ y+1=2x.\end{cases}$$

***Решение.*** Од втората равенка на системот имаме $y=2x-1$ и ако замениме во првата равенка по средувањето добиваме

$$|x-1|=24x-23. \qquad (5)$$

Ако на равенката (5) ја примениме постапката од забелешката 3, ги добиваме равенките $x-1=24x-23$ и $x-1=-24x+23$ чии решенија се $x=\frac{22}{23}$ и $x=\frac{24}{25}$, соодветно. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x=\frac{22}{23}$ не е решение на равенката (5), а $x=\frac{24}{25}$ е решение на равенката (5). Конечно, со замена за $x=\frac{24}{25}$ во $y=2x-1$ наоѓаме $y=\frac{23}{25}$, што значи дека множеството решенија на системот е $M=\{(\frac{24}{25},\frac{23}{25})\}$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**19.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases}x+y-1=0\\ x-|y|+1=0\end{cases}$ и

**б)** $\begin{cases}|x|+2y=5\\ 2x+|y-1|=3\end{cases}$

**20.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases} |x|+|y|=3 \\ 2|x|+3|y|=6 \end{cases}$ и **б)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3|x|-|y-1|=3. \end{cases}$

**21.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ |x+y|=1 \end{cases}$ и **б)** $\begin{cases} x+y=2 \\ |3x-y|=1. \end{cases}$

**22.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases} |x+2|+|y-1|=8 \\ |x-2|=3y-3. \end{cases}$ и **б)** $\begin{cases} |x-2|+|y-1|=8 \\ |x+3|=2y+3. \end{cases}$.

**23.** Најди ги сите вредности на параметарот $a$, за кои системот

$$\begin{cases} x+4|y|=|x| \\ |y|+|a-x|=1 \end{cases}$$

има точно две решенија.

# 5. ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА И ПОД ЗНАКОТ ЗА АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Во досегашните разгледувања се осврнавме на решавањето на линеарните равенки со една непозната и системи од две линеарни равенки со две непознати во кои непознатите се и под знакот за апсолутна вредност. Исто така, знаеш да решаваш и линеарни неравенки со една непозната и нивни системи. Во овој дел ќе се запознаеме со линеарните неравенки со една непозната кај кои непознатата е и под знакот за апсолутна вредност. Пред да преминеме на разгледување на овие неравенки да се потсетиме на дефиницијата и на основните тврдења за линеарните неравенки.

Нека се дадени линеарните функции $y=f(x)$ и $v=g(x)$. Исказните функции во облик

$$f(x)>g(x); \quad f(x)<g(x); \quad f(x)\geq g(x); \quad f(x)\leq g(x); \quad x\in\mathbf{R}$$

ги нарекуваме *линеарни неравенки со една непозната*. Под *решение на линеарна неравенка* го подразбираме множеството од сите вредности на променливата $x$ за кои дадената исказна функција преминува во точен исказ, т.е. за кои добиваме точни бројни неравенства. Понатаму, за две линеарни неравенки велиме дека се *еквивалентни* ако множествата решенија им се еднакви, т.е. ако секое решение на првата неравенка е решение и на втората неравенка и обратно.

Основна идеја за решавање на неравенки е зададената неравенка со помош на алгебарски трансформации да се сведе на поедноставна неравенка која е еквивалентна на зададената. При решавањето на линеарните неравенки, трансформациите со кои тоа се постигнува се следниве:

1. ако $f(x), g(x)$ и $h(x)$ се линеарни функции, тогаш неравенките $f(x)<g(x)$ и $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$, $x\in\mathbf{R}$ се еквивалентни.

2. ако $f(x)$ и $g(x)$ се линеарни функции, тогаш:

а) за секој $c>0$ неравенките $f(x)<g(x)$ и $c\cdot f(x)<c\cdot g(x)$ се еквивалентни и

б) за секој $c<0$ неравенките $f(x)<g(x)$ и $c\cdot f(x)>c\cdot g(x)$ се еквивалентни.

Да забележиме дека во 1. и 2. наместо знакот за неравенство $<$, можат да стојат знаците $>, \leq$ и $\geq$, и притоа тврдењата остануваат во сила.

Ќе разгледаме неколку примери.

**Пример 15.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката $\frac{3|x|-2}{|x|+1}<-1$.

***Решение.*** Бидејќи $|x|+1>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ дадената неравенка ќе ја помножиме со $|x|+1$ и ја добиваме еквивалентната неравенка $3|x|-2<-|x|-1$. Понатаму, од двете страни на неравенката додаваме $|x|+2$ и ја добиваме еквивалентната неравенка $4|x|<1$, која ја делиме со $4>0$ и добиваме $|x|<\frac{1}{4}$. Конечно, од теоремата 4 *i*) имаме дека последната неравенка е еквивалентна на $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$, па затоа решение на почетната неравенка е $x\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. ♦

**Пример 16.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката $|2x-4|<x-1$.

***Решение.*** Бидејќи $|2x-4|\geq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ дадената неравенка има смисла ако $x-1>0$ т.е. ако $x>1$ односно $x\in(1,+\infty)$. Според теоремата 4 *ii*) за $x\in(1,+\infty)$ имаме

$$|2x-4|<x-1 \;\Leftrightarrow\; -(x-1)<2x-4<x-1 \;\Leftrightarrow\; (2x-4>-x+1 \text{ и } 2x-4<x-1)$$
$$\Leftrightarrow\; (x>\tfrac{5}{3} \text{ и } x<3) \Leftrightarrow x\in(\tfrac{5}{3},3).$$

Конечно, бидејќи $(\frac{5}{3},3)\cap(1,+\infty)=(\frac{5}{3},3)$, добиваме дека множеството решенија на неравенката е интервалот $(\frac{5}{3},3)$. ♦

**Пример 17.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$|1-3x|-|2x+3|\geq 0.$$

***Решение.*** Броевите $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{2}$ за кои се анулираат изразите под знакот за апсолутната вредност го делат множеството реални броеви на три заемно дисјунктни интервали $(-\infty,-\frac{3}{2})$, $[-\frac{3}{2},\frac{1}{3})$ и $[\frac{1}{3},+\infty)$. Дадената неравенка ќе ја разгледаме на секој од овие интервали.

а) На интервалот $(-\infty,-\frac{3}{2})$ имаме

$$|1-3x|-|2x-3|\geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1-3x+2x+3\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\leq 4 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty,4].$$

Според тоа, едно множество решенија на дадената неравенка е множеството

$$(-\infty,-\tfrac{3}{2})\cap(-\infty,4]=(-\infty,-\tfrac{3}{2}).$$

б) На интервалот $[-\frac{3}{2},\frac{1}{3})$ имаме

$$|1-3x|-|2x+3|\geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1-3x-2x-3\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\leq -\frac{2}{5} \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty,-\frac{2}{5}].$$

Според тоа, едно множество решенија на дадената неравенка е множеството

$$[-\frac{3}{2},\frac{1}{3})\cap(-\infty,-\frac{2}{5}]=[-\frac{3}{2},-\frac{2}{5}].$$

в) На интервалот $[\frac{1}{3},+\infty)$ имаме

$$|1-3x|-|2x+3|\geq 0 \;\Leftrightarrow\; -1+3x-2x-3\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\geq 4 \;\Leftrightarrow\; x\in[4,+\infty).$$

Според тоа, едно множество решенија на дадената неравенка е множеството

$$[\frac{1}{3},\infty)\cap[4,+\infty)=[4,+\infty).$$

Конечно, од а), б) и в) следува дека множеството решенија на почетната неравенка е $(-\infty,-\frac{2}{5}]\cup[-\frac{3}{2},-\frac{2}{5}]\cup[4,+\infty)=(-\infty,-\frac{2}{5}]\cup[4,+\infty)$. ♦

**Пример 18.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$||2x+1|-5|>2.$$

***Решение.*** Според теоремата 4 дадената равенка е еквивалентна на

$$|2x+1|-5<-2 \text{ или } |2x+1|-5>2$$

односно на

$$|2x+1|<3 \text{ или } |2x+1|>7.$$

Понатаму, повторно од теоремата 4 од неравенката $|2x+1|<3$ добиваме

$$-3<2x+1<3 \;\Leftrightarrow\; -2<x<1 \;\Leftrightarrow\; x\in(-2,1),$$

а од неравенката $|2x+1|>7$ добиваме

$$-7<2x+1 \text{ или } 2x+1>7 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty,-4) \text{ или } x\in(3,+\infty).$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека множеството решенија на неравенката $||2x+1|-5|>2$ е

$$M=(-\infty,-4)\cup(-2,1)\cup(3,+\infty). \;♦$$

**Пример 19.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$||2x+1|-5|<2+x.$$

***Решение.*** Бидејќи $2x+1$ прима вредност нула за $x=\frac{1}{2}$, ќе разгледаме кога $x<-\frac{1}{2}$ и $x\geq-\frac{1}{2}$.

а) За $x<-\frac{1}{2}$ имаме $|2x+1|=-2x-1$, па затоа дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $|2x-6|<2+x$. За да ја решиме последната неравенка ќе разгледаме два

случаи $x<3$ и $x\geq 3$. Случајот $x\geq 3$ не е можен бидејќи $x<-\frac{1}{2}$, а од $x<3$ и $x<-\frac{1}{2}$ имаме $x<-\frac{1}{2}$ и во овој случај неравенката $|2x-6|<2+x$ е еквивалентна со неравенката $-2x+6<2+x$, од што добиваме $4<3x$ т.е. $x>\frac{4}{3}$. Последното не е можно бидејќи $x<-\frac{1}{2}$. Според тоа, во овој случај неравенката нема решение.

б) За $x\geq -\frac{1}{2}$ имаме $|2x+1|=2x+1$, па затоа дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $|2x-4|<2+x$. За да ја решиме последната неравенка ќе разгледаме два случаи $x<2$ и $x\geq 2$.

б1) Ако $x<2$, тогаш неравенката $|2x-4|<2+x$ е еквивалентна со неравенката $-2x+4<2+x$, па затоа $x>\frac{2}{3}$. Според тоа, секое решение $x$ на почетната неравенка ги задоволува условите $x\geq -\frac{1}{2}$, $x>\frac{2}{3}$ и $x<2$, па затоа во овој случај интервалот $(\frac{2}{3},2)$ е решение на почетната равенка.

б2) Ако $x\geq 2$, тогаш неравенката $|2x-4|<2+x$ е еквивалентна со неравенката $2x+4<x+2$, па затоа $x<-2$, што не е можно.

Конечно, од а) и б) следува дека множеството решенија на почетната равенка е интервалот $(\frac{2}{3},2)$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**24.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката:

**а)** $|5-2x|<1$, **б)** $|3x-1|\geq 5$ и **в)** $|3-x|<4$.

**25.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката:

**а)** $|x-2|\leq 2x-10$, **б)** $|2x-3|>x$ и **в)** $|4x+1|>-x+2$.

**26.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката:

**а)** $|2x+3|>|x|-4x-1$, **б)** $|x+3|-|2x+1|\geq 0$ и **в)** $|x-1|+|2x-6|<3$.

**27.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката:

**а)** $|2x-|3-x|-2|\leq 4$, **б)** $|3x-|3x-1||\leq 3$ и **в)** $|x-|2x-3||>2$.

**28.** Во множеството реални броеви реши ја неравенката:

**а)** $|2x-|3-x||<4-x$, **б)** $|3-|3x-1||\leq 2x+1$ и **в)** $|5-|2x-3||>2+x$.

# 6. ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА ЗАМЕНА ПРИ РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

При изучувањето на системите линеарни равенки се запозна со основните методи за нивно решавање. Во овој дел ќе се навратиме на методот на замена, т.е. ќе видиме како со воведување на нови променливи даден систем се сведува на систем линеарни равенки со чие решавање всушност го решаваме почетниот систем. Ќе разгледаме неколку примери.

