Глигор Тренчевски
Костадин Тренчевски

МАТЕМАТИКА

за осмо одделение

ПРЕДГОВОР

Наставната материја по математика за VIII одделение, во учебникот е изложена во четири теми, а секоја тема е разделена на соодветен број - поттеми, од кои, секоја претставува една заокружена целина - наставна единка.

Во првата тема - Сличност на триаголници, ќе се запознаете со уште еден вид на пресликување во рамнина. Напомнуваме, доброто совладување на оваа тема ќе ви овозможи лесно снаоѓање во решавањето на низа проблеми од практичниот живот и успешно следење на наставата по физика и другите предмети. Во оваа тема ќе се запознаете и со една од најприменуваните теореми - Питагоровата теорема. Во втората тема - Линеарна равенка, линеарна неравенка и линеарна функција ќе ги прошириме и заокружиме знаењата за тие основни и најважни поими во целата алгебра. Во наредната, трета тема ќе се запознаете и ќе решавате Системи линеарни равенки. Во четвртата тема - Геометриски тела, ќе се запознаете со заемните односи на точките, правите и рамнините во просторот. Ќе пресметувате плоштини и волумени на геометриските тела: призма, пирамида, цилиндар, конус и топка. Оваа тема е од посебно значење за просторната претстава на светот што н опкружува.

Секоја наставна единка во учебникот е придружена со неколку решени примери и кон неа се дадени доволен број задачи за вежби.

Задачите за вежби се поделени во три категории:

а) Задачи со сино крукче ●. Тоа се задачи со кои се врши увежбување на соодветните поими и барања во наставната единка.

б) Задачи со виолетово триаголниче ▲. Тоа се посложени и потешки задачи, чие решавање е проследено со соодветно упатство.

в) Задачи затворени со црвено квадратче ■. Тоа се задачи, што можат да се користат за подготовка на наредната лекција.

На крајот од секоја тема дадени се задачи за повторување и утврдување, како и задачи за самоконтрола. Секоја од задачите за самоконтрола носи по 6 бодови, кои можат да бидат поделени на еднакви делови, ако задачата е поделена на подзадачи (под а, б, в,...), а скалата за самооценување е следната: 0-22 (недоволен), 23-35 оценка 2, 36-50 оценка 3, 51-62 оценка 4 и 63-72 оценка 5.

На крајот на учебникот дадени се одговорите на сите задачи, упатства за решавање, како и целосни решенија и докази на посложените задачи. Ви препорачуваме да ги разгледате и решенијата на потешките задачи. Тоа ќе ве заинтересира и кај вас да се појави поголем и с поголем интерес кон математиката.

Авторите

Тема I

СЛИЧНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИ

А ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

I. 1. РАЗМЕР

На географските карти секогаш е напишано во кој размер е таа карта. Што практично значи тоа? Ако размерот е на пример 1 : 25 00 000, тоа значи дека ако растојанието меѓу две точки на картата е 1 cm, во природата тоа растојание е 2 500 000 cm = 25 km, а ако на картата растојанието е 2 cm, во природата тоа растојание е 2 · 25 km = 50 km. Значи размерот на картата покажува колку пати растојанијата на картата се намалени во однос на вистинските растојанија во природата. Од друга страна, пак, во учебниците по биологија може да видите слики на различни клетки во зголемена форма кои без микороскоп се невидливи. Ако сликата е зголемена на пример 20 000 пати, можеме да кажеме дека цртежот е претставен во размер 20.000 : 1.

Всушност, и во двата претходни примера се работи за однос на два броја. За дадени два броја a и b, количникот $a : b$, односно $\frac{a}{b}$ се нарекува **размер** (или **однос**) на бројот a спрема b. Бројот a се вика **прв член**, а бројот b **втор член**. Самиот количник $k = a : b$ како реален број се вика **вредност на размерот**. На пример, вредноста на размерот 7 : 4 е 1,75.

Нека е даден размерот $a : b$. Тогаш за размерот $b : a$ велиме дека е **обратен размер** на размерот $a : b$. На пример, размерот 5 : 3 е обратен размер на размерот 3 : 5.

За два размера $a : b$ и $c : d$ велиме дека **се еднакви**, ако нивните вредности се еднакви, т.е. ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, односно $ad = bc$. Така, на пример, размерите 6 : 9 и 14 : 21 се еднакви бидејќи 6 · 21 = 9 · 14 (=126). Забележуваме дека ако првиот и вториот член на размерот се помножат или поделат со ист број, вредноста на размерот останува непроменета. Така, $\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ и $\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$, па оттука $\frac{6}{9} = \frac{14}{21}$.

Честопати два или повеќе размера ги запишуваме заедно. На пример, размерите $a : b$ и $b : c$ можеме да ги запишеме како $a : b : c$. Така, на пример, ако $a : b : c = 3 : 4 : 5$, тоа означува дека ако $a = 3x$ за некое x, тогаш $b = 4x$ а $c = 5x$. Навистина, $a : b = (3x) : (4x)$=3: 4 и $b : c = (4x) : (5x)$=4: 5.

Размерите од облик $\boldsymbol{a : b : c}$ или поопшто $\boldsymbol{a_1 : a_2 : \ldots : a_n}$ се нарекуваат **продолжени размери**. Додека на обичните размери, на пример $a : b$, ние му придружуваме реален број $\frac{a}{b}$, кај продолжените размери тоа не е така. На продолжениот размер $a : b : c$ му придружуваме два реални броја $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$ но не еден реален број.

На пример нема смисла ако запишеме $a : b : c = 5$.

Задача. Размерите а) $a : b = 3 : 5$ и $b : c = 5 : 6$, б) $a : b = 3 : 5$ и $b : c = 15 : 17$, да ги запишеме како продолжен размер.

Решение. а) Продолжениот размер очигледно ќе биде $a : b : c = 3 : 5 : 6$.

б) Забележуваме дека вториот член (5) на првиот размер е различен од првиот член (15) на вториот размер. Од $a : b = 3 : 5$ добиваме дека ако $a = 3x$ тогаш $b = 5x$. Бројот x го определуваме така што $5x = 15$, од каде $x = 3$. Затоа првиот размер го запишуваме како $a : b = 9 : 15$, а за продолжениот размер добиваме $a : b : c = 9 : 15 : 17$.

Продолжениот размер не се менува ако броевите во размерот ги помножиме или поделиме со ист број. На пример, $a : b : c = 5 : 7 : 10$ е исто што и $a : b : c = 10 : 14 : 20$ или, пак, $a : b : c = 15 : 21 : 30$.

Равенството меѓу два размера $a : b$ и $c : d$ се нарекува **пропорција**. На пример пропорција е равенството $5:7=15:21$.

Секоја пропорција е составена од четири члена. Ако три члена ни се познати, четвртиот го определуваме еднозначно.

Имено, ако $a : b = x : d$, тогаш, $bx = ad$, па $x = \frac{ad}{b}$.

Овде се претпоставува дека членовите на размерот се различни од нула. Нека е дадена пропорцијата $a:b=c:d$. Со помош на броевите a, b, c и d може да се составаат уште 7 пропорции. На пример, од пропорцијата 2:3=6:9 можат да се формираат и следните пропорции: 3:2=9:6, 6:9=2:3, 9:6=3:2, 2:6=3:9, 6:2=9:3, 3:9=2:6 и 9:3=6:2.

Во наредната лекција а и лекциите што следат ќе разгледуваме размери за кои двата члена се должини на некои отсечки.

задачи

1. Напиши два размера со различни вредности.

2. Која е вредноста на x, ако вредноста на размерот $2:x$ е: а) 1, б) 2, в) $\frac{1}{4}$, г) $\frac{1}{2}$?

3. Даден е размер чија вредност е $\frac{1}{3}$. Која е вредноста на обратниот на неговиот обратен размер? Што забележуваш?

4. Упрости ги следните размери: а) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$, б) $\frac{3}{7} : \frac{2}{14}$, в) $\frac{10}{3} : \frac{2}{5}$.

5. Најди ги x и y така што да важи а) $2:3:1 = 10:x:y$, б) $1:3:2 = x:9:y$.

6. Најди ги броевите x, y и z така што $x : y : z = 2 : 1 : 4$ и $x + y + z = 21$.

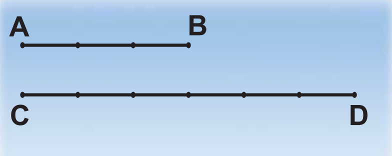
7. Најди го x од пропорцијата а) $7 : x = 49 : 35$, б) $5 : 2 = x : 3$.

8. Најди го x од пропорцијата $3 : x = x : 12$

9. Избери два еднакви размера $a : b$ и $c : d$, а потоа формирај ги сите пропорции со помош на броевите a, b, c и d.

I. 2. ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

1. На цртежот 1 дадени се две отсечки AB и CD, чии должини се $\overline{AB}=3\text{cm}$ и $\overline{CD}=6\text{cm}$. Да го одредиме количникот од должините на тие отсечки при мерна единица: а) 1 cm, б) 1 mm, в) 1 m.



Цртеж 1

Бараниот количник е соодветно : а) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{3\text{cm}}{6\text{cm}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

б) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{30\text{mm}}{60\text{mm}}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$, в) $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{0{,}03\text{m}}{0{,}06\text{m}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Забележуваме дека количникот од должините на две отсечки не зависи од изборот на мерната единица, со која се мерени.

Дефиниција 1. *Количникот* $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ *(или* $\overline{AB}:\overline{CD}$*) од должините на отсечките* AB *и* CD*, при иста мерна единица, се вика* ***размер*** *на тие отсечки.*

Значи, размерот на дадените отсечки AB и CD (црт. 1) е еднаков на $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

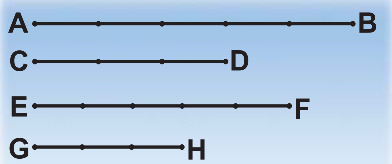
1. Дадени се отсечките: $\overline{AB}=5$ cm и $\overline{CD}=8$ cm. Одреди го нивниот размер. Дали ќе се промени размерот, ако нивните должини бидат изразени во дециметри (или во милиметри)?

Според тоа, за кои било две отсечки AB и CD, важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=k$ каде што k е некој позитивен реален број.

Наместо $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=k$ често пишуваме $\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$ и велиме отсечката AB (односно должината $\overline{AB}$) е **пропорционална** на отсечката CD (односно на должината $\overline{CD}$) со **коефициент на пропорционалност** k.

Ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=k$, тогаш $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{1}{k}$. За размерите $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ и $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ велиме дека се **реципрочни** или **обратни** еден на друг.

2. Нека се дадени сега два пара отсечки AB, CD и EF, GH (црт. 2), такви што, размерот на првите две да е еднаков со размерот на другите две отсечки, на пример: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{5}{3}$ и $\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}=\frac{5}{3}$.



Цртеж 2

Бидејќи размерите $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ и $\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ се еднакви, затоа ќе важи пропорцијата $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$.

Дефиниција 2. *Ако отсечките* AB, CD, EF *и* GH *се такви што да важи пропорцијата* $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$*, тогаш велиме дека отсечките* AB *и* EF *се соодветно пропорционални со отсечките* CD *и* GH.

Ако важи пропорцијата $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ (односно $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{EF} : \overline{GH}$), тогаш за секоја од четирите отсечки велиме дека е **четврта геометриска пропорционала** на останатите три отсечки.

2. Дадени се три отсечки: $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{CD} = 5$ cm и $\overline{EF} = 18$ cm. Одреди ја должината на отсечката GH, така што да важи пропорцијата $\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{EF} : \overline{GH}$.

Дефиниција 3. Ако отсечките AB, MN и CD се такви што да важи пропорцијата $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{CD}}$, тогаш за отсечката MN велиме дека е **средна геометриска пропорционала** на отсечките AB и CD, или **геометриска средина** на отсечките AB и CD.

На пример, геометриска средина на отсечките со должина 2 cm и 18 cm е отсечка чија должина е 6 cm, бидејќи $\sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

Дефиницијата за пропорционални отсечки може да се обопшти и за произволен број на отсечки. Имено, ако отсечките $A_1B_1, C_1D_1, ..., M_1N_1$ и $AB, CD, ..., MN$ се такви што, да важи пропорцијата $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = ... = \frac{\overline{M_1N_1}}{\overline{MN}} = k$, тогаш велиме дека отсечките $A_1B_1, C_1D_1, ..., M_1N_1$ се соодветно пропорционални на отсечките $AB, CD, ..., MN$, а бројот k се вика **коефициент на пропорционалност.**

задачи

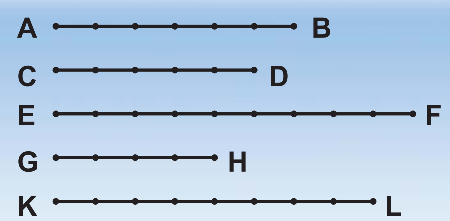
3. Познато е дека со записот $\overline{AB} = 7$ cm е зададена должината (мерата) на отсечката AB. Тука бројот 7 се вика **мерен број**, а кратенката cm - **мерна единица** или **единица должина**. Ако мерните броеви на должините на две отсечки се 7 и 10, дали може да се тврди која од нив има поголема должина?

4. Дадени се отсечките: а) $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{CD} = 2$ dm, б) $\overline{AB} = 15$ cm, $\overline{CD} = 1{,}5$ dm, в) $\overline{AB} = 0{,}2$ dm, $\overline{CD} = 5$ cm. Спореди ги нивните должини.

5. Дали ќе се промени размерот на две отсечки, ако нивните должини ги: а) зголемиш 3 пати, б) намалиш 2 пати?

6. Од точката A на правата p нанесени се едноподруго пет еднакви отсечки: AB, BC, CD, DE, EF. Одреди ги размерите: $\overline{AB} : \overline{CE}$, $\overline{AC} : \overline{AF}$, $\overline{CF} : \overline{AD}$, $\overline{BE} : \overline{CF}$, $\overline{AF} : \overline{BE}$.

7. На црт. 3 зададени се отсечките AB, CD, EF, GH и KL. Врз основа на цртежот одреди ги размерите: а) $\overline{AB} : \overline{CD}$, б) $\overline{AB} : \overline{EF}$, в) $\overline{EF} : \overline{GH}$, г) $\overline{KL} : \overline{GH}$, д) $\overline{GH} : \overline{EF}$.



Цртеж 3

8. Во еден правоаголен триаголник еден од аглите изнесува 30°. Колкав е размерот од помалата катета и хипотенузата на тој триаголник?

9. Запиши дека отсечките AB и RS се соодветно пропорционални на отсечките MN и PQ. Одреди ја должината на отсечката RS, ако: $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{MN} = 3$ cm, $\overline{PQ} = 9$ cm.

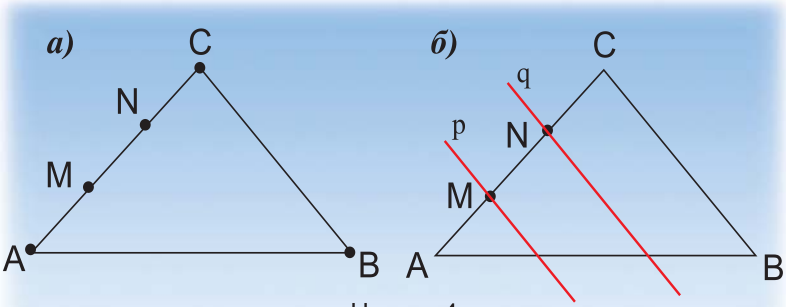
10. Испитај дали се пропорционални отсечките што се долги: а) 1,5 dm, 8 cm, 7,5 cm и 4 cm, б) 8 cm, 5 cm, 9 cm и 6 cm, в) 6 cm, 8 cm, 4 cm и 12 cm.

11. Отсечките AB и MN се соодветно пропорционални на отсечките $\overline{CD}=6$ cm и $\overline{PQ}=15$ cm со коефициент на пропорционалност $k=\frac{2}{3}$. Одреди ги должините на отсечките AB и MN.

12. Нацртај отсечка AB и подели ја на 4 еднакви дела.

I. 3. ДЕЛЕЊЕ НА ОТСЕЧКА НА ЕДНАКВИ ДЕЛОВИ

На црт. 4а даден е триаголник ABC, кај кој точките M и N ја разделуваат страната AC на три еднакви делови (отсечки). Да си поставиме задача и страната AB да ја разделиме на три еднакви делови.



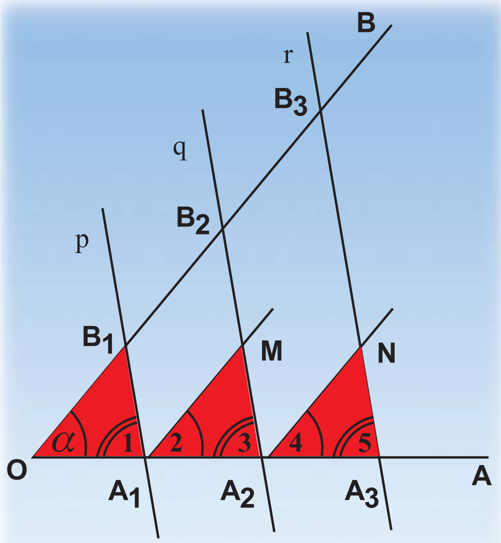
Цртеж 4

Насетуваме дека, ако низ точките M и N повлечеме прави p и q - паралелни со страната BC (црт. 4б), тогаш тие ќе ја разделат и страната AB на три еднакви делови.

Оваа постапка за поделба на дадена отсечка на еднакви делови се засновува на следната:

Теорема 1. *Ако неколку различни паралелни прави ги сечат краците на даден агол и од едниот негов крак отсекуваат еднакви отсечки, тогаш тие и од другиот крак на тој агол отсекуваат еднакви отсечки.*

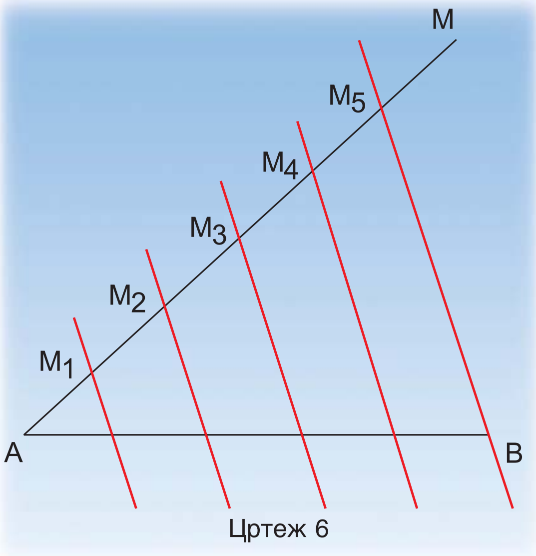
Доказ. Ќе разгледаме случај со три паралелни прави. Нека паралелните прави p, q и r ги сечат краците на аголот AOB соодветно во точките A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 и нека $\overline{OA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$ (црт. 5). Треба да докажеме дека $\overline{OB_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}$. За да го докажеме тоа, низ точките A_1 и A_2 повлекуваме две полуправи A_1M и A_2N - паралелни со кракот OB. Така ги добиваме триаголниците OA_1B_1, A_1A_2M и A_2A_3N и паралелограмите $A_1MB_2B_1$ и $A_2NB_3B_2$. Од вториот признак за складност на триаголници добиваме дека $\Delta OA_1B_1 \cong \Delta A_1A_2M \cong \Delta A_2A_3N$. Оттука следува дека $\overline{OB_1}=\overline{A_1M}=\overline{A_2N}$. Но бидејќи $\overline{A_1M}=\overline{B_1B_2}$ и $\overline{A_2N}=\overline{B_2B_3}$, па затоа добиваме дека $\overline{OB_1}=\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}$.



Цртеж 5

Задача 1. Дадена отсечка AB да се раздели на пет еднакви делови.

Решение: 1° Од точката A повлекуваме произволна полуправа AM, што не ја содржи отсечката AB.



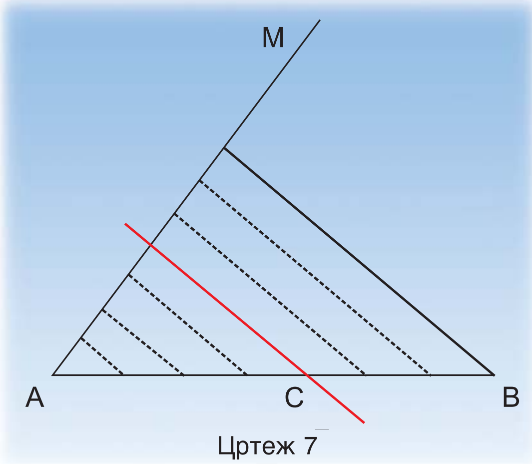
Цртеж 6

2°. На полуправата AM избираме произволна точка M_1 и отсечката AM_1 со шестар ја нанесуваме уште четири пати едноподруго на полуправата AM (црт. 6). Така на полуправата AM добиваме пет точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 такви што: $\overline{AM_1} = \overline{M_1M_2} = \overline{M_2M_3} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_4M_5}$.

3°. Точката M_5 ја соединуваме со крајната точка B на отсечката AB и низ точките M_1, M_2, M_3 и M_4 повлекуваме паралелни прави со BM_5. Тие прави ќе ја разделат дадената отсечка AB на пет еднакви делови (црт. 6).

Задача 2. Дадена е отсечка AB. Да се одреди точка C, која ја разделува отсечката AB во размер $4:3$.

Решение: На отсечката AB треба да се одреди точка C, таква што $\overline{AC}:\overline{CB} = 4:3$. За таа цел, прво, дадената отсечка ќе ја разделиме на $4+3=7$ еднакви делови (како во задача 1). Потоа на отсечката AB ќе ја издвоиме отсечката AC, која содржи 4 такви делови (црт. 7). Навистина имаме: $\overline{AC}:\overline{CB} = 4:3$.



Цртеж 7

задачи

1. Раздели ја отсечката $\overline{AB} = 10$ cm на три еднакви делови.
2. Дадената отсечка AB раздели ја на: а) 7, б) 11 еднакви делови.
3. Дадената отсечка AB раздели ја на два дела во однос $1:4$.
4. Дадена е отсечка со должина $\overline{MN} = a$. Конструирај ги отсечките AB и CD, чии должини се $\overline{AB} = \frac{3}{4}a$ и $\overline{CD} = \frac{7}{5}a$.
5. Дадена е отсечка AB со должина p. Конструирај рамностран триаголник, чиј периметар е еднаков на p.
6. Дадена е отсечка PQ со должина p. Конструирај триаголник, чиј периметар е еднаков на p, а страните да му се однесуваат како броевите $2:3:4$.
7. Дадена е отсечка $\overline{AB} = 7$cm. На нејзиното продолжение (откај точката B) одреди точка M, таква што $\overline{AM}:\overline{BM} = 5:2$.

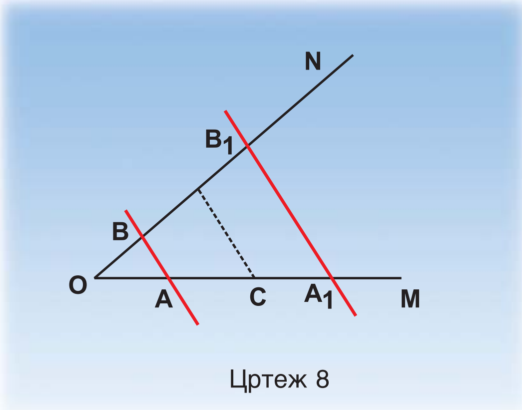
8. На отсечката AB одреди точка C, таква што да важи:
а) $\overline{AB}:\overline{BC}=5:2$, б) $\overline{AC}:\overline{AB}=4:7$.

9. Конструирај правоаголник, чиј периметар е $L=24$, а страните да му се однесуваат како броевите $5:3$.

10. Конструирај две кружници со центри во точките A и B, такви што, тие да се допираат однадвор, а радиусите да им се однесуваат како 3 : 2.

I. 4. ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

Нацртајте произволен конвексен агол MON и означете со $A \neq O$ и $B \neq O$ по една точка соодветно на краците OM и ON на тој агол. На кракот OM конструирајте точка A_1, така што $\overline{OA_1}=3\cdot\overline{OA}$. Потоа низ точката A_1 повлечете права паралелна со правата AB и нејзиниот пресек со ON означите го со B_1 (црт. 8).



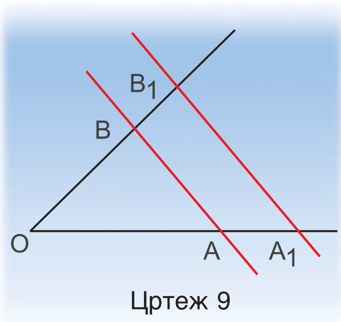
Цртеж 8

Од конструкцијата на точката A_1 имаме дека $\overline{OA_1}:\overline{OA}=3:1$. Оттука, и од $A_1B_1 \parallel AB$, а врз основа на теоремата во I.3 заклучуваме дека важи и $\overline{OB_1}:\overline{OB}=3:1$. Според тоа, важи пропорцијата $\overline{OA_1}:\overline{OA}=\overline{OB_1}:\overline{OB}$,т.е. отсечките OA, OA_1, OB и OB_1, што паралелните прави AB и A_1B_1 ги отсекуваат од краците на аголот MON се пропорционални. Тоа не наведува на мислата дека ќе важи и следното поопшто тврдење:

Теорема 1. *Ако краците на еден агол се пресечат со две различни паралелни прави, тогаш отсечките што ги отсекуваат овие прави од краците на аголот, се пропорционални меѓу себе, т.е. ако* $A_1B_1 \parallel AB$, *тогаш* $\overline{OA_1}:\overline{OA}=\overline{OB_1}:\overline{OB}$ *(црт. 9).*

Оваа теорема е позната како **Талесова теорема***.

Ако количникот $\overline{OA_1}:\overline{OA}$ е рационален број $\frac{m}{n}$, каде m и n се природни броеви, тогаш постои отсечка која m пати се содржи во отсечката OA_1, и n пати се содржи во отсечката OA. Во тој случај, доказот на Талесовата теорема следува од теорема 1 (I. 3.). Ако пак количникот $\overline{OA_1}:\overline{OA}$ не е рационален број, тогаш доказот на Талесовата теорема е покомплициран.



Цртеж 9

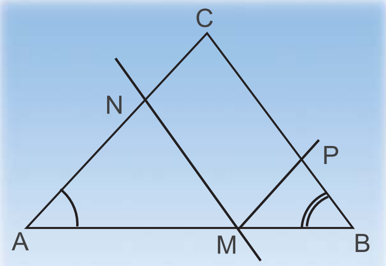
Последица 1. *Ако* $A_1B_1 \parallel AB$, *тогаш* $\overline{OA}:\overline{AA_1}=\overline{OB}:\overline{BB_1}$ *(црт. 9).*

*Талес од градот Милет е старогрчки математичар кој живеел VII - VI век пр.н.е. Според преданијата, Талес се смета за татко на грчката математика. Тој бил трговец, кој во VI век пр.н.е. патувал во Вавилон и Египет.

Доказ. Нека $A_1B_1 \parallel AB$ (црт. 9). Тогаш важи пропорцијата $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}}$, односно равенството $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} - 1 = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}} - 1$. Оттука $\frac{\overline{OA_1} - \overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB_1} - \overline{OB}}{\overline{OB}}$, или $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB}}$, односно $\frac{\overline{OA}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BB_1}}$, што требаше да се докаже.

Последица 2. *Ако една права е паралелна со една страна на даден триаголник и ги сече другите две негови страни, тогаш таа отсекува од него триаголник, чии страни се пропорционални со страните на дадениот триаголник.*

Доказ. Даден е ΔABC и $MN \parallel BC$ (црт. 10). Треба да докажеме дека



Цртеж 10

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}.$$

Гледаме, аголот BAC е пресечен со паралелни прави MN и BC, па во согласност со Талесовата теорема имаме:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}. \qquad (1)$$

Низ точката М да повлечеме права MP паралелена со страната AC на ΔABC, која ќе ја пресече страната BC во точката P (црт. 10).

Во тој случај за аголот ABC и $MP \parallel AC$, во согласност со Талесовата теорема важи:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}.$$

Но бидејќи $\overline{PC} = \overline{MN}$, затоа

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}. \qquad (2)$$

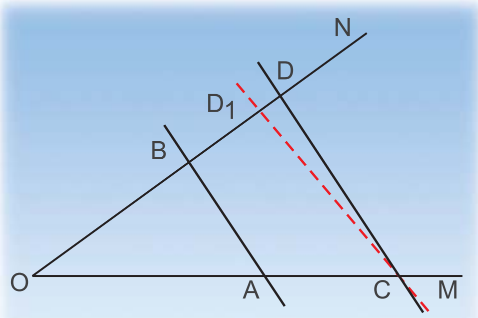
Од пропорциите (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$.

Важи и обратната теорема на Талесовата теорема:

Теорема 2. *Ако две различни прави, од краците на еден агол, отсекуваат пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни.*

Доказ*. Нека правите AB и CD ги сечат краците на аголот MON и, притоа $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD}$ (црт. 11). Треба да докажеме дека $AB \parallel CD$. Низ точката C да повлечеме права што е паралелна со првата AB и нека таа го сече другиот крак во точката D_1, т.е. нека $CD_1 \parallel AB$. Тогаш според теоремата 1, имаме: $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD_1}$.

Оттука, а во согласност со претпоставката: ($\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD_1}$), добиваме $\overline{OB} : \overline{OD_1} = \overline{OB} : \overline{OD}$. Според тоа, $\overline{OD_1} = \overline{OD}$, т.е. $D_1 \equiv D$. Значи: $AB \parallel CD$.



Цртеж 11

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

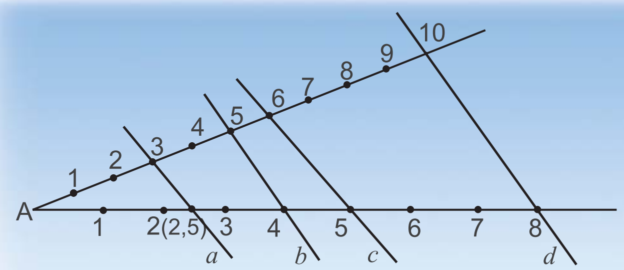
Оваа теорема ни дава уште еден начин за утврдување на паралелноста на две прави.

Последица 3. *Ако една права пресекува две страни на триаголникот и ги разделува нив на пропорционални отсечки, тогаш таа права е паралелна со третата страна на триаголникот.*

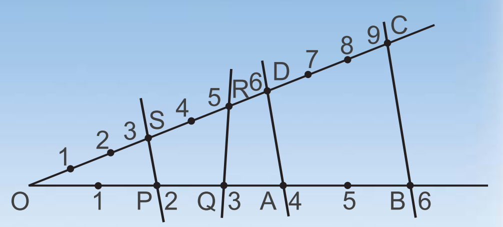
задачи

1. Краците на аголот MON се пресечени со две паралелни прави AB и CD, при што точките A и C се од едниот крак, а точките B и D од другиот крак. Одреди ја должината на отсечката OB, ако:
а) $\overline{OA}=4$ cm, $\overline{OC}=6$ cm, $\overline{OD}=8$ cm, б) $\overline{OA}=3$ cm, $\overline{AC}=4$ cm, $\overline{BD}=6$ cm.

2. Краците на аголот MON се пресечени со две прави p и q, при што на кракот OM се добиени отсечките OA и AB а на кракот ON - отсечките OC и CD. Испитај дали правите p и q се паралелни или не, ако: а) $\overline{OA}=3,2$ cm, $\overline{AB}=2$ cm, $\overline{OC}=4,8$ cm и $\overline{CD}=3$ cm,



Цртеж 12



Цртеж 13

б) $\overline{OA}:\overline{AB}=4:3$, $\overline{OC}=3,2$ cm и $\overline{CD}=2,8$ cm.

3. На црт. 12 правите a,b,c и d ги сечат краците на аголот A. а) Кои од нив се паралелни и зошто?, б) Кои од нив не се паралелни и зошто?

4. На црт. 13, краците на аголот O се пресечени со четири прави. Докажи дека а) четириаголникот $ABCD$ е трапез, б) четириаголникот $PQRS$ не е трапез.

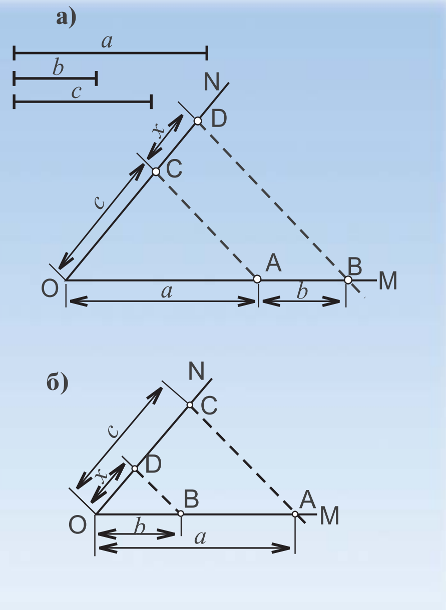
5. Нацртај агол MON и две паралелни прави p и q кои ги сечат краците. Нека p ги сече краците OM и ON во точки B и D соодветно. Најди ги сите односи меѓу отсечките $OA, OB, OC, OD, AB, CD, AC$ и BD кои се еднакви на а) $\overline{OA}:\overline{OB}$, б) $\overline{OA}:\overline{AB}$, в) $\overline{OA}:\overline{OC}$.

I. 5. ПРИМЕНА НА ТАЛЕСОВАТА ТЕОРЕМА

Талесовата теорема наоѓа широка примена во геометријата. Еве неколку примери за тоа:

Задача 1. *Дадени се три отсечки со должини a,b и c. Да се конструира нивната четврта геометриска пропорционала со должина x, така што $a:b=c:x$, односно* $x=\dfrac{bc}{a}$.

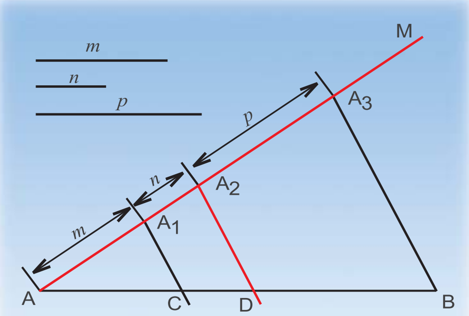
Решение. Цртаме еден произволен агол MON и од темето O по едниот негов крак ги пренесуваме отсечките $\overline{OA}=a$ и $\overline{AB}=b$, а по другиот крак ја пренесуваме отсечката $\overline{OC}=c$ (црт. 14 а). Потоа ги сврзуваме точките A и C, а низ точката B повлекуваме права паралелна со AC, која ќе го пресече кракот AN во некоја точка D. Отсечката $\overline{CD}=x$ е бараната четврта пропорционала на дадените отсечки со должини a,b,c. Навистина, таа ја задоволува пропорцијата $a:b=c:x$.



Цртеж 14

Задачата можеме да ја решиме и на друг начин, како што е покажано на цртеж 14 б). Од темето O на едниот крак ги пренесуваме отсечките $\overline{OA}=a$ и $\overline{OB}=b$, а на другиот крак ја пренесуваме отсечката $\overline{OC}=c$. Точките A и C ги поврзуваме, а низ B повлекуваме права паралелна со AC. Ако D е пресечната точка на таа права со кракот ON, тогаш $\overline{OD}=x$ е бараната четврта пропорционала. Навистина, според Талесовата теорема важи пропорцијата $a:b=c:x$.

Задача 2. *Дадена отсечка AB да се раздели на делови, што се пропорционални на отсечките m,n и p.*

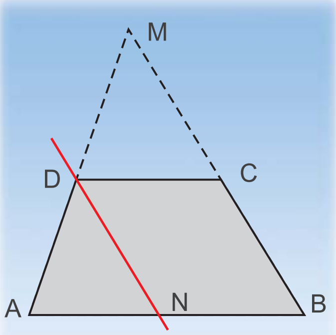


Цртеж 15

Решение. Од точката A повлекуваме полуправа AM, која со отсечката AB зафаќа некој агол. Потоа, на полуправата AM ги пренесуваме едноподруго дадените отсечки m,n и p (црт. 15). Притоа на полуправата AM ги добиваме точките A_1, A_2 и A_3. Точката A_3 ја соединуваме со B, а низ точките A_1 и A_2 повлекуваме прави паралелни со A_3B. Тие ќе ја пресечат отсечката AB во точките C и D. Во согласност соТалесовата теорема важи

$$\overline{AC}:\overline{CD}:\overline{DB}=m:n:p, \text{ односно } \frac{\overline{AC}}{m}=\frac{\overline{CD}}{n}=\frac{\overline{DB}}{p}.$$

Задача 3. *Во трапезот $ABCD$ краците AD и BC се продолжени до пресекот во точката M (црт. 16). Познати се должините на двете основи: $\overline{AB}=10\text{cm}$, $\overline{DC}=4\text{cm}$ и кракот $\overline{AD}=3\text{cm}$. Да се одреди должината на продолжението DM.*



Цртеж 16

Решение. Низ темето D повлечи права DN - паралелна со кракот BC, која ќе ја пресече долната основа AB во точката N. Во паралелограмот $NBCD$ ќе биде $\overline{NB}=\overline{DC}=4\text{cm}$, па затоа: $\overline{AN}=\overline{AB}-\overline{NB}=10-4=6(\text{cm})$.

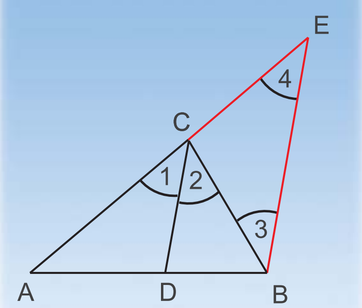
Врз основа на Талесовата теорема (краците на аголот A се пресечени со две паралелни прави DN и BM), имаме $\overline{AN}:\overline{NB}=\overline{AD}:\overline{DM}$, односно $6:4=3:\overline{DM}$, а оттука, добиваме дека $\overline{DM}=2(\text{cm})$.

Задача 4*. *Да се докаже дека: Бисектрисата на секој внатрешен агол на триаголникот ја разделува спротивната страна на делови (отсечки), што се пропорционални на страните кои го образуваат тој агол.*

Доказ. Нека CD е бисектриса на аголот C на триаголникот ABC (црт. 17). Треба да докажеме дека отсечките AD и DB се пропорционални на страните AC и CB, односно дека важи пропорцијата $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$, односно $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Низ темето B да повлечеме права - паралелна со бисектрисата CD, која ќе ја пресече правата AC во точката E (црт. 17). Притоа се добива триаголник BCE, за кој лесно се покажува дека е рамнокрак (Зошто?). Значи, $\overline{CE}=\overline{CB}$.

Врз основа на Талесовата теорема (краците на аголот A се пресечени со две паралелни прави CD и BE), имаме: $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{CE}$, но, бидејќи $\overline{CE}=\overline{CB}$, затоа ќе важи и $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{CB}$.



Цртеж 17

***За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.**

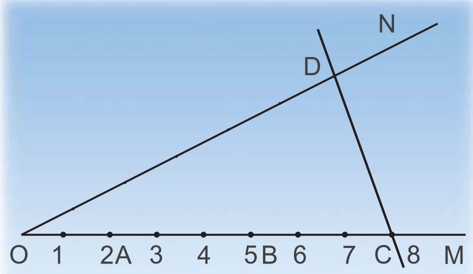
задачи

1. На едниот крак на аголот MON од темето O нанесени се едноподруго отсечките OA, AB и BC, кои се однесуваат како броевите $1:2:3$. На другиот крак е нанесена отсечката $\overline{OA_1}=4\text{cm}$, а низ точките B и C се повлечени прави BB_1 и CC_1 паралелни со AA_1. Одреди ги должините на отсечките A_1B_1 и B_1C_1.

