

IV олимпијада

1. Најди го најмалиот природен број n со следните својства:

- а) цифрата на единиците на бројот n запишан во декаден броен систем е 6,
 б) ако цифрата на единиците се премести пред останатите цифри се добива број кој е 4 пати поголем од бројот n .

Решение. I начин. Бројот n можеме да го запишеме во облик $n = 10A + 6$.

Тогаш $4n = 6 \cdot 10^m + A$, каде бројот A има m цифри. Од овие две равенки добиваме

$$A = \frac{6 \cdot 10^m - 24}{39}.$$

Сега бараме најмал број m за кој овој количникот е цел број. Лесно се гледа дека $m = 5$, $A = 15384$ и $n = 153846$.

II начин. Од условот на задачата имаме

$$n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 6}, \quad 4n = \overline{6 a_m a_{m-1} \dots a_1},$$

односно

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + 6$$

$$4n = 6 \cdot 10^m + a_m \cdot 10^{m-1} + a_{m-1} \cdot 10^{m-2} + \dots + a_1.$$

Бројот $4n$ завршува со 4, бидејќи $6 \cdot 4 = 24$, па затоа $a_1 = 4$. Понатаму бројот $4n$ завршува со 84, бидејќи $4 \cdot 46 = 184$, од што следува $a_2 = 8$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $n = 153846$.

2. Реши ја неравенката

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. За да изразот од левата страна на неравенката бидат дефиниран, треба да е исполнет условот $-1 \leq x \leq 3$. Ако неравенката важи за некој $x \in \mathbb{R}$ тогаш $\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1}$, од каде што добиваме $-1 \leq x < 1$.

Неравенката ја запишуваме во облик

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}.$$

Ако квадрираме, по средувањето на изразот добиваме

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1},$$

а со повторно квадрирање ја добиваме квадратната неравенка

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0,$$

од каде што наоѓаме $x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$ и $x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$. Ако се земат во предвид сите

услови се добива $-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.

3. Дадена е коцка $ABCD A' B' C' D'$, со горна и долна основа $ABCD$ и $A' B' C' D'$, соодветно и $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Точката X се движи со константна брзина по рабовите на квадратот $ABCD$ во насока $ABCD$, а точката Y се движи со иста брзина по рабовите на квадратот $B' C' C B$ во насока $B' C' C B B'$. Точките X и Y почнуваат да се движат во ист момент при што X тргнува од A , а Y од B' . Најди го и нацртај го геометриското место на средините на отсечките XY .

Решение. Нека M, N, Q се центри на квадратите $ABB' A'$, $BCC' B'$ и $ABCD$, соодветно.

Да претпоставиме дека точката X се наоѓа на работ AB . Тогаш $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'Y} = \lambda \overrightarrow{B'C'}$, што значи

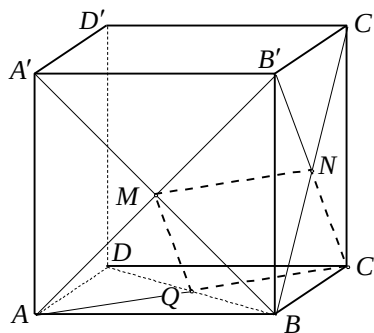
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'}) \\ &= \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

Според тоа, средината на отсечката XY се движи по отсечката MN , додека X се движи по отсечката AB .

Нека точката X се движи по работ BC , т.е. нека $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$. Тогаш

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC'} + \mu \overrightarrow{CC'} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}) = \overrightarrow{AN} + \frac{\mu}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AN} + \mu \overrightarrow{NC},$$

што значи дека средината на отсечката XY се движи по отсечката NC , додека X се движи од B до C . Понатаму, на аналоген начин се докажува дека X се движи од C до Q и од Q до M . Бараното геометриско место на точки е четириаголникот $MNCQ$.



Црп. 4.1.

4. Реши ја равенката

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Со примена на формулите

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{и} \quad 2 \cos^2 2x = 1 + \cos 4x$$

дадената равенка ја сведуваме на еквивалентната равенка

$$\cos 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 3x = 0,$$

и користејќи ја формулата $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, последователно добиваме

$$\cos 3x (\cos x + \cos 3x) = 0,$$

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 0.$$

Решенијата на оваа равенка се

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad \text{каде } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Дадени се три неколинеарни точки A , B и C . Конструирај тангентен четириаголник $ABCD$.

Решение. *Анализа.* Четириаголник $ABCD$ е тангентен ако и само ако

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Нека $\overline{AB} \geq \overline{BC}$. Тогаш, $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AD} - \overline{CD} \geq 0$. Сега задачата се сведува на конструкција на триаголник ACD со познати должината на страна AC , $\angle CDA = \pi - \angle ABC$ и растојанието $\overline{AD} - \overline{CD}$. Да претпоставиме дека задачата е решена. Ја нанесуваме точката E на страната AD така што $\overline{DE} = \overline{CD}$. Тогаш триаголникот ECD е рамнокрак и

$$\angle DEC = \frac{1}{2}(\pi - \angle CDA) = \frac{1}{2}\angle ABC, \quad \angle CEA = \pi - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