**Пример 20.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{3}{2x}+\frac{4}{3y}=1\frac{1}{6} \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

***Решение.*** Дадениот систем има смисла за $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Имаме

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{y}=1\frac{1}{6} \\ 3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Воведуваме нови непознати

$$\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v \tag{1}$$

и го добиваме системот $\begin{cases} \frac{3}{2}u+\frac{4}{3}v=1\frac{1}{6} \\ 3u-v=\frac{1}{2} \end{cases}$ кој е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} 9u+8v=7 \\ 6u-2v=1. \end{cases}$$

Ако втората равенка на последниот систем ја помножиме со 4 и потоа ја собереме со првата равенка, добиваме $33u=11$ од каде што наоѓаме $u=\frac{1}{3}$. Сега со замена во првата равенка наоѓаме $3+8v=7$, т.е. $v=\frac{1}{2}$. Од (1) наоѓаме $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}, \frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, т.е. $x=3, y=2$. Најдените вредности $x=3, y=2$ ги задоволуваат условите $x \neq 0$, $y \neq 0$, па затоа се решение на системот. ♦

**Пример 21.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2y}+\frac{3y}{8(y-x)}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x+2y}+\frac{y}{y-x}=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

***Решение.*** Системот има смисла за $x+2y \neq 0$ и $y-x \neq 0$. Воведуваме нови непознати

$$\frac{1}{x+2y}=u \text{ и } \frac{y}{y-x}=v$$

и го добиваме системот

$$\begin{cases} u+\frac{3}{8}v=\frac{1}{2} \\ u+v=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја извадиме првата, добиваме $v-\frac{3}{8}v=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$ од каде што наоѓаме $v=\frac{8}{5}$. Со замена во втората равенка наоѓаме $u=-\frac{1}{10}$. Ако се вратиме на старите променливи, го добиваме системот

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2y}=-\frac{1}{10} \\ \frac{y}{y-x}=\frac{8}{5} \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x+2y=-10 \\ 3y-8x=0. \end{cases}$$

Решение на последниот систем е $x=-\frac{80}{19}$, $y=-\frac{30}{19}$ и тоа ги задоволува условите $x+2y\neq 0$ и $y-x\neq 0$, па затоа е решение и на почетниот систем. ♦

**Пример 22.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x-5y-4+\frac{1}{3x-2y}=0 \\ -4x+10y+5+\frac{2}{3x-2y}=0. \end{cases}$$

***Решение.*** Дадениот систем има смисла за $3x-2y\neq 0$ и тој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 2x-5y+\frac{1}{3x-2y}=4 \\ -2(2x-5y)+2\cdot\frac{1}{3x-2y}=-5. \end{cases}$$

Воведуваме нови променливи $2x-5y=u$ и $\frac{1}{3x-2y}=v$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} u+v=4 \\ -2u+2v=-5 \end{cases}$$

чие решение е $u=\frac{13}{4}$ и $v=\frac{3}{4}$. Понатаму, се враќаме на старите променливи и го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x-5y=\frac{13}{4} \\ 3x-2y=\frac{4}{3} \end{cases}$$

чие решение е $x=\frac{2}{132}$ и $y=-\frac{85}{132}$ и истото го задоволува условот $3x-2y=\frac{4}{3}\neq 0$, па затоа е решение и на почетниот систем. ♦

**Пример 23.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=b\end{cases}$$

каде $a$ и $b$ се параметри.

***Решение.*** Дадениот систем има смисла за $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Воведуваме нови непознати $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$ и го добиваме системот

$$\begin{cases}u+v=a\\ u-v=b\end{cases}$$

чие решение е $u=\frac{a+b}{2}$ и $v=\frac{a-b}{2}$. Се враќаме на старите непознати и наоѓаме

$$\frac{1}{x}=\frac{a+b}{2} \text{ и } \frac{1}{y}=\frac{a-b}{2}$$

т.е.

$$(a+b)x=2 \text{ и } (a-b)y=2.$$

Ако $a+b\neq 0$ и $a-b\neq 0$, тогаш $x=\frac{2}{a+b}$ и $y=\frac{2}{a-b}$. Бидејќи најдените вредности за $x$ и $y$ се различни од нула добиваме дека за $a\neq b$ и $a\neq -b$ почетниот систем има решение и тоа е $x=\frac{2}{a+b}$ и $y=\frac{2}{a-b}$. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**29.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2\\ \frac{3}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{11}{4}\end{cases}$ и **б)** $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{10}\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{51}{40}\end{cases}$

**30.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases}2x+3y-\frac{1}{y+1}=2\\ 4x+6y-\frac{3}{y+1}=3\end{cases}$, и **б)** $\begin{cases}\frac{6}{2x+3y}-\frac{1}{y+1}=1\\ \frac{5}{2x+3y}+\frac{1}{3(y+1)}=2.\end{cases}$

**31.** Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases}\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+1}=a+1\\ \frac{1}{x+3}-\frac{1}{y+1}=b+2\end{cases},$$

каде што $a$ и $b$ се параметри.

# 7. РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧИ КОИ СЕ СВЕДУВААТ НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Решавањето на голем број проблеми од практиката најчесто се сведува на составување равенки и нивно решавање во множеството реални броеви. Иако поголемиот број задачи кои се во непосредна врска со секојдневниот живот се сведуваат на равенки од повисок степен, сепак не многу мал број од нив можат да се решат со помош на линеарни равенки или нивни системи. Ќе наведеме неколку вакви задачи.

**Пример 25.** Кучето Шарко забележало зајак на 200 свои чекори од себе, кој почнал во тој момент да трча, а Шарко се вдал по него. За исто време Шарко прави 5 свои чекори, а зајакот 6 свои чекори. Колку чекори ќе направи зајакот, пред Шарко да го стигне, ако се знае дека 2 чекори на Шарко по должина се еднакви на 3 чекори на зајакот?

***Решение.*** Ако Шарко го стигнал зајакот по $x$ чекори на зајакот, тогаш Шарко ќе помине пат од $\frac{2}{3}x+200$ свои чекори. Но, додека Шарко прави 5 чекори, зајакот прави 6 чекори, па затоа $\frac{\frac{2}{3}x+200}{5}=\frac{x}{6}$.

Од последната равенка добиваме $x=1200$, што значи дека зајакот ќе направи 1200 чекори. ♦

**Пример 26.** Од чаша полна со млеко, Петре испил $\frac{1}{5}$ од млекото и чашата ја дополнил со кафе. Потоа пак отпил $\frac{1}{5}$ од полната чаша и ја дополнил со кафе. Откако по трет пат испил $\frac{1}{5}$ од содржината на чашата, во неа останале $28cm^3$ повеќе млеко отколку кафе. Најди го волуменот на чашата.

***Решение.*** Со $x$ да го означиме волуменот на чашата. По секое пиење, во чашата останувало млеко, односно кафе како што следува:

- по првото пиење: $\frac{4}{5}x$ млеко и $\frac{1}{5}x$ кафе;
- по второто пиење: $\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{16}{25}x$ млеко и $x-\frac{16}{25}x=\frac{9}{25}x$ кафе; и
- по третото пиење: $\frac{16}{25}x-\frac{1}{5}\cdot\frac{16}{25}x=\frac{64}{125}x$ млеко и $\frac{9}{25}x-\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{25}x=\frac{36}{125}x$ кафе.

Од условот на задачата имаме дека $\frac{64}{125}x-\frac{36}{125}x=28$, од што следува дека $x=125cm^3$. ♦

**Пример 27.** Ацо, Бојан и Цане се допишуваат меѓу себе, така што:

- Ацо му пишува на Бојан секој трет ден, а на Цане секој втор ден;
- Бојан му пишува на Ацо по четири добиени писма од Ацо и Цане, а на Цане секој трет ден;
- Цане му пишува на Ацо по три добиени писма од Ацо и Бојан, а на Бојан секој четврти ден.

По колку дена Ацо ќе добие 61 писмо, ако писмата патуваат по еден ден?

***Решение.*** Со $x$ да го означиме бројот на деновите за кои на Ацо му е испратено 61 писмо. За тоа време Бојан од Ацо добил $\frac{x-1}{3}$ писма, а од Цане добил $\frac{x-1}{4}$ писма, што значи дека вкупно добил $\frac{7(x-1)}{12}$ писма. Исто така, Цане добил од Ацо $\frac{x-1}{2}$ писма, а од Бојан $\frac{x-1}{3}$ писма, што значи вкупно $\frac{5(x-1)}{6}$ писма.

Сега од условот на задачата следува дека за $x$ денови Бојан ќе му прати на Ацо $\frac{7(x-1)}{12\cdot 4}$ писма, а Цане ќе му прати на Ацо $\frac{5(x-1)}{6\cdot 3}$, од што ја добиваме равенката

$$\frac{7(x-1)}{48}+\frac{5(x-1)}{18}=61.$$

Решение на последната равенка е $x=145$ и бидејќи писмото патува еден ден добиваме дека за 146 дена Ацо ќе добие 61 писмо. ♦

**Пример 28.** Илија и Никола меѓусебно поделиле сума од 1632 денари. Илија потрошил $\frac{3}{5}$, а Никола $\frac{3}{7}$ од својот дел и им останале еднакви суми. Колку пари добил секој од нив?

***Решение.*** Нека Илија добил $x$ денари, а Никола $y$ денари. Од условите на задачата имаме:

$$\begin{cases} x+y=1632 \\ \frac{2}{5}x=\frac{4}{7}y. \end{cases}$$

Решението на горниот систем равенки е: $x=960, y=672$. Значи, Илија добил 960, а Никола 672 денари. ♦

**Пример 29.** Цане тргнал на училиште меѓу 8 и 9 часот наутро во време кога стрелките на часовникот се поклопувале. Се вратил меѓу 2 и 3 часот попладне, кога стрелките зафаќале рамен агол. Колку време Цане бил отсутен од дома?

***Решение.*** Со $x$ да го означиме бројот на минутите по 8 часот во првиот случај. Додека големата стрелка поминува цел круг, малата поминува дваесетти дел, а тоа соодветствува на 5 минути. Малата стрелка тргнува од бројот 8, а големата од бројот 12, па ја добиваме равенката $40+\frac{x}{12}=x$, чие решение е $x=\frac{480}{11}$. Аналогно, во вториот случај ја имаме равенката $10+\frac{y}{12}=y-30$, чие решение е $y=\frac{480}{11}$.

Бидејќи, $x=y=\frac{480}{11}$ заклучуваме дека од поаѓањето на училиште до враќањето поминале точно 6 часа. ♦

**Пример 30.** Возот преминал преку мост долг 225 *m*, возејќи со константна брзина, за 27 секунди, сметајќи од доаѓањето на локомотивата на мостот, па до излегувањето на последниот вагон од мостот. Потоа возот за 9 секунди поминал покрај еден пешак, кој се движел спротивно од насоката на движењето на возот. За тоа време пешакот поминал 9 *m*. Најди ја должината на возот во метри и неговата брзина на движење во *km* на час.

***Решение.*** Да претпоставиме дека возот за 1 секунда поминува $v$ $m$ и дека должината на возот е $x$ $m$. Тогаш локомотивата за 27 секунди поминува $(225+x)$ $m$, па затоа $27v=225+x$. Пешакот се движи спротивно од движењето на возот, и за деветте секунди локомотивата поминува $(x-9)$ $m$, па затоа $9v=x-9$.