2. Даден е триаголник ABC. Точката M ја разделува страната AC на две отсечки $\overline{AM}=6$ cm и $\overline{MC}=3$ cm. Одреди го односот на растојанијата на точките M и C од страната AB на ΔABC.

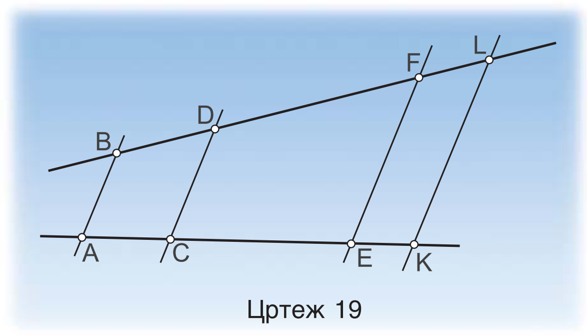
3. Во трапезот $ABCD$ краците AD и BC се продолжени до пресекот во точката M. Одреди го продолжението DM, ако: $\overline{AD}=2\text{dm}$, $\overline{BC}=1,5\text{dm}$, $\overline{CM}=1,2\text{dm}$.

4. На црт. 18, на краците на аголот MON означени се точки A, B, C и D. На кракот ON одреди ги:
а) точка R, така што $\overline{OC}:\overline{OA}=\overline{OD}:\overline{OR}$,
б) точка S, така што $\overline{OS}:\overline{OD}=2:3$.

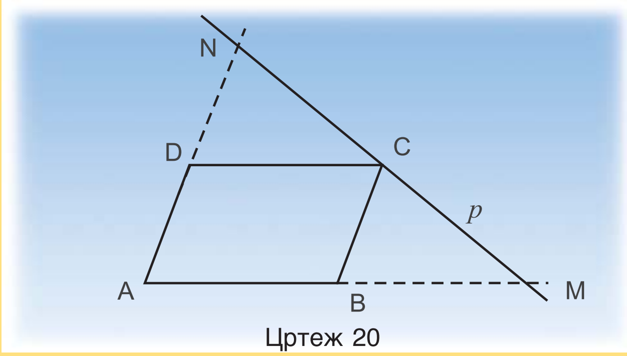


Цртеж 18

5. На црт. 19 е: $AB \parallel CD \parallel EF \parallel KL, \overline{CL} = 3$ cm, $\overline{EK} = 1$ cm, $\overline{AC} = 1,5$ cm.
Одреди ги должините на отсечките: BD, DF, FL, ако $\overline{BL} = 6,6$ cm.



Цртеж 19



Цртеж 20

6. Даден е триаголник ABC, во кој BD е бисектриса на аголот B. Одреди ги должините на отсечките AD и DC, ако страните на триаголникот се долги:
$\overline{AB} = 5$cm, $\overline{BC} = 7,5$ cm и $\overline{AC} = 10$ cm.

7. Низ темето C на паралелограмот $ABCD$ е повлечена права p, која ги сече продолженијата на страните AB и AD соодветно во точките M и N (црт. 20). Докажи дека $\overline{AB} : \overline{AM} + \overline{AD} : \overline{AN} = 1$.

8. Дадена отсечка $\overline{AB} = 9$ cm раздели ја на два дела, кои се пропорционални на отсечките $a = 2,5$ cm и $b = 4$ cm.

9. Раздели ја отсечката $\overline{MN} = 8$ cm на три делови, што се соодветно пропорционални на отсечките: $a = 1$ cm, $b = 2$ cm и $c = 3$ cm.

10. Конструирај ја четвртата геометриска пропорционала x за отсечките:
а) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm од пропорцијата $a : b = c : x$.
б) $a = 2$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$cm од пропорцијата $a : b = x : c$.

11. Дадени се три отсечки со должини a, b, c. Конструирај отсечка чија должина x е еднаква на: а) $x = \frac{ab}{c}$, б) $x = \frac{ac}{b}$, в) $x = \frac{bc}{a}$.

12. Дадена е отсечка со должина a и отсечка со единечна должина. Конструирај друга отсечка чија должина е $x = a^2$, користејќи ја пропорцијата $x : a = a : 1$.

6 СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

I. 6. СЛИЧНИ ФИГУРИ. СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

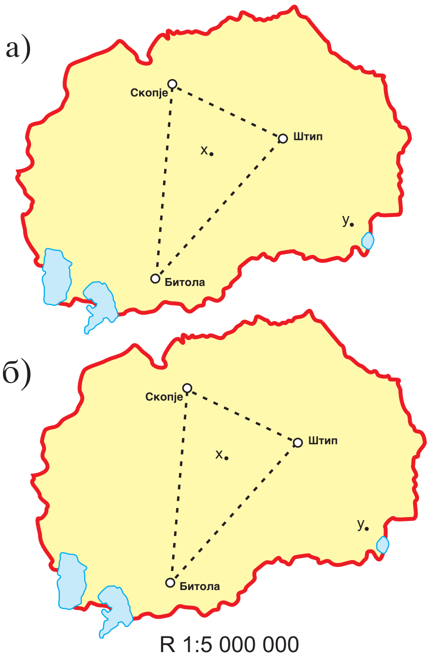
На црт. 21, дадени се две карти на Р. Македонија во ист размер $1 : 5.000.000$, а на црт. 22 и една карта во друг размер $1 : 2.500.000$.

Фигурите (картите) на кои е претставена Р. Македонија во ист размер (црт. 21 а, б) се складни фигури. Поимот складност на фигури ви е познат од VI одделение. Кај складноста на фигурите карактеристично е тоа што, за кои било две точки X и Y и нивните слики X' и Y' важи равенството $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$.

Складните фигури имаат еднаква форма и големина. Меѓутоа, во практиката многу често среќаваме предмети и фигури, кои имаат иста форма но различни големини (димензии). Такви се, на пример, плановите на иста парцела во различни размери, потоа снимките на филмската лента и нивните проекции на филмското платно, фотоснимките направени од ист негатив во различни димензии (црт. 23), итн.

а)

б)



Цртеж 22

Цртеж 21

црт. 23

Фигурите, кои имаат иста форма, се викаат **слични фигури.**

Фигурите со кои е претставена Р. Македонија на цртеж **21**а,б и цртеж **22**, исто така се слични. Да видиме што ги карактеризира сличните фигури.

Ако ги одредиме односите на растојанијата меѓу сликите на градовите: а) Скопје и Битола, б)Битола и Штип, и в) Штип и Скопје од картите на цртеж 21 и 22, ќе забележиме дека:

$$\frac{\overline{С_1Б_1}}{\overline{СБ}}=\frac{\overline{Б_1Ш_1}}{\overline{БШ}}=\frac{\overline{Ш_1С_1}}{\overline{ШС}}=2\text{, односно }\overline{С_1Б_1}=2\cdot\overline{СБ},\ \overline{Б_1Ш_1}=2\cdot\overline{БШ}\text{ и }\overline{Ш_1С_1}=2\cdot\overline{ШС}.$$

Тоа не наведува на мислата дека сличните фигури се соодветни при некое пресликување, кое го има својството: За кои било две точки X и Y и нивните слики X_1 и Y_1 при тоа пресликување важи равенството $\overline{X_1Y_1}=k\cdot\overline{XY}$, каде што k е некој позитивен реален број. Тоа пресликување се вика **сличност**, а бројот k се вика **коефициент на сличноста**.

Дефиниција 1. *Фигурата F_1 велиме дека е* ***слична*** *со фигурата F, ако постои пресликување од F на F_1, при кое за секои две различни точки X и Y од F и нивните слики X_1 и Y_1 од F_1, да важи равенството $\overline{X_1Y_1}=k\cdot\overline{XY}$, каде k е даден позитивен реален број, кој се нарекува* ***коефициент на сличност***.

1. За кои две фигури велиме дека се слични? Наведи неколку примери на слични фигури.

Ако фигурата F_1 е слична со фигурата F, тогаш пишуваме $F_1\sim F$, или $F_1\overset{k}{\sim}F$ кога сакаме да го истакнеме и коефициентот на сличност.

Од дефиницијата за слични фигури следува дека и складните фигури се слични, со коефициент на сличност $k=1$.

$\overset{k}{\sim}$

Релацијата сличност на фигури ги има својствата на:

1°. Рефлексивност: Секоја фигура е слична сама на себе (со коефициент на сличност 1), т.е. $F \overset{1}{\sim} F$.

2°. Симетричност: Ако фигурата F е слична на фигурата F_1, тогаш и фигурата F_1 е слична на фигурата F, т.е. $F \sim F_1 \Rightarrow F_1 \sim F$.

3°.Транзитивност: Ако фигурата F е слична на фигурата F_1 и фигурата F_1 е слична на фигурата F_2, тогаш фигурата F е слична на фигурата F_2 т.е.

$$(F \sim F_1, F_1 \sim F_2) \Rightarrow F \sim F_2 .$$

Општата дефиниција за сличност на две фигури се однесува и за триаголници. Меѓутоа, ако двете фигури се триаголници, дефиницијата за сличност добива попрост вид.

Дефиниција 2. *Два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ велиме дека се* ***слични***, *ако имаат соодветно еднакви агли, а соодветните страни им се пропорционални, т.е.* $\measuredangle A = \measuredangle A_1, \measuredangle B = \measuredangle B_1, \measuredangle C = \measuredangle C_1$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = k$.

Во тој случај пишуваме $\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$, *каде што* k *претставува* ***коефициент на сличноста*** *на* ΔABC *во однос на* $\Delta A_1B_1C_1$

задачи

2. Точно ли е дека: а) Секои две складни фигури се и слични, б) Постојат две нескладни фигури кои се слични, в) Секои две слични фигури се и складни, г) Не секои две слични фигури се и складни?

3. Како ќе го одредиш коефициентот на сличноста на фигурата F_1 во однос на фигурата F, ако се познати два пара соодветни точки, на пример: $A \to A_1$ и $B \to B_1$?

4. Познато е дека фигурата F_1 е слична на фигурата F_2 со коефициент на сличност $k = \dfrac{4}{5}$. Колкав е коефициентот на сличност на фигурата F_2 во однос на фигурата F_1?

5. Докажи дека ако фигурата F_1 е слична на фигурата F со коефициент на сличност k, тогаш фигурата F е слична на фигурата F_1 со коефициент на сличност $\dfrac{1}{k}$.

6. За две фигури е познато дека: $F_1 \overset{k}{\sim} F_2$ и $F_2 \overset{k}{\sim} F_1$. За која вредност на k тоа е можно?

7. Дадена е отсечка PS. Конструирај отсечка AB, што е слична на отсечката PS со коефициент на сличност: а) $k = 3$, б) $k = 2$, в) $k = 1$ г) $k = \dfrac{1}{2}$, д) $k = \dfrac{1}{4}$.

8. Како се променуваат (зголемуваат или намалуваат) растојанијата меѓу точките при сличноста со коефициент k, ако а) $k > 1$, б) $0 < k < 1$?

9. Дадени се три отсечки $\overline{AB} = 2\text{cm}, \overline{CD} = 6\text{cm}$ и $\overline{EF} = 12\text{cm}$. Одреди ги коефициентите на сличност на отсечките: а) AB и CD, б) CD и EF, в) AB и EF.

10. Точни ли се следните тврдења: а) $(F_1 \cong F_2$ и $F_2 \sim F_3) \Rightarrow F_1 \sim F_3$, б) $(F_1 \sim F_2$ и $F_2 \cong F_3) \Rightarrow F_1 \sim F_3$, в) $(F_1 \sim F_2$ и $F_2 \sim F_3) \Rightarrow F_1 \sim F_3$?

11. Одредете го воздушното растојание од Битола до Скопје користејќи ја картата на РМ во размер $1:5.000.000$ на црт. 21 б.

12. Нацртај два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ со два пара еднакви агли: $\measuredangle A = \measuredangle A'$ и $\measuredangle B = \measuredangle B'$. Провери дали тие се слични.

I. 7. ПРИЗНАЦИ ЗА СЛИЧНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

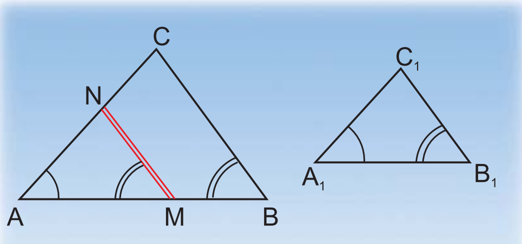
Дефиницијата за сличност на два триаголника во себевклучува споредување на сите шест основни елементи (трите агли и трите страни) на едниот триаголник со елементите на другиот триаголник. Меѓутоа постојат минимум услови, кои ако бидат исполнети, триаголниците ќе бидат слични. Тие услови се викаат **признаци за сличност на триаголниците** и важат за кои било два триаголника.

Прв признак (AA). *Два триаголника се слични, ако два агла од едниот триаголник се соодветно еднакви на два агла од другиот триаголник.*

Доказ*. Нека се дадени ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (црт. 24) и нека $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$. Треба да докажеме: $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ и $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}$, односно дека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Од $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$ следува дека и $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$. Зошто?

Нека, на пример, $\overline{AB} > \overline{A_1B_1}$ и $\overline{AC} > \overline{A_1C_1}$. Ако на страните AB и AC избереме по една точка M и N, така што $\overline{AM} = \overline{A_1B_1}$ и $\overline{AN} = \overline{A_1C_1}$, тогаш ќе добиеме триаголник AMN, кој е складен со триаголникот $A_1B_1C_1$ (во согласност со признакот за складност CAC).



Цртеж 24

Правата AB може да се земе како трансферзала на правите MN и BC, па бидејќи согласните агли $\sphericalangle M$ и $\sphericalangle B$ се еднакви (Зошто?), следува дека правите MN и BC се паралелни, т.е. $MN \parallel BC$ (црт. 24).

А според последицата 2 на Талесовата теорема,

од $MN \parallel BC$ добиваме дека $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}.$$

Значи триаголниците ABC и AMN се слични.

Бидејќи: $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ и $\Delta AMN \cong \Delta A_1B_1C_1$, затоа $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

1. Дали се слични секои два рамнострани триаголника? Зошто?

* За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

Втор признак(САС). *Два триаголника се слични, ако две страни на едниот триаголник се соодветно пропорционални на две страни од другиот триаголник и аглите, што се зафатени од нив, се еднакви, т.е.*

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}\\ \measuredangle A=\measuredangle A_1\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1.$$

Трет признак(ССС). *Два триаголника се слични, ако трите страни на едниот триаголник се пропорционални на трите страни од другиот, т.е.*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1.$$

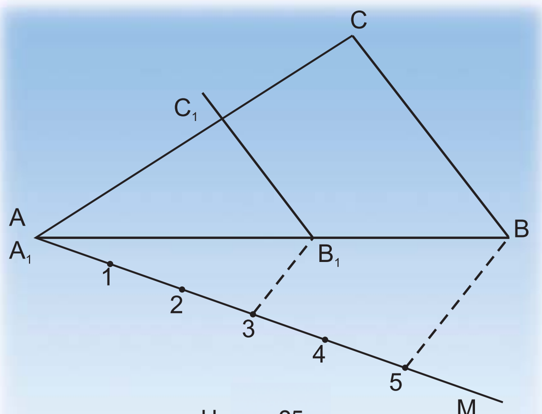
Задача. *Да се конструира триаголник* $A_1B_1C_1$ *што е сличен на даден триаголник* ABC *со коефициент на сличност* $k=\frac{3}{5}$.

Решение. Конструкцијата на бараниот триаголник $A_1B_1C_1$ е изведена на цртеж 25. Прво е конструирана страната A_1B_1 - соодветна на AB при услов $\overline{A_1B_1}=\frac{3}{5}\cdot\overline{AB}$. Образложете како е извршено тоа. Потоа низ точката B_1 е повлечена права B_1C_1 - паралелна на страната BC, која ја сече страната AC во точката C_1.

Изведената конструкција е бараната, бидејќи триаголниците $A_1B_1C_1$ и ABC имаат:

а) соодветно еднакви агли и б) соодветно пропорционални страни: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$.

Забелешка. Оваа конструкција е изведена за случај $k<1$. Постапката останува иста и кога $k>1$, само што тогаш треба да ги продолжиме страните AB и AC на дадениот триаголник ABC.



Цртеж 25

2. Еден правоаголен триаголник има еден остар агол 27°, а друг правоаголен триаголник има еден остар агол 63°. Дали се слични тие триаголници? Зошто?

задачи

3. Катетите на еден правоаголен триаголник се пропорционални со катетите на друг правоаголен триаголник. Дали се слични тие триаголници? Зошто?

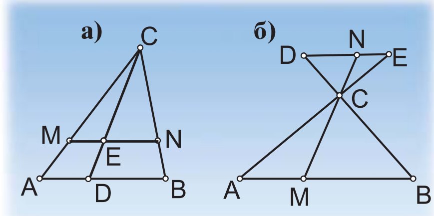
4. Формулирај ги признаците за сличност на два правоаголни триаголници.

5. Два рамнокраки триаголника имаат при врвот: а) еднакви остри агли, б) еднакви прави агли, в) еднакви тапи агли. Дали тие триаголници се слични? Зошто?

6. Основата и кракот на еден рамнокрак триаголник се пропорционални со основата и кракот на друг рамнокрак триаголник. Дали тие триаголници се слични? Зошто?

7. Формулирај ги признаците за сличност на два рамнокраки триаголника.

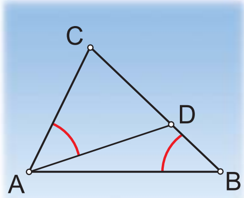
8. Испитај дали се слични два триаголника со страни:
а) $8cm,\ 9cm,\ 15cm$ и $4dm,\ 45cm,\ 7{,}5dm$,
б) $1dm,\ 15cm,\ 7cm$ и $5cm,\ 3{,}5cm,\ 7{,}5cm$,
в) $6cm,\ 9cm,\ 12cm$ и $2cm,\ 3cm,\ 5cm$.



Цртеж 26

9. Страните на еден триаголник се долги: $13cm, 10cm$ и $12cm$, а најголемата страна на нему сличен триаголник е долга $19{,}5cm$. Одреди ги должините на другите две страни на вториот триаголник.

10. Колку пара слични триаголници има на: а) црт. 26 а, каде што $MN \parallel AB$, б) црт. 26 б, каде што $ED \parallel AB$? Запиши.

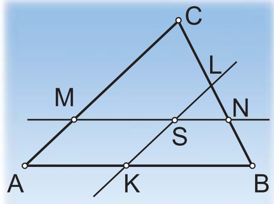


Цртеж 27

11. Во триаголникот ABC на црт. 27 е повлечена отсечка AD, така што $\measuredangle CAD = \measuredangle ABC$. Кои триаголници на тој цртеж се слични?

12. На црт. 28 нацртан е триаголник ABC и повлечени се прави $KL \parallel AC$ и $MN \parallel AB$. Одреди кои триаголници на тој цртеж се слични.

13. Нека триаголникот ABC има страни 3 cm, 4 cm и 5 cm и $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ со коефициент на сличност 3. Пресметај ги периметрите L и L_1 на двата триаголника и пресметај го количникот $L : L_1$. Што забележуваш?



Цртеж 28

I. 8. ОДНОС НА ПЕРИМЕТРИТЕ НА ДВА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИКА

Каква врска постои меѓу периметрите на два складни триаголника? Периметрите на два складни триаголника се еднакви. Зошто? Тој факт можеме да го добиеме и како специјален случај од врската меѓу периметрите на два слични триаголника. Таа врска ни ја дава следната:

Теорема 1. *Периметрите на два слични триаголника се однесуваат како нивните соодветни страни.*

Доказ. Нека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ со страни a,b,c и a_1,b_1,c_1 се слични. Треба да докажеме: $\frac{L_1}{L}=\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k$.

Од $\Delta A_1B_1C_1$ ΔABC следува дека $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k$, односно $a_1=k\cdot a,\ b_1=k\cdot b,\ c_1=k\cdot c$.

Ако ги собереме соодветните страни на овие равенства, добиваме:

$a_1+b_1+c_1=k(a+b+c), \frac{a_1+b_1+c_1}{a+b+c}=k$, односно

(бидејќи $a_1+b_1+c_1=L_1,\ a+b+c=L,\ k=\frac{a_1}{a},\ k=\frac{b_1}{b},\ k=\frac{c_1}{c}$),

$$\frac{L_1}{L}=\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k. \qquad (1)$$

Во специјален случај, кога двата триаголника се складни, од тоа што $k=1$ и од (1) следува дека $L_1=L$.

Задача. Најмалите страни на два слични триаголника се долги: 9cm и 6cm, а збирот на нивните периметри е 75cm. Да се одредат периметрите на тие триаголници.

Решение. Ако со L и L_1 ги означиме периметрите на триаголниците, тогаш во согласност со горнава теорема имаме: $\frac{L}{L_1}=\frac{9}{6}$. А врз основа на својствата на пропорциите, од $\frac{L}{L_1}=\frac{9}{6}$ добиваме: $\frac{L+L_1}{L_1}=\frac{9+6}{6}$,т.е. $\frac{75}{L_1}=\frac{15}{6}$. Оттука: $L_1=\frac{75\cdot 6}{15}=30(\text{cm})$, а $L=75-L_1=75-30=45(\text{cm})$.

Аналогна теорема на теорема 1 важи за соодветните висини, тежишните линии и бисектриси. Овде под (должина на) бисектриса ќе ја подразбираме должината на делот од бисектрисата што лежи во внатрешноста на триаголникот.

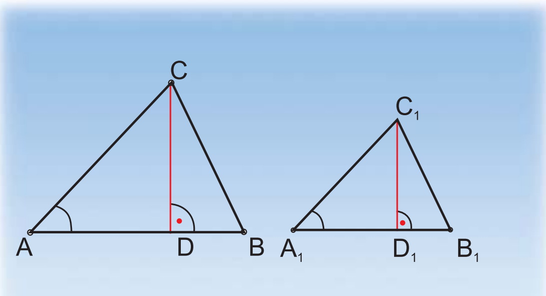
Теорема 2. *Соодветните а) висини, б) тежишни линии, в) бисектриси, на два слични триаголника* ABC *и* $A_1B_1C_1$, *се пропорционални на соодветните страни.*

Доказ. *а)* Да ги разгледаме висините CD и C_1D_1 спуштени од темињата C и C_1 (црт. 29). Тогаш $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D_1$, бидејќи и двата се правоаголни и имаат еднаков агол $\measuredangle CAD=\measuredangle C_1A_1D_1$, бидејќи $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Од овде добиваме дека

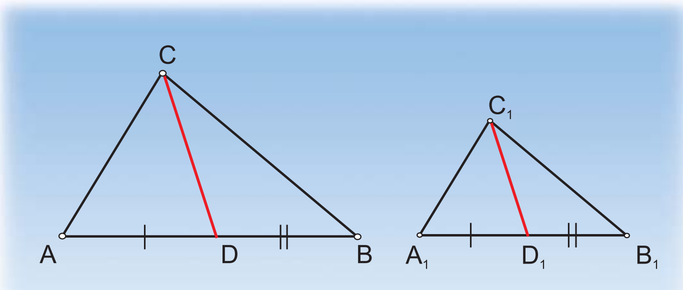
$$\overline{CD}:\overline{C_1D_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}\ .$$

б) Да ги разгледаме тежишните линии CD и C_1D_1 повлечени од темињата C и C_1 соодветно (црт. 30).

Нека $\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=k$. Но, тогаш и $\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{A_1B_1}}{\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}}$.



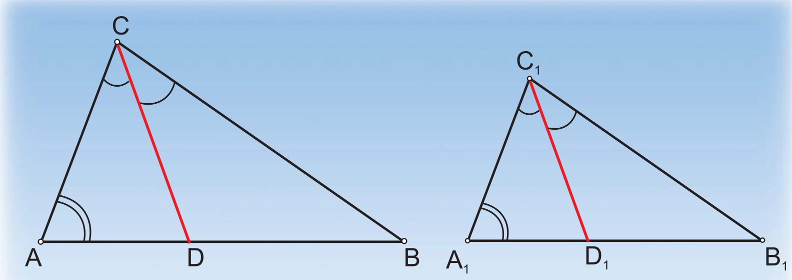
Цртеж 29



Цртеж 31

Освен тоа, $\measuredangle CAD=\measuredangle C_1A_1D_1$, па од вториот признак за сличност добиваме дека $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D_1$. Оттука пак следува дека $\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}}$.

в) Да ги разгледаме бисектрисите CD и C_1D_1 повлечени од темињата C и C_1 соодветно (црт.31).



Цртеж 30

Тогаш користејќи дека $\measuredangle ACB = \measuredangle A_1C_1B_1$ добиваме

$$\measuredangle ACD = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \frac{1}{2}\measuredangle A_1C_1B_1 = \measuredangle A_1C_1D_1.$$

Освен тоа $\measuredangle CAD = \measuredangle C_1A_1D_1$, па од првиот признак за сличност добиваме $\Delta ACD \sim \Delta A_1C_1D_1$. Оттука следува дека $\overline{CD} : \overline{C_1D_1} = \overline{AC} : \overline{A_1C_1}$.

задачи

1. Страните не еден триаголник се долги: $3\ \text{cm}, 5\ \text{cm}$ и $6\ \text{cm}$. Одреди ги должините на страните на нему сличен триаголник, чиј периметар е $3{,}5\ \text{dm}$.

2. Периметрите на два слични рамнокраки триаголника изнесуваат: $4{,}8\ \text{dm}$ и $3{,}6\ \text{dm}$. Првиот од нив има основа долга $12\ \text{cm}$. Одреди ги должините на страните на другиот триаголник.

3. Две соодветни страни на два слични триаголника се долги $5\ \text{cm}$ и $2\ \text{cm}$, а разликата на нивните периметри е еднаква на $15\ \text{cm}$. Одреди ги периметрите на тие триаголници.

4. Страните на еден триаголник се однесуваат како броевите $2:3:4$, а периметарот на нему сличен триаголник изнесува $27{,}9\ \text{cm}$. Одреди ги должините на страните на другиот триаголник.

5. Страните на еден триаголник се долги $9\ \text{cm}$, $15\ \text{cm}$ и $18\ \text{cm}$. Одреди ги должините на страните на друг триаголник, што е сличен на дадениот, ако неговиот периметар е еднаков на $\frac{2}{3}$ од периметарот на дадениот триаголник.

6. Нека ABC и $A_1B_1C_1$ се два слични триаголника при што нивните периметри се однесуваат како $2:3$. Колкав е односот на збирот од должините на тежишните линии за двата триаголника?

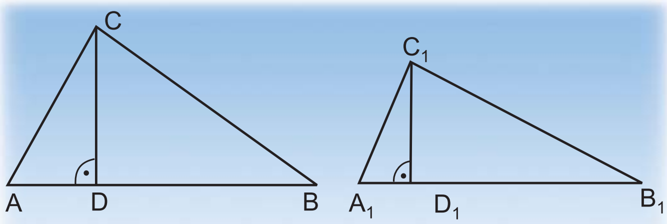
7. Нека ABC и $A_1B_1C_1$ се два правоаголни слични триаголника. Докажи дека радиусите на опишаните кружници се однесуваат како соодветните страни. Дали ова тврдење важи и во случај кога триаголниците не се правоаголни?

8. Користејќи дека $ah_a = bh_b = ch_c = 2P$, докажи дека триаголникот со страни h_b, h_a и $\frac{h_ah_b}{h_c}$ е сличен со триаголникот со страни a, b и c.

I.9. ОДНОС НА ПЛОШТИНИТЕ НА ДВА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИКА

Во претходната наставна единица видовме дека односот на периметрите на два слични триаголника е ист со односот на соодветните страни. Всушност ова важи за должински елементи во триаголникот. Имено, такви се, на пример, висините, тежишните линии, бисектрисите, како и радиусите на впишаната и опишаната кружница. Следната теорема покажува дека за односот на плоштините на два слични триаголника важи друго правило. Тоа е и природно да се очекува бидејќи единицата мерка за плоштина не е иста со единицата мерка за должина.

Теорема 1. *Односот на плоштините на два слични триаголника е еднаков на квадратот на односот на соодветните страни, односно на квадратот на коефициентот на сличност.*



Цртеж 32

Доказ. Нека $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (црт. 32). Нека C_1D_1 и CD се соодветните висини спуштени од темињата C_1 и C соодветно. Со P_1 да ја означиме плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, а со P да ја означиме плоштината на триаголникот ABC.

Тогаш $P_1 = \frac{1}{2}\cdot\overline{A_1B_1}\cdot\overline{C_1D_1}$ и $P = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$. Според тоа:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{A_1B_1}\cdot\overline{C_1D_1}}{\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}.$$

Но во слични триаголници односот на соодветните висини е еднаков на односот на соодветните страни, т.е. $\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = k$. Затоа, $\frac{P_1}{P} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}\right)^2 = k^2$, и со тоа теоремата е докажана.

Задача. Едно вештачко езеро има форма на триаголник. Плоштината на езерото на географска карта во размер $1:100.000$ изнесува $2{,}5\ \text{cm}^2$. Колкава е плоштината на езерото?

Решение. Ако со P ја означиме плоштината на езерото, тогаш според претходната теорема важи $\frac{2{,}5\text{cm}^2}{P} = \left(\frac{1}{100.000}\right)^2$, $P = 2{,}5\text{cm}^2\cdot 100.000^2$,

$$P = 2{,}5\cdot(100.000\ \text{cm})^2 = 2{,}5\cdot(1\ \text{km})^2 = 2{,}5\ \text{km}^2.$$

Забелешка. Ако езерото нема форма на триаголник, квадрат или слично, тогаш неговата плоштина можеме да ја измериме на следниот начин. Географската карта со езерото ја покриваме со проѕирна милиметарска хартија (хратија поделена на квадратчиња со димензија 1mm x 1mm). Броиме колку мали квадратчиња со страна 1 mm се „под вода" и на тој начин приближно ја наоѓаме плоштината на езерото на географската карта. За наоѓање на плоштината на езерото постапуваме како во претходната задача. Така и самите можете да ја определите плоштината на некои од нашите езера.

задачи

1. Плоштините на два триаголника се однесуваат како $9:25$. Ако најмалата страна на помалиот триаголник е долга 4 cm, најди ја најмалата страна на поголемиот триаголник.

2. Нека периметрите на два слични триаголника се однесуваат како 7 : 3. Пресметај како се однесуваат соодветните плоштини.

3. Користејќи ја формулата $r=\frac{P}{s}$ за определување на радиус на впишана кружница во триаголник, покажи дека радиусите на впишаните кружници на два слични триаголника се однесуваат како и соодветните страни на тие два триаголника. Притоа можеш да ја користиш теорема 1 од I. 8. и теорема 1 од I. 9.

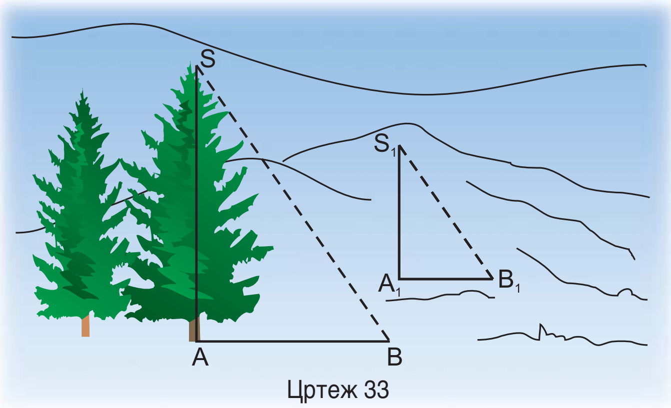
4. Познато е дека за радиусот на опишаната кружница R околу триаголник важи формулата $R=\frac{abc}{4P}$, каде a, b и c се страните, а P плоштината на триаголникот. Користејќи ја оваа формула, покажи дека радиусите на опишаните кружници на два слични триаголника се однесуваат како и соодветните страни на тие два триаголника. Притоа можеш да ја користиш теорема 1 од I. 8. и теорема 1 од I. 9.

5. Користејќи ја Хероновата формула $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ обиди се да најдеш нов доказ на теорема 1 за плоштините на слични триаголници.

I. 10. ПРИМЕНА НА СЛИЧНОСТА НА ТРИАГОЛНИЦИ

Својствата на сличните триаголници наоѓаат многу широка и разновидна примена, не само во задачите за пресметување, задачите за докажување, конструктивните задачи, туку и во практиката. На неколку примери ќе ја покажеме нејзината примена.

Задача 1. Да се одреди висината на едно дрво според должината на неговата сенка (црт. 33).



Цртеж 33

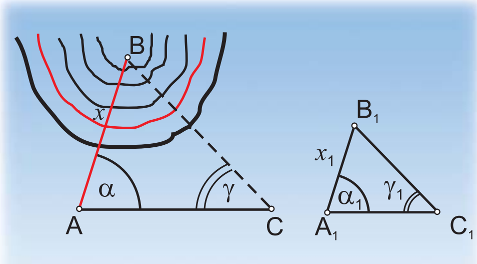
Решение. Дрвото, чија висина AS сакаме да ја одредиме, во еден момент нека фрла сенка долга $\overline{AB}=6{,}3\text{m}$. Земаме летва долга 2m и ја поставуваме да стои нормално кон земјината површина. Летвата A_1S_1, исто така, фрла сенка, која во истиот момент нека изнесува, на пример $\overline{A_1B_1}=1{,}4\text{m}$.

Правите SB и S_1B_1 на цртеж 33 ни ги претставуваат сончевите зраци што поминуваат низ врвните точки S и S_1 на дрвото и летвата.

Бидејќи сончевите зраци се паралелни и во ист момент тие паѓаат под ист агол кон земјината површина, затоа правоаголните триаголници ABS и $A_1B_1S_1$ ќе имаат соодветно еднакви агли. Според тоа, тие се слични, па ќе важи пропорцијата $\frac{\overline{AS}}{\overline{A_1S_1}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}$, од каде добиваме: $\frac{\overline{AS}}{2}=\frac{6,3}{1,4}$, односно $\overline{AS}=2\cdot\frac{6,3}{1,4}=9$. Значи, дрвото е високо 9m.

Задача 2. *Да се одреди растојанието меѓу точките A и B, од кои точката B е недостапна, на пример, таа нека се наоѓа на некое островче (цртеж 34).*

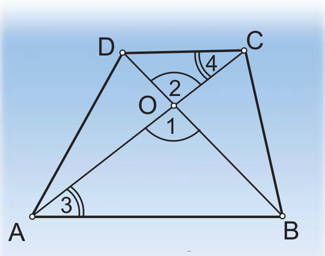
Решение. Прво, од точката A ќе ја трасираме и ќе ја измериме должината на една произволна отсечка AC, а потоа со помош на полски агломер ќе ги измериме аглите α и γ. На пример, нека при тоа најдеме дека $\overline{AC}=150\text{m}, \alpha=73°$ и $\gamma=48°$. Кога е тоа готово, на лист хартија го цртаме триаголникот $A_1B_1C_1$ во размер $1:1000$, кој е сличен со триаголникот ABC во природата, па ќе имаме: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}=1000$, односно $\overline{AB}=1000\cdot\overline{A_1B_1}$. Според тоа, ако од цртежот ја измериме должината на отсечката A_1B_1 и нејзиниот мерен број го помножиме со коефициентот на сличноста - 1000, ќе го добиеме бараното растојание $\overline{AB}$.



Цртеж 34

Ако $\overline{A_1B_1}=13\text{cm}$, тогаш $\overline{AB}=1000\cdot13=13000\text{cm}=130\text{m}$. Значи, растојанието меѓу точките A и B е 130m.

Задача 3. *Да се докаже дека пресекот на дијагоналите на трапезот ги дели истите на делови што се пропорционални на основите на трапезот.*



Цртеж 35

Доказ. Нека е даден трапез $ABCD$, чии дијагонали се сечат во точката O (црт. 35). Да ги разгледаме триаголниците ABO и CDO. Бидејќи $\measuredangle1=\measuredangle2$ и $\measuredangle3=\measuredangle4$ (Зошто?), затоа тие се слични. Соодветните страни на триаголниците ABO и CDO, односно страните што лежат наспроти еднаквите агли во нив се:

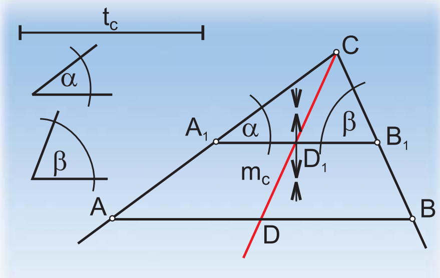
AB и CD, BO и OD, AO и OC.

Според тоа, од $\Delta ABO\sim\Delta CDO$ следува дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}$, што треба да се докаже.

Задача 4. *Да се конструира триаголник ABC, ако се дадени тежишната линија t_c и аглите α и β.*

Решение. Анализа. Бараниот триаголник ABC е сличен со секој триаголник со дадените агли α и β.

Затоа целисходно е прво да конструираме некој сличен триаголник A_1B_1C на бараниот со произволна основа A_1B_1 и дадените агли на неа (црт. 36).



Цртеж 36

Прво ја конструираме тежишната линија CD_1 на тој триаголник. Гледаме, таа не е складна со дадената тежишна линија t_c. Но, ако на полуправата CD_1, ја нанесеме отсечката $\overline{CD} = t_c$ и низ точката D повлечеме права AB паралелна со A_1B_1, ќе го добиеме бараниот триаголник ABC.

Конструкцијата произлегува од направената анализа на задачата.

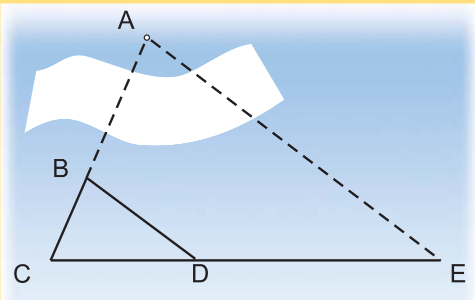
Доказ. Триаголникот ABC ги содржи сите дадени елементи по големина и положба, па според тоа тој е решение на задачата.

Дискусија. Задачата има само едно решение ако $\alpha + \beta < 180°$.

При решавањето на оваа задача се послуживме со помошниот триаголник A_1B_1C, кој е сличен со бараниот триаголник ABC. Затоа овој метод при решавање на конструктивните задачи се вика **метод на слични фигури**.

задачи

1. Одреди го растојанието меѓу точките A и B што се наоѓаат на спротивните брегови на една река (црт. 37), ако е $BD \parallel AE$, $\overline{BC} = 10\text{m}$, $\overline{CD} = 14\text{m}$, $\overline{DE} = 42\text{m}$.



Цртеж 37

2. Краткиот крак на една рампа е долг 1m, а долгиот крак 6m. Колку високо ќе се издигне крајот на долгиот крак, ако крајот на краткиот крак се спушти за 0,5 m.

3. На географската карта растојанијата меѓу три точки се: 9cm, 10cm и 12cm. Најголемото од тие растојанија во природата е 30km. Одреди ги другите две растојанија во природата и размерот на картата.

4. Во трапезот $ABCD(AB \parallel CD)$, O е пресек на дијагоналите. Одреди ги должините на отсечките BO и OD, ако $\overline{AO} = 5\text{cm}, \overline{OC} = 4\text{cm}$, и $\overline{BD} = 13,5\text{cm}$.