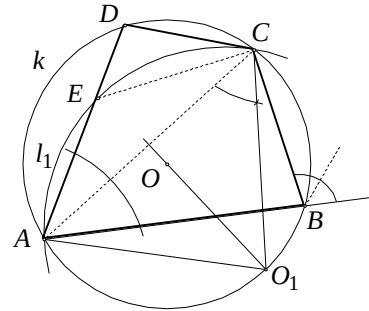
Конструкција. Прво конструираме лак l_1 кој е од спротивната страна на правата AC во однос на точката B , таков отсечката AC се гледа под агол

$$\angle CEA = \pi - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Со центар во точката A опишуваме кружница со радиус $\overline{AB} - \overline{BC}$. Пресекот на лакот l_1 и оваа кружницата е точката E . Отсечката AE ја продолжуваме до пресекот со зададената кружница, со што го добиваме темето D .

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Ако $\overline{AB} = \overline{BC}$, тогаш точката D лежи на симетралата на отсечката AC . Бидејќи $\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{CD} = \overline{AB} - \overline{BC} < \overline{AC}$, кружницата $k(A, \overline{AE})$ го сече лакот во точката E . Според тоа, задачата има единствено решение.



Црп. 4.2.

6. Даден е рамнокрак триаголник ABC , со радиуси на опишана и впишана кружница r и ρ , соодветно. Докажи дека растојанието d меѓу центрите на опишаната и впишаната кружница е

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

Решение. Ќе докажеме дека оваа формула важи за секој триаголник ABC . Нека O_1 и O се центри на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC , D е средна точка на лакот AB , кој не го содржи темето C .

Секој од аглие $\angle OAD$ и $\angle DOA$ е еднаков на половината од збирот на аглие кај темињата A и C во триаголникот ABC . Според тоа $\overline{OD} = \overline{AD}$.

Користејќи ја теоремата за степен на точка во однос на кружница за опишаната кружница и точката O добиваме

$$\overline{MO} \cdot \overline{ON} = \overline{CO} \cdot \overline{OD}.$$

Бидејќи $OE \perp AB$ и FD е дијаметар на опишаната кружница, триаголниците COE и FDA се слични, па според тоа

$$\overline{CO}:\overline{OE}=\overline{FD}:\overline{AD}.$$

од каде што добиваме

$$\overline{CO} \cdot \overline{AD} = \overline{OE} \cdot \overline{FD}.$$

Бидејќи $\overline{OD} = \overline{AD}$, добиваме

$$\overline{CO} \cdot \overline{OD} = \overline{OE} \cdot \overline{FD}.$$

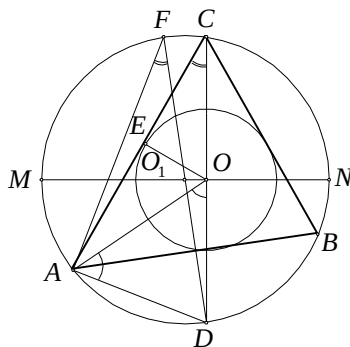
Конечно,

$$\overline{MO} \cdot \overline{ON} = \overline{OE} \cdot \overline{FD}.$$

Ако во ова равенство ставиме

$$\overline{MO} = r + d, \overline{ON} = r - d, \overline{OE} = \rho \text{ и } \overline{FD} = 2r,$$

добиваваме $r^2 - d^2 = 2r\rho$, што и требаше да докажеме.



Цр̄ѣ. 4.3.

7. Докажи дека тетраедарот $SABC$ е правилен ако и само ако постојат пет различни сфери кои ги допираат правите SA , SB , SC , AB , BC , CA .

Решение. Да забележиме дека секоја сфера која ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA ја сече секоја од рамнините на триаголниците SAB, SBC, SCA, ABC во впишаната или опишаната кружница на тој триаголник. За секоја таква сфера од четирите добиени кружници три се опишани, а една е впишана или сите четири се впишани. За да го докажеме ова ќе разгледаме два случаи.

Нека сферата σ ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC, CA , а рамнините на триаголниците SAB и SBC ги сече по впишаните кружници.

Нека K, L, M, N, P се допирните точки со рабовите SA, SB, AB, SC, BC , соодветно. Бидејќи опишаната кружница околу триаголникот има само една заедничка точка со триаголникот, сферата σ мора да ги сече рамнините на триаголниците SCA и ABC по впишаните кружници во тие триаголници. Нека Q е допирната точка на σ и AC . Од овде следува дека сите четири кружници се впишани, т.е. ако две кружници се впишани, тогаш и другите две се впишани.

Од претпоставката дека постои барем една од преостанатите три сфери, добиваме дека $\overline{SA} = \overline{AB}$, односно дека тетраедарот е правилен.

Останува да докажеме дека кај правилен тетраедар постојат сите пет сфери. Тежиштето на тетраедарот е на еднаква оддалеченост од секој негов раб, што значи дека сферата σ постои и нејзин центар е тежиштето на тетраедарот. Ако точките S, A, B, C се центри на хомотетија со коефициент 3, добиваме четири сфери кои се хомотетични слики на сферата σ . Секоја од нив ги допира правите SA, SB, SC, AB, BC и CA .