Со тоа го добивме системот равенки

$$\begin{cases} 9v = x-9 \\ 27v = 225+x \end{cases}$$

чие решение е $x=126$, $v=13$. Значи, должината на возот е $126m$, а неговата брзина е $\frac{13\cdot 3600}{1000}=46{,}8\ km$ на час. ♦

## ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

**32.** Дедото Трајко го прашале:
- Дедо, колку години има твојот син?
- Тој има толку седмици, колку што има денови мојот внук. А мојот внук има толку месеци колку што јас имам години. - одговорил дедо Трајко.
- А, ти дедо колку години имаш?
- Па, заедно со синот и внукот имаме 100 години. - одговорил дедо Трајко.

Колку години има секој од нив?

**33.** Од градовите А и В, кои се оддалечени 390 *km* еден од друг, истовремено тргнале два камиони, еден кон друг. Брзината на едниот е за 10 *km* на час поголема од брзината на другиот камион. По три часа патување тие се наоѓале на растојание од 24 *km* еден од друг. Колкава е брзината на секој од нив? (Разгледај ги двата случаи: кога не се разминуваат и кога се разминуваат)

**34.** Морнарот Климе го посетил својот пријател Рампо во селото S. Кога се враќал во пристаништето, Климе немал превозно средство, па затоа тргнал пеш. Откако поминал 4 *km* во првиот час, тој пресметал дека ако продолжи со истата брзина, ќе задоцни половина час од тргнувањето на бродот. Затоа останатиот дел од патот Климе го поминувал со брзина од 6 *km* на час и пристигнал 40 минути пред тргнувањето на бродот. Колкаво е растојанието од селото до пристаништето?

**35.** Растојанието меѓу селото на Рампо и соседното село е 12 *km*. Рампо тргнал од своето село во 9 часот и 25 минути и стигнал во соседното село во 13 часот и 15 минути. Утредента се вратил, но тргнал во 11 часот и стигнал во 14 часот и 40 минути. Најди на кое растојание од неговото село се наоѓа местото на патот на кое Рампо поминал обата дена во исто време и во колку часот тој поминал покрај тоа место?

**36.** Стојан и Алекса се качуваат по подвижни скали кои се движат нагоре. Стојан се движи двапати побрзо од Алекса. Стојан застанал на петнаесеттото скалило, а Алекса на десеттото скалило. Колку видливи скалила имаат подвижните скали?

**37.** Авионот прелетал 385 *km* со брзина од 220 *km* на час. Преостанатиот дел од патот го прелетал со брзина од 330 *km* на час. Средната брзина на летот на целиот пат била 250 *km* на час. Колкав пат прелетал авионот?

**38.** На патека, покрај железничка пруга, се движи пешак со брзина од 6 *km* на час. Воз, кој доаѓа од спротивната насока, се разминува со пешакот за 12,6 секунди. Истиот воз пристигнува друг пешак, кој со брзина од 3,6 *km* на час се движи во иста насока како и возот, и го поминува за 15 секунди. Колку е долг возот и со која брзина се движи?

**39.** Воз долг 110 *m* движејќи се со брзина од $\frac{25}{3}$ *m* во секунда, во 9 часот и 10 минути пристигнува пешак и го поминува за време од 15 секунди. Во 9 часот и 16 минути сретнува друг пешак и со него се разминува за 12 секунди. Во колку часот се сретнале пешаците?

**40.** Пресметај ги брзината и должината на возот кој за 8 секунди поминува покрај неподвижен набљудувач, а за 12 секунди го поминува перонот долг 480 *m*?

**41.** Анастас патува со чамец по реката Дрим, од Струга до Глобочица и обратно. Растојанието меѓу Струга и Глобочица е 18 *km*, а тој патува вкупно 5 часа. Колкава е брзината на реката Дрим, ако Анастас патува за исто време 4 *km* низводно, а 2 *km* во обратна насока?

## ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

**1.** **а)** Пресметај $|x|+4|y|+3|xy|-2$ ако $x=-\sqrt{6}$ и $y=\frac{\sqrt{6}}{2}$. (5 б)

**б)** Функцијата $f(x)=|2x-3|+|3x-2|+3$, $x\in\mathbf{R}$ запиши ја со помош на повеќе формули без да го користиш знакот за апсолутна вредност. (10 б)

**2.** Нацртај го графикот на функцијата

**а)** $f(x)=|x-2|-2, x\in\mathbf{R}$. (8 б)

**б)** $f(x)=|x+2|-2|x-4|, x\in\mathbf{R}$. (15 б)

**3.** Во множеството реални броеви реши ја равенката

**а)** $|x+3|=2x$. (8 б)

**б)** $|x-2|=2|x+3|$. (15 б)

**4.** Реши го системот равенки:

**а)** $\begin{cases} 2x+3y-\frac{1}{y+1}=2 \\ 4x+6y-\frac{3}{y+1}=3 \end{cases}$ (15 б)

**б)** $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-|y|+1=0. \end{cases}$ (20 б)

**5.** Реши ја неравенката:

**а)** $|x-1|\le 2x-7$. (15 б)

**б)** $|x+3|-|2x+3|\ge 0$. (20 б)

**6.** **а)** Едноцифрен број $x$ е зголемен за 10 и со тоа бројот $x$ е зголемен за некој процент. Ако добиениот број го зголемиме за истиот процент, како и првиот пат го добиваме бројот 72. Најди го бројот $x$. (15 б)

**б)** Бројот *A* е 92% од бројот *B*. Ако бројот *B* го зголемиме за 700, тогаш тој ќе биде поголем од бројот *A* за 9% од својата нова вредност. Најди ги броевите *A* и *B*. (20 б)

***Забелешка.*** При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниов критериум:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Бодови:** | 41-55 | 56-70 | 71-85 | 86-100 |
| **Оценка:** | 2 | 3 | 4 | 5 |

# ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

## ГЛАВА I

1. **Решение.** Од $3^n + 3^{n+1} = 3^n + 3\cdot 3^n = 12\cdot 3^{n-1}$ и $3^{n-1} \in \mathbf{N}$, за секој $n \in \mathbf{N}$ следува $12 \mid (3^n + 3^{n+1})$.

2. **Решение.** Нека $\overline{xyzt} = 1000x + 100y + 10z + t$ е произволен четирицифрен број. Тогаш, бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед е $\overline{tzyx} = 1000t + 100z + 10y + x$, па затоа $\overline{xyzt} - \overline{tzyx} = 9(111x + 10y - 10z - 111t)$ што значи $9 \mid (\overline{xyzt} - \overline{tzyx})$.

3. **Упатство.** $\frac{24}{3n-4}$ е природен број ако и само ако $(3n-4) \mid 24$, па затоа $3n - 4 \in \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.
**Одговор.** $n = 2$ или $n = 4$.

4. **Упатство.** $\frac{2a-5}{a+2} = 2 - \frac{9}{a+2}$, па затоа $(a+2) \mid 9$.
**Одговор.** $a \in \{-11,-5,-3,-1,1,7\}$.

5. **Упатство.** $\frac{n^2+1}{n+2} = n - 2 + \frac{5}{n+2}$, па затоа $(n+2) \mid 5$.
**Одговор.** $n \in \{-7,-3,-1,3\}$.

6. **Решение.** Бидејќи збирот на сите броеви е еднаков на нула, заклучуваме дека бројот на негативните броеви е еднаков на бројот на позитивните броеви, а како производот им е 1, добиваме дека негативни броеви има $2k$. Значи, имаме $2\cdot 2k = 4k$ листови и овој број е делив со 4.

7. **Решение.** Двоцифрени содржатели на бројот 23 се 23, 46, 69 и 92. Единствени природни броеви кои го задоволуваат условот се: 23, 46, 69, 92, 469, 692, 923, 4692, 6923, 46923. Значи, бараниот број е 46923.

8. **Упатство. а)** $(5n+3)^2 - 4 = 25n^n + 30n + 5$.
**б)** $(4n+5)^2 - 9 = 16n^2 + 40n + 16$.

9. **Упатство. а)** $6^{100} - 19^{50} = 36^{50} - 19^{50}$.
**б)** $3^{30} - 2^{40} = (3^3)^{10} - (2^4)^{10} = 27^{10} - 16^{10}$.
Искористи го разложувањето:
$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

10. **Упатство. а)** Бидејќи $1 + 2 + 2^2 = 7$, заклучуваш дека треба да ги групираш собирците во групи од по три:
$$(2 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \ldots + (2^{97} + 2^{98} + 2^{99}) =$$
$$2(1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + \ldots + 2^{97}(1 + 2 + 2^2).$$

11. **Упатство. а)** Групирај ги собирците по два.
**б)** Искористи ја формулата $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

12. **Упатство. а)** Ако ги помножиш полиномите на десната страна ќе го добиеш полиномот на левата страна.
**б)** $8^n - 14n - 1 = (8-1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \ldots + 1) - 14n$.
**в)** $7\cdot 5^{2n} + 12\cdot 6^n = 7\cdot 25^n + 12\cdot 6^n = 7\cdot(25^n - 6^n) + 19\cdot 6^n$.

13. **Решение.** Имаме $n = 63n + 59 = 21(3n+2) + 17$, па затоа бараниот остаток е 17.

14. **Решение.** Бидејќи делителите се раликуваат за 1, а остатокот за 14, количникот ќе биде 14. Значи, бараниот број е $132\cdot 14 + 98 = 1946$.

15. **Решение.** Методи делел два природни броја, на пример $a$ и $b$. Методи згрешил и на местото на бројот $a$ го добил бројот 30214, кој е за $60\cdot 74 = 4440$ помал од $a$ (зошто?). Значи,
$$a = 30214 + 4440 = 34654 \text{ и}$$
$$b = (34654 - 22) : 74 = 468.$$

16. **Упатство.** Ако броевите се $k$ и $k+1$, посебно разгледај ги случаите кога $k$ е парен и кога $k$ е непарен.

17. **Решение.** Непарен природен број може да се запише во обликот $2k+1$, па затоа за неговиот квадрат имаме $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$, што според задача 16 значи $(2k+1)^2 = 4\cdot 2p + 1 = 8p + 1$.

18. **Упатство.** Разгледај ги броевите $n-1, n$ и $n+1$. Збирот на нивните кубови е
$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2+2).$$
Сега искористи дека секој природен број $n$ е од видот $3k, 3k+1$ или $3k+2$.

19. **Упатство.** Во разложувањето $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ искористи дека секој природен број $n$ е од видот: $6k, 6k\pm 1, 6k\pm 2$ или $6k+3$.

20. **Упатство.** Искористи дека секој природен број е од видот $3k, 3k+1$ или $3k+2$.

21. **Упатство.** Во разложувањето
$$n^3 + 3n^2 + 2n + 6 = n(n+1)(n+2) + 6,$$
искористи дека секој природен број е од видот
$$6k, 6k\pm 1, 6k\pm 2 \text{ или } 6k+3.$$

22. **Решение. а)** Цифрата на едниците на бројот $2^4$ е 6. Затоа, цифрата на единиците на бројот

$2^{2000} = (2^4)^{500}$ е 6, од што следува дека цифрата на единиците на бројот $2^{2000} - 1$ е 5, па затоа

$$5 \mid (2^{2000} - 1).$$

**б)** За секој $n \in \mathbf{N}$ цифрата на единиците на бројот $n^2$ е 0, 1, 4, 5, 6 или 9, па затоа цифрата на единиците на бројот $n^2 - 7$ е 3, 4, 8, 9 или 2, што значи $5 \nmid (n^2 - 7)$.

**23.** **Упатство. а)** Искористи го разложувањето $10^{1990} - 10 = 9 \cdot \underbrace{111...111}_{1989\ \text{един.}}0$ и потоа примени го критериумот за деливост со 9.