5. Основите на трапезот се долги 13cm и 24cm. Одреди ја висината на трапезот, ако продолженијата на краците се сечат на растојание 9cm од горната основа.

6. Докажи дека трите средни линии на еден триаголник образуваат триаголник сличен со дадениот.

7. Докажи: Ако две тетиви на кружницата се сечат, тогаш производот од должините на деловите на едната тетива е еднаков со прозиводот од должините на деловите на другата тетива.

8. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа $a = 4\text{cm}$ и соодветна висина $h = 5\text{cm}$. Конструирај сличен триаголник $A_1B_1C_1$ со соодветна висина $h_1 = 7\text{cm}$.

9. Конструирај рамностран триаголник со примена на сличноста, ако е дадена неговата висина.

10. Да се конструира триаголник сличен со даден триаголник ABC, ако е дадена една негова: а) висина, б) тежишна линија.

11. Низ точката S што лежи надвор од кружницата k минуваат прави a и b, кои ја сечат кружницата k соодвето во точките A, B и C, D. Докажи дека важи равенството $\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}\cdot\overline{SD}$.

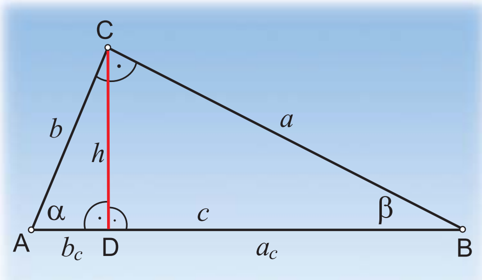
12. Во правоаголниот триаголник $ABC(\measuredangle C=90°)$ повлечена е висината CD од темето на правиот агол кон хипотенузата. Колку и кои парови слични триаголници се образувани на цртежот?

В ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

I. 11. СЛИЧНОСТ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК (ЕВКЛИДОВИ ТЕОРЕМИ)

Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C со катети $\overline{AC}=b, \overline{BC}=a$ и хипотенуза $\overline{AB}=c$ (црт. 38).

Да ја повлечеме висината $\overline{CD}=h$ на триаголникот од темето на правиот агол кон хипотенузата. При тоа отсечките $\overline{AD}=b_c$ и $\overline{BD}=a_c$ претставуваат проекции на катетите b и a врз хипотенузата c. Висината CD го разделува дадениот правоаголен триаголник ABC на други два правоаголни триаголника ACD и BCD, од кои секој е сличен со дадениот т.е.



Цртеж 38

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (аголот α им е заеднички),

$\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (аголот β им е заеднички).

Од нивната сличност следуваат пропорциите: $\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}$ и $\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}$, односно равенствата:

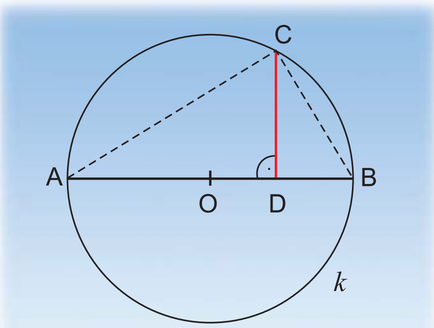
$$\boldsymbol{b^2=b_c\cdot c} \text{ и } \boldsymbol{a^2=a_c\cdot c}. \qquad (1)$$

Според тоа важи следната теорема.

Теорема 1. *Секоја катета во правоаголниот триаголник е геометриска средина меѓу нејзината проекција врз хипотенузата и самата хипотенуза.*

Од $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ и $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ следува дека и $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

Навистина, $\measuredangle CAD = \measuredangle DCB$ - како агли со заемно нормални краци (црт. 38).



Цртеж 39

Од сличноста на триаголниците ACD и CBD следува дека: $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$ т.е. $\overline{CD}^2=\overline{AD}\cdot\overline{DB}$ односно

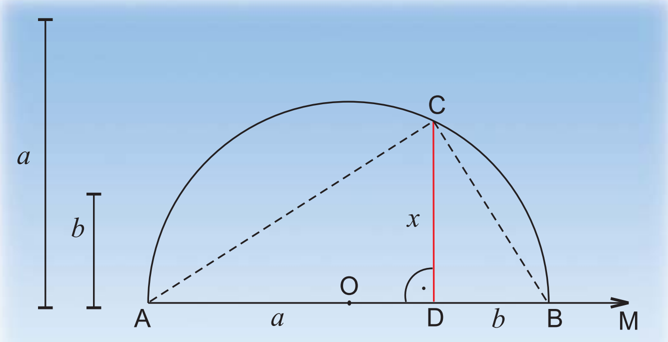
$$\boldsymbol{h^2=a_c\cdot b_c}. \qquad (2)$$

Според тоа, важи следнава:

Теорема 2. *Висината h во правоаголниот триаголник, што е повлечена кон хипотенузата, е геометриска средина меѓу проекциите a_c и b_c од катетите врз хипотенузата.*

Од неа следува следнава важна:

Последица. ***Нормалата, што е повлечена од која било точка на кружницата кон еден нејзин дијаметар, е геометриска средина меѓу отсечките на кои таа го разделува дијаметарот.***



Цртеж 40

Доказ. Нека е дадена кружница $k, C \in k, AB$ - дијаметар и $CD \perp AB$ (црт. 39). Ако точката C ја соединиме со крајните точки на дијаметарот AB, ќе го добиеме триаголникот ABC во кој $\measuredangle C = 90°$ (Зошто?).

Во тој триаголник нормалата CD е висина, повлечена кон хипотенузата AB, па според теоремата ќе биде $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

Задача. Да се конструира отсечка со должина x која е геометриска средина на две отсечки со должини a и b.

На полуправата AM со почеток во A ја нанесуваме отсечката $\overline{AD} = a$, а потоа со почеток во D ја нанесуваме и отсечката $\overline{DB} = b$ (црт. 40). Конструираме полукружница со дијаметар $a+b$ над AB, а од точката D издигнуваме нормала на отсечката AB. Нека C е пресечната точка на полукружницата со нормалата. Тогаш, отсечката CD ќе ја има бараната должина $x = \sqrt{ab}$, врз основа на горната последица.

задачи

При решавањето на следниве задачи, елементите на правоаголниот триаголник ќе ги означуваме: со a и b катетите, со c - хипотенузата, со h-висината кон хипотенузата, а со a_c и b_c - проекциите на катетите a и b врз хипотенузата c.

1. Дадено е: $a = 5\text{cm}$ и $c = 13\text{cm}$. Да се одредат: b, a_c, b_c и h.
2. Дадено е: $b = 6\text{cm}$ и $b_c = 3,6\text{cm}$. Да се одредат: a, c, a_c и h.
3. Дадено е: $b_c = 6\text{cm}$ и $h = 9\text{cm}$. Да се одредат: a, b, c и a_c.

4. Дадено е: $a_c = 6\text{cm}$ и $b_c = 18\text{cm}$. Да се одредат a, b, c и h.

5. Одреди ги должините на страните на правоаголен триаголник, ако $c = 10{,}25\text{cm}$ и $a_c = 4\text{cm}$.

6. Една од катетите на правоаголен триаголник е долга $3\ \text{cm}$, а нејзината проекција врз хипотенузата е долга $1{,}8\ \text{cm}$. Одреди го периметарот на тој триаголник.

7. Докажете дека, за секој правоаголен триаголник важи: а) $h = \frac{ab}{c}$, б) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

8. Да се конструира правоаголен триаголник, ако се дадени a_c и b_c.

9. Конструирај геометриска средина на две отсечки со должини а) $4\ \text{cm}$ и $6\ \text{cm}$, б) $5\ \text{cm}$ и $7\ \text{cm}$.

10. Нацртај произволен правоаголник, а потоа конструирај квадрат кој ќе има иста плоштина како правоаголникот.

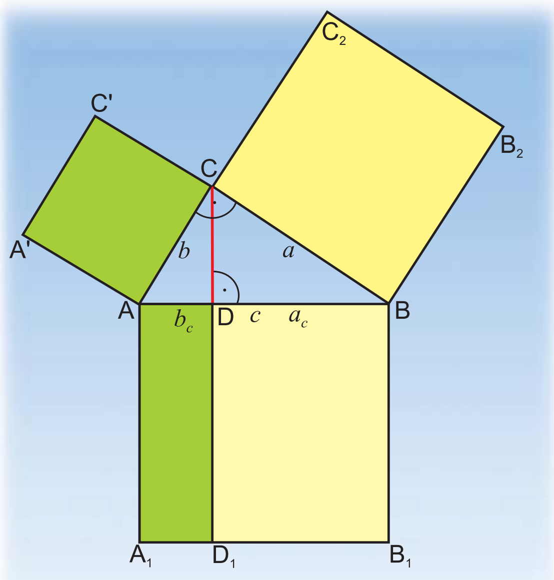
11. Конструирај отсечка со должина x, ако е: а) $x = \sqrt{2ab}$, б) $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, в) $x = \sqrt{a(b+c)}$, г) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ каде a, b и c се дадени должини и $a > b$.

12. Пресметај ја хипотенузата на правоаголен триаголник ако неговите катети се: а) $a = 5\text{cm}, b = 12\text{cm}$ и б) $a = 3\text{cm}, b = 4\text{cm}$.

I. 12. ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

Една од најважните и најприменувани теореми во геометријата е Питогоровата теорема*.

Питагорова теорема: *Плоштината на квадратот над хипотенузата кај секој правоаголен триаголник е еднаква на збирот од плоштините на квадратите над катетите.*



Цртеж 41

Доказ. Според Евклидовата теорема 1 (црт. 38) знаеме дека

$$b^2 = b_c \cdot c \text{ и } a^2 = a_c \cdot c. \qquad 1)$$

Ако ги собереме соодветните леви и десни страни на равенството (1) добиваме

$$a^2 + b^2 = a_c \cdot c + b_c \cdot c = (a_c + b_c)c.$$

Но бидејќи $a_c + b_c = c$, затоа важи

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2} \qquad (2)$$

со што теоремата е докажана.

Геометриската интерпретација на овој доказ е следната.

* Питагора - голем старогрчки математичар и филозоф, кој живеел во VI век пр.н.е.

Ако CD е висината спуштена од темето C на правиот агол (црт. 41), тогаш оваа права го разделува квадратот ABB_1A_1 над хипотенузата AB на два правоаголника: ADD_1A_1 и BDD_1B_1. Според Евклидовата теорема имаме

$$P_{ADD_1A_1} = b_c \cdot c = b^2 = P_{ACC'A'} \text{ и } P_{BDD_1B_1} = a_c \cdot c = a^2 = P_{BCC_2B_2}.$$

Со собирање на овие равенства го добиваме доказот.

Дека триаголникот со страни 3, 4 и 5 е правоаголен знаеле уште старите Египќани. На Египќаните им бил познат и односот на броевите $3^2 + 4^2 = 5^2$. Затоа правоаголниот триаголник со страни 3, 4 и 5 се вика **египетски триаголник**. Триаголникот, пак, со страни 5, 12 и 13 кој, исто така, е правоаголен, бил познат на старите Индијци. Тој триаголник го викаме уште и **индиски триаголник**.

За својството на египетскиот и индискиот триаголник знаеле уште старите источни народи околу 20 века пр.н.е. Веројатно е дека Питагора, кој патувал во Египет и Индија, ги пренел во Грција математичките знаења на тие народи од тоа време. Се претпоставува дека доказот на теоремата е даден од Питагора во неговата школа.

Својството на египетскиот и индискиот триаголник можеме да го користиме и за трасирање на прав агол, како што тоа го правеле и старите Египќани. Да земеме едно јаже долго 12 dm и на него да го означиме секој дециметар со некој белег, на пример, со врзан конец! Ако така поделеното јаже го прицврстиме на рамен терен (или на подот) во третиот и седмиот поделок од него, а неговите краишта ги соединиме, тогаш аголот помеѓу страните 3 dm и 4 dm е прав.

Од равенството (2) следува:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ и } b^2 = c^2 - a^2. \qquad (3)$$

Според тоа: *Плоштината на квадратот над едната катета во секој правоаголен триаголник е еднаква на разликата од плоштините на квадратот над хипотенузата и квадратот над другата катета.*

Ако земеме предвид дека од дадената плоштина на квадратот, должината на неговата страна е еднаква на квадратниот корен од плоштината, тогаш од равенствата (2) и (3) добиваме:

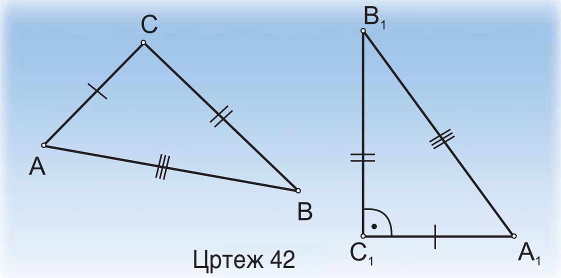
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ и } b = \sqrt{c^2 - a^2}. \qquad (4)$$

Со помош на формулите (4) лесно може да се одреди должината на која и да е страна на правоаголниот триаголник, кога се дадени должините на другите две негови страни.

За Питагоровата теорема важи и нејзината

Обратна теорема: *Ако квадратот над најголемата страна на еден триаголник е еднаков на збирот од квадартите над другите две страни, тогаш тој триаголник е правоаголен.*

Доказ*: Нека за триаголникот ABC важи равенството $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (црт. 42). Да конструираме правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$ ($\measuredangle C_1 = 90°$) со катети $\overline{A_1C_1} = \overline{AC}$ и $\overline{B_1C_1} = \overline{BC}$.



Цртеж 42

* За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

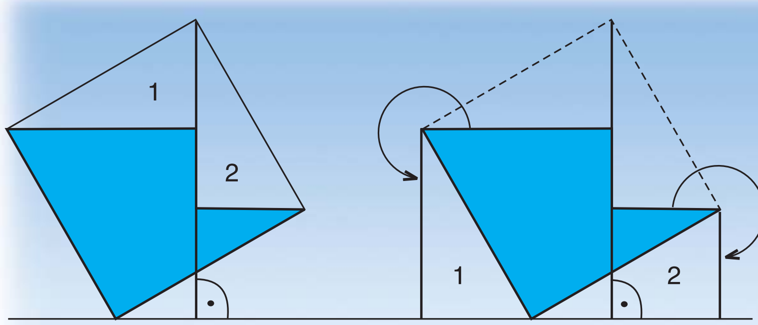
Врз основа на Питагоровата теорема за триаголникот $A_1B_1C_1$ имаме:
$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1C_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ т.е. $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$.

Според тоа, конструираниот правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$ е складен на дадениот триаголник ABC (во согласност со признакот за складност CCC), а оттука следува дека и триаголникот ABC е правоаголен. Со тоа теоремата е докажана.

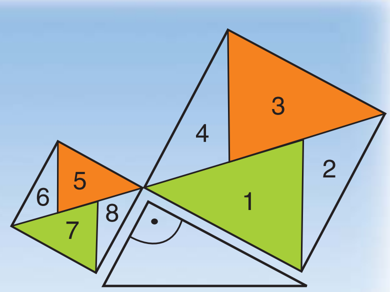
задачи

1. Користејќи се со црт. 43 докажи ја Питагоровата теорема во општ случај!

2. Разгледај го црт. 44, нацртај, ист таков, изрежи ги означените делови од двата квадрата и од нив пробај да составиш еден нов квадрат со страна еднаква на хипотенузата на правоаголниот триаголник.

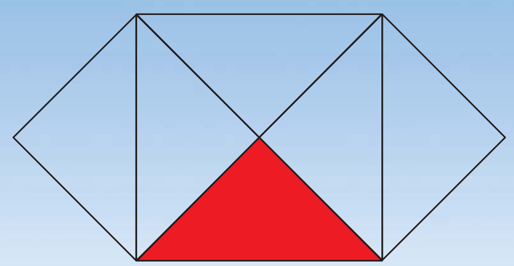


Цртеж 43



Цртеж 44

3. Кај Индијците најден е црт. 45. Што покажува тој цртеж? Дали тој е во врска со Питагоровата теорема?


Цртеж 45

4. Дали можат должините на страните на правоаголниот триаголник да ги имаат следните мерни броеви, изразени со исти должински единици: а) 15 , 36, 39, б) 7, 12, 15, в) 13, 20, 25, г) 9, 12, 15?

5. Одреди ја хипотенузата (c) на правоаголен триаголник, ако се познати неговите катети:

а) $a=5$ cm, $b=12$ cm, б) $a=7$ cm, $b=9$ cm,

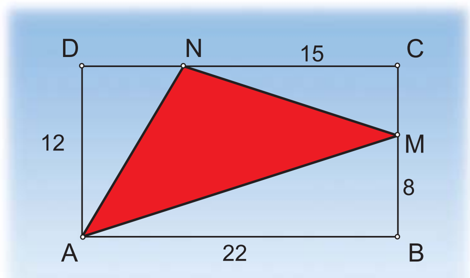
в) $a=8$ cm, $b=15$cm, г) $a=15,8$ m, $b=24,2$ m.

6. Пресметај ја едната катета, кога е позната другата катета и хиптенузата на правоаголниот триаголник: а) $a=14$ cm, $c=18$ cm,

б) $a=24$ m, $c=26$ m, в) $b=3,3$ cm, $c=6,5$ cm, г) $b=8,5$ m, $c=12$ m.

7. Пресметај го периметарот и плоштината на правоаголен триаголник, ако се познати хипотенузата и едната катета: а) $c=65$ cm, $a=48$ cm, б) $c=28$ cm, $b=20$ cm, в) $c=17$ m, $b=12,3$ m.

8. Пресметај го периметарот на еден правоаголен триаголник, ако е позната неговата плоштина $P=54$ cm^2 и една негова катета 12 cm.



Цртеж 46

9. Пресметај го периметарот и плоштината на шрафираниот дел од правоаголникот $ABCD$ (црт.46). Димензиите се дадени во сантиметри.

10. Скала долга $6,5$ m е потпрена на ѕид. До која висина таа го допира ѕидот, ако долниот нејзин крај е на растојание од 4 m од ѕидот?

11. Една од катетите на правоаголен триаголник е долга 3 cm, а нејзината проекција врз хипотенузата е долга $1,8$ cm. Одреди го периметарот на тој триаголник.

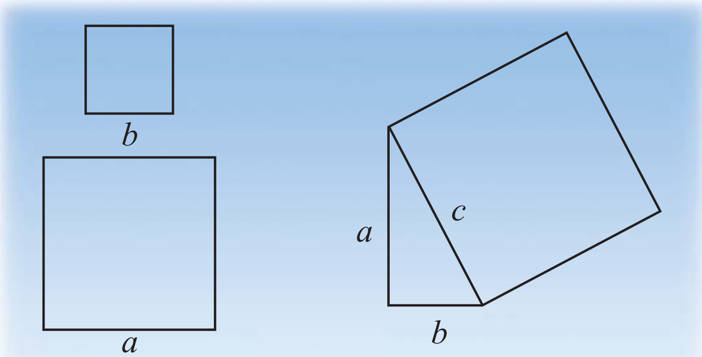
12. Катета што лежи спроти агол од 30^{0} е долга b cm. Одреди го периметарот на тој триаголник!

I. 13. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА ВО КОНСТРУКТИВНИТЕ ЗАДАЧИ

Со примена на Питагоровата теорема можат да се решат некои конструктивни задачи:

Задача 1. *Да се конструира квадрат, чија плоштина е еднаква на збирот од плоштините на два дадени квадрата.*

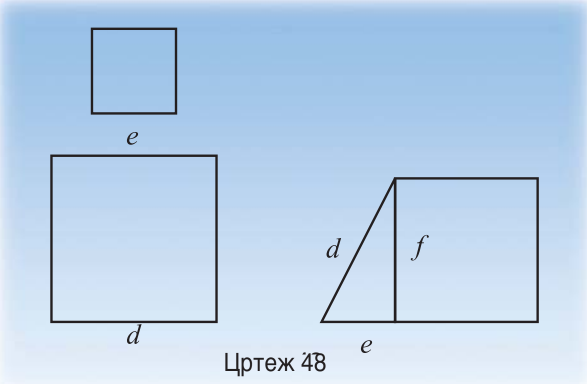
Решение: Дадените квадарти нека се: едниот со страна a, а другиот со страна b (црт.47). Да конструираме правоаголен триаголник, чии катети се a и b (страни на дадените квадрати). Хипотенузата c на конструираниот правоаголен триаголник ќе ни ја даде страната на бараниот квадрат (црт. 47). Навистина, во согласност со Питагоровата теорема важи $c^2 = a^2 + b^2$.



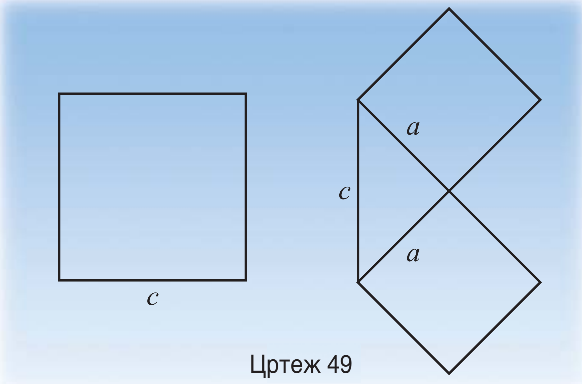
Цртеж 47

Задача 2. *Да се конструира квадрат, чија плоштина е еднаква на разликата од плоштините на два дадени квадрата.*

Решение: Дадените квадрати нека се: едниот со страна d, а другиот со страна e, при што $d>e$ (црт. 48). Ако конструираме правоаголен триаголник чија хипотенуза е еднаква на d (страната на поголемиот квадрат), а едната катета да е еднаква на e (страната на помалиот квадрат); тогаш другата катета f на тој триаголник ќе ни ја даде страната на бараниот квадрат (црт. 48). Навистина според Питагоровата теорема: $f^2 = d^2 - e^2$.



Цртеж 48



Цртеж 49

Задача 3. *Да се конструира квадрат, чија плоштина е двапати помала од плоштината на даден квадрат со страна c.*

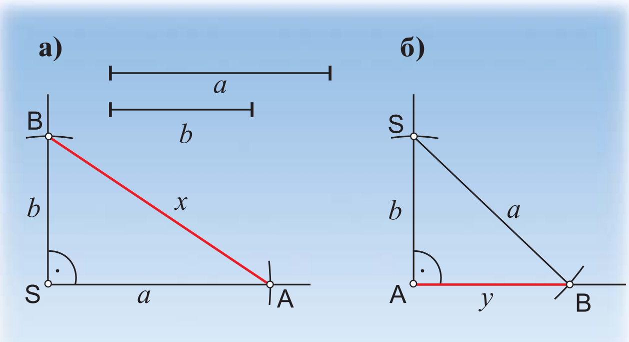
Решение: Конструирај рамнокрак правоаголен триаголник, чија хипотенуза да е еднаква на страната c на дадениот квадарт! Квадартот над секоја катета од конструираниот рамнокрак правоаголен триаголник е бараниот квадрат (црт. 49).

Во согласност со Питагоровата теорема имаме:

$$a^2+a^2=c^2, \text{ односно } 2a^2=c^2, \text{ а оттука } a^2=\frac{c^2}{2}.$$

Задача 4. *Да се конструираат отсечки со должини* $x=\sqrt{a^2+b^2}$ *и* $y=\sqrt{a^2-b^2}$, *каде што a и b се должини на две дадени отсечки (a>b).*

Решение: Конструкцијата на отсечката $x=\sqrt{a^2+b^2}$ се сведува на конструкција на правоаголен триаголник SAB со катети $\overline{SA}=a$ и $\overline{SB}=b$ (црт. 50 а). Тогаш хипотенузата на триаголникот SAB ќе биде бараната отсечка x.

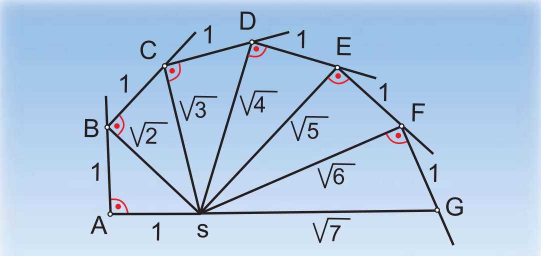


Цртеж 50

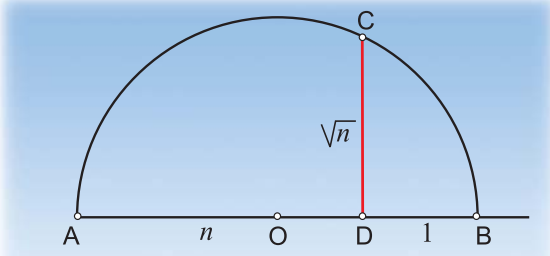
Втората барана отсечка $y=\sqrt{a^2-b^2}$, пак, е катета на правоаголниот триаголник ABS (црт. 50 б), чија хипотенуза е дадената отсечка a, а другата катета е отсечката b.

Задача 5. *Да се конструира отсечка долга* $\sqrt{n}$, *каде што* $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, ...$

Решение: Да конструираме правоаголен триаголник ASB, чии катети се долги $\overline{AS} = \overline{AB} = 1$ (црт.51). Хипотенузата на триаголникот ASB ќе биде отсечка долга $\sqrt{2}$. Ако отсечката $\sqrt{2}$ ја земеме за една катета, а отсечката 1 - за друга катета на правоаголниот триаголник BSC, тогаш хипотенузата на триаголникот BSC ќе има должина $\sqrt{3}$. На сличен начин се конструираат отсечките: $\overline{SD} = \sqrt{4}, \overline{SE} = \sqrt{5}, \overline{SF} = \sqrt{6}$, итн; сè додека не ја добиеме бараната отсечка $\sqrt{n}$ (црт. 51).



Цртеж 51



Цртеж 52

Отсечката $\sqrt{n}$ може полесно да се конструира и директно врз основа последицата на теоремата 2 во I. 11. Од $x = \sqrt{n} = \sqrt{n \cdot 1}$ гледаме дека бараната отсечка $x = \sqrt{n}$ е геометриска средина меѓу отсечките со должини n и 1, чија конструкција е дадена на црт. 52.

задачи

1. Нацртај три квадрати, а потоа конструирај нов квадрат, чија плоштина ќе биде еднаква на збирот на плоштините на првите три.

2. Конструирај квадарат со плоштина 7 cm². (Внимавај: *7=16-9*).

3. Дадени се две отсечки со должини a и b. Конструирај отсечки x и y, така што $x = \sqrt{a^2 + b^2}, y = \sqrt{a^2 - b^2}$.

4. Дадена е отсечка долга a. Конструирај отсечка $x = \sqrt{a^2 + 1}$.

5. Конструирај ги отсечките: а) $x = \sqrt{2}$, б) $x = \sqrt{8}$, в) $x = \sqrt{10}$.

6. Конструирај ги отсечките: а) $x = \sqrt{a^2 + ac}$, б) $x = \sqrt{a^2 - ac}$, каде што a, b, c се дадени отсечки.

7. Конструирај квадрат што има иста плоштина како делтоид, чии дијагонали се d_1=6 cm и d_2=7 cm.

I. 14. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА НА РАМНИНСКИ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

Со повлекувањето на некои отсечки кај одредени геометриски фигури , тие ќе можат да се разделат на такви делови меѓу кои ќе има и правоаголни триаголници. Примената на Питагоровата теорема кај така создадените правоаголни триаголници во голем број случаи го овозможува пресметувањето на некои непознати елементи кај геометриските фигури.

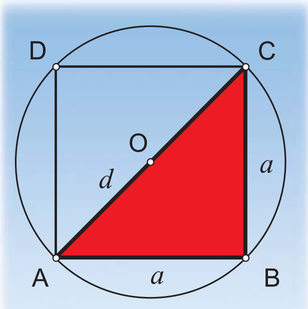
1. Со повлекување на една дијагонала во правоаголникот истиот се разделува на два складни правоаголни триаголника. Со примена на Питагоровата теорема на еден од тие триаголници, лесно ја пресметуваме дијагоналата, ако ни се познати страните на правоаголникот. Ако, пак, ни е позната дијагоналата и една од страните на правоаголникот лесно ја одредуваме другата страна.

Задача 1. Да се пресмета плоштината на правоаголник, ако се познати страната $a=5$ dm и дијагоналата $d=6{,}5$ dm.

Решение: Прво ја одредуваме должината на другата страна на правоаголникот:

$$b=\sqrt{d^2-a^2}=\sqrt{6{,}5^2-5^2}=\sqrt{42{,}25-25}=\sqrt{17{,}25}\approx 4{,}15(\mathrm{dm}).$$

Плоштината на правоаголникот е: $P=a\cdot b\approx 5\cdot 4{,}15=20{,}75\left(\mathrm{dm}^2\right)$.



Цртеж 53

2. На црт. 53 е нацртан квадрат $ABCD$ со страна a и околу него опишана е кружница. Дијагоналата d го дели квадратот на два складни рамнокраки правоаголни триаголници, а таа е хипотенуза на секој од тие триаголници. Со примена на Питагоровата теорема добиваме:

$$d^2=a^2+a^2=2a^2,\ \text{т.е. } \boldsymbol{d=a\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Според тоа:

Должината на дијагоналата на квадратот е еднаква на производот од должината на неговата страна и бројот $\sqrt{2}$.

Бидејќи радиусот R на опишаната кружница околу квадратот е половина од неговата дијагонала d, добиваме

$$\boldsymbol{R=\frac{a\sqrt{2}}{2}}. \qquad (2)$$

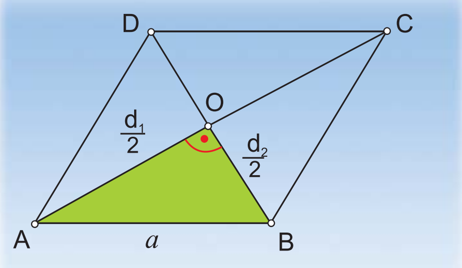
Да ја изразиме сега страната a на квадратот како функција од неговата дијагонала d. Од правоаголниот триаголник ABC добиваме: $a^2+a^2=d^2$, $2a^2=d^2$, $a^2=\dfrac{d^2}{2}$. А оттука наоѓаме:

$$a=\sqrt{\frac{d^2}{2}}=\sqrt{\frac{d^2\cdot 2}{4}}=\frac{d\sqrt{2}}{2},\ \text{т.е. } \boldsymbol{a=\frac{d\sqrt{2}}{2}}. \qquad (3)$$

Задача 2. Да се одреди страната на квадратот, ако неговата дијагонала е долга 7cm.

Решение: $$a=\frac{d\sqrt{2}}{2}\approx\frac{7\cdot 1{,}41}{2}=\frac{9{,}87}{2}=4{,}93(\mathrm{cm}).$$

3. На цртеж 54 е нацртан ромб *ABCD* и се повлечени двете негови дијагонали. Познато ти е дека дијагоналите на ромбот се преполовуваат и се нормални една на друга. Според тоа, тие го разделуваат ромбот на четири складни правоаголни триаголници. Кај секој од добиените триаголници хипотенуза е страната на ромбот, а катети се половинките од дијагоналите. Со примена на Питагоровата теорема на еден од добиените триаголници, добиваме:



Цртеж 54

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2. \qquad (4)$$

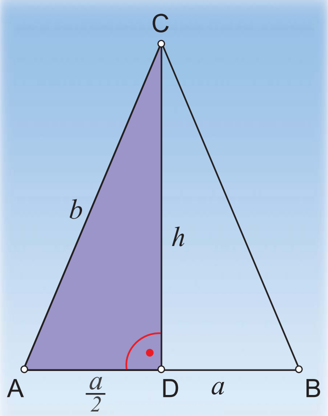
Задача 3. Да се пресмета плоштината на еден двор, што има форма на ромб, ако се познати страната $a=45$ m и една дијагонала $d_1=54$ m.

Решение: Плоштината на ромбот може да се пресмета на два начина: или со помош на страната и висината или пак со помош на двете дијагонали на ромбот. Бараната плоштина ние ќе ја одредиме на вториот начин. Од равенството (4) добиваме:

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2=45^2-\left(\frac{54}{2}\right)^2=45^2-27^2=2025-729=1296.$$

А оттука $\frac{d_2}{2}=\sqrt{1296}=36$, значи: $d_2=36\cdot 2=72$(m). Затоа:

$$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{54\cdot 72}{2}=54\cdot 36=1944(\mathrm{m}^2).$$



Цртеж 55

4. Нека е даден рамнокрак триаголник *ABC* (црт. 55) со основа $\overline{AB}=a$ и крак $\overline{AC}=b$. Ако ја спуштиме висината h од врвот C кон основата a, таа ќе го раздели рамнокракиот триаголник на два складни правоаголни триаголника. Хипотенузата на секој од тие триаголници ќе биде кракот b, а катети се спуштената висина h и половината од основата на рамнокракиот триаголник.

Ако се бара висината, а се познати основата и кракот, со примена на Питагоровата теорема на триаголникот *ADC* наоѓаме:

$$h^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ т.е. } h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}. \qquad (5)$$

Задача 4. Плоштината на еден рамнокрак триаголник е $P=60$ cm^2. Да се одреди кракот на тој триаголник, ако основата му е $a=10$ cm.

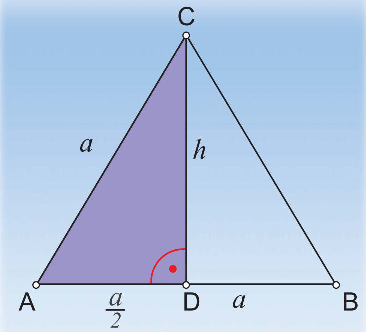
Решение: Од формулата за плоштина на триаголникот $P=\frac{ah}{2}$, имаме

$$h=\frac{2P}{a}=\frac{2\cdot 60}{10}=2\cdot 6=12(\mathrm{cm}).$$

А кракот го одредуваме од равенството (5):

$$b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+12^2=25+144=169, \text{ а оттука } b=13\mathrm{cm}.$$

5. На цртеж 56 нацртан е рамностран триаголник ABC со страна a. Ако ја повлечеме која и да било висина, таа ќе го раздели рамностраниот триаголник на два складни правоаголни триаголника. Хипотенузата на секој од тие триаголници ќе биде страната a, а катети ќе бидат: половината страна $\left(\frac{a}{2}\right)$ и висината h на рамностраниот триаголник.



Цртеж 56

Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник ADC (или DBC) може да се пресмета висината на рамностраниот триаголник:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ а оттука: } h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Според тоа: $$\boldsymbol{h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}. \quad (6)$$

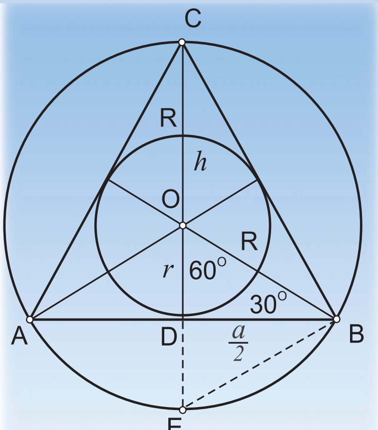
Висината на рамностраниот триаголник е еднаква на производот од половината на неговата страна и бројот $\sqrt{3}$.

Формулата (6) за висината на рамностраниот триаголник во геометријата се користи многу често, а со помош на неа се изведуваат и други важни формули, како што се: формулата за пресметување на плоштината на рамностран триаголник, формулите за радиус на впишаната и опишаната кружница околу рамностраниот триаголник и др.

Така, за плоштината на рамностраниот триаголник добиваме

$$P = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \text{ т.е. } \boldsymbol{P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}}. \quad (7)$$

Плоштината на рамностран триаголник е еднаква на производот од четвртинката од квадратот на неговата страна и бројот $\sqrt{3}$.



Цртеж 57

На цртеж 57 нацртан е рамностран триаголник ABC па во него и околу него е впишана и е опишана кружница.

Знаете дека висините на рамностраниот триаголник истовремено се и негови тежишни линии, а тие се сечат во една точка која ја дели секоја тежишна линија на делови во однос 2:1 сметајќи од темето.

Според тоа: $\frac{\overline{CO}}{\overline{OD}} = \frac{2}{1}$, т.е. $\frac{R}{r} = \frac{2}{1}$, а оттука $R=2r$.

Бидејќи $R+r=h$, затоа $2r+r=h$, $3r=h$. Оттука

$$\boldsymbol{r = \frac{1}{3}h} \text{ а } \boldsymbol{R = \frac{2}{3}h}. \quad (8)$$

Ако во формулите (8) висината h ја замениме со изразот за неа $\left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$,

ќе добиеме: $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ и $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, т.е.

$$\boldsymbol{r = \frac{a}{6}\sqrt{3}} \text{ и } \boldsymbol{R = \frac{a}{3}\sqrt{3}}. \quad (9)$$

Задача 5. Страната на рамностран триаголник изнесува $a=12$ cm. Да се одреди неговата висина, плоштината и радиусите на опишаната и вписаната кружница.

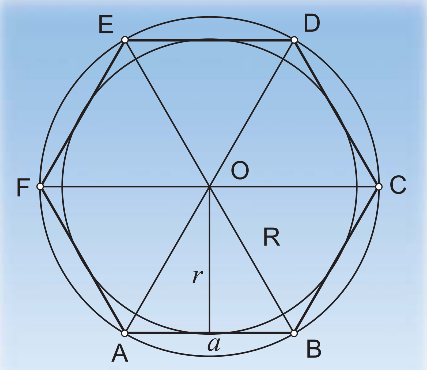
Решение: Заменувајќи ја должината на страната a на рамностраниот триаголник во формулите (6), (7) и (9), наоѓаме:

$$h=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{12}{2}\sqrt{3}\approx 6\cdot 1,73=10,38\approx 10,4(\text{cm}),$$

$$P=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{144^2}{4}\sqrt{3}\approx 36\cdot 1,73=62,28\approx 62,3(\text{cm}^2),$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{12}{3}\sqrt{3}\approx 4\cdot 1,73=6,92\approx 6,9(\text{cm}),$$

$$r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{12}{6}\sqrt{3}\approx 2\cdot 1,73=3,46\approx 3,5(\text{cm}).$$



Цртеж 58

6. Конструирајте правилен шестаголник *ABCDEF*, па во него впишете и околу него опишете кружница (црт. 58). Ако центарот на правилниот шестаголник го соединиме со секое теме, истиот се разделува на шест складни рамнострани триаголници. Според тоа, плоштината на правилниот шестаголник ќе биде:

$$P=6\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3},\ \text{т.е.}$$

$$\boldsymbol{P=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}}\,. \tag{10}$$

Од конструкцијата на правилниот шестаголник јасно е дека радиусот на опишаната кружница е еднаков на страната на правилниот шестаголник:

$$\boldsymbol{R=a}. \tag{11}$$

Од цртеж 58 гледаме дека радиусот на вписаната кружница е еднаков на висината на рамностраниот триаголник *ABO*, т.е.

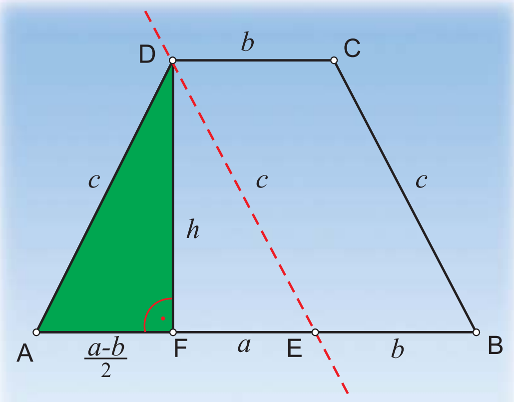
$$\boldsymbol{r=\frac{a}{2}\sqrt{3}}\,. \tag{12}$$

Задача 6. Периметарот на правилен шестаголник изнесува 24 cm. Да се пресмета неговата плоштина, радиусот на опишаната и радиусот на вписаната кружница.