**б)** Бројот $\underbrace{111...111}_{81\ \text{единици}}$ е делив со 9 (зошто?). Сега подели со 9 и разгледај ги групите цифри кои се повторуваат, па за секоја група примени го критериумот за деливост со 9.

**24.** **Решение.** За $n = 1$ тврдењето е очигледно. Ако $n > 1$, тогаш $10^n - 4 = \underbrace{99...99}_{n-1\ \text{девет.}}6$ и овој број е делив со 2 и со 3, т.е е делив со 6.

**25.** Упатство. Разгледај ги посебно случаите $n = 1$ и $n > 1$. Во вториот случај докажи дека бројот е делив со 5 и со 9.

**26.** **Решение.** Од $a = 4 \cdot \underbrace{1111...1111}_{2002\ \text{единици}}$ следува $8 \nmid a$.

**27.** **Упатство.** Прво определи ја непознатата цифра така што бројот да биде делив со 3 и со 5, а потоа добиениот број зголеми го за 1 и 2. **Одговор.** 631455, 631456 и 631457.

**28.** **Решение.** Бројот е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и 4. Значи, збирот на цифрите мора да е делив со 3, а бројот составен од последните две цифри мора да е делив со 4. Бараните броеви се: 4116, 4212, 4416, 4512, 4716 и 4812.

**29.** **Решение.** Бараниот број завршува на 0, а збирот на цифрите мора да е делив со 9. Бараните броеви се 8100 и 8190.

**30.** **Упатство.** Бараниот број запиши го во обликот $\overline{a8bx8y}$ и потоа искористи дека секој од броевите $\overline{a8b}$ и $\overline{x8y}$ е делив со 5 и со 9. **Одговор.** 180585.

**31.** **Упатство.** Искористи ја развиената форма на записот на природен број.

**32.** **Одговор.** а) не б) да в) не.

**33.** **Упатство.** Искористи ги критериумите за деливост со 3 и 11. Одговор. 198825, 198858 и 198891.

**34.** **Одговор.** а) 45; б) 9.

**35.** **Решение.** Нека $b = a + 1$

$$\text{НЗД}(an + b, bn + a) = \text{НЗД}(an + a + 1, (a + 1)n + a)$$
$$= \text{НЗД}(an + a + 1, an + n + a) = \text{НЗД}(an + a + 1, n - 1)$$
$$= \text{НЗД}(2an + 1, n - 1)$$

и како $2an + 1$ е непарен број, добиваме дека $\text{НЗД}(an + b, bn + a)$ е непарен број.

**36.** **Решение.** Имаме

$$\text{НЗД}(21n + 4, 14n + 3) = \text{НЗД}(7n + 1, 14n + 3)$$
$$= \text{НЗД}(7n + 1, 1) = 1.$$

**37.** **Решение.** Имаме

$$\text{НЗД}(9n + 31, 2n + 7) = \text{НЗД}(n + 3, 2n + 7)$$
$$= \text{НЗД}(n + 3, 1) = 1.$$

**38.** **Решение.** Ако $\text{НЗД}(a + b, a - b) = 2$, тогаш важи $a + b = dx$ и $a - b = dy$, па затоа $2a = d(x + y)$ и $2b = d(x - y)$. Но, $a$ и $b$ се заимно прости, па затоа $d \mid 2$.

**39.** **Решение.** $x + y = 150$ и $\text{НЗД}(x, y) = 30$, па затоа $x = 30u,\ y = 30v$, $\text{НЗД}(u, v) = 1$ и со замена во првата равенка наоѓаме $u + v = 5$. Значи, $u \in \{1,2,3,4\}$, од што следува $x \in \{30,60,90,120\}$. Соодветните вредности за $y$ се определуваат според формулата $y = 150 - x$.

**40.** **Упатство.** $xy = 8400$ и $\text{НЗД}(x, y) = 20$, па затоа $x = 20u,\ y = 20v$, $\text{НЗД}(u, v) = 1$ т.е. $uv = 21$.

**41.** **Одговор. а)**

$$1 = \text{НЗД}(1001, 7655) = -190 \cdot 7655 + 1453 \cdot 1001.$$

**42.** **Одговор. а)** $x = 5,\ y = -7$. **б)** $x = 9,\ y = -8$.

**43.** **Решение.** Од $\text{НЗД}(a, c) = 1$ следува дека постојат $x$ и $y$ такви, што $ax + cy = 1$. Слично, постојат $z$ и $t$ такви, што $bz + ct = 1$. Од последните две равенства имаме

$$1 = (ab)(xz) + c(ybz + axt + cyt)$$

па затоа $\text{НЗД}(ab, c) = 1$.

**44.** **Решение.** Имаме

$$\text{НЗД}(ab, c) \mid ab \text{ и } \text{НЗД}(ab, c) \mid bc$$

па затоа

$$\text{НЗД}(ab, c) \mid \text{НЗД}(ab, bc) = b\text{НЗД}(a, c) = b.$$

**45.** **Решение.** Од задача 44 имаме $\text{НЗД}(ac, b) \mid c$, што значи дека $\text{НЗД}(ac, b) \mid \text{НЗД}(c, b)$.

**46. Решение.** Нека НЗД$(a,b)$ = НЗД$(a,a-b)=k$ т.е. постојат $x$ и $y$ такви, што $a-b=ky$ и $a=kx$, НЗД$(x,y)=1$. Сега $b=k(x-y)$ и $ab=k^2x(x-y)$, па затоа

$$c=\frac{ab}{a-b}=\frac{k^2x(x-y)}{ky}=\frac{kx(x-y)}{y}.$$

Од НЗД$(x,y)=1$ и $c$ е природен број следува $y\mid k$ и како НЗД$(a,b,c)=1$ добиваме $y=k$. Конечно, $a-b=ky=k^2$.

**47. Одговор. а)** 2280; **б)** $(10n+9)(n+1)$

**48. Упатство.** Искористи дека

$$\text{НЗД}(x,y)\cdot\text{НЗС}(x,y)=xy$$

а потоа постапи како во задача 40.

**49. Одговор. а)** НЗД$(a,b)$; **б)** НЗС$(a,b)$.

**50. Решение.** Ако бараниот број е $n$, тогаш бројот $n+5$ се дели со 7, 9 и 12. Од НЗД(7,9,12) = 252 следува $n+5=252k$, $k=1,2,3,\ldots$. Бидејќи $n$ е трицифрен број добиваме $n=1,2,3$. Бараните броеви се 247, 499 и 751.

**51. Одговор.** 361 денар.

**52. Одговор.** 19720320, 19722240, 19724160, 19726080, 19728000 и 19729920.

**53. Упатство.** Прво прецртај ги оние броеви кои се деливи со 4, па потоа броевите кои се деливи со 6, па со 10. Внимавај, некои броеви ќе бидат двапати или трипати прецртани.

**54. Решение. а)** Ако со $n$ го означиме најмалиот од овие броеви, тогаш нивниот збир е $5(n+2)$ и овој број е сложен.
**б)** Јасно, тврдењето важи за простите броеви помали од 30. Понатаму, секој природен број може да се запише во обликот $30m+k$, каде $k=0,1,\ldots,29$ и простите броеви се наоѓаат меѓу броевите од видот
$30m+1, 30m+7, 30m+11, 30m+13, 30m+17,$
$30m+19, 30m+23, 30m+29$
од што следува тврдењето на задачата.

**55. Решение.** Ако $p=2$, тогаш $p+5=7$ и $p+9=11$ се прости броеви. Ако $p>2$, тогаш $p$ е непарен, па $p+5$ и $p+9$ се парни броеви поголеми од 2 и тие се сложени.

**56. Решение. а)** за секој $n>1$ имаме

$$n^4+4=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

и тоа е сложен број.
**б)** Имаме

$$2^{10}+5^{12}=(2^5+5^6-2^35^3)(2^5+5^6+2^35^3)$$

т.е. бројот $2^{10}+5^{12}$ е сложен.

**57. Упатство.** Искористи дека секој прост број $p$ поголем од 3 е од видот $6k\pm1$ и докажи дека во вој случај бројот $3p^2+1$ е сложен. Случаите $p=2$ и $p=3$ разгледај ги одделно.

**58. Упатство.** Случаите $p=2$ и $p=3$ разгледај ги одделно, а потоа искористи дека секој прост број поголем од 3 е од видот $6k\pm1$.

**59. Упатство.** Искористи дека

$$p^{2002}-1=(p^{1001}-1)(p^{1001}+1).$$

**60. Упатство.** Искористи дека за $n>2$ важи $2^n>3$ и како $3\nmid 2^n$ се добива дека $2^n$ е од видот $3k+1$ или $3k+2$.

**61. Упатство.** Докажи дека, ако $p$ не се дели со 3, тогаш $8p^2+1$ е сложен број. Потоа, провери дека за $p=3$ броевите $8p^2+1$ и $8p^2-1$ се прости.

**62. Упатство.** Искористи ги разложувањето

$$2p^2=(k-1)(k^4+k^3+k^2+k+1)$$

и фактот дека $k$ е непарен природен број. **Одговор.** $k=3$ и $p=11$.

**63. Упатство.** Искористи го разложувањето $p=q^3-r^3=(q-r)(q^2+qr+r^2)$ и потоа дека од $p$ е прост број следува $q-r=1$ или $q^2+qr+r^2=1$. **Одговор.** $p=19, q=3$ и $r=2$.

**64. Упатство.** За 2 и 3 провери непосредно, а за прости броеви поголеми од 3 искористи дека тие се од видот $6k\pm1$. **Одговор. а)** 3; **б)** 3 и **в)** 3.

**65. Одговор. а)** $2^3\cdot3\cdot5^2\cdot11$; **б)** $2\cdot7\cdot11\cdot17$.

**66. Одговор.** $n=6$.

**67. Решение. а)** Од $234=2\cdot3\cdot3\cdot13$ следува дека такви броеви не постојат. **б)** Од $105=3\cdot5\cdot7$ добиваме дека бараните броеви се 357, 375, 537, 573, 735 и 753.

**68. Одговор. а)** $2^3\cdot3^2\cdot5$ и $2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11$. **б)** $2\cdot11$ и $2^3\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot17$.

**69. Одговор.** **а)** 144; **б)** 108.

**70. Решение.** Бараниот број е од видот $p^2q$, каде $p$ и $q$ се прости броеви. Јасно, за $p=2$ и $q=3$ овој број е најмал и тоа е бројот 12.

**71. Одговор. а)** има; **б)** нема; **в)** нема.

**72. Одговор. а)** $x=-5+7t,\ y=35-48t,\ t\in \mathbf{Z}$;

**б)** $x=11+30t,\ y=-3-11t,\ t\in \mathbf{Z}$;

**в)** $x=4t,\ y=7t-6,\ t\in \mathbf{Z}$.

**73. Одговор.** Арсо ќе наполни 1, 4 и 17 или 3, 1 и 18 кеси од по 2, 3 и 5 килограми, соодветно.

**74. Одговор.** Пекарот Теодор може да ги направи следните комбинации од векни леб: 0, 20 и 80 или 5, 11 и 84 или 10, 2 и 88 векни леб од 5, 3 и 0,5 килограми, соодветно.

**75. Одговор.** 44, 47 или 50.

**76. Упатство. а)** Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(y+x+1)(y-x-1)=12$. Сега искористи дека

$$12=12\cdot 1=(-1)\cdot(-12)=2\cdot 6=$$
$$=(-2)\cdot(-6)=3\cdot 4=(-3)\cdot(-4).$$

**б)** Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(x-3y)(x-4y)=7$. Сега искористи дека

$$7=7\cdot 1=(-7)\cdot(-1).$$

**77. а)** Дадената равенка е еквивалентна на равенката $x^2=y^2+\frac{10}{y}$. Дискутирај го количникот на десната страна. **б)** Дадената равенка е еквивалентна на равенката $x=y^3+y^2+y+1-\frac{8}{y-1}$. Дискутирај го количникот на десната страна.

**78. Упатство.** Дискутирај ја последната цифра на десната страна на равенката. **Одговор. а)** $x=1$ и $y=2777$. **б)** нема решение.

**79. Упатство. а)** Заклучи дека секој од броевите $x,y$ и $z$ мора да е парен и сведија ја равенката на равенката $m^2+n^2+k^2=497$. Сега два од броевите во последната равенка треба да се парни, а еден треба да е непарен, па се добива равенката $a^2+b^2+c^2+c=124$. **б)** Бројот $x$ мора да е парен, па равенката се сведува на равенката $n^2+y^2=497$, која нема решенија во множеството цели броеви.

**80. а)** Разгледај ги одделно парните и непарните цели броеви.

**б)** Искористи дека секој цел број може да се запише како $4k, 4k+1, 4k+2$ и $4k+3$, каде $k$ е цел број.

**81. Упатство.** Разгледај конгруентност по модул 10. **Одговор. а)** 6; **б)** 6; **в)** 3.

**82. Решение. а)** Од $a\equiv b(\text{mod } a-b)$ следува дека $a^k\equiv b^k(\text{mod}\, a-b)$. **б)** Од $a\equiv -b(\text{mod } a+b)$ следува дека $a^{2k+1}\equiv -b^{2k+1}(\text{mod}\, a+b)$.

**83. Упатство. а)** Од $5^2\equiv 1(\text{mod } 24)$ следува дека $5^{100}\equiv 1(\text{mod } 24)$, па затоа $5^{100}+55\equiv 8(\text{mod } 24)$ итн. **б)** Постапи аналогно како под а). **Одговор. а)** 16; **б)** 5.

**84. Решение. а)** Од

$$2^6\equiv -2(\text{mod}\, 11),\ 3^2\equiv -2(\text{mod}\, 11)$$

следува дека

$$2^{6n+1}+3^{2n+2}=(2^6)^n\cdot 2+(3^2)^n\cdot 9$$
$$\equiv 2\cdot(-2)^n+9\cdot(-2)^n\equiv 0(\text{mod } 11).$$

**б)** Од $3^4\equiv 7(\text{mod } 37)$ и $5^3\equiv 2\cdot 7(\text{mod } 37)$ имаме

$$2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}=32\cdot 2^n\cdot(3^4)^n+(5^3)^n\cdot 5$$
$$\equiv 32\cdot 2^n\cdot 7^n+5\cdot(5\cdot 3)^n\equiv 0(\text{mod } 32).$$

**в)** Од $8^2\equiv 7(\text{mod } 57)$ следува

$$7^{n+2}+8^{2n+1}=49\cdot 7^n+(8^2)^n\cdot 8$$
$$\equiv 49\cdot 7^n+8\cdot 7^n\equiv 0(\text{mod } 57).$$

**г)** Од $2^5\equiv 3\cdot 5(\text{mod } 17)$ следува

$$2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}=8\cdot(3\cdot 5)^n+5^n\cdot 3^n\cdot 9\equiv 0(\text{mod } 57).$$

**85. Упатство.** Постапи аналогно како во претходната задача.

**86. Одговор.** Марко го множи трицифрениот број што му го кажува Доротеј и последните три цифри од добиениот производ му го дава замисленото број. Зошто?

**89. Упатство.** Разгледај ги остатоците по модул 6.

**90. Упатство.** Разгледај ги остатоците по модул 19.

**91. Упатство.** Разгледај ги остатоците по модул 4.

**93. Одговор. а)** нема; **б)** има; **в)** има.

**95. Одговор. а)** $x\equiv 10\ (\text{mod } 17)$;

**б)** $x\equiv 1\ (\text{mod } 6)$, $x\equiv 6\ (\text{mod } 10)$

## ГЛАВА II

**1.** **Одговор. а)** $\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$;
**б)** $\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$; и
**в)** $\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120\}$.

**2.** **а)** $\{x \mid 3 < x < 12\}$; **б)** $\{x \mid x = 3k \text{ и } 0 < x < 25\}$; и
**в)** $\{x \mid x \mid 120 \text{ и } x \in \mathbf{N}\}$.

**3.** **Одговор. а)** $A = \{2,4,8,16,32,64\}$; **б)** $B = \{\frac{7}{3}\}$;
**в)** $C = \{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12)$;
**г)** $D = \{\frac{3}{8},\frac{3}{4},\frac{3}{2},3,6,12,24,48,96\}$.

**4.** **Одговор.** $A = C$ и $B = D$.

**5.** **Одговор.** $P \subset \mathbf{N}$, $M \subset \mathbf{N}$ и $M \cap N = \varnothing$.

**6.** **Одговор. а)** $A \cup B = \{n \mid n = 2k+1, k \in \mathbf{N}\}$.
**б)** $A \cup B = \{x \mid -1 \le x < 4, x \in \mathbf{R}\}$
**в)** $A \cup B = \{x \mid x \le -2 \text{ или } x \ge 2, x \in \mathbf{R}\}$

**7.** **Одговор. а)** $A \cap B = \{n \mid n = 12k+1, k \in \mathbf{N}\}$,
**б)** $A \cap B = \{x \mid 0 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$,
**в)** $A \cap B = \{x \mid -2 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$ и
**г)** $A \cap B = \varnothing$.

**8.** **а)** $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5\}$, $C = \{3,5\}$
**б)** $A = \{1,2,\}$, $B = \{1,2,4,5\}$, $C = \{1,2,3,5\}$

**9.** **Упатство.** Искористи ги асоцијативниот и дистрибутивниот закон за унијата и пресекот.

**10.** **Одговор. а)** $P \cap M = \{n \mid n = 6k, k \in \mathbf{N}\}$,
**б)** $P \cup M = \{n \mid n = 2k \text{ или } n = 3k, k \in \mathbf{N}\}$,
**в)** $P \setminus M = \{n \mid n = 2k \text{ и } n \ne 3m, k,m \in \mathbf{N}\}$ и
**г)** $M \setminus P = \{n \mid n = 3k \text{ и } n \ne 2m, k,m \in \mathbf{N}\}$

**11.** **Решение.** Бидејќи $A$ и $B$ се подмножества од множеството $X$ имаме

$$x \in^c (A \setminus B) \Leftrightarrow x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \in B \Leftrightarrow {}^cA \cup B.$$

Равенството $A \setminus B = A \cap {}^cB$ се докажува аналогно.

**12.** **Решение. а)** Нека $A, B$ и $C$ се произволни множества. Имаме

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin (B \cup C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \text{ и } (x \notin B \text{ и } x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ и}$$
$$(x \in A \text{ и } x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \text{ и } x \in (A \setminus C)$$
$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Тврдењата под б), в) и г) се докажуваат аналогно.

**13.** **Одговор.** $G = \{(-1,-3), (3,5)\}$.

**14.** **Одговор.** $x = 9$, $y = 4$.

**15.** **Одговор.** $X = \{3\}$, $X = \{1,3\}$, $X = \{2,3\}$, $X = \{1,2,3\}$

**16.** Одговор. $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{6\}$, $C = \{2,4\}$.

**17.** **Одговор. а)** $f(f(1)) = 1$, $f(g(2)) = 2$, $g(f(4)) = 2$
**в)** Не.

**18.** **Одговор. а)** $(f \circ g)(x) = 3x+7$, $(f \circ g)(7) = 28$, $(g \circ f)(x) = 3x+1$ и $(g \circ f)(2) = 7$.
**б)** $G_f = \{(x,3x-2) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $G_g = \{(x,x+3) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $G_{f \circ g} = \{(x,3x+7) \mid x \in \mathbf{R}\}$, $G_{g \circ f} = \{(x,3x+1) \mid x \in \mathbf{R}\}$.
**в)** Не.

**19.** **Одговор.** $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r & p & q & p \end{pmatrix}$, $h \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & o \end{pmatrix}$ и $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ o & m & n & m \end{pmatrix}$.

**20.** **Одговор.** Со непосредна проверка добиваме дека

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$
$$f^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = f, f^5 = f^2, f^6 = f^3, \ldots$$

што значи дека $f^{3k} = I, f^{3k+1} = f, f^{3k+2} = f^2$ за секој $k \in \mathbf{N}$.

**21.** **Одговор.**
$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 2$, $(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^2 + 2$, $g^3(x) = (x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 1$, $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$ и $(f \circ g^3)(x) = 2(x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 3$.

**22.** **Одговор.**
**а)** $f(\varnothing) = \{1,2\}$, $f(\{1\}) = \{2\}$, $f(\{2\}) = \{1\}$ и $f(\{1,2\}) = \varnothing$. **б)** $X = \{2\}$.
**в)** Да, бидејќи $f(f(X)) = f({}^cX) = {}^c({}^cX) = X$.

**23.** **Решение. а)** Од $f(1) = |1| = 1 = |-1| = f(-1)$ следува дека $f$ не е инјекција. Јасно, $f$ е сурјекција, бидејќи за секој $y \in [0,+\infty)$ важи $y \in \mathbf{R}$ и $f(y) = y$. **б)** Од $f(-1) = 2 = f(1)$ следува дека $f$ не е инјекција. Сега, ако $y \in [1,+\infty)$, тогаш $\sqrt{y-1} \in \mathbf{R}$ и $f(\sqrt{y-1}) = \sqrt{y-1}^2 + 1 = y$ т.е. $f$ е сурјекција.

**24.** **Одговор. а)** Не. **б)** Да и $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **в)** Да и $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

**25.** **Одговор. а)** $f^{-1}(x) = 2x - 8$; **б)** $f^{-1}(x) = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{15}$;
**в)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{48}$.

**26.** **Упатство.** Докажи дека пресликувањата $f : \mathbf{N} \to A$, $g : \mathbf{N} \to B$ и $h : \mathbf{N} \to C$ определени со $f(k) = 3k, k \in \mathbf{N}$, $g(k) = 3k+1, k \in \mathbf{N}$ и $g(k) = 3k+2, k \in \mathbf{N}$ се биекции.

**27.** **Упатство.** Докажи дека пресликувањата $f : \mathbf{N} \to A$ и $g : \mathbf{N} \to B$ определени со

$f(k)=3k,\ k\in\mathbf{N}$ и $g(k)=3^k,\ k\in\mathbf{N}$ се биекции. Потоа искористи ги својствата на еквивалентните множества.

**28.** **Упатство.** Докажи дека множествата $\mathbf{N}$, $A=\{3k \mid k\in\mathbf{N}\}$ и $B=\{4k+1 \mid k\in\mathbf{N}\}$ се еквивалентни.

**29.** **Упатство.** Докажи дека пресликувањето $f:[0,1)\to(0,1]$ определено со $f(x)=1-x$, за $x\in[0,1)$ е биекција.

**30.** **Упатство.** Докажи дека пресликувањето $f:X\times Y\to Y\times X$ определено со $f((x,y))=(y,x)$, за секој $(x,y)\in X\times Y$.

**31.** **Одговор.** На 36 начини.

**32.** **Упатство.** За случаите кога цифрата на единиците е 0 или 5 искористи го принципот на производ, а потоа искористи го принципот на збир. Внимавај, ако цифрата на единиците е 5, тогаш цифрата на единиците не може да е 0.

**33.** **Упатство.** Низ секоја точка минуваат шест прави. Искористи ги принципот на збир. Внимавај, при вакво броење секоја права ја броиш два пати.