Решение: Страната на правилниот шестаголник, кога е познат неговиот периметар, ќе биде: $a=\frac{L}{6}=\frac{24}{6}=4(\text{cm})$.

Бараната плоштина е: $P=\frac{3a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3\cdot 16}{4}\sqrt{3}\approx 3\cdot 8\cdot 1,73=41,52\approx 41,5$, а радиусите на вписаната и опишаната кружница се:

$$r=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{4}{2}\sqrt{3}\approx 2\cdot 1,73=3,46\approx 3,5\text{cm}\ \text{и}\ R=4\ \text{cm}.$$



Цртеж 59

7. Нека е даден рамнокрак трапез $ABCD$, со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ и крак $\overline{AD}=\overline{BC}=c$ (црт. 59). Ако низ темето D повлечеме права паралелна со кракот BC, рамнокракиот трапез ќе се раздели на ромбоид $BCDE$ и еден рамнокрак триаголник AED. Така добиениот рамнокрак триаголник AED ќе има основа a-b и висина еднаква на висината на рамнокракиот трапез. Висината DF го дели рамнокракиот триаголник на два правоаголни триаголника. Со примена на Питагоровата теорема на еден од тие триаголници можеме да ја одредиме висината на рамнокракиот трапез:

$h^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, односно $$\boldsymbol{h=\sqrt{c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}\,. \qquad (13)$$

Задача 7. Една нива има форма на рамнокрак трапез со основи $a=120$ m и $b=70$ m и крак $c=65$ m. Да се одреди нејзината плоштина.

Решение: За пресметување на плоштината на нивата потребно е да ја знаеме висината на трапезот, затоа ќе ја одредиме прво неа:

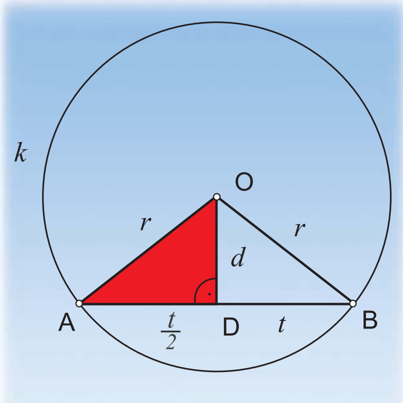
$$h=\sqrt{c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{65^2-\left(\frac{120-70}{2}\right)^2}=\sqrt{65^2-25^2}=\sqrt{4225-625}=\sqrt{3600}=60(\text{m}).$$

Бараната плоштина на нивата ќе биде:

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{120+70}{2}\cdot 60=\frac{190}{2}\cdot 60=95\cdot 60=5700\left(\text{m}^2\right).$$

8. Нека е дадена кружница $k\,(O,\,r)$ и една нејзина тетива $\overline{AB}=t$ (црт.60). Ако центарот O го соединиме со крајните точки на тетивата AB го добиваме рамнокракиот триаголник ABO, чија основа е дадената тетива AB, а краци се радиусите OA и OB.

Висината OD, повлечена од врвот O кон основата AB, го разделува триаголникот ABO на два складни правоаголни триаголника AOD и BOD. Притоа, должината на повлечената висина OD претставува и централно растојание на тетивата AB од центарот O на кружницата, па затоа обично ја означуваме со d, т.е. $\overline{OD}=d$.



Цртеж 60

Со примена на Питагоровата теорема добиваме:

$$d^2=r^2-\left(\frac{t}{2}\right)^2, \text{ односно } d=\sqrt{r^2-\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,.$$

Ако, пак, е познато централното растојание d и радиусот r, тогаш должината на тетивата, ќе биде:

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2=r^2-d^2, \text{ односно } t=2\sqrt{r^2-d^2}\,.$$

Задача 8. Во кружница со радиус $r=4$ cm повлечена е тетива долга $t=6,4$ cm. Да се одреди централното растојание на таа тетива од центарот на кружницата.

Решение: $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{6,4}{2}\right)^2}=\sqrt{16-3,2^2}=\sqrt{5,76}=2,4(\text{cm})$.

задачи

1. Најди ја дијагоналата на правоаголник, чии страни се:
а) $a=7$ cm, $b=9$ cm, б) $a=6,2$ cm, $b=8,5$ cm.

2. Во областа на еден прав агол лежи точка M, која од неговите краци е оддалечена $4,8$ cm и $1,4$ cm. Одреди колку е оддалечена точката M од темето на правиот агол.

3. Одреди ја страната на квадрат, чија дијагонала е 3 cm.

4. Пресметај ја висината на рамнокрак триаголник, ако се познати неговата основа $a=7$ cm и кракот $b=5,5$ cm.

5. Одреди го радиусот на впишаната и опишаната кружница на рамностран триаголник со страна $a=22,5$ cm.

6. Во правилен шестаголник со страна 4 cm впиши кружница и пресметај го нејзиниот радиус.

7. Пресметај го периметарот на правоаголен трапез, кога се познати неговите основи $a=5,7$ cm, $b=1,9$ cm и висината $h=2,5$ cm.

8. Во кружница со радиус $6,5$ cm повлечена е тетива долга 5 cm. Одреди го нејзиното централно растојание.

9. Центрите на две кружници со радиус $3,9$ cm се на растојание еден од друг $7,2$ cm. Одреди ја нивната заедничка тетива.

10. Во круг со радиус $r=13$ cm повлечени се две паралелни тетиви со должини $t_1=10$ cm и $t_2=24$ cm. Пресметај го растојанието меѓу тие тетиви, ако тие се наоѓаат:
а) на иста страна, б) на различни страни од центарот.

11. Две кружници со радиус 6 cm и 10 cm се допираат однадвор. Пресметај ја должината на отсечката од нивната заедничка тангента, што е заклучена меѓу точките на допирање.

12. Дадени се две кружници со радиус r, од кои секоја минува низ центарот на другата. Изрази ја должината на нивната заедничка тетива преку r.

задачи ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - I

1. Помалата од две отсечки се содржи во поголемата 4 пати и останува остаток кој, пак, се содржи во помалата отсечка точно 5 пати. Колку е долга поголемата отсечка, ако помалата е долга 1cm?

2. Точката M ја дели отсечката AB во размер $\overline{AM}:\overline{MB}=3:4$. Одреди ги должините на отсечките AB и MB, ако $\overline{AB}$ = 3,6 cm.

3. Точката T ја дели отсечката $\overline{AB}$ во размер $m:n$. Одреди ги размерите $\overline{AT}:\overline{AB}$ и $\overline{TB}:\overline{AB}$.

4. Дадена е отсечка AB и нејзината точка C, таква што $\overline{AC}:\overline{CB}=3:7$. Одреди ги размерите: а) $\overline{AB}:\overline{BC}$, б) $\overline{AC}:\overline{AB}$, в) $\overline{AB}:\overline{AC}$.

5. Докажи: Ако важи пропорцијата $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, тогаш важи и пропорцијата $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

6. Во рамнокрак триаголник ABC со основа $\overline{AB}=6\text{cm}$ и крак $\overline{BC}=9\text{cm}$, бисектрисата на аголот A ја сече страната BC во точката S. Одреди ја должината на отсечката BS.

7. Во трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$) продолженијата на краците AD и BC се сечат во точката M. Ако: а) $\overline{AD}=3\text{cm}$, $\overline{BC}=4\text{cm}$ и $\overline{CM}=6\text{cm}$ одреди го $\overline{DM}$,
б) $\overline{AD}:\overline{DM}=2:3$ и $\overline{BC}=4\text{cm}$, одреди го растојанието $\overline{CM}$.

8. За колку треба да се продолжи отсечката $\overline{AB}=14\text{cm}$ така што да важи размерот $\overline{AB}:\overline{BM}=7:3$?

9. Низ точката M што лежи на страната AB од триаголникот ABC е повлечена отсечка MN паралелна на страната AC. Одреди ја должината на отсечката BN, ако $\overline{AM}:\overline{MB}=5:3$, а $\overline{BC}=12\text{cm}$.

10. Докажи: Ако фигурата Ф е слична со фигурата $Ф_1$ со коефициент κ_1, а фигурата $Ф_1$ е слична со фигурата $Ф_2$ со коефициент κ_2, тогаш фигурата Ф е слична на фигурата $Ф_2$ со коефициент $\kappa=\kappa_1 . \kappa_2$

11. За три фигури $Ф_1$, $Ф_2$ и $Ф_3$ познато е дека $Ф_1 \overset{2}{\sim} Ф_2$ и $Ф_2 \overset{3}{\sim} Ф_3$. Одреди ги коефициентите на следните сличности: $Ф_2 \overset{\kappa_1}{\sim} Ф_1$, $Ф_3 \overset{\kappa_2}{\sim} Ф_2$, $Ф_1 \overset{\kappa_3}{\sim} Ф_3$ и $Ф_3 \overset{\kappa_4}{\sim} Ф_1$.

12. Аголот при врвот на даден рамнокрак триаголник има 36^{o}. Докажи дека, бисектрисата на еден агол при основата на тој триаголник отсекува од него триаголник што е сличен со дадениот.

13. Страните на еден триаголник се однесуваат како броевите 3 : 5 : 9. Најкусата страна на триаголник сличен со него е долга 6 cm. Одредете ги должините на другите две страни на вториот триаголник.

14. Во триаголникот ABC вписан е ромб, чиј еден агол се совпаѓа со аголот A на триаголникот ABC. Одреди ја должината на страната на ромбот, ако $\overline{AB}=12$ cm, $\overline{AC}=18$ cm.

15. Краците на еден трапез се долги 15 cm и 10 cm, а големата основа 33 cm. Помалата дијагонала го разделува трапезот на два слични триаголника. Одреди ја должината на помалата основа и дијагоналата.

16. Дадена е кружница со радиус 8 cm и една точка S што лежи надвор од неа. Одреди го растојанието на точката S од центарот на кружницата, ако должината на тангентната отсечка, што е повлечена од точката S кон кружницата изнесува 15 cm.

17. Во кружница со радиус 3,4 cm повлечени се две паралелни тетиви долги 6 cm и 3,2 cm. Одреди го растојанието меѓу тетивите, ако тие се наоѓаат: а) на иста страна, б) на различни страни од центарот.

18. Даден е ромб со страна $a=5$ cm и остар агол 60^o. Одреди ги должините на неговите дијагонали.

19. Една улица е широка 10 m. На растојание 4 m од работ на улицата кон средината на истата, поставена е скала долга 12 m. Ако скалата од тоа место ја потпреме на зградата од една страна на улицата, а потоа ја потпреме на зградата од спротивната страна на улицата, до која висина достига скалата на тие две згради?

20. Еден топ има досег 5 km, т.е. може да исфрли граната на далечина најмногу од 5 km. Ако топот е оддалечен 3 km од еден праволиниски пат, колкав дел од патот е под удар на топот?

21. Даден е рамнокрак трапез со основи $a=5,6$ cm, $b=1,6$ cm и крак $c=2,5$ cm. Одредете ја висината и дијагоналата на трапезот.

22. Рамностран триаголник, квадрат и правилен шестаголник впишани се во кружница со даден радиус r. Изразете ги нивните страни преку r и докажете дека важи:

$$a_3^2 = a_4^2 + a_6^2.$$

23. Дадени се две отсечки со должини a cm и b cm и единична отсечка. Конструирај отсечка со должина x cm, така што: а) $x = \frac{a^2}{b}$, б) $x = ab$, в) $x = \frac{a}{b}$.

задачи ЗА САМОКОНТРОЛА - I

1. Точно ли е дека: ако важи пропорцијата $a : b = c : d$, тогаш важи и пропорцијата:

а) $a : c = b : d$, б) $b : a = d : c$?

2. Два правоаголни триаголника имаат по еден еднаков остар агол. Дали тие се слични? Зошто?

3. Страните на еден триаголник се долги: 9 cm, 15 cm, и 18 cm. Одреди ги страните на друг триаголник, што е сличен со дадениот, ако најдолгата негова страна е еднаква на најкусата страна на дадениот триаголник.

4. Конструирај триаголник кој ќе биде сличен со даден триаголник *ABC* со коефициент на сличност $\frac{2}{3}$.

5. Конструирај триаголник *ABC*, ако се дадени аглите α и β и висината h_c.

6. Докажи дека соодветните: а) бисектриси, б) тежишни линии на два слични триаголника се пропорционални со соодветните страни.

7. Нацртај произволен триаголник, а потоа конструирај квадрат кој ќе има иста плоштина како триаголникот.

8. Во една кружница е впишан правоаголен триаголник со катети долги 2,4 cm и 7 cm. Одреди го радиусот на кружницата.

9. Од едно пристаниште истовремено исплowиле два брода и тоа едниот во насока на исток со брзина од 30 km на час, а другиот во насока на север со брзина 22,5 km на час. Колку километри тие ќе бидат оддалечени еден од друг после три часа од тргнувањето?

10. Во квадрат со страна 9 cm едно теме е сврзано со средината на една страна на која не лежи тоа теме. Пресметај ја должината на повлечената отсечка. Направи цртеж.

11. Пресметај го растојанието од координатниот почеток од точката со координати:

а) *A* (5, 12), б) *B* (6, 8), в) *C* (3,–4).

12. Пресметај ги периметарот, радиусот на впишаната и радиусот на опишаната кружница на рамностран триаголник чија висина е 18 cm.

Тема 2

ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА

ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

А ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

II. 1. РАВЕНСТВО. ИДЕНТИТЕТ. РАВЕНКА

Во претходните одделенија решававме равенки. Сега ќе го дополниме тоа знаење што го имаме за равенките. За да го дефинираме поимот за равенка, претходно ќе го дефинираме поопштиот поим за равенство.

Дефиниција 1. *Два броја или два израза сврзани со знакот „ = " (еднакви) образуваат равенство.*

Равенства се, на пример:

$$12=12, \qquad (1)$$
$$7=15, \qquad (1')$$
$$4\cdot(7-2)=8+2\cdot 6, \qquad (1'')$$
$$5x-2x=3x, \qquad (2)$$
$$4(y+3)=4y+12, \qquad (2')$$
$$x^2=3x, \qquad (3)$$
$$3x=x+10. \qquad (3')$$

Кај секое равенство разликуваме две страни, **лева** и **десна страна.** Тоа, всушност се, изразите што се наоѓаат на лево и на десно од знакот „ = " за равенство.

Равенствата, кај кои левата и десната страна се броеви или бројни изрази, се викаат бројни или нумерички равенства.

Такви се, на пример равенствата (1), (1') и (1").

Бројните равенства всушност, се **искази** запишани со математички симболи, па според тоа тие може да бидат или **точни** (**вистинити**) или **неточни** (**невистинити**). На пример, равенствата (1) и (1") се точни, а равенството 7 = 15 е неточно равенство.

Ако двете страни (или барем едната) на равенството се изрази со променливи, тоа се вика алгебарско или функционално равенство.

На пример, такви се равенствата (2), (2'), (3), (3').

Алгебарските равенства можат да бидат од два вида, според тоа дали тие преминуваат во точни бројни равенства за кои било вредности на променливите, или не.

Дефиниција 2. *Алгебарско равенство, кое за кои било вредности на променливите преминува во точно бројно равенство, се вика* ***идентитет***.

На пример равенствата (2) и (2') се идентитети. Тие се точни (вистинити) за кои било вредности на x (односно y).

Да наведеме некои поважни идентитети:

$$a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$
$$a + b = b + a \qquad ab = ba$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)\, c = a\, (bc)$$
$$a\, (b + c) = ab + ac$$

Тие ги изразуваат познатите својства на аритметичките операции.

Точните бројни равенства, исто така, се викаат идентитети. На пример, равенството $3 + 4 = 12 - 5$ е идентитет.

Дефиниција 3. *Секое алгебарско равенство што не е идентитет се вика* ***равенка***.

На пример, равенствата $x^2 = 3x$ и $3x = x + 10$ за $x = 1$ преминуваат во неточни бројни равенства $1 = 3$ и $3 = 11$. Значи, тие не се идентитети, туку равенки.

задачи

1. Што е равенство? Какви видови равенства имаме?

2. Објасни зошто следниве равенства се идентитети:

а) $2x + 5 = 5 + 2x$, б) $3(a + 2) = 3a + 6$, в) $5x + 2x = 4x + 3x$, г) $0 \cdot x = 0$.

3. Докажи дека следниве равенства не се идентитети:
а) $a^2 + 1 = 2a$, б) $5x - 1 = 4x + 7$, в) $|x| = x$.

4. Одреди ги соодветните вредности на изразите x^2 и $3x$ за $x = 0$ и $x = 3$. Може ли да се тврди дека равенството $x^2 = 3x$ е идентитет? Докажи дека тоа не е идентитет.

5. Кои од следните равенства се идентитети:
а) $x - 2 = 2 - x$, б) $(x - 2)^2 = (2 - x)^2$, в) $|a| = |-a|$, г) $|a| = a$, д) $x \cdot 1 = x$?

6. Провери дали бројните равенства се идентитети:
а) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, б) $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

II.2. ВИДОВИ РАВЕНКИ

Левата или десната страна на равенките се изрази со една, две или повеќе променливи.

Променливите во равенките се викаат и непознати. Тие можат да бидат означени со кои било букви, но вообичаено е да се означуваат со последните букви од латинската азбука $x, y, z,...$

Според бројот на непознатите, равенките можат да бидат: **равенки со една непозната**, **равенки со две непознати**, **равенки со три непознати**, итн.

На пример, равенки со една непозната се

$2x-5=0$, $|x^2-1|=x$, $\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{x}$, ...

равенки со две непознати се

$x+2y=5$, $x^2+5y^3-7xy=0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, ...

равенки со три непознати се

$xyz=x+y+z$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x+yz=5y$ итн.

Равенките со една непозната симболички ги означуваме со

$$f(x)=g(x), \tag{1}$$

каде што $f(x)$ и $g(x)$ се некои изрази од непознатата x. Пример на равенки со една непозната се равенките (3) и (3') во II.1.

Знаете дека секој од изразите $f(x)$ и $g(x)$ во равенката (1) има своја дефинициона област D_1 и D_2. Тие можат да се совпаѓаат или да не се совпаѓаат. Заедничкиот дел (пресекот) од нив се вика **дефинициона област на равенката** или **област на менување на непознатата** во равенката и обично се означува со D.

На пример, дефиниционата област на равенката $\frac{x}{x-2}=1-\frac{1}{x}$ е множество на сите реални броеви, освен броевите 0 и 2 (за $x=0$ не е дефиниран изразот $\frac{1}{x}$, а за $x=2$ не е дефиниран изразот $\frac{x}{x-2}$), т.е. $D=R\backslash\{0,2\}$.

Честопати левата и десната страна на една равенка се некои полиноми, и во тој случај можеме да зборуваме за степен на равенката. За степен на равенката се зема поголемиот од степените на левата и десната страна на равенката.

На пример, равенката $xyz=5$ има степен 3, равенката $x+x^2+2x^4=y^5$ има степен 5 итн. Но, првата равенка по однос на секоја од променливите x, y и z има степен 1, а втората равенка по однос на x има степен 4, а по однос на y има степен 5.

Во оваа тема ќе разгледуваме линеарни равенки, т.е. равенки со степен 1, кои имаат само една непозната. Таква е на пример равенката $2x-5(x+1)=4x+3$.

задачи

1. Какви можат да бидат равенките според бројот на непознатите?
2. Што е дефинициона област на една равенка со една непозната?
3. Напиши равенка од трет степен со две непознати.
4. Напиши една равенка со една променлива чија дефинициона област е $D=R\setminus\{0,1,2\}$.

II. 3. РЕШЕНИЕ НА РАВЕНКА

Нека е дадено равенството: $4x = x + 6$. (1)

За да покажеме дека равенството (1) не е идентитет, доволно е да пронајдеме барем една вредност на x за која тоа преминува во неточно равенство. Гледаме, за $x = 1$ тоа преминува во неточно равенство $4 = 7$. Значи, равенството (1) не е идентитет, туку равенка со една непозната.

Да се прашаме: Постојат ли вредности на непознатата x (ако има такви), за кои равенката (1) преминува во точно бројно равенство? Или со други зборови: За кои вредности на x соодветните вредности на изразите $4x$ и $x + 6$ се еднакви?

За таа цел за некои вредности на x ја составуваме следната таблица на соодветните вредности на изразите $4x$ и $x+6$:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$4x$	–12	–8	–4	0	4	8	12	16	20
$x+6$	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Од таблицава гледаме: за $x = 2$ и двата израза $4x$ и $x + 6$ добиваат еднаква вредност 8. Според тоа, за $x = 2$, равенката (1) преминува во точно бројно равенство $8 = 8$.

Бројот 2 се вика **решение** или **корен на равенката** (1). Уште велиме: бројот 2 ја задоволува равенката (1).

Дефиниција. ***Решение*** *или* ***корен*** *на една равенка со една непозната се вика секоја вредност на непознатата за која равенката преминува во точно бројно равенство.*

Од горната таблица најдовме дека бројот 2 е решение на равенката (1). Меѓутоа, од таблицата не може да се заклучи дали равенката (1) нема и други решенија. Значи, потполн одговор на тоа прашање таблицата не може да ни даде.

Одредувањето на сите решенија (корени) на една равенка се вика **решавање на равенката**.

Да се реши една равенка, значи да се одреди множеството на нејзините решенија.

Множеството решенија на равенката може да се состои од еден, два, три, итн. броеви, а може да биде и празно множество или бесконечно множество. Да го покажеме тоа на следните примери:

Пример 1. Равенката $x + 3 = 7$ има единствено решение 4, бидејќи само за $x = 4$ таа преминува во точно бројно равенство $7 = 7$.

Пример 2. Равенката $(x+3)(x-1)(x-5) = 0$ има три решенија: -3, 1 и 5. Тоа го заклучуваме оттаму што: за $x = -3$ првиот множител $(x+3)$ станува еднаков на нула, за $x = 1$ - вториот множител $(x - 1)$ станува еднаков на нула, а за $x = 5$ третиот множител $(x-5)$ е еднаков на нула. А штом еден од множителите на производот $(x+3)(x-1)(x-5)$ е еднаков на нула, тогаш и тој ќе биде нула. Но, за секоја друга вредност на x ниту еден од трите множители не е нула, па според тоа и производот не е нула.

Пример 3. Равенката $x + 3 = x$ нема ниту едно решение, бидејќи за која било вредност на x вредноста на изразот $x + 3$ е за 3 поголема од самата вредност на x.

Во таков случај велиме дека множеството решенија на равенката е празно множество.

Пример 4. Равенката $|x| = x$ има бесконечно множество решенија. Нејзино решение е нулата и секој позитивен реален број, но има и броеви кои не се нејзини решенија - сите негативни броеви. Според тоа, таа не е идентитет.

задачи

1. Провери кои вредности на x од множеството $\{-3,-2,0,1,2\}$ се решенија на равенката $x^2 = 2 - x$.

2. Реши ги следните равенки:

а) $3x - 5 = 7$, б) $\frac{x-1}{2} + 3 = 4$, в) $3(x - 1)(x - 4) = 0$, г) $y^3 = y$.

3. Состави равенка со една непозната, која што има множество решенија:

а) $\{-2\}$, б) $\{-3,-1\}$, в) $\{0,1,4\}$, г) $\varnothing$.

4. За кои вредности на x вредноста на изразот $3x - 5$ е еднаква на: а) 0, б) 4, в) -2? Запиши го условот на задачата со равенка!

5. Испитај за кои цели броеви од 1 до 7 се задоволени следните равенки:

а) $x(x - 4) = 3x - 10$, б) $2x - 3 = x + 1$, в) $\frac{x}{3} = x - 2$,

г) $x(x^2 + 11) = 6(x^2 + 1)$, д) $\frac{2x-1}{2} = x - \frac{1}{2}$, ѓ) $x^2 + 12 = 7x$.

6. Провери дали: а) $x = 3$ е корен на равенката $\frac{3x-1}{2} = \frac{x}{3} + 3$, б) $x = -6$ е корен на равенката $2x + 5 = \frac{x}{2} - 4$, в) $x = \frac{1}{2}$ е корен на равенката $3x - 5 = x - 4$, г) $x = 0$ и $x = -5$ се корени на равенката $x(x + 7) - 2x = 0$.

II. 4. ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ

Да ги разгледаме равенките:

$$(x+2)(x-2)=0, \qquad (1)$$

$$x(x+2)(x-2)=0, \qquad (2)$$

$$x^2=4. \qquad (3)$$

Равенката (1) има две решенија: –2 и 2, а равенката (2) има три решенија: 0, –2 и 2. Гледаме: секое решение на равенката (1) е решение и на равенката (2), но не секое решение на равенката (2) е решение и на равенката (1). На пример, бројот 0 е решение на (2) но не е решение на (1).

Равенката (3) има две решенија: –2 и 2, бидејќи само квадратите на тие броеви се еднакви на бројот 4.

Забележуваме: множествата од решенијата на равенките (1) и (3) се совпаѓаат, т.е. секое решение на равенката (1) е решение и на равенката (3) и обратно: секое решение на равенката (3) е решение на равенката (1). Такви две равенки се викаат **еквивалентни**.

Дефиниција. *Две равенки се викаат* ***еквивалентни****, ако множествата на нивните решенија се совпаѓаат.*

И за две равенки, кои немаат решенија велиме дека се еквивалентни. На пример, равенките $x-3=x$ и $0\cdot x=3$ се еквивалентни, бидејќи множеството решенија и на едната и на другата равенка е празно множество.

Една од основните задачи на алгебрата е решавањето на различните равенки. При решавањето на секоја равенка, обично истата ја заменуваме со друга попроста равенка, што е еквивалентна на неа. Потоа, таа равенка ја заменуваме со трета уште попроста, итн., сè додека не дојдеме до најпростата равенка, чии решенија се очигледни.

Кога дадената равенка ќе ја замениме со друга попроста еквивалентна на неа равенка, велиме дека дадената равенка сме ја трансформирале во попроста, која ги има истите решенија како и дадената.

задачи

1. За кои две равенки велиме дека се еквивалентни?

2. Објасни зошто равенките $(x-1)(x-2)=0$ и $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ не се еквивалентни.

3. Испитај дали се еквивалентни следните парови равенки:

а) $3x-5=4$ и $2x=6$, б) $x+2=0$ и $x(x+2)=0$,

в) $2x(x-1)(x-3)=0$ и $5(x-1)(x-3)=0$.

4. Напиши три пара еквивалентни равенки и три пара нееквивалентни равенки.

II. 5. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА РАВЕНСТВАТА И РАВЕНКИТЕ

Нека a, b и c се произволни рационални броеви.

Добро ви се познати следниве основни својства на бројните равенства:

1°. Својство на **рефлексивност**: $a=a$

2°. Својство на **симетричност**: $a=b \Rightarrow b=a$

3°. Својство на **транзитивност**: $(a=b \text{ и } b=c) \Rightarrow a=c$

4°. Својство на **монотоност на збирот**: Ако кон двете страни на едно точно равенство $a=b$ дадеме еден ист број c, пак, ќе добиеме точно равенство, т.е.

$$(a=b \text{ и } c \in R) \Rightarrow a+c=b+c\,.$$

5°. Својство на **монотоност на производот**: Ако двете страни на едно точно равенство ги помножиме со еден ист број $c \neq 0$, пак, ќе добиеме точно равенство: $ac=bc$, т.е.

$$(a=b \text{ и } c \neq 0) \Rightarrow ac=bc\,.$$

Врз основа на горните својства на бројните равенства лесно ги докажуваме и следниве две важни теореми за трансформација на равенките:

Теорема 1. *Ако кон двете страни на една равенка*

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

додадеме еден ист број k или ист израз $\varphi(x)$ што е дефиниран за секоја вредност од x од дефиниционата област D на равенката (1), ќе добиеме нова равенка:

$$f(x)+k=g(x)+k\,, \qquad (2)$$

односно, $$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x) \qquad (2')$$

која е еквивалентна на дадената.

Доказ*: Треба да докажеме дека: секое решение на равенката (1) е решение и на равенката (2), односно (2'); и обратно: секое решение на равенката (2), односно (2') е решение и на равенката (1).

а) Нека x_0 е решение на равенката (1). Тогаш ќе важи бројното равенство

$$f(x_0)=g(x_0)\,. \qquad (3)$$

За $x=x_0$ изразот $\varphi(x)$ добива точно определена вредност, т.е $\varphi(x_0)$ е некој број. Ако бројот $\varphi(x_0)$ го додадеме кон двете страни на бројното равенство (3), во согласност со својството 4°, ќе важи и равенството

$$f(x_0)+\varphi(x_0)=g(x_0)+\varphi(x_0)\,. \qquad (4)$$

Значи, x_0 е решение и на равенката (2').

б) Нека x_1 е решение на равенката (2'), т.е. нека важи бројното равенство

$$f(x_1)+\varphi(x_1)=g(x_1)+\varphi(x_1)\,. \qquad (5)$$

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

Ако кон двете страни на равенството (5) го додадеме бројот $-\varphi(x_1)$, ќе го добиеме равенството $$f(x_1)=g(x_1). \tag{6}$$

Значи, x_1 е решение и на равенката (1). Со тоа докажавме дека равенката (2') е еквивалентна на равенката (1). Слично се докажува дека и равенката (2) е еквивалентна на равенката (1).

Од теорема 1 следуваат следните две последици:

Последица 1. *Секој член на една равенка може да се пренесе од едната на другата нејзина страна, но со спротивен знак.*

Навистина, ако кон двете страни на равенката $f(x)=g(x)+\varphi(x)$ додадеме $-\varphi(x)$, ја добиваме равенката $f(x)-\varphi(x)=g(x)$.

Да го примениме тоа својство на равенката $8x-2=5x+7$.

Со пренесување на членот $5x$ од десната страна на равенката со спротивен знак, а членот -2 од левата на десната страна, исто така со спротивен знак, ќе ја добиеме равенката: $8x-5x=7+2$, која е еквивалентна на дадената.

Последица 2. *Ако во двете страни на равенката има идентични (еднакви) членови, тие можат да се поништат (изоставаат).*

Пример: Нека е дадена равенката $x^2+3x=x^2-6$.

Зебележуваме, во двете страни на равенката се среќава еден ист израз x^2. Со додавање кон двете страни $-x^2$, ја добиваме равенката $3x=-6$, која е еквивалентна на дадената.

Теорема 2. *Ако двете страни на една равенка*
$$f(x)=g(x) \tag{1}$$
ги помножиме со еден ист број $k\neq 0$, ќе добиеме нова равенка
$$f(x)\cdot k=g(x)\cdot k \tag{7}$$
која е еквивалентна на дадената равенка (1).

Доказ*: Нека x_0 е решение на равенката (1), т.е. нека е точно бројното равенство
$$f(x_0)=g(x_0). \tag{8}$$
Ако двете страни на равенството (8) ги помножиме со $k\neq 0$, во согласност со својството 5°, ќе важи и равенството:
$$f(x_0)\cdot k=g(x_0)\cdot k. \tag{9}$$

Значи, x_0 е решение и на равенката (7).

Нека сега, x_1 е решение на равенката (7), т.е. нека
$$f(x_1)\cdot k=g(x_1)\cdot k \tag{10}$$

е точно бројно равенство. Бидејќи $k\neq 0$, затоа и $\frac{1}{k}\neq 0$.

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

Ако двете страни на равенството (10) ги помножиме со бројот $\frac{1}{k} \neq 0$, ќе го добиеме равенството $f(x_1) = g(x_1)$.

Значи, x_1 е решение и на равенката (1).

Со тоа теоремата 2 е докажана. Врз основа на неа вршиме трансформација на равенките што содржат дробни членови во равенки без дробни членови.

Пример. Нека е дадена равенката $\frac{x+1}{4} - \frac{x-3}{2} = \frac{2x}{3} + 5$.

Решение. За да се ослободиме од именителите во равенката, двете нејзини страни ги множиме со бројот 12 (најмал заеднички содржател за именителите 4, 2 и 3) и ја добиваме равенката

$$\frac{x+1}{4} \cdot 12 - \frac{x-3}{2} \cdot 12 = \frac{2x}{3} \cdot 12 + 5 \cdot 12$$

$$(x+1) \cdot 3 - (x-3) \cdot 6 = 2x \cdot 4 + 5 \cdot 12$$

која е еквивалентна на дадената.

Последица 3. *Знаците на сите членови на равенката можат да се променат во спротивни, ако двете страни на равенката ги помножиме со бројот* -1.

На пример, равенката $-4x + 2 = -7$ е еквивалентна на равенката $4x - 2 = 7$.

задачи

1. Ако кон двете страни на едно точно бројно равенство додадеме еден ист број, дали секогаш се добива пак точно бројно равенство?
2. Ако кон двете страни на едно неточно бројно равенство додадеме еден ист број, дали секогаш се добива пак неточно бројно равенство?
3. Ако двете страни на едно точно бројно равенство ги помножиме со еден ист број, дали секогаш се добива пак точно бројно равенство?
4. Ако двете страни на едно неточно бројно равенство ги помножиме со еден ист (кој било) број, дали секогаш се добива пак неточно бројно равенство? Наведи пример!
5. Ако двете страни на едно: а) точно, б) неточно бројно равенство ги помножиме со бројот 0, какво равенство (точно или неточно) се добива?
6. Каква равенка се добива, ако кон двете страни на една равенка додадеме еден ист број или еден ист полином по однос на непознатата?
7. Можат ли одделни членови на една равенка да преминуваат од една на друга нејзина страна и како се случува тоа ? Покажи го тоа кај равенката $7x - 6 = 2x + 9$.

8. Равенката $x^2 - 3x + 2 = 7 - 2x$ трансформирај ја во еквивалентна равенка, во која:
а) членовите со непознатата да се наоѓаат на левата страна, а членовите без непознатата - на десната страна на равенката,
б) сите членови да се наоѓаат на левата страна на равенката.

9. Како се ослободуваме од имenителите на помалите членови во равенката? Покажи го тоа на еден пример!

10. Трансформирај ги равенките во еквивалентни равенки без дропки:

а) $3x-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-x$, б) $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}=x-\frac{1}{4}$, в) $\frac{2x-3}{4}-\frac{x-1}{6}=x+1$, г) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{x+3}{6}$.

11. Дали се еквивалнтни равенките:

а) $x=3$ и $x^2=3x$, б) $x=3$ и $x+x^2=3+x^2$,
в) $3x(x-2)=12$ и $x(x-2)=4$?

12. Реши ги следните прости равенки:

а) $x-3=8$, б) $3x=15$, в) $20-x=5$, г) $21=7x$, д) $4-x=5$, ѓ) $10=x+6$.

II. 6. ОПШТ ВИД НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Нека се дадени равенките со една непозната:

$$x-\frac{x-1}{2}=\frac{x+2}{5}, \qquad (1)$$

$$10x-2(x-1)=3(x+2), \qquad (2)$$

$$x(x-2)=(x-5)(x+1). \qquad (3)$$

Ако двете страни на равенката (1) ги помножиме со бројот 10 (НЗС за 2 и 5), ќе ја добиеме равенката $10x-5(x-1)=2(x+2)$ што е еквивалентна на дадената.

Потоа, по ослободување од заградите, со пренесување на сите членови на равенката од десната на левата страна и извршување на потребните упростувања, ја добиваме равенката:

$$3x+1=0, \qquad (1')$$

која е еквивалентна на равенката (1).

На сличен начин и равенките (2) и (3) можеме да ги трансформираме соодветно во равенките:

$$5x-4=0 \qquad (2')$$

и

$$2x+5=0. \qquad (3')$$

Гледаме, секоја од дадените равенки (1), (2) и (3) е еквивалентна на некоја равенка од видот $ax+b=0$, каде што a и b се точно определени реални броеви.

Дефиниција. *Секоја равенка со една непозната x, која може да се трансформира во еквивалентна равенка од видот*

$$ax + b = 0 \qquad (4)$$

*каде што a и b се дадени броеви, се вика **линеарна равенка со една непозната**.*

Овој вид на линеарната равенка се вика **нормален вид на равенката**.

Бројот a се вика **коефициент** пред непознатата x, а b - **слободен член**.

Ако во равенката (4) коефициентот a е различен од нула, тогаша таа уште се вика и **равенка од прв степен** со една непозната. Ако, пак, $a = 0$, тогаш линеарната равенка (4) не може да се нарече равенка од прв степен.

задачи

1. Кои равенки се викаат линеарни равенки со една непозната?

2. Што е коефициент, а што слободен член на линеарна равенка во нормален вид?

3. Равенката а) $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{3} + x$ б) $3x + 1 = \frac{1}{2}x - 1$, доведи ја во нормален вид, а потоа определи го коефициентот и слободниот член.

II. 7. РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Решавањето на линеарните равенки со една непозната го вршиме врз основа на примената на теоремите за трансформација на равенките и нивните последици. Притоа, можни се следниве три случаи:

I случај: $a \neq 0$.

Пример 1. Да се реши равенката $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} = 4 - \frac{x-4}{4}$.

Решение: Прво се ослободуваме од дропките во равенката. За таа цел двете нејзини страни ќе ги помножиме со бројот 12. Ја добиваме еквивалентната равенка:

$$6(x-2) - 4(x-3) = 4 \cdot 12 - 3(x-4).$$

Се ослободуваме од заградите, извршувајќи ги назначените операции:

$$6x - 12 - 4x + 12 = 48 - 3x + 12.$$

Потоа, ги пренесуваме сите членови од левата на десната страна на равенката:

$6x - 12 - 4x + 12 - 48 + 3x - 12 = 0$ и вршиме упростување на изразот на десната страна.

Така ја добиваме линеарната равенка $5x - 60 = 0$, со коефициент $a = 5$ и $b = -60$.

Го пренесуваме слободниот член –60 од левата на десната страна: $5x = 60$, а потоа, двете страни на добиената равенка ги делиме со коефициентот 5. Така ја добиваме најпростата равенка $x = 12$, што е еквивалентна на дадената. Од неа гледаме дека бројот 12 е единственото нејзино решение, а тоа е решение и на дадената равенка.

Во општ случај, линеарната равенка $ax + b = 0$ (1)

ја решаваме кога прво, слободниот член b го пренесуваме на десната страна на равенката, а потоа при $a \neq 0$, двете страни на добиената равенка:

$$ax = -b \qquad (2)$$

ги делиме со коефициентот a и ја добиваме еквивалентната равенка:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Значи: **При $a \neq 0$ линеарната равенка $ax + b = 0$ има единствено решение** $x = -\frac{b}{a}$.

II случај: $a = 0$, $b \neq 0$.

Пример 2. Да се реши равенката $2x - 1 = 2(x + 3)$.

Решение: $2x - 1 = 2x + 6$,

$$2x - 1 - 2x - 6 = 0,$$

$$0 \cdot x - 7 = 0.$$

Добиваме линеарна равенка, во која $a = 0$ и $b = -7$.

Од неа ја добиваме равенката $0 \cdot x = 7$.

Гледаме производот $0 \cdot x$ за која било вредност на x е еднаков на нула. Значи, нема вредност на x за која да е задоволена равенката $0 \cdot x = 7$, т.е. таа нема решение. Бидејќи дадената равенка е еквивалентна на последната, затоа и таа нема решение.

Според тоа: **При $a = 0$, $b \neq 0$ линеарната равенка $ax + b = 0$ нема решение**.