**34.** **Упатство.** Прво искористи го принципот на збир за поделбата на моливите, тетратките и книгите одделно, а потоа искористи го принципот на производ.

**35.** **Одговор.** На 24360 начини.

**36.** **Упатство.** Искористи го принципот на производ. Внимавај, цифрата на десетилјадите не смее да биде 0.

**37.** **Упатство.** Искористи го принципот на вклучување и исклучување. **Одговор.** 29 ученици имаат пет по историја или географија и 15 ученици имаат пет по математика.

**38.** **Упатство.** Искористи го принципот на вклучување и исклучување. **Одговор.** Сите три јазици ги учат 3 ученици.

**39.** **Решение.** Можни се два случаи: постои барем еден шахист кој играл со сите други шахисти и на постои шахист кој играл со сите други шахисти. Во првиот случај бројот на партиите кои секој шахист ги одиграл во некој момент припаѓа на множеството $\{1,2,...,n-1\}$, а во вториот случај на множеството $\{0,1,...,n-2\}$. Бидејќи и двете множества имаат по $n-1$ елемент постојат барем двајца учесници на турнирот со еднаков број одиграни партии.

**40.** **Решение.** Секој природен број при делење со 4 дава остаток 0, 1 , 2 или 3. Значи, постојат само четири остатоци, па затоа меѓу петте броеви ќе има барем два броја кои имаат ист остаток при делење со 4. Јасно, 4 е делител на нивната разлика.

**41.** Да ги разгледаме следните 2002 броеви:

$a_1=1234567890$

$a_2=12345678901234567890$

.....

$a_{2003}=1234567890...1234567890$

каде во бројот $a_i$ групата цифри 1234567890, во дадениот редослед, се повторува $i$ пати. При делење на овие броеви со 2002 можеме да ги добиеме остатоците 0, 1, 2,..., 2001, т.е. најмногу 2002 остатоци. Значи, барем два остатоци се совпаѓаат и нека се тоа остатоците на броевите $a_i$ и $a_j$, $a_i>a_j$. Значи, бројот $a_i-a_j$ се дели со 2002 и има облик

$$1234567890...1234567890\underbrace{000...000}_{10(i-j)\text{ нули}}$$

и групата цифри 1234567890 се повторува $i-j$ пати.

**42.** **Решение.** Останатите 29 ученици направиле 0, 1, 2, ..., 12 грешки, па затоа Ќе ги поделиме во 13 групи: група без грешки, група со една грешка, ..., група со 12 грешка. Бидејќи $29=2\cdot13+3$, јасно е дека во некоја од 13-те групи има повеќе од 2 ученици. Затоа постојат најмалку три ученици кои направиле ист број грешки.

**43.** Решение. Ако во сите населени места бројот на жителите е различен, тогаш најмалиот број на жители ќе изнесува

$$1+2+...+5988+5990=\frac{5990\cdot5991}{2}=17943045,$$

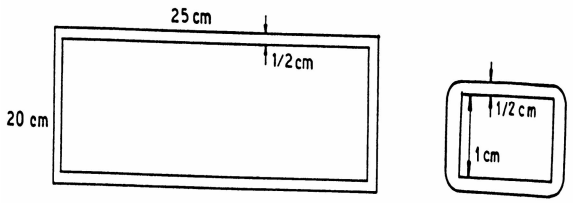
што е над усом пати повеќе од вистинскиот број на жители на Македонија. Оттука заклучуваме дека постојат барем две населени места со еднаков број на жители.

**44.** **Решение.** Да избереме произволен научник од групата. Бидејќи тој се допишува со останатите 16, а преписката се врши на три теми, постои барем една тема за која тој се допишува со барем 6 од останатите научници (ако таква тема не постои, тогаш тој ќе се допишува со најмногу 15 научници). Понатаму, да избереме една таква група од 6 научници со која избраниот научник се допишува на иста тема. Ако помеѓу овие шест научници постојат двајца кои се допишуваат на истата тема како и избраниот, тогаш тие заедно со избраниот научник се бараните тројца научници. Ако тоа не е точно, тогаш сите шест научници се допишуваат само на преостанатите две теми. Да избереме еден од шесте научници. Останатите пет научници ќе ги поделиме во две групи: група која со избраниот научник се допишува

на една тема и група која со избраниот научник се допишува на друга тема. Јасно, во едната група има барем три научници. Овие три научници меѓусебно се допишуваат на две теми. Ако двајца од нив се допишуваат на истата тема како и со избраниот научник, тогаш тие заедно со избраниот научник се бараните тројца научници, а ако сите тројца се допишуваат на другата тема, тогаш тие се бараните тројца научници.

**45. Решение.** Шумата треба да се покрие со дисјунктни правоаголници со димензија $10m \times 20m$ но тие правоаголници не смеат да бидат на растојание помало од $0{,}5m$ бидејќи во спротивно едно борово стебло може да има делови во два такви правоаголника. Затоа во шумата ќе сместуваме помошни правоаголници со димензија $10{,}5m \times 20{,}5m$. Бидејќи $1000:10{,}5 \approx 95{,}238$ и $1000:20{,}5 \approx 48{,}78$ во шумата може да се сместат $95 \cdot 48 = 4560$ помошни правоаголници и истите не може да имаат заеднички борови стебла. Значи, било како да се распоредат боровите стебла секогаш ќе останат барем 10 правоаголници во кои нема да има борови стебла.

**46. Решение.** Центарот на кругот со дијаметар $1cm$ сместен во правоаголникот, мора да се наоѓа на растојание поголемо од $\frac{1}{2}cm$ од секоја од страните на правоаголникот, т.е. внатре во рамката на цртежот лево. Плоштината на рамката е еднаква на $19 \cdot 24 = 456cm^2$. Освен тоа, центарот на кругот мора да е на растојание поголемо од $\frac{1}{2}cm$ од контурата на секој од квадратите, т.е. надвор од секоја фигура како на цртежот десно, чија плоштина е $(3+\frac{\pi}{4})cm^2$. Максималната плоштина на сите овие фигури, под услов да не се сечат е:




$$120 \cdot (3+\tfrac{\pi}{4})cm^2 = (360+30\pi)cm^2 < 456cm^2$$

што значи дека овие фигури не ја покриваат впишаната рамка, па значи дека постои точка која не лежи во ниена од фигурите од цртежот десно и тоа е центарот на бараниот круг.

## ГЛАВА III

**1. Одговор. а)** Обемот е множеството паралелограми, а содржината е: *четириаголник во кој спротивните страни се паралелни.* **б)** обемот е множеството ромбоиди, а содржината е: *паралелограм во кој соседните страни не се заемно нормални.* **в)** Обемот е множеството ромбови, а содржината е: *ромбоид со еднакви соседни страни.* **г)** Обемот е множеството трапеза, а содржината е: *четириаголник со две паралелни страни.* **д)** Обемот е множеството рамнокраки триаголници, а содржината е: *триаголник со две еднакви страни.* **ѓ)** Обемот е множеството средни линии на триаголник, а содржината е: *отсечка чии крајни точки се средините на две страни на триаголникот.* **е)** Обемот е множеството инјективни пресликувања, а содржината е: *пресликување кај кое различните елементи имаат различни слики.* **ж)** Обемот е $\{2,3,5,7,11,...\}$, а содржината е: *природен број што има точно два природни делители.*

**2. Одговор. а)** четириаголник; **б)** паралелграм; **в)** ромбоид; **г)** четириаголник; **д)** триаголник; **ѓ)** отсечка; **е)** пресликување; **ж)** природен број. За поимите под **а), б), в), г)** и **д)** тоа е поимот многуаголник.

**3. Одговор. а)** еднакви страни и еднакви агли; **б)** еднакви агли; **в)** еднакви страни.

**4. Одговор. а)** *Симетрала на отсечка ја нарекуваме правата што е нормална на отсечката и минува низ нејзината средна точка.* Дефинирачкиот поим е: права што е нормална на отсечката и минува низ нејзината средна точка. **б)** *Тежишна линија ја нарекуваме отсечката која го поврзува темето на триаголникот со средината на спротивната страна.*

**5. Одговор.** Ромб е паралелограм при кој две соседни страни се еднакви.

**6. Одговор.** Минималната дефиниција е: "Паралелограм е четириаголник при кој спротивните страни пар по пар се паралелни".

**7. Одговор.** "Трапез е четириаголник со две паралелни страни". Да.

**8. Упатство.** Дефинирај: отсечка со помош на полуправа; полуправа со помош на права.

**9. Одговор.** Не. Броевите 3, 5 и 7 се прости броеви тризнаци.

**10. а)** Субјект е: "паралелграм", предикат е: "спротивните агли се еднакви". **б)** Субјект е: "рамнокрак трапез", предикат е "дијагоналите се еднакви". в) Субјект е "природен број поголем од 1", предикат е "прост или сложен"

**11. Одговор. а)** Субјект е: "природен број", предикат е: "истовремено и прост и сложен број". **б)** Субјект е: "триаголник", предикат е: "истовремено и правоаголен и тапоаголен ".

**12. Упатство.** Искористи ги универзалниот и егзистенцијалниот квантификатор.

**13. Упатство.** Прво анализирај ги примерите од 10 до 13.

**14. Одговор. а)** Не. **б)** Да.

**15. Одговор. а)** *Претпоставка:* бројот е делив со 2 и со 5, *заклучок:* бројот е делив со 10. **б)** *Претпоставка:* краците на два агли се нормални, *заклучок:* аглите се еднакви или суплементни.

**16. Одговор. а)** *Услов*: последната цифра на бројот е 0, *заклучок:* бројот е делив со 5. **б)** *Услов:* тетивите во кружницата се еднакви, *заклучок:* тетивите се на исто растојание од центарот на кружницата. **в)** *Услов:* четириаголникот е квадрат, *заклучок:* дијагоналите се еднакви меѓу себе.

**17. Одговор. а)** Условна форма. Напоредните агли се суплементни. **б)** Категорична форма. Ако краците на аглите се паралелни, тогаш тие се еднакви или суплементни. **в)** Категорична форма. **г)** Условна форма. **д)** Категорична форма.

**18.** *Условна форма:* Ако четириаголникот е паралелограм, тогаш неговите дијагонали се преполовуваат. Категорична форма: Во секој правоаголник дијагоналите заемно се преполовуваат.

**19. Одговор. а)** Ако дијагоналите на четириаголникот се преполовуваат, тогаш тој е паралелограм. Да. **б)** Ако аглите што лежат над иста страна на четириаголникот се суплементни, тогаш тој е паралелограм. Да. **в)** Ако бројот е делив со 10, тогаш тој е делив со 2 и со 5. **г)** Ако два агли се еднакви или суплементни, тогаш нивните краци се нормални. Не.

**20. Одговор. а)** Напоредни агли се суплементни. Доволен услов за два агли се суплементни е тие да се напоредни. **б)** Агли со паралелни краци се еднакви или суплементни. Доволен услов за да два агли се еднакви или суплементни и нивните краци да се паралелни. **в)** Наизменичните агли на трансферзалата на две паралелни прави се еднакви. Доволен услов за да два агли се еднакви е тие да се наизменични агли на трансферзалата на две паралелни прави.

**21. Одговор. а)** Ако последната цифра на брјот е 0, тогаш тој е делив со 5. Потребен услов за да последната цифра на бројот е 0 е тој да биде делив со 5. **б)** Ако тетивите во една кружница се еднакви, тогаш тие се на еднакво растојание од центарот на кружницата. Потребен услов за да тетивите во една кружница се еднакви е тие да се на еднакво растојание од центарот на кружницата. **в)** Ако четириаголникот е квадрат, тогаш неговите дијагонали се еднакви. Потребен услов за дачетириаголникот е квадрат е неговите дијагонали да се еднакви меѓу себе. **г)** Ако еден број е делив со 6, тогаш тој е делив и со 2 и со 3. Потребен услов за да еден број е делив со 6 е тој да е делив со 2 и со 3.

**22. Одговор. зад. 20. а)** Не. б) Не. в) Не. **зад. 21. а)** Не. **б)** Да. **в)** Не. **г)** Да.

**23. Одговор. а)** Правилно. Модус поненс. **б)** Правилно. Модус толенс. **в)** Неправилно. **г)** Правилно. Модус поненс. **д)** Неправилно.

**24. Одговор. а)** Правилно. Контрапозиција. **б)** Неправилно. **в)** Правилно. Контрапозиција.

**25. Одговор. а)** Правилно. Хипотетички силогизам. **б)** Правилно. Хипотетички силогизам. **в)** Правилно. Хипотетички силогизам.

**26. Решение. б)** Нека за природните броеви $a$ и $b$ важи $ab = 2n+1$ за некој $n \in \mathbf{N}$. Тогаш, постојат $k, m \in \mathbf{N}$ такви, што $a = 2k+1$ и $b = 2m+1$. Според тоа, $a+b = 2k+1+2m+1 = 2(k+m+1)$, што и требаше да се докаже.

**27. Решение. б)** Бидејќи $a$ и $b$ се реални броеви со ист знак, ако во неравенството $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ помножиме со $ab > 0$ го добиваме еквивалентното неравенство $a^2+b^2 \geq 2ab$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(a-b)^2 \geq 0$ кое е вистинито за секои реални броеви $a$ и $b$, од што следува точноста на теоремата. **в)** За да неравенството $a^2+b^2 \geq 2|ab|$ е исполнето доволно е да е исполнето неравенството $|a|^2+|b|^2 \geq 2|ab|$. Последното неравенство е исполнето, ако е исполнето неравенството $(|a|-|b|)^2 \geq 0$, кое е точно за секои $a, b \in \mathbf{R}$.

**28. Решение. б)** Нека претпоставиме дека производот на два непарни природни броја $a = 2k+1$ и $b = 2m+1$ е парен број, да кажеме $c = 2n$. Тогаш, од $ab = c$ следува $(2k+1)(2m+1) = 2n$ односно $2(n-2mk-m-k) = 1$, што е противречност. Од добиената противречност следува точноста на теоремата. в) Нека $a$ е рационален број таков, што $a^2 = 2$. Тогаш, $a = \frac{p}{q}$ и НЗД$(p,q) = 1$. Според тоа, $\frac{p^2}{q^2} = 2$ т.е. $p^2 = 2q^2$ од што следува $p = 2k$. Со замена во претходното равенство добиваме $2k^2 = q^2$ од што следува $q = 2m$. Но, тоа значи НЗД$(p,q) \geq 2$ што е противречност.

## ГЛАВА IV

1. **Одговор. а)** $\alpha = \{(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(-2,2),(2,-2),(-1,1),(1,-1)\}$.

2. **Одговор. а)** $\alpha = \{(-3,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

3. **Решение.** Нека $x\alpha y$. Тогаш, $3\,|\,x$ и $3\,|\,y$, па затоа $3\,|\,y$ и $3\,|\,x$, што значи $y\alpha x$ т.е. релацијата е симетрична. Ако $x\alpha y$ и $y\alpha z$, тогаш $3\,|\,x$ и $3\,|\,y$ и $3\,|\,y$ и $3\,|\,z$, што значи $3\,|\,x$ и $3\,|\,z$, па затоа $x\alpha z$ т.е. релацијата е транзитивна.

4. **Одговор. а)** рефлексивна, симетрична и транзитивна; **б)** симетрична.

5. **Одговор. а)** симетрична, **б)** рефлексивна, симетрична, транзитивна, **в)** симетрична.

6. **Решение. а)** Јасно, $x\alpha x$, за секој $x \in \mathbf{Z}$ бидејќи $4\,|\,(x-x)$, за секој $x \in \mathbf{Z}$. Значи релацијата е рефлексивна. Понатаму, од $4\,|\,(x-y)$ следува $4\,|\,(y-x)$, што значи дека од $x\alpha y$ следува $y\alpha x$ т.е. релацијата е симетрична. Конечно, од $4\,|\,(x-y)$ и $4\,|\,(y-z)$ следува $4\,|\,(x-z)$ т.е. релацијата е транзитивна. **б)** Класите на еквиваленција се $S_1 = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $S_2 = \{4k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $S_3 = \{4k+2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $S_4 = \{4k+3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

7. **Одговор.** Да, тоа е релација за еквиваленција.

8. Одговор. $\alpha = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(a,e),(e,a),(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(b,e),(e,b),(c,d),(d,c),(c,e),(e,c),(d,e),(e,d),(f,f),(g,g),(h,h),(f,g),(g,f),(f,h),(h,f),(g,h),(h,g)\}$.

9. **Одговор. б)** $A_{/\alpha} = \{\{a,b,c\},\{d\}\}$.

10. **Одговор.** Таква е релацијата $\alpha$ чие фактор-множество е $A_{/\alpha} = \{\{a,b,c\},\{d,e\},\{f,g\}\}$

11. **Упатство.** Претставија релацијата шематски и заклучи дека таа е подредување.

12. **Упатство.**
$\mathbf{P}(A) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$.
Искористи ја дефиницијата на подмножество.

13. **Одговор.** $\alpha = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,4),(2,3),(2,5)\}$.

14. **Одговор.** Дека $(\mathbf{N},*)$ е групоид следува од фактот дека $m^n \in \mathbf{N}$, за секои $m,n \in \mathbf{N}$. $2*3=8$, $3*2=9$, $(2*2)*3=64$ и $2*(2*3)=256$. Групоидот не е ниту комутативен, ниту асоцијативен.

15. **Одговор. а)** Да. **а)** Да.

16. **Одговор.** Да. **а)** Да. **б)** Да.

17. **Упатство.** Искористи ги својствата на унијата, пресекот и разликата за подмножествата на $\mathbf{P}(M)$.

18. **Одговор. а)** $[2*(-3)]*1=-8$ и $(4*1)*(2*3)=10$
**б)** Не е комутативен, на пример, $1*2=2$ и $2*1=1$. Од $(1*2)*3=5$ и $1*(2*3)=8$ следува дека не е полугрупа. **в)** Од $3*x=10$ следува $3+2x-3=10$ па е $x=10$. Од $(-2*x)*(x*3)=2$ следува $-2+2x-3+2(x+3)-3=2$ па е $x=1$.

19. **Одговор. а)** $[(4*(-3))*(2*7)]*(-1)=-1965$ и $[4*(-12)]*2=-807$.
**б)** Да, групоидот е комутативна полугрупа.

20. **Решение. а)** Непосредно следува од фактот дека $m*1=m^1=m$, за секој $m \in \mathbf{N}$. **б)** Непосредно следува од фактот дека за секое множество $X \subseteq M$ важи $X \setminus \varnothing = X$.

21. **Решение.** Групоидот $(\mathbf{N},*)$ нема неутрален елемент (зошто?). Бидејќи НЗС$(x,1)=x$ добиваме дека за групоидот $(\mathbf{N},\circ)$ бројот 1 е неутрален елемент. Ако елементот $x$ е инверзибилен, тогаш постои $y$ таков, што $1 = x \circ y = \text{НЗС}(x,y)$. Последното е можно ако и само ако $x=y=1$. Ако $(\mathbf{N},\Delta)$ има неутрален елемент $e$, тогаш $x = x\Delta e = \min\{x,e\}$ за секој природен број $x$, што не е можно.

22. **Одговор.** Да во овој групоид неутралниот елемент е $e=-1$ и секој елемент е инверзибилен, при што на елементот $x$ неговиот инверзен елемент е $x'=-2-x$.

23. **Упатство.** Види задача 20 б) и провери дека $X\Delta X = \varnothing$ за секое подмножество $X \subseteq M$.

24. **Упатство.** Провери дека $(A,*)$ е групоид. Понатаму покажи дека 0 е неутрален елемент и дека секој елемент е инверзибилен, при што неговиот инверзен елемент е спротивниот цел број.

25. **Одговор.** Да.

26. **Упатство.** Прво, докажи дека $(\mathbf{Q}\setminus\{0\},\circ)$ е групоид, а потоа докажи дека $\frac{1}{2}$ е неутрален елемент, $y=\frac{1}{4x}$ е инверзниот елемент на $x$. Комутативноста и асоцијативноста непосредно следуваат од соодветните својства на операцијата множење.

27. **Упатство.** Провери дали $(S,\circ)$ е групоид, а потоа констатирај дека $f_1$ е неутрален елемент, а $f_2$ и $f_3$ се заемно инверзни. Заклучи дека $(S,\circ)$ е полугрупа.

**28.** **Упатство.** Докажи дека $(A,*)$ е групоид, 1 е негов неутрален елемент, за секој $x$ елементот $\frac{1}{x}$ е инверзен итн.

**29.** **Упатство.** Докажи дека $(S,\circ)$ е групоид, $f$ е неутрален елемент и $g$ е инверзен на самиот себе.

**30.** **Одговор.** Да.

**31.** **Упатство.** Искористи дека збир и производ на полиноми со целобројни коефициенти е полином со целобројни коефициенти итн.

**32.** **Одговор.** Да.

**33.** **Упатство.** Ако $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, тогаш $(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ и $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, што значи дека $(\mathbf{Q}(\sqrt{2}),+)$ и $(\mathbf{Q}(\sqrt{2}),\cdot)$ се групоиди. Сега, аксиомите за поле се проверуваат непосредно.

**34.** **Упатство.** Постапи аналогно како во задача 33.

**35.** **Одговор.** Не.

**36.** **Одговор.** Да.

**37.** **Успатство.** Од условот на задачата непосредно следува дека $(\mathbf{R}^2,+)$ и $(\mathbf{R}^2,\cdot)$ се групоиди. Сега непосредно треба да се провери дека елементот $(-a,-b)$ е спротивен на елементот $(a,b)$ во групоидот $(\mathbf{R}^2,+)$, а елементот $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ е инверзен на елементот $(a,b)$ во групоидот $(\mathbf{R}^2,\cdot)$. Останатите аксиоми за поле се проверуваат непосредно.

## ГЛАВА V

**1.** **Одговор. а)** $3$, **б)** $2-2\sqrt{3}$, **в)** $2+\sqrt{2}$.

**2.** **Одговор. а)** $-2$, **б)** $\frac{1}{4}$, **в)** $12$.

**3.** **Одговор. а)** $15$, **б)** $2$, **в)** $5\sqrt{3}-6$.

**4.** **Одговор. а)** $x \in (-2,2)$, **б)** сите, **в)** $x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$, **г)** $x \in (-\infty,-4] \cup [0,+\infty)$, **д)** $x \in [-2,8]$

**5.** **Упатство.** Искористи ги неравенствата

$$(a+b)^2 \geq 0 \text{ и } (a-b)^2 \geq 0.$$

**6.** **Упатство.** Во неравенството $|a|-|b| \leq |a-b|$ искористи го условот $|b| < \frac{|a|}{2}$.

**7.** **Упатство.** Искористи го неравенството од задача 5.

**8.** **Упатство.** Најди ги вредностите за кои изразите под знакот на апсолутна вредност се анулираат, а потоа разгледај ја функцијата на соодветните интервали.

**9.** **Упатство.** Искористи ја забелешка 2.

**10.** **Упатство.** Прво запиши ја функцијата со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност.

**11.** **Упатство.** Прво запиши ја функцијата со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност.

**12.** **Упатство.** Прво запиши ја функцијата со помош на повеќе формули кои не го содржат знакот за апсолутна вредност.