Равенка која нема решение обично се вика **противречна равенка**.

III случај. $a = 0$ и $b = 0$.

Пример 3. Да се реши равенката: $2x + 3 = 2(x - 1) + 5$.

Решение: Ако изразот на десната страна на равенката го трансформираме, ќе забележиме дека тој е идентичен на изразот што се наоѓа на левата страна на равенката $2x+3 = 2x+3$.

Ако ја решаваме равенката, ќе дојдеме до равенката

$2x - 2x + 3 - 3 = 0$, односно $0 \cdot x + 0 = 0$.

Последната равенка е задоволена за секоја вредност на x, т.е. секој број е решение на таа равенка. Значи, даденото равенство не е равенка, туку идентитет.

Според тоа: **При $a=0$ и $b=0$ линеарната равенка $ax+b=0$ е идентитет, т.е. нејзиното решение е секој реален број.**

Од разгледаните примери гледаме, дека при решавањето на линеарните равенки со една непозната во практиката ги извршуваме следните трансформации:

1°. *Ослободување од именителите на дробните членови (ако има такви) во равенката.*

2°. *Ослободување од заградите (ако има такви) во равенката, извршувајќи ги назначените операции.*

3°. *Ги групираме членовите што ја содржат непознатата на една страна, а слободните членови на другата страна на равенката.*

4°. *Ги сведуваме сличните членови во равенката.*

5°. *Двете страни на добиената равенка ги делиме со коефициентот пред непознатата (ако тој коефициент не е нула).*

Во некои случаи равенката може да се реши и полесно, кога ќе се промени установениот редослед на горниве трансформации: На пример: Равенката $5(x+2)=35$ полесно може да се реши, не ако прво се ослободиме од заградата, туку ако прво ги поделиме двете страни на равенката со 5. Така добиваме, $x+2=7$ т. е. $x=5$.

Друг пример: Равенката $21=7x$, со делење на двете страни со бројот 7, го добива видот $3=x$, што е исто со $x=3$.

задачи

Да се решат равенките со една непозната:

1. а) $(x-2)-9=21-x$, б) $3x-(2x-7)=11-2x$,

2. а) $2(x+1)^2-x^2=(x-1)^2$, б) $(x-5)^2-20=(x+3)^2$.

3. а) $5x-3=3x+28-(3x-4)$, б) $9x-18=4(x-1)$.

4. а) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=25$, б) $\frac{x}{4}+x=5$.

5. а) $\frac{x+5}{2}=7$, б) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)=3\left(x-\frac{1}{12}\right)$.

6. а) $(x-5)^2-(x-1)^2=8$, б) $(x+3)^2+35=(x-2)^2$.

7. а) $\frac{15-x}{4}-\frac{x-5}{3}=\frac{35-x}{12}$, б) $2x-\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$.

8. а) $\frac{x-2}{4}-\frac{2x+4}{2}=2$, б) $\frac{3x-5}{3}-\frac{9-2x}{3}=\frac{x}{2}$.

II. 8. ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

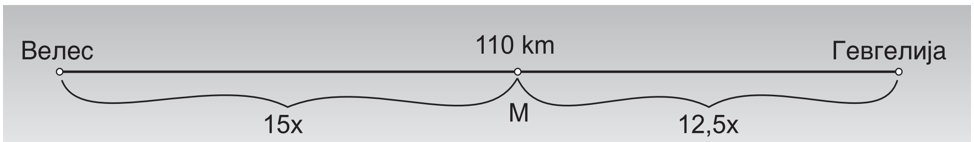
Решавањето на многу задачи од физиката, хемијата, алгебрата, геометријата и другите области на науката и практиката се сведува на составување и решавање на линеарна равенка со една непозната. Тоа се задачи, во кои зависностите меѓу величините не се изразени со равенка, туку се искажани со зборови - текстуално. Затоа, при нивното решавање, неопходно е зависностите меѓу величините во задачата да се изразат и преведат на математички јазик со помош на некоја равенка, а потоа, истата да се реши.

Решавањето на таквите задачи ќе го покажеме со примери.

Задача 1. Двајца велосипедисти истовремено тргнале на пат. Едниот тргнал од Велес за Гевгелија, а другиот од Гевгелија за Велес. Првиот минувал средно по 15 km на час, а вториот, што тргнал од Гевгелија, минувал средно по 12, 5 km на час. По колку часа од тргнувањето тие ќе се сретнат, ако растојанието меѓу Велес и Гевгелија е 110 km?

Решение. Задачата прво ќе ја решиме аритметички. Размислуваме:

По 1 час патување од тргнувањето, велосипедистите ќе го намалат растојанието меѓу себе за 15 km + 12, 5 km = 27, 5 km. Очигледно е дека одговор на задачата ќе добиеме, кога ќе најдеме колку пати се содржат 27, 5 km во 110 km. Пресметувајќи го количникот 110 : 27, 5 наоѓаме дека двајцата велосипедисти ќе се сретнат по 4 часа од тргнувањето.



Цртеж 1

Да видиме сега, како ќе ја решиме задачата алгебарски со помош на равенка.

Во задачата се бара да се определи само еден број, според тоа, самата задача нè упатува: бројот на часовите што ќе ги поминат велосипедистите од тргнувањето до сретнувањето да го означиме со x. Потоа размислуваме: Првиот велосипедист за 1 час изминува 15 km, а за x часа ќе измине $(15x)$ km. Вториот велосипедист за 1 час изминува 12, 5 km, а за x часа ќе измине $(12,5\,x)$ km.

Во согласност со условот на задачата, изминатите патишта $15x$ и $12,5x$ се делови од целиот пат 110 km, па според тоа, равенката што треба да ја составиме, ќе гласи $15x+12,5x=110$.

При составување на равенката во оваа задача пожелно е да направиме скица како на црт. 1.

Потоа, составената равенка ја решаваме и го наоѓаме нејзиниот корен $x = 4$. Значи: двајцата велосипедисти ќе се сретнат по 4 часа од тргнувањето, во што лесно се уверуваме, ако ја извршиме потребната проверка.

Задача 2. Ако кон именителот на дропката $\frac{3}{4}$ го додадеме бројот 20, кој број треба да го додадеме кон нејзиниот броител, така што, новодобиената дропка да биде еднаква на реципрочната вредност од дадената дропка?

Решение: Бараниот број што треба да го додадеме кон броителот на дропката $\frac{3}{4}$, да го означиме со x. Ако ги извршиме приведените промени со броителот и именителот на дропката $\frac{3}{4}$, ќе ја добиеме дропката $\frac{3+x}{4+20}$, т.е. $\frac{3+x}{24}$.

Според условот на задачата, така добиената дропка треба да биде еднаква на реципрочната вредност на дадената дропка $\frac{3}{4}$, т.е. да биде еднаква на дропката $\frac{4}{3}$.

Равенката што треба да ја составиме ќе биде: $\frac{3+x}{24}=\frac{4}{3}$.

Ако ја решиме, ќе најдеме дека нејзиното решение е $x=29$.

Провери, дали тое е решение и на задачата!

Задача 3. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број изнесува 14. Ако кон тој број додадеме 72, ќе добиеме број што е напишан со истите цифри, но во обратен ред. Кој е тој број?

Решение. Ако цифрата на десетките на бараниот двоцифрен број ја означиме со x, тогаш неговата цифра на единиците, ќе биде $14 - x$. Бидејќи една десетка има десет единици, а x десетки ќе имаат $10x$ единици, затоа бараниот број ќе биде $10x + (14 - x)$, а бројот што е напишан со истите цифри, но во обратен ред, ќе биде: $10(14-x)+x$.

Според условот на задачата, бараниот број $10x+(14-x)$ кога ќе го зголемиме за 72 треба да го добиеме бројот $10(14-x)+x$. Така доаѓаме до равенката

$$10x+(14-x)+72=10(14-x)+x.$$

Ако таа равенка ја решиме, наоѓаме дека нејзин корен е $x=3$. Според тоа, цифрата на десетките на бараниот број ќе биде еднаква на 3, а цифрата на единиците ќе биде еднаква на $14-3=11$.

Бидејќи цифрата на единиците (а, исто така, и цифрата на десетките) на кој било двоцифрен број не смее да биде поголема од 9, затоа велиме, дека добиеното решение нема смисла.

На овој пример најубаво можеме да се увериме дека и покрај тоа што равенката е правилно составена и решена, сепак, нејзиното решение, може да се случи, да не е можно, т.е. да не ги задоволува условите на задачата. Во таков случај велиме, дека задачата нема решение.

Задача 4. Една мајка има 35 години, а нејзиниот син има 11 години. По колку години мајката ќе биде 4 пати постара од својот син?

Решение. Бараниот број години да го означиме со x, т.е. нека по x години мајката ќе стане 4 пати постара од својот син.

Мајката сега има 35 година, а по x години таа ќе има $35 + x$ години.

Сега синот има 11 години, а по x години тој ќе има $11 + x$ години.

Во согласност со условот на задачата ја составуваме равенката

$$35+x=4(11+x).$$

Кога ќе ја решиме равенката, наоѓаме дека таа има решение $x = -3$. Гледаме дека добиеното решение е негативен број $x = -3$. Тоа покажува дека задачата при дадените услови нема решение, т.е. мајката не може да стане 4 пати постара од својот син.

Меѓутоа, ако земеме предвид дека времето во однос на некој момент може да се изрази или со позитивен или со негативен број, во зависност од тоа дали тоа се мери по или пред тој момент, тогаш добиениот одоговор $x = -3$ години покажува дека мајката пред 3 години била четири пати постара од својот син. Навистина, пред три години мајката имала $35 - 3 = 32$ години, а нејзиниот син тогаш имал $11 - 3 = 8$ години. Значи, пред 3 години мајката била 4 пати постара од синот.

Според тоа, ако го промениме условот на задачата да гласи: „Една мајка има 35 години, а синот има 11 години. Пред колку години мајката била 4 пати постара од својот син?", тогаш ќе ја добиеме равенката $35-x=4(11-x)$ и задачата ќе има решение $x=3$.

Задача 5. Еден рамнокрак триаголник има периметар 19 cm, а кракот му е подолг од основата за 3,5 cm. Да се одредат должините на основата и кракот на тој триаголник.

Решение: Во задачата има две непознати величини: должината на основата и должината на кракот. Ако должината на основата ја означиме со x, тогаш, според условот на задачата, должината на кракот, ќе биде: $(x+3,5)$ cm.

Периметарот на кој било триаголник е еднаков на збирот од должините на неговите страни, па според условот на задачата, ја составуваме равенката:

$$x+2(x+3,5)=19.$$

Таа има решение $x = 4$. Значи: Должината на основата изнесува 4 cm, а должината на кракот $4+3,5=7,5$ (cm).

Од разгледаните примери гледаме, дека при решавањето на овој вид задачи неопходно е:

1°. *Внимателно да се прочита и разбере текстот на задачата.*

2°. *Да се утврди која величина ќе се земе за непозната и истата да се означи со x или со друга буква.*

3°. *Да се утврдат зависностите меѓу бараната и дадените величини во задачата.*

4°. *Со помош на зависностите да се состави равенката.*

5°. *Да се реши добиената равенка.*

6°. *Да се изврши проверка, дали решението на равенката ги задоволува условите на задачата или не.*

задачи

1. Кој број кога ќе го намалиме за 49 го дава истиот резултат, како и кога ќе го поделиме со 8?

2. Кој број кога ќе го поделиме со 8 дава количник 15 и остаток 5?

3. Ако замислениот број го зголемиме 2 пати и од добиениот производ одземеме 15, ќе го добиеме бројот 27. Кој е тој број?

4. Ако кон замислениот број додадеме 5 и добиениот збир го намалиме 3 пати, ќе го добиеме бројот 6. Кој број е замислен?

5. Збирот на три последователни цели броеви изнесува 39. Кои се тие броеви?

6. Збирот од половината, третината и четвртината од еден број за 3 е поголем од самиот број. Кој е тој број?

7. Еден од два комплементни агли е 4 пати поголем од другиот агол. Пресметај ја големината на секој од тие агли!

8. Ако должината на страната на еден квадрат ја зголемиме за 3 cm, неговата плоштина ќе се зголеми за 57 cm^2. Одреди ја должината на страната на дадениот квадрат!

9. Во еден правоаголен триаголник едната катета е долга 20 cm, а хипотенузата е за 8 cm подолга од другата катета. Одреди ги должините на другата катета и хипотенузата!

10. Основата на еден рамнокрак триаголник е долга 6 cm, а висината му е за 1 cm пократка од кракот. Колкав е кракот?

11. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 21 cm, а кракот е за 3 cm подолг од основата. Одреди ја основата на триаголникот!

12. Должините на трите страни на еден триаголник се изразени со три последователни цели броеви. Одреди ги должините на страните на триаголникот, ако неговиот периметар изнесува 24 cm.

Б ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

II.9. НЕРАВЕНСТВО И НЕРАВЕНКА

Знаеме, секој позитивен реален број a е поголем од нулата, а секој негативен реален број b е помал од нулата. Тоа симболички го запишуваме со записите (формулите) $a > 0$ и $b < 0$.

На бројната оска позитивните реални броеви ги претставуваме со точки надесно од почетокот O, а негативните реални броеви - со точки налево од почетокот O. Знаете, исто така, од два реални броја a и b поголем е оној, што е претставен на бројната оска надесно од другиот.

Дефиниција 1. *Два броја или два израза (бројни или алгебарски) сврзани со знакот „>" (поголем од) или „<" (помал од) велиме, образуваат* ***неравенство****.*

Примери на неравенства се следните симболички записи:
$8 < 12$, $4 \cdot 5 > 5^2$, $a > b$, $x < x + 1$, $3x - 1 > x + 2$, итн.

Кај секое неравенство разликуваме **лева** и **десна страна** и **знак** (или **насока**)(< или >) на неравенството.

За две неравенства со ист знак на неравенство (двете со знак <, или двете со знак >) велиме, дека се **еднакво насочени**, а за две неравенства со спротивни знаци на неравенството (едното со знак <, а другото со знак >) велиме дека се **спротивно насочени**.

На пример, неравенствата $2x > 5$ и $x > 7$ се еднакво насочени, а неравенствата $x < 5$ и $x > 8$ се спротивно насочени.

Ако двете страни на неравенството се броеви или бројни изрази, велиме дека тоа е **бројно** или **нумеричко неравенство**. Ако, пак, двете или барем една страна на неравенството е некој **израз со променлива**, тогаш тоа се вика **неравенство со променлива** или **алгебарско неравенство**.

Бројните неравенства, всушност, се искази, со секое од нив нешто се тврди, за кое може да се каже дека е точно или неточно.

Меѓутоа, неравенствата со променливи не се искази, бидејќи за секое од нив не може да се каже дека е точно или неточно. Тие стануваат искази, ако променливите во нив се заменат со некои бројни вредности. На пример, неравенството $x > 5$ не е исказ. Но за $x = 3$ тоа станува невистинит исказ $3 > 5$, а за $x = 7$ тоа преминува во вистинит исказ $7 > 5$.

Променливите во алгебарските неравенства се викаат уште и **непознати**. За нивно означување, обично ги користиме буквите x, y, ...

Ако за некој избор на бројни вредности на непознатите $x = x_0, y = y_0, \ldots$ дадено неравенство премине во точно бројно неравенство, велиме, дека тој избор на бројни вредности на непознатите **го задоволува тоа неравенство**. На пример, $x = 7$ го задоволува неравенството $x > 5$, а $x = 3$ не го задоволува.

Неравенствата што содржат непознати можат да бидат од два вида, според тоа, дали тие се задоволени за секој или не за секој произволен избор допуштени вредности на непознатите во нив.

Дефиниција 2. *Неравенство, што е задоволено за секој произволен избор на бројни вредности на непознатие, се вика* ***идентично неравенство****, или само кратко* ***неравенство****.*

Усвоено е и секое точно бројно неравенство да се вика идентично неравенство.

Дефиниција 3. *Неравенство, што не е задоволено макар и само за еден определен избор на допуштени бројни вредности на непознатите, се вика* ***неравенка****.*

На пример, неравенството $x + 1 > x$ е идентично неравенство, бидејќи за која било вредност на x левата страна е за 1 поголема од десната страна. А неравенството $x < 6$ за $x=8$ не е задоволено $8 < 6$, па според тоа, тоа е неравенка.

Според бројот на непознатите, неравенките можат да бидат: **со една**, **со две**, **со три или повеќе непознати**.

Неравенките со една непозната имаат општ вид:

$$f(x) < g(x) \qquad \text{или} \qquad f(x) > g(x), \tag{1}$$

а неравенките со две непознати имаат општ вид

$$f(x, y) < g(x, y) \qquad \text{или} \qquad f(x, y) > g(x, y). \tag{2}$$

Ако во неравенките (1) и (2) изразите $f(x)$ и $g(x)$, односно $f(x, y)$, $g(x, y)$ се цели рационални (полиноми) по однос на непознатите, тогаш во зависност од степенот на тие полиноми, неравенките (1) и (2) можат да бидат: **од прв степен** или **линеарни неравенки**; **од втор степен** или **квадратни неравенки**, **од трет степен**, итн.

Ние ќе разгледуваме само неравенки од прв степен со една непозната.

Понекогаш, помеѓу страните на неравенството може да стои и еден од алтернативните знаци, кои допуштаат и еднаквост: „$\leq$" (помал или еднаков на), или „$\geq$" (поголем или еднаков на). На пример, неравенствата $8\leq 10$ и $9\leq 9$ се вистинити искази, а неравенствата $8\geq 10$ и $9 > 9$ се невистинити изрази (Зошто ?).

задачи

1. Кој од следниве искази е вистинит, а кој невистинит:

а) $-5 > -2$, б) $3 > 0$, в) $4 < -7$, г) $4^2 - 3 > 5 + 1$?

2. Кое од следниве бројни неравенства е вистинито, а кое невистинито:

а) $5-3\cdot 2>4$, б) $6 > -2$, в) $8\geq 0$, г) $5\leq 0$?

3. Провери за кои вредности на $x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ неравенството е задоволено:

а) $x + 4 < 7$, б) $x^2 - 4 < 0$.

4. Што можеш да заклучиш за разликата $a - b$, ако е точно неравенството:

а) $a < b$, б) $a > b$, в) $a = b$?

II. 10. СВОЈСТВА НА БРОЈНИТЕ НЕРАВЕНСТВА

Врз основа на својствата на разликата на два реални броја, заклучуваме дека важи:

Ако намаленикот е поголем од намалителот, тогаш разликата е позитивен реален број , и обратно.

Ако, пак, намаленикот е помал од намалителот, тогаш разликата е негативен реален број, и обратно.

Овие две својства н   упатуваат да ги усвоиме следните две дефиниции:

Дефиниција 1. *Бројот а велиме дека е помал од бројот b, ако и само ако, разликата a – b е негативен број, т.е.*

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \,. \qquad (1)$$

Дефиниција 2. *Бројот а велиме дека е поголем од бројот b, ако и само ако, разликата a – b е позитивен број, т.е.*

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \,. \qquad (2)$$

Симболот $\Leftrightarrow$ го читаме: „**ако и само ако**" или „**е еквивалентно на**".

На пример: $2 < 9$, бидејќи $2 - 9 < 0$,

$-1 > -6$, бидејќи $-1 - (-6) = -1 + 6 = 5 > 0$.

Ќе покажеме дека бројните неравенства ги имаат следниве поважни својства:

1°. $\boldsymbol{a < b \Leftrightarrow b > a}$, т.е. **ако ги смениме местата на левата и десната страна на неравенството, тогаш треба да се промени и насоката на неравенството во спротивна.**

Доказ. Од $a < b$ согласно (1) следува дека разликата $a - b$ е негативна. Тогаш пак разликата $b - a$ ќе биде позитивна, т.е. $b - a > 0$. Оттука следува дека $b > a$.

2°. $(\boldsymbol{a < b}$ и $\boldsymbol{b < c}) \Rightarrow \boldsymbol{a < c}$ (**својство на транзитивност**).

Доказ. Од $a < b$ и $b < c$ следува дека $a - b < 0$ и $b - c < 0$. Бидејќи збирот на два негативни броја е исто негативен број, па затоа ќе биде $(a - b) + (b - c) < 0$. Оттука добиваме

$a - c < 0$, па ќе биде $a < c$.

Неравенствата $a < b$ и $b < c$ можат да се обединат во едно неравенство $a < b < c$, кое се вика **двојно неравенство**, т.е.

$$\boldsymbol{a < b < c} \Rightarrow (\boldsymbol{a < b} \text{ и } \boldsymbol{b < c}). \qquad (3)$$

3°. $(\boldsymbol{a < b}$ и $\boldsymbol{m \in R}) \Rightarrow \boldsymbol{a + m < b + m}$, (4)

т.е. **кон двете страни на неравенството може да се додаде (или одземе) еден ист број.**

На пример, ако кон двете страни на точното неравенство $-3 < 5$ го додадеме бројот 7, пак, добиваме точно неравенство $-3 + 7 < 5 + 7$, т.е. $4 < 12$.

Од ова својство следуваат следниве две последици:

Последица 1. *Ако во двете страни на неравенството има еднакви членови, тие можат да се изоставаат, т.е.* $(a+m<b+m)\Rightarrow a<b$.

Последица 2. *Секој член на неравенството може да се пренесе од една на друга страна, само притоа, неговиот знак станува спротивен.*

На пример, $a+5>8\Rightarrow a>8-5$.

4°. $$(a<b \text{ и } k>0)\Rightarrow a\cdot k<b\cdot k, \qquad (5)$$

т.е. *Ако двете страни на неравенството ги помножиме со еден ист позитивен број, неравенството не ја менува својата насока.*

На пример, точното неравенство $\frac{3}{4}<\frac{5}{2}$ со множење на двете негови страни со 4, тоа, пак, преминува во точно неравенство $3<10$.

5°. $$(a<b \text{ и } k<0)\Rightarrow a\cdot k>b\cdot k, \qquad (6)$$

т.е. *Ако двете страни на неравенството ги помножиме со еден ист негативен број, неравенството ќе ја промени својата насока во спротивна.*

Доказ. Од $a<b$ следува $a-b<0$. Штом броевите $a-b$ и k се негативни, тогаш нивниот производ ќе биде позитивен, т.е. ќе биде $(a-b)\cdot k>0$, $ak-bk>0$, односно $ak>bk$.

Пример. Ако двете страни на неравенството $-3<5$ ги помножиме со бројот -2, ќе добиеме $(-3)\cdot(-2)>5\cdot(-2)$, односно $6>-10$.

задачи

1. Дали е вистинито неравенството: а) $5\geq 5$, б) $4\leq 9$, в) $a+k^2>a$, г) $a-k^2<a$?

2. Дали е вистинито неравенството за секоја вредност на x:

а) $2x<3x$, б) $-x<x$, в) $x>x-3$, г) $x^2>x$?

3. Размени ги местата на левата и десната страна на неравенството:

а) $6>-x$, б) $7<-2$, в) $8>2-x$.

4. На кои прости неравенства е еквивалентно двојното неравенство $-5 < x < 9$?

5. Од неравенствата $2 < 6$ и $3 < 5$ образувај двојно неравенство што може да ги замени.

6. Како на бројната оска го претставуваме множеството на сите реални броеви, што се наоѓаат помеѓу броевите –2 и 7?

II. 11. БРОЈНА ОСКА. ИНТЕРВАЛИ

1. Познато ви е што е **бројна оска**. На неа ги претставуваме реалните броеви со точки. И бројните неравенства можат да бидат претставувани на бројната оска. На пример, на бројната оска нека на бројот a му соодветствува точка А, а на бројот b - точка В. Тогаш, геометриската смисла на неравенството $a < b$ е во тоа, што точката А на бројната оска лежи налево од точката В; а ако е $a > b$, тогаш точката А лежи надесно од точката В.

Цртеж 2

На пример, својството 1° $a < b \Rightarrow b > a$ (разгледано во II. 10) геометриски е очигледно: Ако точката А на бројната оска лежи налево од точката В, тогаш точката В лежи надесно од точката А, и обратно (црт.2). Ист е случајот и со својството 2° ($a < b$ и $b < c$) $\Rightarrow a < c$ –(својство на транзитивност).

Ова својство геометриски е, исто, очигледно: Ако точката А на бројната оска лежи налево од точката В, а точката В лежи налево од точката С, тогаш точката А ќе лежи уште поналево од точката С (црт. 2).

2. При разгледување на разни прашања сврзани со реалните броеви, често го користиме поимот **интервал**. Него го дефинираме:

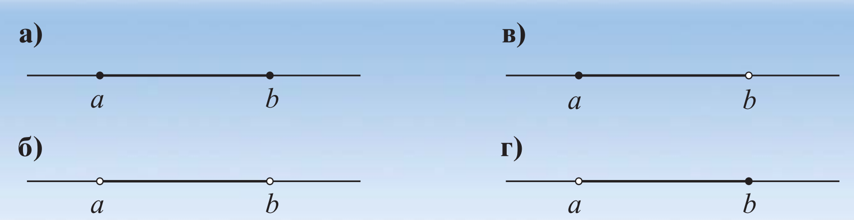
Дефиниција 1. *Нека a и b се два реални броја, при што a < b. Интервал е множество на сите реални броеви x, кои задоволуваат едно од следниве двојни неравенства:*

$$a \le x \le b;\ a < x < b;\ a \le x < b;\ a < x \le b.$$

Реалните броеви a и b се викаат **краеви** на интервалот.

Интервалот определен со неравенството $a \le x \le b$ ги содржи краевите a и b (црт. 3а). Тој се вика **затворен интервал** или **сегмент** и се означува симболички со $[a,b]$. Интервалот определен со неравенството $a < x < b$ не ги содржи краевите a и b (црт. 3б).Тој се вика **отворен интервал** и се означува со (a, b).

Ако интервалот содржи само еден од краевите, тој се **вика полуотворен интервал** и се означува со $[a, b)$, односно $(a, b]$, а е определен со неравенството $a \le x < b$ (црт. 3в), односно $a < x \le b$ (црт. 3г).



Цртеж 3

Разликата $b-a$ се вика **должина** на интервалот.

Геометриски, интервалот претставува множество точки на дел од бројната оска, кои лежат помеѓу точките a и b. На цртежот 3 полните (односно празните) точки покажуваат дека краевите a и b припаѓаат (односно не припаѓаат) на интервалот (a, b).

Покрај горните интервали, разликуваме и „**бесконечни**" интервали. Нив ги дефинираме вака:

Дефиниција 2. *Множеството на сите реални броеви велиме образуваат интервал од* $-\infty$ *(минус бесконечност) до* $+\infty$ *(плус бесконечност) и се означува со симболот* $(-\infty, +\infty)$.

Дефиниција 3. *Множеството на сите реални броеви x, кои се поголеми (односно помали) од некој број a, се вика интервал од a до* $+\infty$ *(односно од* $-\infty$ *до a) и се означува со* $(a, +\infty)$*, (односно со* $(-\infty, a)$*).*

Тие се карактеризираат со неравенствата: $x > a$, односно $x < a$.

Забелешка. Симболите $-\infty, +\infty$ не ги сметаме за броеви. Со нив не е дефинирана ниедна операција. Усвоено е, само меѓу нив и реалните броеви да се воведуваат релациите на нееднаквост.

Според тоа, интервалите $(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, a)$ можат да се изразат со неравенствата:

$$-\infty < x < +\infty; \quad a < x < +\infty \quad \text{и} \quad -\infty < x < a.$$

задачи

1. По што се разликува бројната оска од секоја друга права?
2. Кои точки од бројната оска соодветствуваат на:

   а) позитивните реални броеви, б) негативните реални броеви?
3. Може ли интервалот да се состои само од:

   а) цели броеви, б) рационални броеви, в) ирационалните броеви?

4. Покажи дека $(x, y) \subset [x, y]$. Одреди ја унијата и пресекот на тие два интервала.

5. Дадени се интервалите (1, 5) и (3, 7). Одреди ги интервалите:

а) $(1,5) \cap (3,7)$, б) $(1,5) \cup (3,7)$, в) $(1, 5) \setminus (3, 7)$.

6. Кои вредности на променливата $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ја задоволуваат неравенката:

а) $2x - 3 < 5$, б) $x < 9$, в) $x \geq 0$?

II. 12. РЕШЕНИЕ НА НЕРАВЕНКА. ЕКВИВАЛЕНТНИ НЕРАВЕНКИ

Да ја разгледаме неравенката $4x - 5 < 3x + 1$.

Забележуваме, за $x = 5$ таа преминува во вистинит исказ $4 \cdot 5 - 5 < 3 \cdot 5 + 1$, односно $15 < 16$; а за $x = 10$ таа преминува во невистинит исказ: $4 \cdot 10 - 5 < 3 \cdot 10 + 1$, односно $35 < 31$.

За бројот 5 велиме дека е **решение** на дадената равенка, а бројот 10 не е нејзино решение.

Дефиниција 1. *Секоја вредност на непознатата, за која е задоволена дадена неравенка, се вика **решение** на таа неравенка.*

Сите решенија на една неравенка $f(x) > g(x)$ образуваат едно множество, кое се вика **множество решенија** на неравенката и обично се означува со М.

Да се реши една неравенка, значи, да се одреди множеството решенија на таа неравенка.

Дефиниција 2. *Две неравенки велиме дека се **еквивалентни** во дадена бројна област, ако нивните множества решенија во таа бројна област се совпаѓаат (се еднакви).*

Пример. Неравенките $x - 3 > 5$ и $x > 5 + 3$ се еквивалентни, бидејќи и двете се задоволени само за вредностите на x поголеми од 8. Во согласност со дефиницијата, две неравенки можат да бидат еквивалентни во една бројна област, а да не се еквивалентни во друга бројна област. На пример, неравенките $|x| > 2$ и $x > 2$ се еквивалентни во областа на позитивните реални броеви. Но, во областа на сите реални броеви тие не се еквивалентни, бидејќи во таа област првата неравенка е задоволена, освен за $x > 2$, уште и за множеството бројни вредности на x што се помали од -2.

Две неравенки се еквивалентни во дадена бројна област уште и кога двете немаат решенија во таа област.

Решавањето на дадена неравенка го вршиме, така што истата ја трансформираме во други попрости, но еквивалентни на неа неравенки, додека не дојдеме до најпростата неравенка, чие множество решенија е очигледно.

задачи

1. Што е решение на неравенка?
2. За кои неравенки велиме дека се еквивалентни?
3. Наведи пример на еден пар еквивалентни неравенки и наведи пример на еден пар неравенки кои не се еквивалентни.

II. 13. ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ НЕРАВЕНКИ

Трансформацијата на неравенките во попрости еквивалентни неравенки ја вршиме врз основа на следниве теореми и последици.

Ќе се ограничиме само на неравенките од видот $f(x)>g(x)$, а неравенките од видот $f(x)<g(x)$, лесно можат да се сведат на првиот вид.

Теорема 1. *Ако кон двете страни на дадена неравенка додадеме еден ист рационален израз, кој е дефиниран за секој x од дефиниционата област D на неравенката, ќе добиеме нова неравенка еквивалентна на дадената.*

Нека е дадена неравенката $$f(x)>g(x) \qquad (1)$$

и еден рационален израз $\varphi(x)$, кој е дефиниран за секој $x \in D$. Ќе докажеме дека неравенката $$f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x) \qquad (2)$$

е еквивалентна на дадената неравенка.

Доказ. а) Нека $x=x_0$ е едно од решенијата на неравенката (1), т.е. нека е $f(x_o)>g(x_o)$.

Ако кон двете страни на тоа точно бројно неравенство го додадеме бројот $\varphi(x_o)$ - бројната вредност на изразот $\varphi(x)$ за $x=x_0$, во согласност со својството 3° на бројните неравенства, ќе го добиеме неравенството $f(x_o)+\varphi(x_o)>g(x_o)+\varphi(x_o)$.

Според тоа, решението на неравенката (1) $x=x_0$ е решение и на неравенката (2).

б) Нека сега $x = x_1$ е едно решение на неравенката (2), т.е. нека важи:

$$f(x_1) + \varphi(x_1) > g(x_1) + \varphi(x_1).$$

Ако од двете страни на неравенството го изоставиме бројот $\varphi(x_1)$ - бројна вредност на $\varphi(x)$ за $x = x_1$ ќе го добиеме неравенството: $f(x_1) > g(x_1)$. Значи, кое било решение на неравенката (2) е решение и на неравенката (1).

Со тоа теоремата е докажана. Од неа следуваат последиците:

Последица 1. *Ако во двете страни на неравенката има еднакви членови со исти знаци, тие може да се отфрлат.*

Пример. Во неравенката $5x - 2x + 3 > 8 - 2x$ гледаме дека во двете страни се среќава еден ист член $(-2x)$. Ако тој член го изоставиме од двете страни, ќе добиеме еквивалентна неравенка $5x + 3 > 8$.

Последица 2. *Секој член на неравенката може да се пренесе од едната на другата страна, ако притоа се промени неговиот знак во спротивен.*

Пример. Дадена е неравенката $4x - 5 > 3x - 2$.

По пренесувањето на членот -5 со спротивен знак од левата на десната страна, а членот $3x$ од десната на левата страна, добиваме нова еквивалентна неравенка $4x - 3x > 5 - 2$, односно $x > 3$.

Теорема 2. *Ако двете страни на дадена неравенка се помножат (или поделат) со еден ист позитивен број k, ќе се добие неравенка еквивалентна на дадената.*

Доказот на оваа теорема е аналоген на доказот на теоремата 1, а со повикување на својството 4° на бројните неравенства.

Делењето на двете страни со позитивниот број k, знаеме дека може да се замени со множење на двете страни на неравенката со реципрочната вредност $\frac{1}{k}$, т.е.

$$f(x) \cdot \frac{1}{k} > g(x) \cdot \frac{1}{k}.$$

Последица 3. *Ако двете страни на неравенката имаат заеднички позитивен множител, со него можат да се поделат две страни на неравенката, при што ќе се добие неравенка еквивалентна на дадената.*

Во таков случај велиме дека неравенката **ја скратуваме**.

Пример. Ако двете страни на неравенката $3(x-2)<15$ ги поделиме со 3 (или помножиме со $\frac{1}{3}$), се добива еквивалентна неравенка $x-2<5$.

Последица 4. *Неравенката со дробни бројни коефициенти, може да се трансформира во неравенка со цели бројни коефициенти, ако двете страни на неравенката се помножат со позитивниот најмал заеднички содржател на именителите на дропките.*

Таквата трансформација се вика **ослободување од именителите**.

Пример. Дадена е неравенката $\frac{2x-7}{3}<\frac{x+1}{2}-5$.

Ако двете нејзини страни ги помножиме со НЗС на именителите, т.е. со бројот 6, ќе добиеме неравенка $2(2x-7)<3(x+1)-5\cdot 6$ еквивалентна на дадената.

Теорема 3. *Ако двете страни на дадена неравенка ги помножиме (или поделиме) со еден ист негативен број k и ако ја промениме насоката на неравенката во спротивна, ќе добиеме неравенка, која е еквивалентна на дадената, т.е.*

$$(k<0)\Rightarrow\left[f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot k<g(x)\cdot k\right]$$

Доказот на оваа теорема е сличен како и на теоремите 1 и 2, само со повикување на својството 5° на бројните неравенства.

Последица 5. *Ако двете страни на дадена неравенка ги помножиме со бројот –1, насоката на неравенката треба да се промени во спротивна.*

Пример. Ако двете страни на неравенката $-x>7$ ги помножиме со –1, таа го добива видот $x<-7$.

задачи

1. Кои од следниве неравенки се еквивалентни и зошто?

а) $6x-2>7+3x$, б) $6x-3x>7+2$, в) $3x>9$, г) $x>3$.

2. Најди неравенка без именител што ќе биде еквивалентна на неравенката:

а) $\frac{x-2}{4}-\frac{x}{2}<\frac{x+1}{4}$, б) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{x-5}{6}$.

3. Со користење на теоремите за еквивалентност на неравенките и нивните последици покажи дека: а) $6x-3>2x+5 \Leftrightarrow x>2$, б) $\frac{2x-1}{3}<\frac{x}{2}+1 \Leftrightarrow x<8$.

4. Докажи ја теоремата 2.

II. 14. РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Линеарна неравенка со една непозната е секоја неравенка која може да се трансформира во видот

$$ax+b>0 \text{ или } ax+b<0,$$

каде што *a* и *b* се кои било дадени реални броеви.

Ако двете страни на неравенката $3x-2<0$ ги помножиме со –1, таа ќе премине во видот $-3x+2>0$. Затоа, доволно е да ја проучиме само неравенката

$$ax+b>0. \qquad (1)$$

При испитување на решенијата на оваа неравенка во зависност од вредностите на a и b, ќе разликуваме три случаи:

I. Нека $a>0$. Ако b го префрлиме на десната страна, а потоа двете страни на неравенката ги поделиме со a, ќе ја добиеме неравенката $x>-\frac{b}{a}$, а со неа и бараното множество решенија на неравенката (1). Според тоа:

При $a>0$**, множеството решенија на неравенката (1) се сите реални броеви поголеми од** $-\frac{b}{a}$**, односно** $M=\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$.

II. Нека $a<0$. Со пренесување на b на другата страна, а потоа со делење на двете страни на неравенката со a, се добива неравенката $x<-\frac{b}{a}$. Според тоа:

При $a<0$**, множеството решенија на неравенката (1) се сите реални броеви помали од бројот** $-\frac{b}{a}$**, т.е.** $M=\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$.

III. Нека $a = 0$. Во тој случај неравенката (1) го добива видот

$$0 \cdot x + b > 0, \text{ односно } b > 0.$$

Ако b е позитивен број, неравенката (1) е задоволена за секој реален број x, т.е. $M = (-\infty, +\infty) = R$. А ако b е негативен реален број, тогаш неравенката (1) нема решение, т.е. $M = \varnothing$.

Пример 1. Да се реши неравенката $\frac{x-3}{3} - 1 > \frac{x-1}{2} - 2$.

Решение. Прво ќе се ослободиме од дропките во неа, така што двете нејзини страни ги помножиме со 6 (НЗС за именителите):

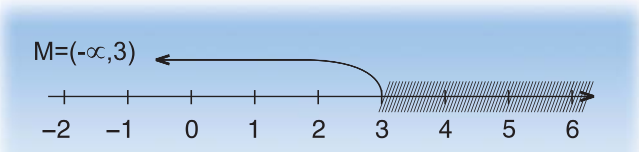
$$2(x-3) - 6 > 3(x-1) - 12.$$

Потоа се ослободуваме од заградите и ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а слободните членови на десната страна, и ја добиваме еквивалентната неравенка: $2x - 3x > -3 - 12 + 6 + 6$, односно $-x > -3$.

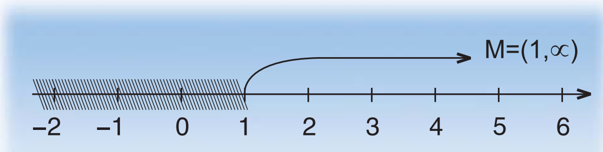
Со множење на двете нејзини страни со –1, добиваме $x < 3$.

Последната неравенка е задоволена за секој реален број помал од 3. Значи, множеството решенија на дадената неравенка го сочинуваат сите реални броеви од интервалот $(-\infty, 3)$.

Множеството решенија на неравенката графички можеме да го претставиме на бројната оска со точките, што лежат налево од точката 3 како што е покажано на цртежот 4. Притоа, делот од бројната оска на кој лежат точките (броевите) за кои не е задоволена неравенката, обично, го прецртуваме (црт. 4).



Цртеж 4



Цртеж 5

Пример 2. Да се реши неравенката $(x-2)^2 - 3x < x(x-3)$.

Решение. $x^2 - 4x + 4 - 3x < x^2 - 3x$; $-4x < -4$.

Ги делиме двете страни со –4 и добиваме $x > 1$, т.е. множеството решенија на неравенката го сочинуваат сите реални броеви поголеми од 1, т.е. $M = (1, \infty)$. Тоа графички е претставено на црт   ж 5.

задачи

Да се решат неравенките (1 – 5):

1. а) $3x-4>2-x$, б) $5-2y<y+8$.

2. а) $x-(2-x)<3x+7$, б) $(x-3)^2<x(x+1)$.

3. а) $2x-5<x$, б) $3(x-2)>x-1$.

4. а) $\frac{x+2}{3}+\frac{x}{6}<\frac{x+1}{2}-2$, б) $\frac{x-5}{2}-3>\frac{3x-2}{6}$.

5. а) $\frac{y}{2}-\frac{1-y}{4}>5-\frac{2+y}{3}$, б) $3(x-2)>\frac{x+1}{2}-1$.

II. 15. ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Линеарните неравенки со една непозната наоѓаат разновидна примена во математиката и практиката. На пример, решавањето на линеарните равенки и неравенки со параметри секогаш е проследено со решавање и на некоја линеарна неравенка со една непозната.

Еве неколку примери за примената на линеарните неравенки.

Пример 1. За кои вредности на променливата x изразот $\sqrt{2x-3}$ е реален број?

Решение. Знаеме, квадратниот корен е реален број, само, ако поткореновиот број е ненегативен реален број. Значи, изразот $\sqrt{2x-3}$ ќе биде реален број, само за вредностите на x, за кои важи неравенката $2x-3\geq 0$. Значи, дадениот израз ќе биде реален број за вредности на $x\geq\frac{3}{2}$, односно ако $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$.

Пример 2. На колку начини бројот 50 може да се раздели на два цели позитивни собирока, чија разлика да е поголема од 20?

Решение. Ако едниот собирок е x, тогаш другиот собирок ќе биде $50-x$. Во согласност со условот на задачата броевите x и $50-x$ треба да се цели броеви, чија разлика е поголема од 20, т.е. треба да важи неравенката $x-(50-x)>20$, каде што x е природен број помал од 50. Ако ја решиме неравенката, ќе видиме дека нејзиното множество решенија е интервалот $(35, 50)$, т.е. $35<x<50$.

Бидејќи непознатата x е природен број, таа може да ги зема следниве вредности:

$x = 31, 32, 33, ..., 49$. Нив ги има точно 19. Тој број ни покажува на колку начини може да се избере првиот собирок, а на секој од нив му одговара по еден втор собирок $50 - x$. Значи, постојат вкупно 19 начини.

Пример 3. Да се реши неравенката $mx - 5 > 3x - m$, каде што x е непозната, а m е параметар.

Решение. Ги пренесуваме членовите што ја содржат непознатата x на десната страна, а другите членови на левата страна, па ја добиваме неравенката $mx - 3x > 5 - m$, односно $(m-3)x > 5-m$.

Бидејќи коефициентот $(m - 3)$, во зависност од параметарот m, може да биде позитивен број, нула или негативен број, затоа ќе разликуваме три случаи.

1. Ако е $m - 3 > 0$, т.е. $m > 3$, тогаш дадената неравенка ќе има множество решенија

$$x > \frac{5-m}{m-3}.$$

2. Ако е $m - 3 < 0$, т.е. $m < 3$, тогаш дадената неравенка ќе има множество решенија

$$x < \frac{5-m}{m-3}.$$

3. Ако е $m - 3 = 0$, т.е. $m = 3$, тогаш последната неравенка го добива видот $0 \cdot x > 2$. Во таков случај таа не е задоволена ни за една вредност на x, т.е. нејзиното множество решенија е празно множество.

задачи

1. За кои вредности на x дропката $\frac{2-x}{6}$ ќе биде позитивна?

2. За кои вредности на параметарот k решението на равенката $2(3-x) = 3(k-2x)$ е: а) позитивен број, б) нула, в) негативен број?

3. За кои вредности на параметарот m решението на равенката а) $2x - m = m - 2$, б) $5m = 2x - m$, в) $x + 3m = 9$ е поголемо од -3?

4. Реши ги следниве неравенки со параметри: а) $2(m-x) < mx + 5$, б) $\frac{a}{2} - \frac{2-x}{3} < a - 1$.

5. Реши ја неравенката со параметар: а) $1 + kx < 2k - 3x$, б) $cx + c^2 < 2x - 6$.

В СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

II.16. РЕШЕНИЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Множество од две или неколку линеарни неравенки со една иста непозната, за кои се бараат заеднички решенија, се вика **систем линеарни неравенки со една непозната**.

Пример. Ако променливата x треба, истовремено, да ги задоволува условите:

$x > -3$, $x > 1$ и $x > 5$, тогаш овие три неравенки, велиме, образуваат систем линеарни неравенки со една непозната.

Решение на овој систем линеарни неравенки е секоја вредност на x, за која и трите неравенки од системот се задоволени. Не е тешко да заклучиме, дека решение на горниот систем ќе биде секој реален број поголем од 5, а множеството решенија – интервалот $M=(5, \infty)$.

Затоа можеме да кажеме дека:

Даден број x е **решение** на еден систем линеарни равенки со една непозната, ако ја задоволува секоја од неравенките од дадениот систем. Множеството од сите такви вредности x се нарекува **множество решенија** на дадениот систем.

На пример, бројот 3 е решение на системот $\begin{cases} 2x-1>4 \\ -x+5>0 \\ 3x<10 \end{cases}$, бидејќи $2\cdot3-1=5>4$, $-3+5=2>0$ и $3\cdot3=9<10$. Меѓутоа, бројот 0 не е решение, бидејќи првата неравенка не е задоволена, без разлика дали останатите две неравенки се задоволени.

Даден систем линеарни неравенки може и да нема решение. Таков е, на пример, системот $\begin{cases} x<1 \\ x>5 \end{cases}$, бидејќи не постои број кој, истовремено, е поголем од 5, а е помал од 1.

задачи

1. Кога еден број е решение на даден систем линеарни неравенки со една непозната?
2. Наведи пример на систем линеарни неравенки со една непозната кој нема решение.
3. Наведи пример на систем линеарни неравенки со една непозната за кој едно решение е бројот -1, а бројот 2 не е решение на тој систем.

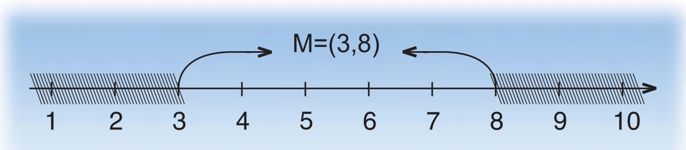
II.17. РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

За да се реши даден систем од две или неколку линеарни неравенки со една непозната, прво, треба да се реши одделно секоја неравенка од системот, а потоа да се издвои заедничкиот дел (пресекот) од множествата на нивните решенија. Ако таков заеднички дел не постои, т.е. ако тој е празно множество, системот на неравенки **нема решение**, или **системот е противречен**.

Пример 1. Да се реши системот неравенки $\begin{cases} 3x-5>7-x \\ -x+8>0 \end{cases}$.

Решение. Лесно наоѓаме дека првата неравенка е задоволена за $x>3$, а втората за $x<8$. Значи, решенија на системот се сите реални броеви помеѓу 3 и 8.

Одредувањето на множеството решенија на системот, значително се олеснува, ако множествата на решенијата на секоја одделна неравенка од системот бидат претставени на иста бројна оска. Тоа го изведуваме, така што ги прецртуваме оние делови од бројната оска на кои лежат точките за кои секоја одделна неравенка не е задоволена. Во таков случај, непрецртаниот дел од бројната оска (ако има таков) ќе ни го даде множеството решенија на дадениот систем неравенки. Како што гледаме, нашиот систем неравенки има множество решенија одредени со $3<x<8$ (црт. 6), или решенија на системот се сите реални броеви од интервалот $M=(3, 8)$.



Цртеж 6

Пример 2. За кои вредности на параметарот k решението на равенката $3x-k=2-x$ ќе биде позитивно и помало од 5?

Решение. Откако ќе ја решиме дадената неравенка, добиваме $x=\frac{k+2}{4}$. Според условот на задачата, нејзиното решение треба да ја задоволува двојната неравенка $0<\frac{k+2}{4}<5$,

која, пак, е еквивалентна на системот неравенки:

$$\begin{cases} \frac{k+2}{4}>0 \\ \frac{k+2}{4}<5 \end{cases}$$

Првата неравенка во добиениот систем е задоволена за $k > -2$, а втората за $k < 18$. Значи, системот неравенки ќе има решенија одредени со интервалот $-2 < k < 18$.

Оттука заклучуваме, решението на дадената равенка ќе биде позитивно и помало од 5, кога параметарот k зема вредности од интервалот $(-2, 18)$, т.е. кога е исполнет условот $-2 < k < 18$.

задачи

Реши ги системите линеарни неравенки:

1. а) $\begin{cases} 2x-1 > x-5 \\ x+3 < 3x-2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 8-2x < 3x-5 \\ 1-x > x+2 \end{cases}$.

2. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} < x+1 \\ 2x < 2(x+1) \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3(x-2)-5 > 3+x \\ 2(x-1)-3 < 2 \\ 4x > 3(x-1) \end{cases}$.

3. а) $\begin{cases} x < 2(x-1) \\ 2x-3 > x+1 \\ \dfrac{x-1}{2} < 3x-5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x}{2} > \dfrac{3x}{2} - 4 \\ x - \dfrac{x-2}{3} > 3 - \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$.

4. Испитај за кои вредности на параметарот m равенката $x-2 = 3(x-m)$ има

а) позитивно решение, б) негативно решение, в) решение $x = 0$.

5. За кои вредности на параметарот p изразите $a = 2p+3$, $b = 4p-5$ и $c = p+13$ ќе можат да бидат мерни броеви на страните на еден триаголник?

Г ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

II. 18. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Да го разгледаме следниов:

Пример. Почетната температура на водата, што е ставена во лонец за загревање, е 7°C. Секоја минута температурата на водата се покачувала за 3°C. Колкава ќе биде температурата на водата во лонецот по x минути?

Решение: Ако за 1 минута загревање температурата на водата се покачува за 3°C, тогаш за x минути загревање таа ќе се покачи за $(3x)$°C. Очигледно е дека вредноста на температурата y (во Целзиусови степени) на водата зависно од времето x (во минути) може да се одреди по формулата $y = 7 + 3x$.

На секоја вредност на x и соодветствува единствена вредност на y. Значи, со формулата $y = 7 + 3x$ е зададена функција.

Законот на покачувањето на температурата на водата, што е изразен со горната формула, е точен само за ограничен временски интервал, бидејќи знаете дека највисоката температура што може да ја достигне водата при загревање е 100°C.

Сред тоа, функцијата што е зададена со формулата $y = 3x + 7$ ќе има дефинициона област (домен) $D = [0; 31]$.

Одговорот на задачата ќе гласи: Бараната температура y на водата ќе биде: $y = 3x + 7$, каде што $x \in [0; 31]$.

Во практиката, физиката и математиката често се среќаваме со функции, што се зададени со формулата од видот

$$y = ax + b,$$

каде што x и y се променливи, а a и b дадени фиксни броеви.

Дефиниција 1. *Функцијата* $f: R \to R$ *што е зададена со формулата од видот* $y = ax + b$*, каде x и y се променливи, а a и b - дадени броеви, се вика* ***линеарна функција****.*

Променливата x се вика **независно променлива** (или **аргумент**), а y - **зависно променлива** (или **вредност на функцијата**). Броевите a и b можат да бидат кои било реални броеви (вклучувајќи ја и нулата) и се викаат **параметри** на линеарната функција. Бројот a уште се вика и **коефициент пред аргументот** x, а b - **слободен член**.

Ако се познати параметрите a и b, линеарната функција е еднозначно определена.

Ако линеарната функција не е сврзана со некој конкретен проблем (каков што е случајот во разгледаниот пример), тогаш нејзината дефинициона област (домен) ќе биде множеството R на сите реални броеви, бидејќи изразот $ax + b$ има смисла за секој реален број x.

Затоа, обично, доменот на линеарната функција не го соопштуваме, а го подразбираме; и често велиме „линеарната функција $y = ax + b$" наместо функција $f : R \to R$ зададена со формулата $y = ax + b$".

При $b = 0$ функцијата $y = ax + b$ го добива видот $y = ax$.

Функцијата $y = ax$, каде што $x \in R$ е специјален вид на општата линеарна функција $y = ax+b$ за $b = 0$ и уште се вика **функција на правата пропорционалност**.

задачи

1. Функцијата $f : R \to R$ зададена е со формулата: а) $y = -x + 5$, б) $y = x$, в) $y = \frac{x}{2}$, г) $y = x^2 - 3$, д) $y = \frac{x}{4}$. Кои од тие функции се линеарни?

2. Дадена е функцијата f со формулата $y = 2x - 3$, каде што $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$. Одреди го множеството на вредностите на таа функција!

3. Функциите f и g се зададени со таблиците:

а)

x	-3	-1	0	2	7
$f(x)$	0	2	3	5	10

б)

x	-5	-2	0	3	4
$g(x)$	5	2	0	-3	-4

Покажи дека f и g се линеарни функции и истите изрази ги аналитички!

4. Должината на железна прачка при 0°C е $l = 2\text{m}$. При загревање на секој 1°C должината на прачката се зголемува за 0, 00012 m, а при ладење на секој 1°C - таа се намалува за 0, 00012m. Колкава ќе биде должината (l) на прачката на температура $t°C$? Изрази ја зависноста на прачката од температурата! Каква функција е таа зависност?

5. Едната страна на правоаголникот е долга 3 cm, а другата x cm. На што е еднаква плоштината P на правоаголникот? Каква функција е зависноста на P од x?

6. Еден цол има должина 24, 5 mm. Изрази ја зависноста на должината (y) на отсечките (во mm) од бројот x на цоловите. Каква функција е таа зависност?

7. Заситените јаглеводороди (или парафини) имаат општа формула C_nH_{2n+2}, каде што n е бројот на јаглеродните атоми во молекулот, при што $n \le 60$. Изрази ја зависноста на водородните атоми како функција од бројот на јаглеродните атоми во молекулите на заситените јаглеводороди. Што е домен на таа функција?

8. Од 5 тони железна руда се добиваат 3 тони железо. Изрази ја масата на добиеното железо (y) како функција од масата на железната руда (x). Каква е таа функција и што е нејзин домен?

9. Еден cm^3 бакар има маса 8,9 g. Изрази ја масата (y) на едно парче бакар како функција од неговиот волумен (x).

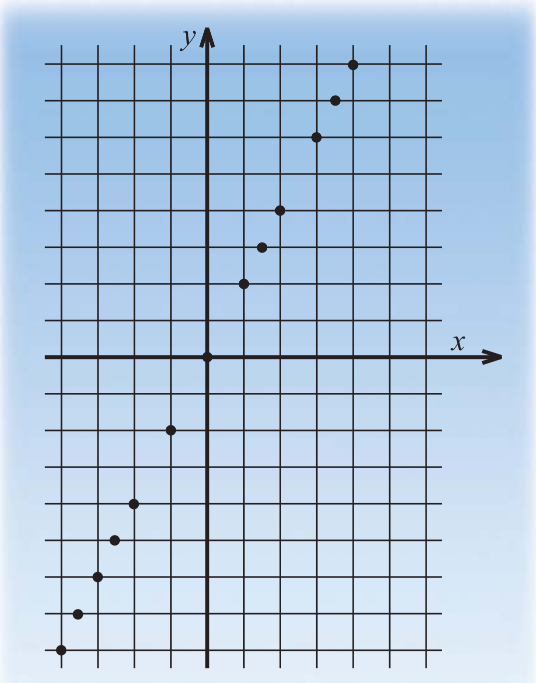
10. Еден авион се движи рамномерно праволиниски со брзина од 250 km на час. Претстави го изминатиот пат на авионот како функција на времето! Каква функција се добива?

II. 19. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y = ax$

Во функцијата $y = ax$, чија дефинициона област е множеството на сите реални броеви, параметарот a може да биде позитивен број, нула, или негативен број.

Нека е дадена функцијата $y = 2x$ каде што $x \in R$ и $a = 2 > 0$. За да го конструираме нејзиниот графикот, ја составуваме таблицата:

x	– 4	– 3,5	– 3	– 2,5	–2	–1	0	1	1,5	2	3	3,5	4
y	– 8	–7	– 6	– 5	– 4	– 2	0	2	3	4	6	7	8

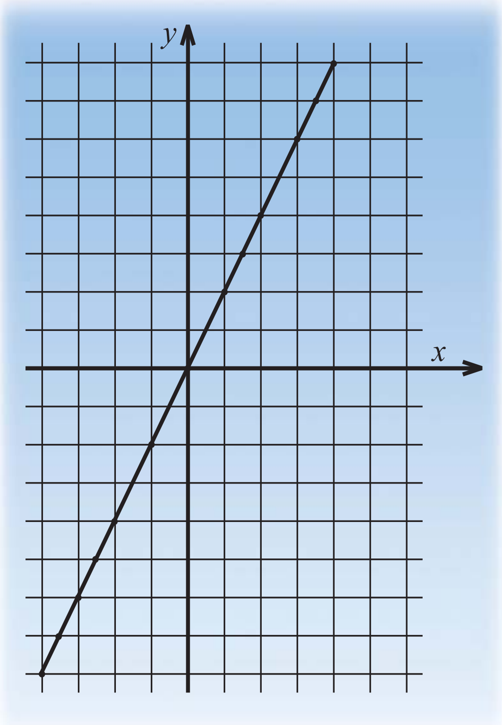


Цртеж 7

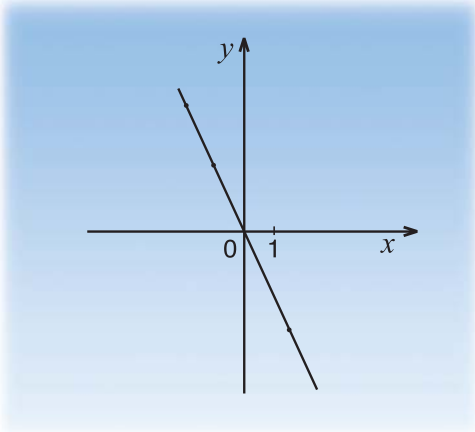
Ако секој пар соодветни вредности на променливите x и y од таблицата ги земеме за координати на точка, ќе ги добиеме точките: (–4; –8), (–3,5; –7), (–3; –6), (–2,5; –5), (–2; –4), (–1; –2), (0; 0), (1; 2), (1,5; 3), (2; 4), итн.

Ги конструираме тие точки во координатната рамнина (црт. 7). Забележуваме дека конструираните точки лежат на една права што минува низ координатниот почеток. Таа права (црт. 8) ќе претставува **график** на функцијата $y = 2x$, каде што $x \in R$.

На ист начин, можеме да го конструираме и графикот на функцијата $y = –2x$, каде што $x \in R$ и $a = –2 < 0$. Тој график (црт. 9), исто така, претставува права, која минува низ координантниот почеток.



Цртеж 8



Цртеж 9

Ако во формулата $y = ax$ е $a = 0$, тогаш графикот на функцијата $y = 0x$ (односно $y = 0$) во множеството на сите реални броеви е самата x - оска, бидејќи само точките од неа имаат ордината $y = 0$. Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Графикот на функцијата што е зададена со формулата* $y = ax,\ x \in R$ *е права, која минува низ координатниот почеток.*

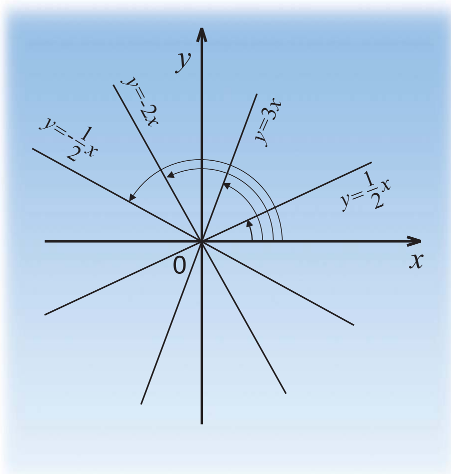
Ако дефиниционата област (доменот) D на функцијата $y = ax$ е некое подмножество од $R\left(D \subseteq R\right)$, тогаш и нејзиниот график ќе претставува, исто така, некое подмножество од точките на правата. На пример: полуправа, отсечка, или одделни точки.

На цртеж 10 претставени се графиците на четири функции:

$$y = \frac{1}{2}x,\ \ y = 3x,\ \ y = -2x \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

Гледаме: од вредноста на параметарот a зависи аголот што графикот на функцијата $y = ax$ го зафаќа со позитивната насока на x-оската. При $a > 0$ тој агол е остар, а при $a < 0$ тој е тап агол (црт. 10).

Затоа параметарот a се вика уште и **аглов коефициент на правата**, што е график на функцијата $y = ax$.



Цртеж 10

задачи

1. Нацртај ги графиците на функциите: а) $y = 3x$, б) $y = -3x$, в) $y = x$, г) $y = -x$, д) $y = \frac{3}{4}x$.

2. Низ кои квадранти минува графикот на функцијата $y = ax$, ако е: а) $a > 0$, б) $a < 0$?

3. Еден базен се полни од една цевка, која дава 12 литри вода во минута. а) Изрази го количеството вода (y) во базенот како функција од времето (x) на полнењето! б) Добиената функција претстави ја графички и од графикот прочитај колку литри вода ќе има во базенот по $3\frac{3}{4}$ часа од почетокот на неговото полнење?

4. Едно шише собира 0,6 литри пиво. Изрази го количеството пиво (y) во литри, како функција од бројот на шишињата (x). Што е дефинициона област на таа функција? Функцијата претстави ја графички!

5. Еден пешак минува по 4 km на час. Изминатиот пат изрази го како функција од времето, потоа добиената функција претстави ја графички!

6. Од 100 kg брашно се добиваат 120 kg леб. Изрази го количеството добиен леб (y) како функција од количеството брашно (x).

7. Електрична струја јака 1 ампер од растворот на сребрен нитрат одделува 1,118 mg сребро за 1 секунда. Изрази го количеството на одделеното сребро (y) како функција од времето (x).

II. 20. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y = ax + b$

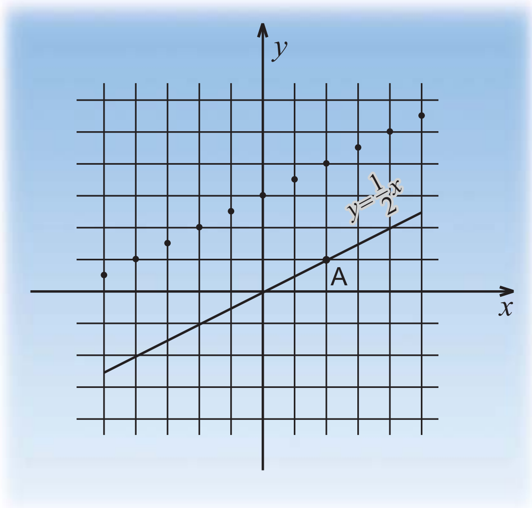
Нека функцијата е зададена со формулата $y = \frac{1}{2}x + 3$. За да го конструираме нејзиниот график, ја составуваме таблицата:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$

Потоа, во кординатната рамнина ги конструираме сите точки, чии координати се соодветните вредности на променливите x и y земени од таблицата.

Да видиме каде лежат така конструираните точки на цртеж 11.

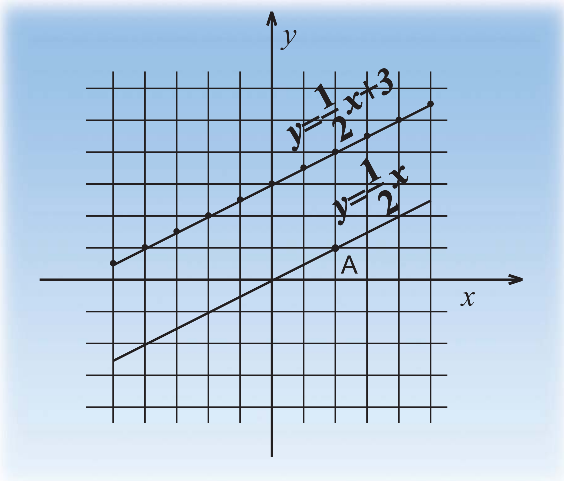
За таа цел во истиот координатен систем да го нацртаме и графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x$, за кој знаеме дека е права што минува низ координатниот почеток O(0, 0) и точката $A(2,1)$ (црт. 11).



Цртеж 11

Бидејќи која било вредност на изразот $y=\frac{1}{2}x+3$ секогаш е за 3 поголема од соодветната вредност на изразот $\frac{1}{2}x$, затоа ординатата на секоја точка од графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x+3$ ќе биде за 3 поголема од соодветната точка на графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x$.

Знаеме, графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x$ е права, значи и графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x+3$ е права. Таа е паралелна на правата $y=\frac{1}{2}x$ и лежи за 3 единици над неа во насока на y - оската. (црт. 12)



Цртеж 12

Во општ случај важи следнава:

Теорема: *Графикот на линеарната функција* $y=ax+b, x\in R$ *е права.*

Слично како кај функцијата $y = ax$ и тука важи: Ако дефиниционата област (доменот) на линеарната функција $y = ax + b$ не е множеството R на сите реални броеви, туку некое подмножество од R, тогаш и нејзиниот график, исто така, ќе биде некое подмножество од точките на правата, на пример: полуправа, отсечка, или одделни точки.

Бидејќи положбата на правата во рамнината е еднозначно определена со две различни точки, затоа за цртање на графикот на линеарната функција доволно е да се определат координатите само на две точки од графикот.

задачи

Нацртај ги графиците на следните функции:

1. а) $y=x+1$, б) $y=2x-3$.

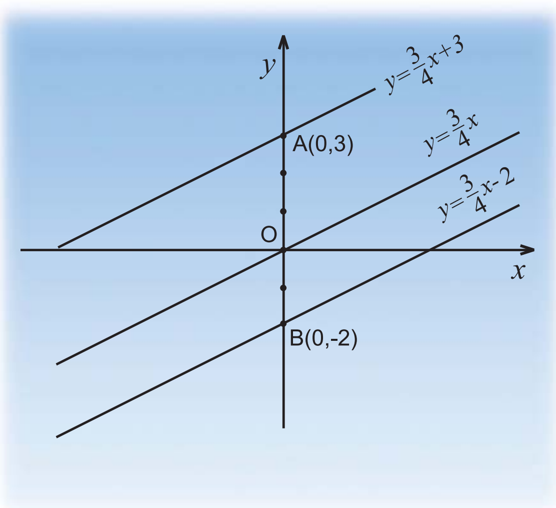
2. а) $y=-3x+0{,}5$, б) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

3. а) $y=-2x+4$, б) $y=4x-3$.

II. 21. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ГРАФИЦИТЕ НА НЕКОИ ЛИНЕАРНИ ФУНКЦИИ

Да видиме сега, како од вредностите на параметрите a и b зависи положбата на графикот на функцијата $y=ax+b$ во координатната рамнина.

На цртеж 13 нацртани се графиците на линеарните функции: $y=\frac{3}{4}x+3$, $y=\frac{3}{4}x$ и $y=\frac{3}{4}x-2$. Гледаме дека и трите функции имаат еден ист коефициент $a=\frac{3}{4}$, а се разликуваат само по слободниот член b.



Цртеж 13

Нивните графици се три паралелни прави кои ја сечат y- оската соодветно во точките A(0; 3), O(0; 0) и B(0; –2), чии ординати се еднакви на слободниот член b во формулата на соодветната функција.

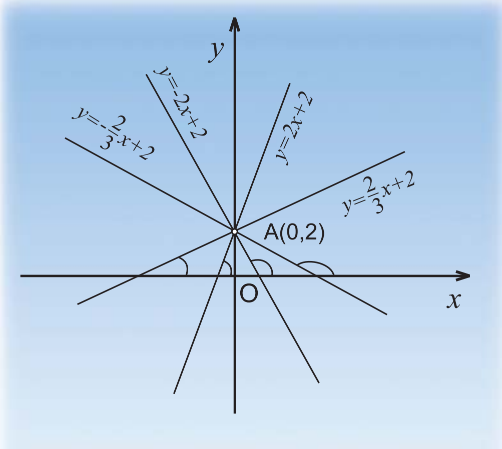
Значи, графикот на линеарната функција $y=ax+b$ ја сече y - оската во точката $(0, b)$, чија ордината е еднаква на b.

На цртеж 14 нацртани се графиците на функциите:

$$y=\frac{2}{3}x+2,\ \ y=2x+2,\ \ y=-2x+2 \text{ и } y=-\frac{2}{3}x+2.$$

Гледаме, нивните графици ја сечат y - оската во иста точка $A(0,2)$ (сите имаат слободни членови $b=2$), а со позитивната насока на x-оската зафаќаат различни (остри или тапи) агли.

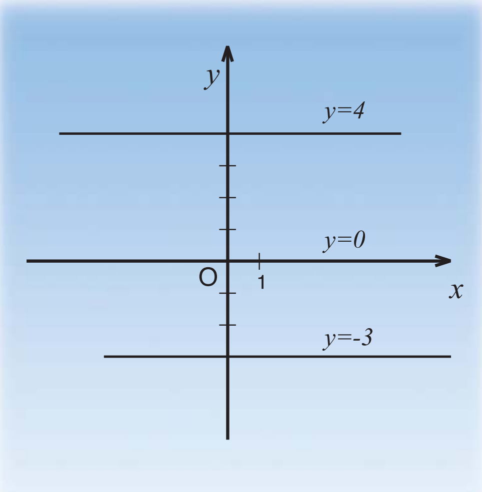
Ако $a > 0$, графикот на функцијата $y = ax + b$ ($y = \frac{2}{3}x + 2$ и $y = 2x + 2$) со позитивната насока на x-оската гради остар агол; а ако $a < 0$ ($y = -\frac{2}{3}x + 2$ и $y = -2x + 2$), тогаш тој агол е тап (црт. 14).



Цртеж 14

Коефициентот a се вика **аглов коефициент** на правата, што е график на функцијата $y = ax + b$.

Ако $a = 0$, тогаш формулата на линеарната функција го добива видот $y = 0x + b$, т.е. $y = b$. Тогаш на која било вредност на аргументот x соодветствува една иста вредност на функцијата - еднаква на b. Во таков случај, графикот на функцијата $y = b$ ќе биде права што е паралелна со апцисната оска, а ќе ја сече ординатната оска во точка, чија ордината е еднаква на b. На пример, графиците на функциите $y = 4$ и $y = -3$ нацртани се на цртеж 15.



Цртеж 15

Ако $a = 0$ и $b = 0$, тогаш линеарната функција го добива видот $y = 0x + 0$, односно $y = 0$.

Во таков случај, за произволни вредности на аргументот x, функцијата секогаш добива вредност нула. Бидејќи, само точките од апцисната оска имаат ординати нула, затоа графикот на функцијата $y = 0$, ќе биде самата апсцисна оска (црт. 15).

задачи

1. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите: $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 1$. Каква заемна положба имаат графиците на тие функции?

2. Нацртај ги графиците на функциите $y = 2x - 4$ и $y = -x + 5$ во ист координатен систем. Определи ги координатите на пресечната точка на графиците!

3. Нацртај го графикот на функцијата $y=1{,}5x - 6$. Одговори на прашањата: 1^o. За кои вредности на x функцијата добива: а) вредност нула, б) позитивни вредности, в) негативни вредности? 2^o. Како се менува променливата y (расте или намалува) кога x расте? 3^o На кое множество се пресликува интервалот [4; 8]?

4. Без да го нацрташ го графикот на функцијата $y=-2x+3$ утврди која од следните точки му припаѓа на графикот: $A(0;3)$, $B(-1;4)$, $C(2,-1)$, $D(3;0)$.

5. Без да го нацрташ го графикот на функцијата $y=-2x+4$ одреди во која точка графикот ја сече: а) y - оската, б) x - оската.

6. Нацртај го графикот на функцијата $y=-3x+6$. За која вредност на x изразот $-3x+6$ добива вредност нула? Одреди го множеството вредности на x, за кои е:
а) $-3x+6>0$, б) $-3x+6<0$.

II. 22. РАСТЕЊЕ, ОПАЃАЊЕ И НУЛА НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

За бројните функции ќе воведеме еден нов поим - **нула на функција**.

Нека функцијата $f:R\rightarrow R$ е зададена со формулата $y=f(x)$. Нули на функцијата f ги викаме оние вредности на аргументот x за кои вредноста на функцијата е нула, т.е. $x=\alpha$ е нула на функцијата $y=f(x)$, ако $f(\alpha)=0$. Значи, нули на функцијата $y=f(x)$ се сите корени на равенката $f(x)=0$.

Линеарната функција $y=ax+b,\ a\neq 0$, има единствена нула $x=-\dfrac{b}{a}$ која е решение на равенката $ax+b\neq 0$. Функцијата на права пропорционалност $y=ax,\ a\neq 0$ има исто така единствена нула и таа е $x=0$.

За бројните функции исто така, се воведуваат, и поимите за растење и опаѓање на една функција. Меѓутоа, овие поими ние ќе ги дефинираме само за линеарните функции.

Дефиниција. *За една линеарна функција $y=f(x)$ велиме дека е **растечка**, ако од условот $x_1<x_2$ следува дека $f(x_1)<f(x_2)$. За една линеарна функција $y=f(x)$ велиме дека е **опаѓачка**, ако од условот $x_1<x_2$ следува дека $f(x_1)>f(x_2)$.*

Пример 1. Функцијата $y=2x-3$ е растечка, бидејќи од $x_1<x_2$ следува

$$f(x_2)-f(x_1)=(2x_2-3)-(2x_1-3)=2x_2-2x_1=2(x_2-x_1)>0,$$

односно $f(x_1)<f(x_2)$.

Пример 2. Функцијата $y=-3x+1$ е опаѓачка, бидејќи од $x_1<x_2$ следува

$$f(x_2)-f(x_1)=(-3x_2+1)-(-3x_1+1)=-3x_2+3x_1=3(x_1-x_2)<0,$$

односно $f(x_1)>f(x_2)$.

Нацртај ги графиците на функциите од пример 1 и 2. Од нив забележуваш дека за растечката функција $y=2x-3$ кога x го зголемуваш тогаш и вредноста на функцијата ќе се зголеми, додека за опаѓачката функција $y=-3x+1$, кога x го зголемуваш, тогаш вредноста на функцијата се намалува.

Теорема 1. *Ако коефициентот пред x во една линеарна функција е позитивен број, тогаш функцијата е растечка, а ако коефициентот пред x е негативен број, тогаш функцијата е опаѓачка.*

Случајот кога коефициентот пред x во една линеарна функција е нула не е опфатен со претходната теорема. За произволна вредност на аргументот константната функција прима иста вредност, т.е. таа е константна. Константните функции не се ниту растечки ниту опаѓачки, што може да се согледа од дефиницијата за растечка односно опаѓачка функција.

задачи

1. Најди ги нулите на функцијата а) $y=3x+4$, б) $y=-3x+2$, в) $y=4x$.
2. Дали се растечки или опаѓачки следните функции
   а) $y=7x+3$, б) $y=-3x$, в) $y=5$, г) $y=-4x+1$, д) $y=x+7$?
3. Докажи ја теорема 1.

II. 23. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Нека е дадена некоја равенка со една непозната:

$$f(x)=g(x). \qquad (1)$$

Знаете, изразите на двете страни на равенката (1) се одредени функции од непознатата x: $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

Решавањето на равенките со една непозната (1) може да ја добие следнава проста геометриска интерпретација:

Нека функциите $y=f(x)$ и $y=g(x)$ се графички претставени во ист координатен систем xOy. Нивните графици можат да имаат една или повеќе заеднички точки или да немаат ниту една заедничка точка. Апсцисите на заедничките точки (ако има такви) на графиците на двете функции $f(x)$ и $g(x)$ се оние вредности на x за кои нивните соодветни вредности се еднакви. А тие вредности на x се токму бараните решенија на равенката (1).

Ваквиот начин на одредување на решенијата на равенката (1) се вика нејзино **графичко решавање**.

Ние, тука ќе се задржиме само на графичкото решавање на линеарните равенки со една непозната.

Нека линеарната равенка со една непозната е дадена во општ вид

$$ax+b=0. \qquad (2)$$

Гледаме, левата страна на равенката (2) претставува линеарна функција $y = ax+b$, а, исто така, и десната страна е линеарна функција $y = 0$, чиј график е x - оската.

Според тоа, графички да се реши равенката (2), значи, да се одреди апсцисата на пресекот на правата $y = ax+b$ и x - оската.

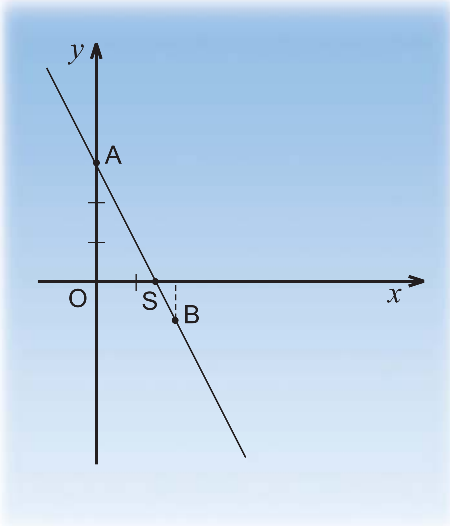
Ако $a\neq 0$, графикот на функцијата $y=ax+b$ ја сече x - оската во една единствена точка со апсциса $x=-\frac{b}{a}$. Таа апсциса, всушност, е и нула на линеарната функција, бидејќи за таа вредност на x вредноста на функцијата е еднаква на нула.

Задача 1. Да се реши графички равенката $-2x+3=0$.

Решение: Го цртаме графикот на линеарната функција $y=-2x+3$. Бидејќи тој е права, доволно е да конструираме само две точки од него. Да земеме, на пример, точки со апсциси $x=0$ и $x=2$. За $x=0$ имаме $y=-2\cdot 0+3=3$, а за $x=2$ имаме $y=-2\cdot 2+3=-1$. Правата што минува низ точките A(0, 3) и B(2, –1) е график на функцијата $y=-2x+3$ (црт.16).

За да ја решиме графички равенката $-2x+3=0$, треба да ја одредиме апсцисата на пресечната точка на правата AB и x - оската.

Од цртежот 16 гледаме дека тоа е точката S со апсциса $1\frac{1}{2}$. Тој број е бараното решение на дадената равенка.



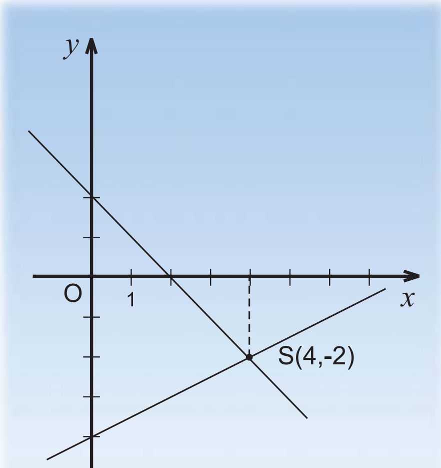
Цртеж 16

Задача 2: Да се реши графички равенката $\frac{x}{2}-4=2-x$.

Решение: Дадената линеарна равенка може графички да се реши и без да се доведува истата во општ вид.