**13.** **Одговор. а)** $x \in \{-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\}$, **б)** $x \in \{\frac{4}{3},\frac{5}{3}\}$, **в)** $x \in \{-\frac{26}{3},\frac{34}{3}\}$,

**14.** **Одговор. а)** $x=2$, **б)** $x=-\frac{4}{3}$, **в)** $x \in \{\frac{17}{19},3\}$.

**15.** **а)** $x \in \{-\frac{4}{11},-\frac{2}{3}\}$ **б)** $x \in [-1,1]$ **в)** Дадената равенка рагледај ја на интервалите $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3)$ и $[3,+\infty)$. **г)** Дадената равенка разгледај ја на интервалите $(-\infty,2)$, $[2,3)$, $[3,8)$ и $[8,+\infty)$. **д)** Дадената равенка разгледај ја на интервалите $(-\infty,-3)$, $[-3,-2)$, $[-2,-1)$ и $[-1,+\infty)$.

**16.** **Одговор. а)** $x=\frac{2}{5}$, **б)** $x=\frac{3}{2}$, **в)** нема решение.

**17.** **Упатство.** Искористи ја забелешка 3.

**18.** **Упатство. а)** Искористи дека $|x|+1 \neq 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$; дадената равенка помножија со $|x|+1$ со што ќе ја трансформираш во еквивалентната равенка $4|x|-1=0$. **б)** Искористи дека $|x+2|+|x-2| \neq 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$.

**19.** **Одговор. а)** $(x,y) \in \{(0,1)\}$, **б)** $(x,y) \in \{(1,2)\}$.

**20.** **Упатство. а)** Воведи ја смената на непознатите $|x|=t$ и $|y|=z$. **б)** Изрази го $y$ од првата равенка и замениго во втората равенка.

**21.** **Одговор. а)** Решение е множеството од сите подредени парови $(x,y)$ такви, што: 1) $x$ и $y$ се ненегативни реални броеви и невниот збир е 1 и 2) $x$ и $y$ се непозитивни реални броеви и невниот збир е $-1$. **б)** $(x,y) \in \{(\frac{3}{4},\frac{5}{4}),(\frac{1}{4},\frac{7}{4})\}$.

**22.** **Упатство.** Ослободи се од знакот за апсолутна вредност во втората равенка и замени за $x$ во првата равенка.

**23.** **Упатство.** Изрази ја $|y|$ од втората равенка, потоа замени во првата равенка и истата раз-

гледај ја на соодветните интервали кога $a<0$ и кога $a\geq 0$.

**24. Одговор. а)** $x\in(2,3)$, **б)** $x\in(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[2,+\infty)$, **в)** $x\in(-1,7)$.

**25. Одговор. а)** $x\in[8,+\infty)$, **б)** $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, **в)** $x\in[0,1)\cup(3,+\infty)$.

**26. Одговор. а)** $x\in(-\frac{4}{7},+\infty)$, **б)** $x\in[-\frac{4}{3},2]$, **в)** $x\in(2,\frac{10}{3})$.

**27. Одговор. а)** $x\in[\frac{1}{3},3]$, **б)** $x\in[-\frac{1}{3},+\infty)$, **в)** $x\in(-\infty,\frac{1}{3})\cup(5,+\infty)$.

**28. Упатство.** Искористи ја забелешка 3.

**29. Упатство.** При $x,y\neq 0$ искористи ја смената $\frac{1}{x}=t,\ \frac{1}{y}=z$.

**30. Упатство. а)** При $y\neq -1$ искористи ја смената $2x+3y=t,\ \frac{1}{y+1}=z$. При $y\neq -1$, $2x+3y\neq 0$ искористи ја смената $\frac{1}{2x+3y}=t,\ \frac{1}{y+1}=z$.

**31. Упатство.** При $x\neq 3,\ \ y\neq -1$ искористи ја смената $\frac{1}{x+3}=t,\ \frac{1}{y+1}=z$.

**32. Решение.** Нека внукот има $x$ години. Тогаш, таткото има $7x$ години, а дедото има $12x$ години. Од условот на задачата ја добиваме равенката $x+7x+12x=100$ чие рееение е $x=5$. Значи, внукот има 5 години, таткото 35 години и дедото 60 години.

**33. Одговор. а)** Ако камионите се наоѓаат на растојание $24km$ пред нивната средба, тогаш нивните брзини се $56km/h$ и $66km/h$. **б)** Ако камионите се наоѓаат на растојание $24km$ по нивната средба, тогаш нивните брзини се $64km/h$ и $74km/h$.

**34. Одговор.** Ако со $x$ го означиме растојанието од селото до пристаништето, тогаш од условите на задачата ја добиваме равенката $\frac{x}{4}-\frac{1}{2}=1+\frac{x-4}{6}+\frac{2}{3}$ чие решение е $x=18$.

**35. Одговор.** Ако со $x$ го означиме времето во кое Рампо поминувал покрај бараното место, тогаш од условите на задачата ја добиваме равенката $\frac{72}{23}(x-9\frac{5}{12})+\frac{36}{11}(x-11)=12$ чие решение е $x=12{,}1$. Сега лесно се пресметува дека бараното место е оддалечено од селото на Рампо $\frac{72}{23}(12{,}1-9\frac{5}{12})=8{,}4km$ и Рампо покрај ова место поминал во 12 часот и 6 минути.

**36. Одговор.** Подвижните скали имаат 30 видливи скалила.

**37. Одговор.** Авионот прелетал $2406{,}25km$.

**38. Одговор.** Должината на возот е $210m$, а неговата брзина е $54km/h$.

**39. Одговор.** Пешаците се сретнале по 30 минути, т.е. во 9 часот и 40 минути.

**40. Одговор.** Должина на возот е $160m$, а неговата брзина е $20m/s$.

**41. Одговор.** Ако со $x$ ја зоначиме брзината на реката и со $y$ ја означиме брзината на чамецот во мирна вода, тогаш од условите на задачата го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}\frac{18}{x+y}+\frac{18}{y-x}=5\\ \frac{4}{x+y}=\frac{2}{y-x}\end{cases}$$

чие решение е $x=2{,}7$ и $y=8{,}1$. Значи, брзината на реката е $2{,}7km/h$.

# ИНДЕКС НА ПОИМИ


**А**

апсолутна вредност 142
аксиома (основно тврдење) 99
аксиоматска дефиниција 95
аналитичен метод 111

**Б**

бесконечно множество 79
биекција 76
бинарна релација 116
- антисиметрична 118
- еквивалинција 119
- подредување 122
- рефлексивна 117
- симетрична 117
- транзитивна 118
- универзална 117

**В**

Венов дијаграм 64
видов поим 91
вистински делител 8
внатрешна бинарна операција 124

**Г**

генетичка дефиниција 94
график на пресликување 72
група 132
- комутативна 132
групоид 125
- асоцијативен (полугрупа) 125
- комутативен 126
- со кратење 133

**Д**

Декартов производ на множества 69
деленик 13
делител 8, 13
десетична дропка, конечна 137
- периодична 137
- неприодична 137
дефиниран поим 92
дефинирачки поим 92
дисјунктни множества 66
дисјункција 105
домен 71

**Е**

Евклидов алгоритам 25
единица (неутрален елемен) 128
- лева 128
- десна 128
еднакви пресликувања 72
еквивалентни множества 78
еквиваленција 105
Ератостеново сито 35

**З**

заеднички делител 21
заеднички содржател 29
заемно комплементарни делители 9
заемно прости броеви 23

**И**

идентично пресликување 71
изведени поими 94
импликација 105
индиректен метод 112
инверзен елемент 130
инверзибилен елемент 130
инверзно пресликување 77
инјекција 74
ирационални броеви 138

**К**

каноничен запис 38
Келиева шема 124
класа на еквиваленција 121
класи на конгруенции 55
кодомен 71
количник 13
комплемент на множество 68
комплетен систем на остатоци 55
композиција на пресликувања 73
конгруентен по модул 48
конечно множество 79
конјункција 105

**Л**

линеарна Диофантова равенка 41
линеарна конгруентна равенка 56
линеарна функција 146
- неравенка 157
логичка врска 92
логички сврзник 96

**М**

метод на замена 161
множество 62
- партитивно 125
модуларна аритметика 55
модус поненс 105
- толенс 106

**Н**

најголем заеднички делител 21
најмал заеднички содржател 30
негација 105
нелинеарна Диофантова равенка 45
непарен број 14

**О**

обем на поим 90
Ојлеров метод 43
Основен поим 94
остаток 13

**П**

парен број 14
Пеанови аксиоми 95
подмножество 63
поле 136
- подредено 138
- Архимедово 138
полн квадрат 39
празно множество 63
пресек на множества 66
пресликување (функција) 71
прстен 134
- комутативен 134
- со единица 134
поим 90
правило за контрапозиција 108
предикат (логички прирок) 96
признак за деливост
- со 2 17
- со 3 19
- со 4 18
- со 5 18
- со 7 53
- со 8 18
- со 9 19, 52
- со 11 21, 53
принцип на вклучување 83
- Дирихле 84, 86
- еднаквост 79
- збир 81
- исклучување 83
- производ 82
природни броеви 8
прост број 33

**Р**

разлика на множества 68
реални броеви 138
рекурзивна дефиниција 95
решение на линеарна неравенка 157
родов поим 91

**С**

синтетички метод 110
систем линеарни равенки 154
сложен број 33
содржател 8
содржина на поим 90
сурјекција 75
субјект (логички подмет) 96

**Т**

тврдење, општо потврдно 97
- делумно потврдно 97
- општо одречно 97
- делумно одречно 97
теорема (изведено тврдење) 98
- обратна 101
- својство 104
- признак 104

**У**

унија на множества 65

**Х**

хипотетички силогизам 107

**Ц**

цели броеви 8

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Будуров, С.; Серафимов, Д.:** *Математически олимпиади 2,* "Народна просвета", София, 1980
2. **Димоски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јосифовски, Б.:** *Практикум по елементарна математика*, Просветно дело, Скопје, 1993
3. **Đurković, R.:** *Zbirka riješenih zadataka iz elementarne algebre*, IKTP "Sarajevo", 1990
4. **Јанев, И., Петрески, Н.; Тренчевски, Г.:** *Збирка задачи по математика за* I *година*, "Просветно дело", Скопје, 1991
5. **Jankov, J.; Rakočević, S.; Cvrkušić, V.:** *Zbirka zadataka iz elementarne matematike,* "Savremena aadministracija", Beograd, 1972
6. **Кудреватов, Г. А.:** *Сборник задач по теории чисел,* "Просвещение", Москва, 1970
7. **Малчески, Р.:** *Методика на наставата по математика (општ дел)*, "АЛФА 94", Скопје, 2001
8. **Малчески, Р.; Малчески. А.:** *Избрани содржини од елементарна математика*, СДМИ, Скопје, 1994
9. **Малчески, Р.; Димовски, Д.; Тренчевски, К.:** *Вовед во теорија на броеви*, МММ, Скопје, 1993
10. **Младеновић, П.:** *Правила збира и производа*, Математички лист XXXI-1, Београд, 1996
11. **Прешић, С.:** *Математика за I разред стручних школа (логика, скупови, бројеви)*, Завод за уџбенике и наставна средства Србије, Београд, 1970
12. **Tošić, R.; Vukosavljević, V.: Elementi teorije brojeva; Alef, Novi Sad, 1995**
13. **Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.:** *Занимлива математика*, МММ, Скопје, 1994
14. **Чупона, Ѓ.:** *Алгебарски структури и реални броеви*, "Просветно дело", Скопје, 1976