Гледаме, двете нејзини страни се две линеарни функции $y=\frac{x}{2}-4$ и $y=2-x$. Ги цртаме нивните графици во ист координатен систем xOy. Од цртежот 17 ги одредуваме координатите на пресечната точка S на нацртаните графици. Таа има координати S(4, –2) и покажува дека за $x=4$ двете функции добиваат еднаква вредност $y=-2$.

Според тоа, бараното решение на дадената равенка е $x=4$ - апсцисата на пресечната точка S на двата графика.



Цртеж 17

Задача 3: Да се реши графички равенката $2x+3=2x$.

Решение: Кога ќе ги нацртаме графиците на функциите $y=2x+3$ и $y=2x$, забележуваме дека тие се две паралелни прави и немаат ниту една заедничка точка. Според тоа, дадената равенка нема решение.

задачи

Реши ги графички равенките:

1. а) $2x-3=0$, б) $\frac{x}{3}+5=0$, в) $x-1=0$.

2. а) $-\frac{x}{2}+3=0$, б) $\frac{3}{4}x-2=0$, в) $-x+3=0$.

3. а) $3x=-x+4$, б) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=x+1$.

4. а) $3x-2=7$, б) $-2x+5=x$.

5. а) $\frac{x-2}{5}=\frac{x}{5}+1$, б) $\frac{x+4}{2}=\frac{x}{2}+2$.

6. а) $-2x+3=2(1-x)$, б) $3x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

задачи

ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - II

1. Провери дали: а) $x = 1$ е решение на равенката $2x-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$, б) $x=-2$ е решение на равенката $(x+1)(x+2)=0$.

2. Реши ги равенките: а) $(x+7)(x+3)=x(x-11)$, б) $\frac{1}{2}(x-4)-3=\frac{x}{2}$, в) $3x-14-(5x-8)=9x-25$.

3. Испитај дали се еквивалентни равенките:
а) $1-\frac{x+1}{5}=2x$ и $5-(x+1)=10x$, б) $x-3=1$ и $x^2-1=15$.

4. Производот на два последователни цели броја е за 26 помал од производот на наредните два последователни броја. Кои се тие броеви?

5. Провери за кои вредности на $x\in\{-5,-4,-2,0,1,3,4,5\}$ неравенството $3x - 5 > 6 - 2x$ е задоволено.

6. Дадени се интервалите $A = (-3, 3)$, $B = [0, 8]$, и $C = (-\infty, 5)$. Одреди ги интервалите:
а) $A\cap B$, б) $A\cup B$, в) $B\cap C$, г) $B\cup C$.

7. Реши ги неравенките: а) $3x-8<2(x-1)$, б) $\frac{x}{2}-\frac{x-2}{3}>x-1$.

8. Смени ги местата на левата и десната страна на неравенката:
а) $5-x>-2x+1$, б) $12<-4x$, в) $2>2x$.

9. Реши ги системите линеарни неравенки со една непозната:
а) $\begin{cases}3-x>x\\ x<4-x\end{cases}$, б) $\begin{cases}x<2x-1\\ 2+3x>x+4\end{cases}$, в) $\begin{cases}x<-2\\ 4<x\end{cases}$.

10. Нека $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. а) Одреди ги сите функции од A во B, б) сите инјекции од A во B.

11. Нацртај го графикот на функцијата $y = 3x - 2$. Од цртежот одреди за кои вредности на x: а) функцијата има вредност нула, б) функцијата добива вредност 4.

12. Нацртај го графикот на функцијата $y = -2x + 1$. Од графикот одреди за кои вредности на x функцијата добива: а) позитивни вредности, б) негативни вредности.

13. Ако на секоја клупа во еден дел од паркот седат по 4 деца, за 2 деца ќе нема место. Но, ако на секоја клупа седат по 5 деца, тогаш една клупа ќе остане празна. Колку деца биле и колку клупи имало?

14. Докажи дека полупериметарот на триаголник е поголем од која било страна на триаголникот.

15. Нацртај го графикот на функцијата $y = 4 - x$. Со помош на графикот, реши ги следниве равенки и неравенки: а) $4 - x = 0$, б) $4 - x = 3$, в) $4 - x > 0$, г) $4 - x < 0$.

16. Функцијата е зададена со формулата $y = -x + 2$ на множеството $D = [-2, 5]$. Нацртај го графикот на функцијата и одреди го множеството на нејзините вредности.

17. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2x - 7$. Со помош на графикот утврди за колку единици се зголемува вредноста на y, ако вредноста на x се зголеми:
а) од 2 до 5 , б) од -3 до 1.

18. Селата А и В се оддалечени едно од друго 7 km. Еден селанец тргнал од селото В во насока што е спротивна на насоката кон А, и се движел со брзина 4, 5 km на час.
а) Изрази ја оддалеченоста (y) на селанецот од селото А, како функција на времето (x), б) Нацртај го графикот на добиената функција.

19. Ако бројот на степените што ги покажува термометарот со Целзиусова скала, го означиме со x, а бројот на степените што го покажува во тој момент термометарот со Фаренхајтовата скала, го означиме со y, тогаш зависноста помеѓу тие два броја може да се изрази со следнава формула: $y = \frac{9}{5}x + 32$. Графички претстави ја таа функција и од графикот определи: колку степени ќе покажува термометарот со Фаренхајтовата скала, ако во тој момент термометарот на Целзиусовата скала покажува $x = 15°C$. Определи ја температурата на Целзиусовата скала, кога Фаренхајтовиот термометар покажува 0°F.

20. Една када во која има 420 литри вода почнува да се празни преку една цевка, од која истекуваат по 8 литри вода во 1 минута. Изрази го количеството на вода во кадата како функција од времето на празнењето! Нацртај го графикот на добиената функција! Од нацртаниот график определи колку литри вода ќе останат во кадата по 34 минути. Прочитај од графикот за кое време ќе се испразни кадата!

задачи

ЗА САМОКОНТРОЛА - II

1. Колку решенија има равенката $x(x-3)=0$ и кои се тие?

2. Реши ги равенките: а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=7$, б) $1-\frac{2x-3}{4}=\frac{x}{2}$,

в) $4(y+3)(3y-2)+3(1-4y)(y-1)=59$.

3. Каква равенка се добива ако: а) кон двете страни на дадена равенка додадеме еден ист број, б) двете страни на равенката ги помножиме со еден ист број $k \neq 0$?

4. Од еден топ платно отсечени се $\frac{2}{5}$ од неговата должина и останало уште 24 метри. Колку метри платно имало во топот?

5. Таткото сега е 4 пати постар од својата ќерка, а пред 3 години тој бил 5 пати постар од неа. По колку години има сега секој од нив?

6. Дадено е едно неточно бројно равенство. Какво равенство ќе добиеш (точно или неточно) ако двете негови страни ги помножиш со: а) бројот нула, б) број различен од нула?

7. Дадени се интервалите $A=(-2, 3]$ и $B=[0, 8)$. Одреди: а) ја нивната унија, б) го нивниот пресек.

8. Реши ги неравенките: а) $4(x+1)>12$, б) $-3x+2<-5$.

9. Реши го системот линеарни неравенки со една непозната

а) $\begin{cases} x>5 \\ x>-3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x<6 \\ x<5 \end{cases}$, в) $\begin{cases} -x>4 \\ x>6 \end{cases}$, г) $\begin{cases} x>-2 \\ x<0 \end{cases}$.

10. Графикот на функцијата $y = kx + b$ минува низ точката $A(-1, 3)$ и е паралелен со правата $x - 3y = 5$. Одреди ги коефициентите k и b.

11. Одреди ги координатите на точката во која графикот на равенката $3x - 4y = 12$ ја сече: а) x –оската, б) y –оската.

12. За која вредност на коефициентот a, графикот на функцијата $y = ax - 3$ ќе минува низ точката $A(-1, -5)$? Потоа нацртај го графикот.

Тема 3
СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

А ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

III. 1. ЕКВИВАЛЕНТНИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Поимот еквивалентни равенки се однесува и за равенките со две непознати, имено:

Две линеарни равенки со две непознати се еквивалентни ако множествата од нивните решенија се совпаѓаат.

Да забележиме дека: за равенките со две непознати важат истите својства (теореми) што важат и за равенките со една непозната.

Според тоа, равенките:

$x-y=3,\quad x=y+3,\quad x-y-3=0$ се еквивалентни.

Нека е дадена равенката $2x+y=5.$ (1)

Една од непознатите, во неа, да ја изразиме со помош на другата непозната, на пример, непознатата y со помош на x.

Ако членот $2x$ го пренесеме од левата на десната страна, ја добиваме равенката

$$y = 5 - 2x, \qquad (1')$$

која е еквивалентна на равенката (1).

Ако непознатата x ја изразиме со помош на непознатата y добиваме равенка

$$x=-\frac{1}{2}y+2{,}5$$

која, исто така, е еквивалентна на равенката (1).

Во општ случај ако во равенката $ax+by=c$ е $a\neq 0$, тогаш можеме да ја доведеме до еквивалентна равенка од облик

$$x=ky+n, \qquad (2)$$

а ако $b \neq 0$, тогаш можеме да ја доведеме до еквивалентна равенка од облик

$$y = kx + n. \qquad (3)$$

Сега се наметнува следното прашање. Ако се дадени две равенки од ист облик, на пример, (2), (3) или, пак, $ax+by=c$, како ќе знаеме дали тие се еквивалентни или не се еквивалентни? Одговорот ни го даваат следниве теореми.

Теорема 1. *Равенките* $y=kx+n$ *и* $y=k_1x+n_1$ *се еквивалентни само ако* $k=k_1$ *и* $n=n_1$.

Доказ. Да претпоставиме дека равенките $y=kx+n$ и $y=k_1x+n_1$ се еквивалентни. Паротт $(0,n)$ е решение на првата равенка, па мора да е решение и на втората равенка. Значи, мора да важи $n=k_1 \cdot 0+n_1$, т.е. $n=n_1$. Паротт $(1,k+n)$ е решение на првата равенка, па мора да е решение и на втората равенка. Затоа $k+n=k_1+n_1$. Користејќи дека $n=n_1$ добиваме дека и $k=k_1$, и со тоа доказот е завршен.

Аналогно се докажува и следнава

Теорема 2. *Равенките* $x=py+q$ *и* $x=p_1y+q_1$ *се еквивалентни само ако* $p=p_1$ *и* $q=q_1$.

Може да се докаже и следнава

Теорема 3. *Равенките* $ax+by=c$ *и* $a_1x+b_1y=c_1$ *се еквивалентни само ако постои број* k *таков што* $a_1=ka$, $b_1=kb$ *и* $c_1=kc$.

Правите $ax+by=c$ и $(ka)x+(kb)y=kc$ имаат ист коефициент на правец и ист слободен член, па затоа тие се поклопуваат. Теорема 3 тврди дека ако двете прави $ax+by=c$ и $a_1x+b_1y=c_1$ се совпаѓаат, тогаш нивните коефициенти се пропорционални.

задачи

1. Кога две линеарни равенки со две непознати се еквивалентни?

2. Најди четири решенија на равенката:

а) $0x+3y=12$, б) $2x+0y=6$.

3. Провери дали равенките се еквивалентни:

а) $x+y=2$ и $3x+3y=6$, б) $2x+y=8$ и $2x+y+2=10$.

4. Изрази ја непознатата y со помош на x од равенката:

а) $2x+3y=5$, б) $3x-y=1$, в) $2(x-y)=3x+y$.

5. Изрази ја непознатата x со помош на y од равенката:

а) $2x-y=4$, б) $y=3x-5$, в) $x+y=2x-y$.

6. Докажи ја теорема 2.

7. Докажи ја теорема 3.

III. 2. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Нека се дадени равенките со две непознати:

$$\frac{2x-y}{3}=\frac{x}{2}-1, \qquad (1)$$

$$3(x-2)-2(y-5)=x-y, \qquad (2)$$

$$(x+3)^2=x(x+1)-2(y-5). \qquad (3)$$

Ако двете страни на равенката (1) ги помножиме со бројот 6 (НЗС за 3 и 2) ќе ја добиеме равенката $2(2x-y)=3x-6$.

Потоа, по ослободување од заградата и групирање на членовите што содржат непознати, на левата страна, а на другите членови на десната страна, ја добиваме следната равенка:

$$x-2y=-6, \qquad (1')$$

која е еквивалентна на равенката (1).

На сличен начин и равенките (2) и (3) можеме да ги трансформираме соодветно во равенките:

$$2x-y=-4, \qquad (2')$$

$$5x+2y=1. \qquad (3')$$

Гледаме, секоја од дадените равенки (1), (2), (3) е еквивалентна на некоја равенка од видот

$$ax+by=c, \qquad (4)$$

каде што a, b и c се точно определени реални броеви.

Дефиниција. *Секоја равенка со две непознати x и y, која може да се трансформира во еквивалентна равенка од видот:*

$$ax+by=c \qquad (4)$$

каде што a, b и c се дадени реални броеви, при што барем еден од броевите a и b е различен од нула, се вика ***линеарна равенка со две непознати****.*

Броевите a и b се викаат **коефициенти** пред непознатите, a c – **слободен член**.

Според усвоената дефиниција, равенката $0x+0y=c$ не се смата за линеарна, бидејќи и $a=0$ и $b=0$.

Решение на една линеарна равенка со две непознати, како и кај секоја равенка со две непознати, се вика секој пар броеви (x_0, y_0) *за кој линеарната равенка преминува во точно бројно равенство.*

Знаете дека: секој подреден пар броеви (x_0, y_0) геометриски може да се претстави со една точка на координатната рамнина. Според тоа, секое решение на линеарната равенка (4) геометриски може да се интерпретира со една точка од рамнината xOy, а множеството решенија на равенката (4) – со некое множество точки од истата рамнина.

Множеството на сите точки во координатната рамнина, чии координати (сметани како подредени парови броеви) се решенија на равенката (4), се вика **график на линеарната равенка** со две непознати.

Ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема: *Графикот на секоја линеарна равенка со две непознати е права.*

Доказ. Линеарната равенка со две непознати $ax+by=c$ при $b\neq 0$ може да се трансформира во видот

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}. \qquad (4')$$

Тоа го постигнуваме кога членот ax ќе го пренесеме на десната страна со спротивен знак, а потоа двете страни на равенката ќе ги поделиме со бројот $b\neq 0$.

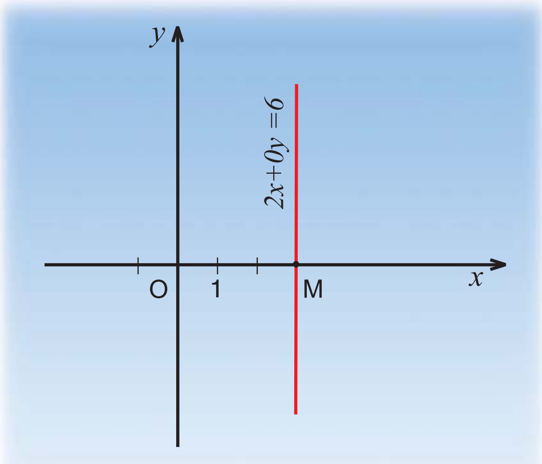
Кога равенката (4) ја трансформираме во видот (4') велиме дека непознатата y ја изразуваме со помош на x, или како функција од x.

Знаеме дека, функцијата што е зададена со формулата (равенката) (4') е линеарна функција, чиј график е права. Таа права е график и на линеарната равенка (4).

Сега да претпоставиме дека $b=0$, но $a\neq 0$. Тогаш равенката (4) го добива видот:

$$ax+0\cdot y=c. \qquad (5)$$

При $a\neq 0$ имаме $x=\frac{c}{a}$. Значи, равенката (5) преминува во точно бројно равенство за секој пар броеви, во кој $x=\frac{c}{a}$, а y – произволен број, на пример, $\left(\frac{c}{a},3\right),\left(\frac{c}{a},-2\right),\left(\frac{c}{a},0\right),\left(\frac{c}{a},1\right)$ итн.



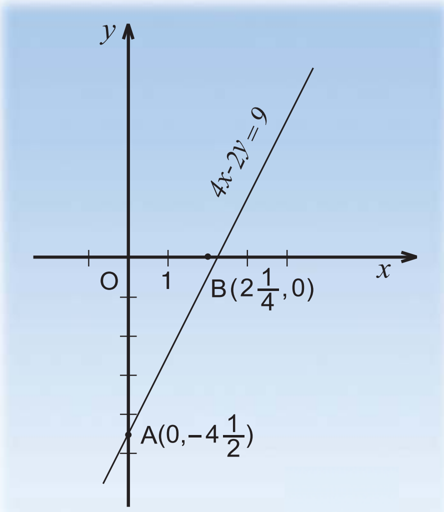
Цртеж 1

Според тоа, график на таа равенка е множеството точки на кои апцисата им е еднаква на $\frac{c}{a}$, а ординатата – произволен реален број. Множеството од таквите точки образува права што минува низ точката $M\left(\frac{c}{a},0\right)$ и е паралелна на y–оската.

На пример, на црт. 1 е нацртан графикот на линеарната равенка $2x+0y=6$.

Значи, и при $b = 0$, но $a \neq 0$ графикот на линеарната равенка (4), исто така, е права.

Бидејќи за конструкцијата на правата е доволно да знаеме најмалку две нејзини точки, затоа графикот на линеарната равенка можеме да го нацртаме и само со помош на две точки.



Цртеж 2

Пример. Да се нацрта графикот на равенката $4x - 2y = 9$.

Решение. За $x = 0$ добиваме $-2y = 9$ или $y = -4\frac{1}{2}$, а за $y = 0$ добиваме $4x = 9$ или $x = 2\frac{1}{4}$. Значи, паровите броеви $\left(0, -4\frac{1}{2}\right)$ и $\left(2\frac{1}{4}, 0\right)$ се две решенија на дадената равенка. Ги конструираме точките $A\left(0, -4\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(2\frac{1}{4}, 0\right)$ и низ нив повлекуваме права. Таа права е график на равенката $4x - 2y = 9$ (црт. 2).

задачи

1. Упрости ги равенките: а) $3(x - 1) - 5(y + 3) = 2x - y$, б) $\frac{x-2}{3} - \frac{y+1}{2} = x - y + 1$.

2. Најди неколку решенија на равенката: а) $x - 4y = 7$, б) $3x + y = 4$.

3. Дадена е равенката $2x - 5y = 9$. Најди го она решение, за кое:
а) $x = 0$, б) $y = 0$, в) $x = -1$, г) $y = 2$.

4. Нацртај ги графиците на равенките: а) $x + 2y = 6$, б) $x - y = 3$, в) $3x - y + 1 = 0$.

5. Нацртај го графикот на равенката: а) $0x + 2y = 5$, б) $3x - 0y = 12$, в) $2x + 0y = 0$.

6. Нацртај го графикот на равенката $2x - y = 5$ и од него одреди ги решенијата на равенката, за кои: а) $x = 0$, б) $y = 0$, в) $x = 3$, г) $y = -1$.

7. На графикот на равенката $x + 3y = -2$ лежи точка М со апциса –5. Одреди ја ординатата на таа точка!

8. Во равенката $3x + by = 5$ одреди го коефициентот b, така што графикот на равенката да минува низ точката $C(-1, 2)$.

9. За која вредност на c графикот на равенката $2x - y = c$ ќе минува низ точката $T(-1,5)$?

10. Равенките $2x - 4y = 6$ и $x - 2y = 3$ се еквивалентни. Што можеме да кажеме за нивните графици?

6 СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

III. 3. СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Да ја разгледаме следнава задача:

Задача: *Збирот на два броја е еднаков на* 11, *а разликата на првиот со вториот е* 3. *Кои се тие броеви*?

Непознатите броеви да ги означиме со буквите x и y. Тогаш, условите што треба да ги задоволуваат броевите x и y лесно ги изразуваме со равенките

$$x+y=11 \text{ и } x-y=3. \qquad (1)$$

Знаеме, секоја од тие две равенки има бесконечно многу решенија, но решение на нашата задача ќе биде само оној пар броеви, за кој и двете равенки преминуваат во точни бројни равенства.

Да го побараме тој пар броеви.

За таа цел ќе најдеме некои од решенијата на секоја од двете равенки.

За првата равенка $x+y=11$, односно $y=11-x$ еве некои од нив:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$y=11-x$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	...

и за втората равенка $x-y=3$, т.е. $y=x-3$.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$y=x-3$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...

Од таблиците гледаме дека двете равенки имаат само едно заедничко решение $x=7$, $y=4$. Според тоа, бараните броеви во задачата се 7 и 4.

Навистина $7+4=11$ и $7-4=3$.

Понатаму, ќе докажеме дека равенките (1) не можат да имаат други заеднички решенија.

Постојат многу задачи чие решавање се сведува на одредување на заедничките решенија на две равенки со две непознати.

Ако пред нас е поставена задача да ги одредиме заедничките решенија на две равенки со едни исти непознати, тогаш велиме дека тие две равенки образуваат **систем равенки со две непознати**.

За да означиме дека равенките (1) образуваат систем равенки ги пишуваме една под друга и од левата страна поставуваме голема заграда, на пример:

$$\begin{cases} x+y=11 \\ x-y=3 \end{cases}. \qquad (1')$$

Системот равенки со две непознати симболички го означуваме:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

каде што $f(x,y)$ и $g(x,y)$ се дадени изрази со две променливи (непознати) x и y.

Дефиниција. *Секој пар вредности на непознатите (x_0, y_0), за кој и двете равенки на системот (2) преминуваат во точни бројни равенства, се вика* ***решение*** *на системот равенки.*

На пример, најдовме дека системот равенки (1') има едно решение: (7, 4).

Да се реши системот равенки, значи, да се одреди множеството од неговите решенија.

Множеството решенија на едната равенка на системот (2) да го означиме со M_1, а множеството решенија на другата равенка – со M_2. Тогаш множеството M од заедничките елементи на M_1 и M_2, ќе претставува пресек од M_1 и M_2, т. е. $M = M_1 \cap M_2$.

Ако и двете равенки на системот (2) се линеарни равенки со две непознати, тогаш тој уште се вика и **систем линеарни равенки со две непознати**.

Секој систем линеарни равенки со две непознати може да се доведе во општ вид:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (3)$$

каде a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 се дадени броеви.

Броевите a_1, b_1, a_2 и b_2 се викаат **коефициенти** пред непознатите, а c_1 и c_2 – **слободни членови** на системот (3).

задачи

1. Што е решение на систем равенки?

2. Кој е потребен и доволен услов парот (x_0, y_0) да е решение на системот равенки

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0\ ? \end{cases}$$

3. Провери дали паровите броеви: (–3, 2), (3, 9), (0, –2) и (–1, 1) се решенија на системот равенки $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2y-x=-2\,. \end{cases}$

4. Системот линеарни равенки од обликот $\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$ се вика **хомоген систем**. Покажи дека хомогениот систем секогаш има барем едно решение. Кое е тоа решение?

5. Ако знаеш дека парот (1, 2) е решение на системот равенки $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$, најди едно решение за системот $\begin{cases} y+2x=5 \\ 2y-x=0\,. \end{cases}$

(**Упатство**. На кој начин е добиен новиот од почетниот систем?)

III. 4. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Видовме дека графикот на секоја линеарна равенка со две непознати

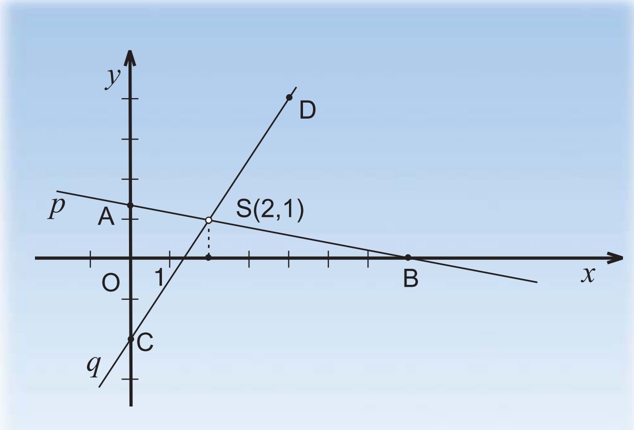
$$ax+by=c, \qquad (1)$$

каде што барем еден од коефициентите a и b е различен од нула, е некоја права p.

Нека е даден системот равенки

$$\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \qquad (2)$$

Да ги конструираме графиците на двете равенки во системот (2) во ист координатен систем (црт. 3). Гледаме дека график на првата равенка е правата p што минува низ точките $A\left(0,\frac{7}{5}\right)$ и B(7, 0) а график на втората равенка е правата q што минува низ точките C(0,–2) и D(4, 4).



Цртеж 3

Координатите на точките од правата p ни го даваат множеството на сите решенија на равенката $x + 5y = 7$, а координатите на точките на правата q ни го даваат множеството на сите решенија на втората равенка $3x-2y=4$ во системот (2). Според тоа, координатите на заедничката точка (S) на двете прави p и q ќе ни го дадат заедничкото решение на двете равенки, односно решението на дадениот систем равенки (2).

Од цртежот 3 гледаме: правите p и q имаат само една заедничка точка S, чии координати се $x=2, y=1$.

Така наоѓаме дека дадениот систем линеарни равенки (2) има единствено решение – парот броеви (2, 1).

Ваквиот начин на решавање на системите линеарни равенки со две непознати се вика нивно **графичко решавање**.

Како што гледаме графичкото решавање на систем линеарни равенки со две непознати се состои во одредување на координатите на заедничките точки на две прави – графици на равенките во системот, нацртани во ист координатен систем.

Знаете дека две прави во рамнината можат или да се сечат, или да се паралелни, или да се совпаѓаат (специјален случај на паралелност). Кај разгледаниот систем (2) графиците на равенките беа прави што се сечат во точката S(2, 1) (црт. 3). Видовме, системот (2) има единствено решение (2, 1).

Да ги разгледаме и преостанатите два случаја.

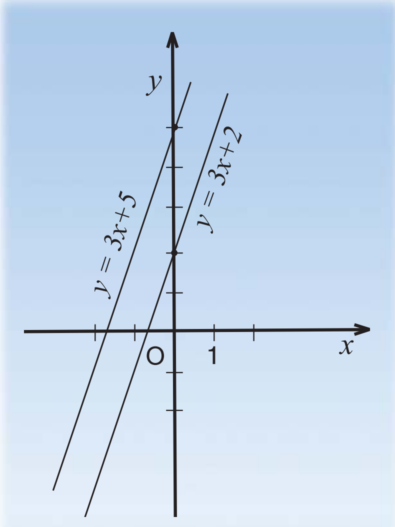
Пример 1. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 6x - 2y = -4 \end{cases} \qquad (3)$$

Ако од равенките непознатата y ја изразиме како функција од x, го добиваме системот:

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 3x + 2\ . \end{cases} \qquad (3')$$

Гледаме, правите што се графици на равенките во системот (3) имаат еднакви аглови коефициенти, а различни слободни членови. Тоа значи, дека тие се паралелни и ја сечат y -оската во точките (0, 5) и (0, 2) (црт. 4). Според тоа, правите $y = 3x + 5$ и $y = 3x + 2$ немаат заеднички точки. Затоа, системот (3'), односно (3) нема решение.



Цртеж 4

Дека дадениот систем равенки (3) нема решение, можеме да се увериме и на овој начин: Ако двете страни на втората равенка во системот (3) ги поделиме со 2, го добиваме системот

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 3x - y = -2\ . \end{cases} \qquad (3'')$$

Овој систем нема решение, бидејќи изразот $3x - y$ за едни исти вредности на x и y не може да добие различни вредности –5 и –2. Според тоа и дадениот систем равенки нема решение.

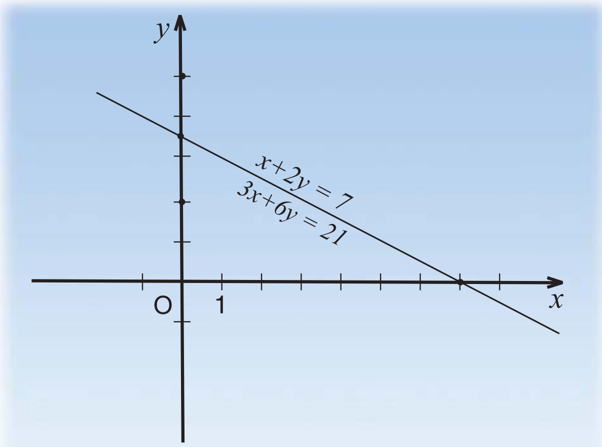
Пример 2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 6y = 21\ . \end{cases} \qquad (4)$$

Ако двете страни на втората равенка ги поделиме со 3, дадениот систем ќе го добие видот:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 2y = 7\ . \end{cases} \qquad (4')$$

Гледаме, системот се состои од две еднакви равенки. Затоа, нивните графици се совпаѓаат (црт. 5). Координатите на која било точка од нивниот заеднички график ќе биде решение на системот (4). Значи, дадениот систем равенки (4) има бесконечно множество решенија.



Цртеж 5

Од претходните разгледувања следува дека:

1°. *Ако правите - графиците на дадените равенки, се сечат: системот има единствено решение.*

2°. *Ако правите се паралелни и различни, тогаш системот нема ниту едно решение, и*

3°. *Ако правите се совпаѓаат, тогаш системот има бесконечно многу решенија.*

задачи

1. Реши ги графички системите линеарни равенки:

а) $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} y=x \\ y=3-x \end{cases}$, в) $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ -2x+y=5 \end{cases}$.

2. Со помош на графици утврди кој од следниве системи равенки: има едно решение, има бесконечно многу решенија, нема решенија:

а) $\begin{cases} 4x-3y=9 \\ x+2y=5 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=5 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x+3y=7 \\ 2x+6y=14 \end{cases}$.

3. Провери дали правата $3x - y = 5$ минува низ пресекот на правите:

$x + 2y = -3$ и $2x + y = 0$.

4. Испитај графички дали системите од три линеарни равенки со две непознати имаат решение: а) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x-y=-3 \\ x+y=3 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$.

5. Состави систем линеарни равенки со две непознати, кој:

а) има едно решение, б) нема решение, в) има бесконечно многу решенија!

6. За кои вредности на a и b системот равенки $\begin{cases} ax-2y=8 \\ x+by=1 \end{cases}$ ќе има решение (3, –1)?

7. Напиши кој било систем линеарни равенки кој ќе има решение (–1, 3).

8. Нека е даден систем линеарни равенки. Дали решението на тој систем ќе се промени, ако:

а)првата равенка ја помножиш со некој број к$\neq$ 0,

б) втората равенка ја помножиш со некој број к$\neq$ 0?

III. 5. ЕКВИВАЛЕНТНИ СИСТЕМИ

Аналогно на поимот еквивалентни равенки (види II.3) го воведуваме и поимот **еквивалентни системи равенки.**

Дефиниција. *Два система равенки се викаат* ***еквивалентни****, ако множествата на нивните решенија се совпаѓаат.*

Со други зборови значи: Два система равенки се еквивалентни, ако секое решение на едниот систем е решение и на вториот систем, и обратно, ако секое решение на вториот систем е решение и на првиот систем.

Обично, и за два система равенки кои немаат решенија велиме дека се еквивалентни.

При решавањето на системите равенки, како и при решавањето на равенките, неопходно е да знаеме кои трансформации можеме да ги вршиме со равенките на даден систем, а притоа да бидеме сигурни дека новиот систем равенки е еквивалентен на дадениот систем.

Трансформациите што доведуваат до еквивалентни системи равенки ги вршиме врз основа на три важни својства (теореми) на истите равенки. Тие својства тука ќе ги дадеме без доказ.

Теорема 1. *Ако која било од равенките на системот ја замениме со еквивалентна на неа равенка, ќе добиеме еквивалентен систем.*

На пример: Системите равенки

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=4 \\ x+3y=-6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-y=16 \\ x+3y=-6 \end{cases}$$

се еквивалентни, бидејќи првите равенки им се еквивалентни, а вторите равенки им се еднакви.

Равенката $2x-y=16$ ја добиваме кога двете страни на равенката $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=4$ ги помножиме со бројот 4.

Теорема 2. *Од која било равенка на даден систем една од непознатите можеме да ја изразиме со помош на другата непозната и со добиениот израз да ја замениме истата непозната во другата равенка. Тогаш новата равенка заедно со првата равенка ќе образуваат систем што е еквивалентен на дадениот систем.*

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-4y=13 \end{cases}$. (1)

Од првата равенка непознатата x да ја изразиме со помош на y. Ја добиваме равенката $x = 1 - 2y$. Потоа, ако во втората равенка на системот, непознатата x ја замениме со изразот $1 - 2y$, ќе ја добиеме равенката $3(1 - 2y) - 4y = 13$, која заедно со равенката $x = 1 - 2y$ ќе образува нов систем:

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 3(1 - 2y) - 4y = 13 \end{cases}. \qquad (2)$$

Во сгласност со теоремата 2 така добиениот систем (2) е еквивалентен на дадениот систем (1). Системот (2) има решение (3,–1). Увери се дека тоа е решение и на системот (1).

Теорема 3. *Ако ги собереме соодветните леви и десни страни, на двете равенки во системот, ќе добиеме нова равенка, која заедно со една од дадените ќе образува нов систем еквивелентен на дадениот.*

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$. (3)

Да ги собереме поодделно левите и десните страни на двете равенки на системот (3), при што ја добиваме равенката $7x + y = 5$. Во согласност со теоремата 3, секој од системите равенки:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 7x + y = 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 7x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad (4)$$

е еквивалентен на дадениот систем (3).

Подоцна со графичко решавање на системите (3) и (4) лесно се уверуваме дека секој од нив има единствено решение (1, –2). Значи тие се еквивалентни.

задачи

1. Дали следниве системи равенки се еквивалентни:

а) $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} 7x + 2(5x - 7) = 3 \\ y = 5x - 7 \end{cases}$?

2. Покажи дека системот равенки $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$ е еквивалентен на секој од следниве два система равенки $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x = 10 \end{cases}$ и $\begin{cases} 5x = 10 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$.

3. Применувајќи трансформации во согласност со теоремите 1, 2 и 3 најди неколку еквивалентни системи на системот $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$.

4. Дали системот равенки $\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$ е еквивалентен со системот равенки $\begin{cases} p_1x + q_1y = 1 \\ p_2x + q_2y = 1 \end{cases}$, каде $a_1, a_2, b_1, b_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ се произволни броеви?

(**Упатство**. Погледни ја задачата 4 од III.3.)

5. Обиди се да го решиш системот $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x=6 \end{cases}$.

6. Обиди се да го решиш системот $\begin{cases} -2x+3y=5 \\ 2y=3 \end{cases}$.

III. 6. РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ СО МЕТОД НА ЗАМЕНА

Постојат повеќе методи за решавање на системите линеарни равенки со две непознати. Ние ќе користиме само два метода: **метод на замена** и **метод на спротивни коефициенти**.

Првиот метод да го илустрираме со примери.

Пример 1. Да се реши системот линеарни равенки:

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 5x-2y=1\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Од првата равенка на системот, непознатата y ќе да ја изразиме со помош на x. Го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 5x-2y=1\,. \end{cases} \qquad (1')$$

Кога во втората равенка на системот (1') непознатата y ја замениме со изразот $5-3x$, во согласност со теоремата 2 добиваме нов систем

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 5x-2(5-3x)=1 \end{cases} \qquad (1'')$$

што е еквивалентен на системите (1') и (1).

Гледаме, втората равенка на системот (1'') е со една непозната. Кога ќе ја решиме, наоѓаме $x=1$. Заменувајќи ја најдената вредност на x во првата равенка на системот (1''), ја наоѓаме вредноста и на y: $y=5-3\cdot 1=5-3=2$.

Значи системот равенки (1'') има решение $x=1, y=2$. Тоа е решение и на дадениот систем.

Пример 2. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} 3x-4y=17 \\ 5x+6y=3 \end{cases}. \qquad (2)$$

Решение. Од втората равенка да ја изразиме, на пример, непознатата x со помош на y. Притоа добиваме $x=\frac{3-6y}{5}$. Потоа добиениот израз за x го внесуваме во првата равенка на системот (2). Така го добиваме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} 3\cdot\frac{3-6y}{5}-4y=17 \\ x=\frac{3-6y}{5} \end{cases}. \qquad (2')$$

Првата равенка на системот (2') е со една непозната и нејзиното решение е $y=-2$. На крајот вредноста $y=-2$ ја заменуваме во втората равенка на системот (2'), па добиваме: $x=\frac{3-6(-2)}{5}=\frac{3+12}{5}=\frac{15}{5}=3$. Според тоа, бараното решение е $x=3, y=-2$.

Од разгледуваните примери гледаме дека решавањето на системот линеарни равенки со две непознати по методот на замена се состои во следното:

1°. *Од едната (која било) равенка на дадениот систем една од непознатите (на пример y), ја изразуваме со помош на другата непозната (x).*

2°. *Добиениот израз за непознатата y го заменуваме во другата равенка на системот. Добиваме равенка со една непозната.*

3°. *Ја решаваме добиената равенка со една непозната x и ја наоѓаме вредноста на таа непозната.*

4°. *Ја заменуваме најдената вредност x на непознатата во добиениот израз за другата непозната y и ја наоѓаме вредноста и на таа непозната.*

Така, добиените вредности на непознатите x и y се решение на дадениот систем.

задачи

1. Реши ги следниве системи равенки:

а) $\begin{cases}2x+0y=16\\ x-3y=2\end{cases}$, б) $\begin{cases}4x-y=9\\ 0\cdot x+5y=15\end{cases}$, в) $\begin{cases}x=-3\\ 2x-3y=9\end{cases}$, г) $\begin{cases}3x-4y=-2\\ 2x+5y=1\end{cases}$.

По методот на замена реши ги системите равенки:

2. а) $\begin{cases}6x+y=6\\ 4x+3y=11\end{cases}$, б) $\begin{cases}x-y=-2\\ y=3x\end{cases}$.

3. а) $\begin{cases}3x+y=7\\ x+3y=5\end{cases}$, б) $\begin{cases}x-y=6\\ 2x+3y=7\end{cases}$.

4. а) $\begin{cases}2x+5y=8\\ 3x-4y=-11\end{cases}$, б) $\begin{cases}x-y=1\\ y=x+2\end{cases}$.

5. а) $\begin{cases}x-3y=0\\ 4x-5y=14\end{cases}$, б) $\begin{cases}4x-y=10\\ 2x-y=4\end{cases}$.

6. Доведи ги, прво, системите равенки до цели коефициенти, а потоа реши ги по методот на замена: а) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=2\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=9\end{cases}$, б) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=9\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=5\end{cases}$.

7. Доведи ги, прво, системите равенки во општ вид, а потоа реши ги:

а) $\begin{cases}3(x+1)+5(y-3)=30\\ 2(x+2)-3(y-3)=6\end{cases}$, б) $\begin{cases}2(5x-y)-3y=5\\ 4(3x-5)-2(y-x)=2\end{cases}$.

III.7. РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ СО МЕТОД НА СПРОТИВНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Пример 1. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} 5x-3y=13 \\ 2x+3y=1\ . \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Забележуваме, коефициентите пред непознатата y во двете равенки се спротивни броеви. Затоа, ако ги собереме соодветните леви и десни страни на двете равенки во системот, членовите што ја содржат непознатата y ќе се поништат и ќе добиеме равенка со една непозната $7x = 14$, т.е. $x=2$.

Во согласност со теоремата 3 добиената равенка заедно со една (која било) од равенките на системот (1) ќе образува нов систем

$$\begin{cases} 7x=14 \\ 2x+3y=1\ , \end{cases} \qquad (1')$$

еквивалентен на дадениот.

Ако добиената вредност на непознатата x ја замениме во втората равенка на системот (1'), ќе ја добиеме вредноста на другата непозната y, т.е. од $2 \cdot 2 + 3y = 1$ добиваме $y = -1$.

Значи, системот (1') има решение $x = 2, y = -1$. Тоа е решение и на дадениот систем.

Проверка: $\begin{cases} 5\cdot 2-3\cdot(-1)=13 \\ 2\cdot 2+3\cdot(-1)=1\ , \end{cases}$ односно $\begin{cases} 13=13 \\ 1=1\ . \end{cases}$

Пример 2. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+2y=26\ . \end{cases} \qquad (2)$$

Решение: Ако ги собереме соодветните леви и десни страни на равенките во системот (2), пак, ќе добиеме равенка со две непознати. За да го решиме овој систем на начин како претходниот, истиот треба, прво, да го замениме со друг, еквивалентен на него, систем,во кој коефициентите пред иста непозната да се спротивни броеви. Тоа можеме да го сториме или со коефициентите пред непознатата x, или со коефициентите пред непознатата y. На пример:

Ако двете страни на првата равенка ги помножиме со 2, а двете страни во втората равенка – со 3, ќе добиеме еквивалентен систем

$$\begin{cases} 8x-6y=14 \\ 15x+6y=78\ , \end{cases} \qquad (2')$$

во кој коефициентите пред непознатата y се спротивни броеви.

Ги собираме соодветните леви и десни страни на равенките во системот (2') и ја добиваме равенката $23x = 92$, т.е. $x = 4$.

Таа равенка заедно со една (која било) равенка на дадениот систем, на пример, втората равенка, ќе образува нов систем еквивалентен на дадениот

$$\begin{cases} x = 4 \\ 5x + 2y = 26 \end{cases} . \qquad (2'')$$

Од втората равенка, заменувајќи во неа $x = 4$, ја добиваме вредноста и на непознатата y, т.е. од $5 \cdot 4 + 2y = 26$ добиваме $y = 3$.

Значи, системот равенки има решение $x = 4$, $y = 3$.

Овој метод на решавање на системите линеарни равенки со две непознати се вика **метод на спротивни коефициенти** или **метод на собирање**.

Од разгледаните примери гледаме дека овој метод се состои во следново:

1°. *Дадениот систем равенки го заменуваме со друг еквивалентен систем во кој коефициентите пред една иста непозната (на пример, y) се спротивни броеви.*

2°. *Ги собираме соодветните леви и десни страни на двете равенки во добиениот систем. Добиваме равенка со една непозната x.*

3°. *Ја решаваме добиената равенка со една непозната (по x) и ја одредуваме вредноста на таа непозната.*

4°. *Ја заменуваме добиената вредност на непознатата x во една од равенките на дадениот систем, ја решаваме таа равенка и ја наоѓаме вредноста и на другата непозната y.*

Така одредените вредности на непознатите x и y се решение на дадениот систем равенки.

задачи

Реши ги следниве системи равенки по методот на спротивни коефициенти:

1. а) $\begin{cases} 10x - 3y = 12 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 14x - 9y = 27 \\ 7x - 2y = 17 \end{cases}$.

2. а) $\begin{cases} x + y = 17 \\ 2x - y = 13 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 7x + y = 9 \end{cases}$.

3. а) $\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 6x - 5y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$.

4. а) $\begin{cases} 4x - 3y = 13 \\ 6x + 2y = 26 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$.

Прво доведи ги системите равенки во општ вид, а потоа реши ги:

5. а) $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3}+\dfrac{3y+1}{4}=x+y \\ \dfrac{7x-2}{6}-\dfrac{8y+1}{9}=x-y, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{5}. \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y-x}{2}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+x}{5}=\dfrac{1}{10}, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2(y+3)}{5}=\dfrac{y-2}{3} \\ \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{y+4}{3}=3y-x. \end{cases}$

III. 8. ПРИМЕНА НА СИСТЕМИТЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Решавањето на многу задачи од математиката, физиката, техниката и практиката што се искажани текстуално, се сведува на составување и решавање на некој систем линеарни равенки со две непознати. Некои од таквите задачи, кои порано ги решававме со помош на линеарни равенки со една непозната, многу полесно се решаваат со помош на систем линеарни равенки со две непознати.

Решавањето на таквите задачи ќе го покажеме на неколку примери.

Задача 1. Во два сада имало по одредено количество вода. Ако од првиот сад во вториот пресипеме 3 литри вода, во вториот сад ќе има 2 пати повеќе вода отколку во првиот. Но, ако од вториот пресипеме 3 литри вода во првиот сад, тогаш во двата сада ќе има по исто количество вода. По колку литри вода имало во секој сад?

Решение. Нека во првиот сад има x литри вода, а во вториот сад y литри вода.

Ако од првиот сад пресипеме 3 литри вода во вториот сад, тогаш во првиот сад ќе има $(x-3)$ литри, а во вториот сад ќе има $(y+3)$ литри .

Во согласност со условот во задачата, во тој случај, во вториот сад ќе има 2 пати повеќе вода отколку во првиот. Таа ситуација ја изразуваме со равенката $2(x-3)=y+3$.

Ако пак, од вториот сад пресипеме 3 литри вода во првиот сад, тогаш во првиот сад ќе има $(x+3)$ литри, а во вториот $(y-3)$ литри. Во согласност со условот во задачата, во тој случај, во двата сада ќе има по исто количество вода, т.е. ќе ја добиеме равенката

$$x+3=y-3.$$

Според тоа, непознатите x и y треба да го задоволуваат системот равенки:

$$\begin{cases} 2(x-3)=y+3 \\ x+3=y-3. \end{cases}$$

Добиениот систем равенки е еквивалентен на системот:

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x - y = -6 \end{cases}.$$

Ако го решиме тој систем, добиваме $x = 15$, $y = 21$.

Одговор: Во првиот сад имало 15 литри вода, а во вториот 21 литар вода.

Задача 2. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е еднаков на 11. Ако кон него додадеме 27 ќе добиеме двоцифрен број што е запишан со истите цифри, но во обратен ред. Кој е тој број?

Решение. Цифрата на десетките на бараниот број нека е x, а цифрата на единиците нека е y. Тогаш двоцифрениот број е $10x + y$, а бројот што е запишан со истите цифри но во обратен ред ќе биде $10y + x$. Во согласност со условите на задачата го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 10x + y + 27 = 10y + x \end{cases}.$$

Кога ќе го решиме тој систем равенки, добиваме $x = 4$, $y = 7$.

Значи, бараниот двоцифрен број е 47.

Навистина: $47 + 27 = 74$, бројот 74 е запишан со истите цифри но во обратен ред.

Задача 3. Збирот на годините на мајката и ќерката изнесува 37. Пред една година мајката била 6 пати постара од својата ќерка. Сега, колку години има секоја од нив?

Решение. Сега мајката нека има x години, а ќерката y години. Пред 1 година мајката имала $(x - 1)$ години, а ќерката $(y - 1)$ години. Во согласност со условот на задачата лесно го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} x + y = 37 \\ x - 1 = 6(y - 1) \end{cases}.$$

Кога ќе го решиме составениот систем равенки, наоѓаме: $x = 31$, $y = 6$.

Најденото решение ги задоволува условите на задачата, според тоа: Сега мајката има 31 година, а ќерката 6 години.

Задача 4. Аголот при основата на еден рамнокрак триаголник е 2 пати поголем од аголот при врвот. Одреди ја големината на аглите на тој триаголник!

Решение. Знаете, аглите при основата на рамнокракиот триаголник имаат еднаква големина. Големината на аголот при основата да ја означиме со x, а таа на аголот при врвот - со y. Во согласност со условот на задачата непознатите x и y треба да ја задоволуваат равенката $x = 2y$.

Ако земеме предвид дека збирот на трите внатрешни агли на секој триаголник е еднаков на 180°, непознатите x и y треба да ја задоволуваат уште и равенката

$$x + x + y = 180^{\circ}.$$

Кога ќе го решиме системот равенки $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 180° \end{cases}$ добиваме $x = 72^{o}$, $y = 36^{o}$.

Според тоа, двата агла при основата на рамнокракиот триаголник имаат по 72^{o}, а аголот при врвот има 36^{o}.

Задача 5. Еден резервоар, кој собира 2000 литри вода, ќе се наполни од две славини за 20 мин. По колку литри вода дава секоја славина во минута, ако се знае дека едната од нив дава 10 литри повеќе во минута, отколку другата славина.

Решение. Нека едната славина дава x литри во минута, а другата славина - y литри во минута. За 20 минути првата славина ќе даде $(20x)$ литри, а втората - $(20y)$ литри.

Според условите на задачата, ги составуваме равенките:

$$20x+20y=2000 \quad \text{и} \quad x=y+10.$$

Кога ќе го решиме системот равенки $\begin{cases} 20x + 20y = 2000 \\ x = y + 10 \end{cases}$ добиваме: $x = 55$, $y = 45$.

Значи, едната славина дава 55 литри во минута, а другата славина дава 45 литри во минута.

задачи

1. Разликата на два броја е 22, а нивниот збир е 130. Кои се тие броеви?
2. Збирот на два броја изнесува 73, а разликата на првиот со вториот број е 17. Кои се тие броеви?
3. Еден број е 5 пати поголем од друг број, а нивниот збир е 78. Кои се тие броеви?
4. Должината на еден правоаголник е 2 пати поголема од неговата ширина. Колкава е должината и ширината на правоаголникот, ако неговиот периметар изнесува 21cm.
5. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е 3 пати поголем од секој агол при основата. Одреди ја големината на аглите на тој триаголник?
6. Во еден триаголник еден од аглите е 5 пати поголем од другиот агол, а третиот агол е еднаков на збирот од првите два агла. Колкави се аглите на тој триаголник?
7. Во еден правоаголен триаголник едната катета е за 4cm помала од другата катета. Ако секоја катета ја зголемиме за 3cm, тогаш неговата плоштина ќе се зголеми за 63cm^2. Одреди ги должините на катетите на тој триаголник!
8. Должината на еден правоаголник е 2 пати поголема од неговата ширина. Ако должината на правоаголникот ја намалиме за 4cm, а висината ја зголемиме за 2cm, неговиот периметар ќе биде еднаков на 50cm. Одреди ја должината и ширината на правоаголникот!
9. Овошната градина на една училишна задруга имала 180 овошни дрвја, сливи, круши и јаболка. Сливи имало 2 пати повеќе отколку круши, а јаболка имало толку колку што имало сливи и круши заедно. Колку дрвја одделно сливи, круши и јаболка имало во градината?

10. Во една фабрика на три одделенија работат вкупно 460 работници. Во првото одделение работат 2 пати повеќе работници отколку во второто, а во третото одделение работат 36 работници помалку отколку во второто одделение. По колку работници одделно работат во секое одделение?

11. За 98 денари купени се 17 мали и големи тетратки. Една мала тетратка чини 4 денари, а една голема тетратка чини 9 денари. По колку тетратки од секој вид се купени?

12. Раситнувањето на една стоденарка извршено е само во 5 - денарки и 2 - денарки, кои на број ги имало 26. Најди колку имало 5 - денарки, а колку - 2 денарки.

13. Во еден магацин има 2 пати повеќе брашно отколку во друг магацин. Ако во првиот магацин донесеме уште 4 тони брашно, а во вториот магацин донесеме уште 13 тони, тогаш во двата магацина ќе има исто количество брашно. Колку тони брашно имало во секој магацин поодделно?

В РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

III.9. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Да претпоставиме дека: единаесет топчиња треба да ги распоредиме во десет кутии. Тогаш јасно е дека, како било да ги распоредуваме топчињата, неопходно е во една од кутиите да сместиме барем две топчиња. Ако, пак, се дадени седум топчиња а само три кутии, што можеме да заклучиме? Тогаш ќе постои барем една кутија во која има барем три топчиња. Навистина, ако во секоја кутија ставиме најмногу две топчиња, тогаш вкупниот број на топчиња би бил најмногу $3 \cdot 2=6$, а не седум. Притоа, да напомененеме дека при сместувањето на топчињата во кутиите не е битно дали имаме некаква стратегија при сместувањето, на пример, дали сакаме во секоја кутија да ставиме приближно ист број на топчиња, или пак, сакаме сите топчиња да ги ставеиме во една кутија и слично.

Претходните задачи можеме да ги обопштиме со следните заклучоци: *Ако треба n+1 топче да сместиме во n кутии, тогаш ќе постои барем една кутија во која има барем две топчиња*. Важи, исто така, и следното многу посилно тврдење. *Нека n, p и k се природни броеви и притоа $nk+p$ топчиња, треба да ги распоредиме во n кутии. Тогаш ќе постои барем една кутија во која ќе има барем k+1 топче*. Навистина, ако во секоја кутија се сместат по најмногу k топчиња, тогаш вкупниот број на топчиња ќе биде најмногу nk, а не може да биде $nk+p$ колку што се претпоставува. Забележуваме дека не сме во состојба да тврдиме која е таа кутија во која има две или p+1 топче, но, само тврдиме дека постои таква кутија.

Претходното тврдење е познато како **принцип на Дирихле**, во чест на германскиот математичар Дирихле (P. L. Dirihlet, 1805-1859). Принципот на Дирихле го интерпретиравме преку сместување на топчиња во кутии, но, како што ќе видиме со следниве примери овој принцип наоѓа честа примена во голем број на задачи. Ќе наведиме неколку такви примери.

Пример 1. Секој од членовите на едно друштво од осум пријатели еднаш неделно оди во базен да плива, на пример Ана оди на безен секоја среда, Драган оди секој петок итн. Покажи дека постојат двајца пријатели кои одат на пливање во ист ден од неделата.

Решение. Бидејќи има седум дена во неделата, а пријателите се вкупно 8 и 8>7, од принципот на Дирихле ќе постојат двајца кои одат на пливање во ист ден.

Пример 2. Покажи дека меѓу десет природни броеви секогаш постојат два броја кои започнуваат со иста цифра.

Решение. Секој од десетте броеви започнува со една од деветте цифри 1,2,3,4,5,6,7,8, 9, па според принципот на Дирихле ќе постојат два броја кои започнуваат на иста цифра. Да забележиме дека такво тврдење не важи ако бараме последната цифра да им биде иста. Зошто?

Пример 3. Ивана, Илинка и Ирина береле јаболка и заедно набрале 17 кг јаболка. Покажи дека барем една од нив набрала барем 6 кг јаболка, ако се знае дека секоја од нив набрала цел број килограми.

Решение. Да претпоставиме дека не е вистина дека некоја од нив набрала барем 6 кг јаболка. Тогаш секоја од нив набрала најмногу по 5 кг јаболка, па тие сите заедно набрале најмногу $3\cdot5=15$ кг јаболка. Тоа противречи на условот на задачата дека тие заедно набрале 17 кг јаболка. Значи, барем една од нив набрала барем 6 кг јаболка. Овде користевме дека $17=3\cdot5+2>3\cdot5$.

Пример 4. Докажи дека меѓу четири произволни природни броеви, секогаш постојат два такви што, нивната разлика е делива со 3.

Решение. Секој од дадените четири природни броеви го делиме со 3 и го одредуваме остатокот при делење со 3. Остатоците можат да бидат 0, 1 или 2. Затоа, можеме да сметаме дека дадените броеви се $3k_1+r_1$, $3k_2+r_2$, $3k_3+r_3$ и $3k_4+r_4$, каде $r_1,r_2,r_3,r_4\in\{0,1,2\}$. Значи, секој од четирите остатоци r_1, r_2, r_3 и r_4 прима една од трите можни вредности. Според принципот на Дирихле, постојат барем два броја меѓу нив, кои се еднакви. Нека, на пример, $r_2=r_4$. Тогаш $(3k_2+r_2)-(3k_4+r_4)=3k_2+r_2-3k_4-r_4=3k_2-3k_4=3(k_2-k_4)$, па оттука $3|(3k_2+r_2)-(3k_4+r_4)$.

задачи

1. Петар во двата џеба има вкупно 101 денар. Покажи дека во еден од џебовите Петар има барем 51 денар, при претпоставка дека во џебовите нема монета помала од еден денар.
2. Во еден хотел има двокреветни и трикреветни соби. Покади дека во хотелот има барем 34 соби, ако се знае дека во хотелот се сместени 100 гости.
3. Во едно училиште учат 1000 деца. Покажи дека има барем три деца во тоа училиште родени на ист датум (необавезно иста година).
4. Мите има приврзок со четири клучеви. Без да гледа со кој клуч отвора во темница, Мите успеал да влезе во својот стан при осмиот обид. Покажи дека постои клуч со кој Мите барем трипати се обидувал да ја отклучи вратата.

III.10. ПОПУЛАЦИЈА. ПРИМЕРОК

Честопати во секојдневната практика се јавува проблем од едно множество да се издвојат и пребројат оние елементи, кои имаат некое обележје, односно кои се издвојуваат со некое својство. На пример, ако во едно одделение треба да се пребројат учениците кои имаат одличен или многу добар успех заедно, тоа не е никаков проблем. Исто така, не е проблем да се најде размерот на овие солидни ученици спрема вкупниот број на ученици во одделението. Меѓутоа, ако треба да се најде колкав е размерот на луѓето кои се повисоки од 170 cm спрема вкупниот број на жители, ситуацијата е многу посложена.

Точниот размер е невозможно да се определи, бидејќи проблем е да се определи нивниот точен број, а посебно кога се има предвид дека секојдневно бројот на жители се менува (постојано едни умираат и се раѓаат нови жители). Меѓутоа, како што ќе видиме, и овој проблем може да се реши.

Во случај кога работиме со голем број податоци, велиме дека се работи за **статистички податоци**, а делот од математиката што се занимава со обработка на таквите податоци, се вика **математичка статистика**.

Ако од множеството S треба да се издвојат и пребројат оние елементи со дадено својство, тогаш постапуваме на следниот начин. Од множеството S избираме едно негово подмножество U, па се пребројуваат оние елементи од U кои го имаат бараното својство. Множеството S се нарекува **популација**, а подмножеството U се нарекува **примерок**. Бројот на елементи на популацијата се нарекува **обем на популацијата**, а бројот на елементите во примерокот се нарекува **обем на примерокот**.

Пример 1. Да го разгледаме веќе поставениот проблем на определување на бројот на жители во Р. Македонија, кои се повисоки од 170 cm. Множеството граѓани на Р. Македонија е популација, и знаеме дека обемот на оваа популација е околу 2 000 000. Избираме едно подмножество - примерок од 1000 граѓани и ќе ги преброиме оние од нив, кои се повисоки од 170 cm. Нека меѓу избраните 1000 граѓани има 530 кои се повисоки од 170 cm. Бидејќи 2 000 000:1000=2000, ние во примерокот на 2000 граѓани сме бирале по еден, затоа очекуваме дека бројот на граѓани кои се повисоки од 170 cm во целата Република да биде 530·2000=1 060 000.

Притоа, ако сакаме податоците што ќе ги добиеме што е можно повеќе да одговараат на стварноста, треба во изборот на тие илјада граѓани - примерокот, да бидат застапени сите возрасти и тоа во оној процент во кој тие се застапени во популацијата.

На тој начин можеме да ја составиме табелава:

Висина	повисоки од 170 cm	170 cm или пониски
Грѓани од примерокот	530	470
Граѓани од популацијата	1 060 000	940 000

Пример 2. Во една фабрика се произведени 15000 светилки. Производителот сака да го испита квалитетот на светилките, поточно да процени колку од нив имаат век на траење подолг од 1000 часа.

За таа цел произволно се избрани 200 светилки и се подложени на испитување, за да се види колку од нив нема да прегорат по 1000 часа светење. Се покажало дека 180 светилки „издржале“ 1000 часа, а останатите 20 светилки прегореле пред време. Значи, 10% од примерокот е со лош квалитет, а останатите 90% се со добар квалитет. Затоа се очекува 10% од популацијата (1500 светилки) да бидат со лош квалитет, а останатите 90% (13500 светилки) да бидат со добар квалитет. На тој начин можеме да ја составиме следнава табела:

Век на траење	помалку од 1000 часа	повеќе од 1000 часа
Број на светилки од примерокот	20	180
Број на светилки од популацијата	13500	1500

задачи

1. Што е популација, а што примерок?
2. Ако обемот на популцијата е 100 000, дали е доволно обемот на примерокот да биде 4? Објасни го одговорот.
3. На 100 продадени телевизори во една продавница стигнале 5 рекламации во гарантниот рок. Колку рекламации се очекуваат на 1200 телевизори?
4. Според податоците на Светската здравствена организација околу 3% од луѓето во текот на животот заболуваат од епилепсија. Колкав е тој број на луѓе во нашата Република?

III.11. НАСТАН. СИГУРЕН И СЛУЧАЕН НАСТАН

1. Често велиме: природата се наоѓа во постојано движење. Секојдневно се одигруваат најразлични појави. Многу од тие појави можеме точно да ги предвидиме, ако ги познаваме сите причини за нивното случување и развиток. На пример, водата во зависност од температурата и атмосферскиот притисок, знаеме, може да се наоѓа во една од трите можни агрегатни состојби: цврста, течна или гасовита состојба. Метеорологијата, врз основа на голем број на податоци, е во состојба да даде временска прогноза за наредните денови и која во најголем број случаи се остварува. Таков е случајот и со сите природни и општествени појави. Движењето во природата се карактеризира и манифестира во постојаната променливост на состојбите.

Секоја промена на една состојба во друга, се вика **настан** (**случка** или **собитие**). На пример, настан е кога ноќта го смени денот, кога во пролетта разлиствуваат дрвјата, кога ќе се родат близнаци или тројка. Настан за славење е кога ќе се добие премијата на лото, итн.

Целиот живот се состои од одделни настани, а успешното снаоѓање во тие настани значи снаоѓање во животот. Успешното снаоѓање, пак, во настаните подразбира нивно следење, проучување и предвидување. Најдобар пример за тоа е метеорологијата, при што нејзиниот развој како наука, несомнено, води кон поточни временски прогнози.

На прв поглед изгледа дека настаните не може да се предвидуваат. Меѓутоа, настаните имаат некои општи карактеристикии и постојат закономерности во нивното случување.

2. Предметот на нивно проучување се науките **веројатност** и **статистика**.

Разликуваме настани кои се **можни** и настани кои се **невозможни**. Можни настани се, на пример:

- успешно лансирање на вселенски брод,

- успешен пласман на некој турнир,

- добивка на лото, ако се купи лоз и др.

Невозможни настани се, на пример:

- престанок на ротацијата на Земјата околу Сонцето,

- во составот на водата да се најде трет елемент,

- реките да течат во спротивни насоки,

- Сонцето да изгрее на запад,

- да се извлече сино топче од кутија во која има само бели и црни топчиња, и др.

За нас поголем интерес на проучување се можните настани. Тие од своја страна се делат на **сигурни настани**, кои под одредени услови мора да се случат и **случајни настани** или веројатни настани, за кои постои можност да се случат, но постои можност и да не се случат.

Во сигурни настани спаѓаат, на пример, следниве:

- по денот доаѓа ноќта, а по ноќта повторно доаѓа денот,

- крајот на животот е смртта,

- сигурно е дека по извесно време ќе има затемнување на Месечината или на Сонцето,

- сигурно е дека ќе се извлече бело или црно топче од една кутија во која има само бели и црни топчиња и др.

Постојат многу други настани во природата кои се сигурни. Тие се однесуваат пред сѐ на некои основни закони кои важат во физиката, хемијата, астрономијата, биологијата итн., како и последици на некои логички закони. Но понекогаш не е можно да се предвидат некои настани. Еве неколку примери на случајни настани:

- недоговорена средба со некој близок пријател на улица,

- да прегори нова светилка, веројатно, лош примерок,

- на први јануари следната година да падне снег,

- да се извлече бело топче од кутија во која има 2 бели и 7 црвени топчиња, и многу други.

Настаните обично ќе ги означуваме со буквите A,B,C,...

задачи

1. Кои настани се викаат сигурни настани? Наведи неколку примери.
2. Што се навозможни настани? Наведи неколку невозможни настани.
3. Кои настани се викаат случајни настани? Наведи неколку.
4. Каков настан е: да се најде детелина со четири листа?

III. 12. СИСТЕМСКИ И СЛУЧАЕН ИЗБОР НА ПРИМЕРОК

Математичката статистика е наука која се занимава со обработка на голем број податоци (статистички податоци). Статистичкото множество за кое сакаме да добиеме некои информации или некои негови својства се вика **статистичка маса** или **популација**. Во принцип, тоа множество има огромен број елементи, а елементите можат да бидат сите жители на еден град или на една држава, сите риби во едно езеро, сите зрна пченица во некој регион и слично. Во основа, постои некоја заедничка особина која ги обединува елементите на тоа множество. Оваа особина се вика **обележје** или **карактеристика**, а за елементите од популацијата велиме дека се од ист вид. Испитувањето на целата популација е невозможно од следниве причини: 1. Тоа множество, речиси, секогаш има огромен број елементи што не е можно временски сите да се испитаат и 2. Објектите на тоа множество честопати се тешко достапни. На пример, не сме во во состојба да ги извадиме сите риби од езерото, да ги испитаме и, пак, да ги вратиме назад. За таа цел, на произволен начин избираме едно подмножество ◡ со значително помал број елементи, но за кое ќе бидеме во состојба да ги испитаме поодделно сите негови елементи, а потоа да донесуваме заклучок за целата популација. Таквото подмножество ◡ го викаме **примерок**. Бројот на елементите на популацијата се вика **обем на популацијата**, а бројот на елементите на примерокот се вика **обем на примерокот**.

Пример 1. Во една фабрика за акумулатори произведени се 10 000 акумулатори. За да го испитаат квалитетот на акумулаторите производителите на произволен начин избираат 50 акумулатори. Испитувањето на овие акумулатори покажало дека 47 од нив се исправни, а 3 неисправни. Бидејќи 10 000 : 50 = 200, затоа се очекува дека 3 · 200 = 600 акумулатори се неисправни. Барањето на неисправните акумулатори меѓу сите 10 000 практично е неизводливо. Затоа од фабриката ги пуштаат сите акумулатори во промет, но очекуваат да добијат рекламација за околу 600 акумулатори.

Изборот на примерокот е од суштинска важност за добивање на правилен заклучок, па затоа во математичката статистика се дава посебно внимание на овој проблем. Најважно е изборот на примерокот да биде **случаен**. За да бидеме сигурни дека изборот на примерокот навистина, е случаен, можеме да пристапиме кон **систематски избор на примерок**. Тоа ќе го илустрираме на следниве примери.

Пример 2. Во една амбуланта се лекуваат 3 540 граѓани. Со цел, да се избере еден примерок од приближно една десетина од овие граѓани, ние можеме да ги избереме оние, чиј реден број на картонот завршува на пример на цифра 5.

Пример 3. Ако сакаме да анкетираме околу 1 500 граѓани во Скопје, тоа можеме да го направиме по телефон, ѕвонејќи, на пример, на сите телефонски броеви што завршуваат на 37. Со тоа, всушност, ќе се јавиме кај секој стоти претплатник на фиксната телефонија.

задачи

1. Една медицинска екипа, со цел, да испита колкав процент од граѓаните во Македонија имаат негативна крвна група, отишле во едно училиште и од 753 деца нашле дека 98 ученици имаат негативна крвна група. Дали примерокот е добро избран? Колку граѓани во Македонија имаат негативна крвна група?

2. Новинарите за да го проверат јавното мислење на граѓаните пред некој референдум анкетирале 500 полнолетни граѓани. Потврден одговор на поставеното прашање дале 356 испитаници. Колку се очекува да биде бројот на граѓаните што ќе одговорат позитивно на референдумот во некој град со 700 000 полнолетни граѓани?

3. Фрли во воздух 100 пати една пара и изброј колку пати ќе падне „број". Тој број означи го со n, а потоа пресметај $\frac{n}{100}-\frac{1}{2}$.

III. 13. ВЕРОЈАТНОСТ НА СЛУЧАЕН НАСТАН

Играчите на лото знаат дека кога ќе уплатат лото, имат можност да добијат „седумка". Иако можноста е мала, таа сепак постои. Меѓутоа, **невозможен настан** е некој да добие пари на лото, ако не уплатил за играта. Но, ако некој ги пополнил сите можни комбинации (тоа е само теориски, бидејќи се многу), тогаш неговата добивка „седумка"на лото е **сигурен настан**. Ако пополниме осум комбинации, тогаш колкава е можноста за добивка?

Познато е дека од 39 броја може на 15 380 937 начини да се извлечат седум броја. Но, играчот ќе добие само на 8 извлекувања. Затоа, велиме дека веројатноста за добивка на „седумка" е

$$\frac{8}{15380937} \approx 0,00000052\,.$$

Да рзгледаме општ случај, ако се можни n различни настани сите меѓу себе еднакво можни да се случат (т.е. еднакво веројатни). Нека настанот A се случува, ако се случи еден кој било од m настани, таканаречени **поволни настани**. При тие претпоставки ја даваме следната дефиниција.

Дефиниција. *Веројатноста V(A) да се случи еден настан A се вика размерот (односот) на бројот m на поволните настани и бројот n на сите елементарни (поволни и неповолни) настани, т.е.*

$$V(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Бидејќи n е бројот на поволни и неповолнио настани, добиваме $0 \le m \le n$, а од овде имаме

$$0 \le V(A) \le 1, \qquad (2)$$

т.е. веројатноста на еден настан е број меѓу 0 и 1, вклучувајќи ги 0 и 1. Ако А е сигурен настан, тогаш $m = n$, па $V(A) = 1$. Ако, пак, А е невозможен настан, тогаш $m = 0$, па $V(A) = 0$.

Пример 1. Да се одреди веројатноста дека а) со фрлање на еден зар ќе се падне „шестка", б) со фрлање на два зара ќе се паднат „две шестки", в) со фрлање на два зара ќе се паднат „петка" и „шестка".

Решение. а) Ако фрламе еден зар, можни се шест елементарни настани: да се падне 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Меѓу овие настани само еден е поволен, а тоа е ако се падне „шестка". Значи $n = 6$, а $m = 1$, па бараната веројатност е $\frac{1}{6} \approx 0{,}166$.

б) Ако фрламе два зара, можни се следните 36 елементарни настани:

(1,1)	(1,2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Само еден настан меѓу овие 36 е поволен, а тоа е (6, 6). Значи, $m = 1$, а $n = 36$, па бараната веројатност е $\frac{1}{36} \approx 0{,}027$.

в) Имајќи ја предвид дискусијата под б), имаме $n = 36$, а $m = 2$ бидејќи имаме две поволни можности (5, 6) и (6, 5). Затоа бараната веројатност е $\frac{2}{36} \approx 0{,}055$.

За даден настан A, со $\overline{A}$ го означуваме неговиот **спротивен настан**, кој се случува, тогаш и само тогаш, кога A не се случува. Со други зборови, поволните елементарни настани за A (ги има m) се неповолни за настанот $\overline{A}$ и обратно. За овие два настана A и $\overline{A}$ велиме дека се **исклучуваат**, но и дека **се надополнуваат**.

Значи, за настанот $\overline{A}$ имаме $n - m$ поволни случаи (неповолни за А) и m неповолни случаи (поволни за А). Значи , веројатноста ќе биде $V(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - V(A)$.

Значи, важи

$$V(A) + V(\overline{A}) = 1. \qquad (3)$$

Да се навратиме на пример 1 а). Спротивен настан на настанот да се падне „шестка" е и настанот да се падне 1 или 2 или 3 или 4 или 5. За веројатноста на $\overline{A}$ добиваме $V(\overline{A}) = \frac{5}{6}$. Забележуваме дека $V(A) + V(\overline{A}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, така што формулата (3) важи.

задачи

1. Што е веројатност на некој случаен настан?
2. Дали може веројатноста на некој настан да биде: а) $-0{,}5$; б) 0; в) 1; д) 1,1; ѓ) 2?
3. Што е спротивен настан на настанот A? Ако веројатноста на настанот A е p, колкава е веројатноста на спротивниот настан?
4. Колкава е веројатноста дека со фрлање на еден зар ќе се падне 3? Потоа, со голем број фрлања на зарот провери го резултатот.

III.14. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ПРОВЕРКА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Да се запрашаме: Што всушност значи, дека веројатноста со едно фрлање на зар да се падне „петка" е $\frac{1}{6}$? Одговорот е следниот: Ако коцката - зарот ја фрлиме голем број пати, на пример, 1000, тогаш приближно $\frac{1}{6}\cdot 1000 \approx 167$ пати ќе се падне бројот 5. Поточно, ако се падне 172 пати бројот 5, тогаш размерот $\frac{172}{1000}$ малку ќе се разликува од $\frac{1}{6}$. Во случајов $\frac{172}{1000} \approx 0{,}172$, а $\frac{1}{6} \approx 0{,}166$ па ќе биде $\left|\frac{172}{1000}-\frac{1}{6}\right| = 0{,}006$. Ако, наместо, 1000 пати коцката ја фрлиме 100000 пати и притоа k пати се падне бројот 5, тогаш $\left|\frac{k}{100000}-\frac{1}{6}\right|$ ќе биде уште помал број. Со други зборови, колку повеќе обиди правиме, толку повеќе размерот $\frac{k}{n}$ е поблизок до $\frac{1}{6}$ (n е број на обиди - фрлања на коцката, а k покажува колку пати ќе се падне 5).

1. Еден зар фрли го 100 пати и број колку пати ќе падне бројот 5 (k пати). Потоа пресметај ја разликата $\frac{k}{100}-\frac{1}{6}$. Потоа земи два зара и истовремено фрли ги 500 пати. Нека k_1 пати се паднат две шестки заедно и нека k_2 пати се паднат 5 и 6. Потоа пресметај ги разликите $\frac{k_1}{500}-\frac{1}{36}$ и $\frac{k_2}{500}-\frac{1}{18}$. Што забележуваш?

2. Земи една 5 - денарка, фрли ја во воздух 200 пати и број колку пати ќе се падне „број". Ако тој број на појавувања е k, пресметај ја разликата $\frac{k}{200}-\frac{1}{2}$. Зошто намалителот е избран да биде $\frac{1}{2}$? Што забележуваш?

Да напоменеме дека дефиницијата за веројатност што ја усвоивме се покажува дека е "задоволувачка" во голем број примери. Меѓутоа, со неа не можеме да пресметуваме веројатности во геометријата. Строгата дефиниција на веројатност бара многу дополнителни знаења. Овде ќе изнесеме некои примери од т. н. **геометриска веројатност**, кои интуитивно ќе ги прифатиме.

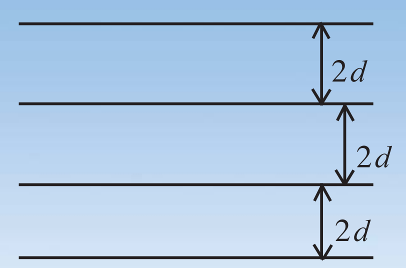
Пример 2. Да избереме една отсечка *A*B и една третина од нејзината должина да ја обоиме со црвена боја (црт. 10).

Цртеж 10

Да избереме произволна точка од отсечката AB. Колкава е веројатноста дека ќе избереме црвено обоена точка? Интуитивно е јасно дека таа веројатност е $\overline{AM}:\overline{AB}=\frac{1}{3}$. Можеме експериментално да се увериме во тоа, ако избереме голем број на такви точки. Секој избор на точка од отсечката AB можеме да го направиме на следниот начин. Едно лице рамномерно праволиниски го движи моливот од *A* до B, од B до *A*, од *A* до B итн, а второто лице со затворени очи во произволен момент вели „стоп". Во тој момент првото лице престанува со движењето и точката е избрана. Очигледно дека во овој случај се работи за случаен избор на точка од отсечката AB.

Следниот пример покажува како експериментално може да се добие бројот π. Препорачуваме да го изведете тој експеромент и да ја одредите приближната вредност на бројот π.

Пример 3. Земаме една игла со произволна должина *d*. Потоа на еден лист хартија повлекуваме голем број паралелни прави, кои се на растојание од 2*d* (црт. 11). Математички се покажува дека веројатноста на произволно фрлена игла по паѓањето врз листот да сече некоја од правите е $\frac{1}{\pi}$. Затоа, ако иглата ја фрлите голем број пати, на пример, 500 пати, и ако иглата *k* пати ја сече некоја од правите, тогаш $\frac{500}{k}$ ќе биде број близок до $\pi=3{,}14$.



Цртеж 11

***Историски белешки.** За основач на теоријата на веројатност се смета францускиот математичар - аматер од Тулуз, **Пјер Ферма** (1601 - 1665), кој по професија бил правник. Кон средината на XVII век тој заедно со францускиот математичар **Блез Паскал** (1623 - 1662) и Холанѓанецот **Кристијан Хајгенс** (1629 -1695) ги поставиле основите на веројатноста. Главен поттикнувач за развојот на оваа дисциплина биле хазардните игри, но имало и други поттикнувачи на тој развој: осигурителните заводи, демографската статистика, како и теоријата и методите за обработка на податоци добиени од набљудување. Подоцна теоријата на веројатноста била надградувана од голем број математичари.

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

задачи

3. Во една кутија се наоѓаат 25 сини, 35 зелени, и 40 црвени топчиња. Која е веројатноста да се извлече со едно извлекување: а) сино, б) зелено, в) црвено топче?

4. Која е веројатноста фрлена коцка да го покаже бројот 2? Проверете го резултатот експериментално.

5. Сме ја заборавиле последната цифра на некој телефонски број, па треба да ја погодиме. Која е веројатноста да се погоди точниот телефонски број со едно вртење?

6. Која е веројатноста две фрлени коцки за играње да покажат збир од 7? Проверете го одговорот експериментално.

7. Една точка се движи со константна брзина в долж една кружница, поставена во координатен систем, така што координатниот почеток е центар на кружницата. Каква е веројатноста дека во произволен момент точката ќе се најде во првиот квадрант?

задачи ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - III

1. Дадена е равенката $5x - 2y = 1$. Најди два пара броеви кои се решенија на дадената равенка и два пара броеви кои не се решенија на дадената равенка.

2. Најди систем линеарни равенки чие решение е парот $(2, -1)$.

3. Ако првата и втората равенка на еден систем си ги променат местата, дали новодобиениот систем ќе биде еквивалентен со почетниот?

4. Даден е систем линеарни равенки $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$. Реши го овој систем со: а) метод на замена; б) метод на спротивни коефициенти; в) графички метод.

5. Дали е добро системот $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 5x+6y=3 \end{cases}$ да го решаваме графички? Зошто?

6. Кој систем е полесно да го решаваме со методот на замена, отколку со методот на спротивни коефициенти?

7. Реши го системот линеарни равенки $\begin{cases} 2x-y=5 \\ -4x+2y=1 \end{cases}$. Што забележуваш?

8. Реши го системот линеарни равенки $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$. Што забележуваш?

9. Реши го системот линеарни равенки $\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$.

10. Најди едно решение на системот $\begin{cases} ax + by = a + b \\ cx + dy = c + d \end{cases}$, каде a, b, c, d се произволни броеви.

11. Одреди го коефициентот a, така што системот $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ да има решение од облик (c, c).

12. Определи ги коефициентите a и b, така што системот равенки $\begin{cases} ax - y = 2 \\ 2x + by = 3 \end{cases}$ да има решение (-1, 1).

13. Реши го системот $\begin{cases} 2(x-1) + 3(y-x) = 4 \\ -(x+2y) + 2(y-1) = 3 \end{cases}$.

14. Во еден магацин имало 2350 kg брашно повеќе отколку во друг магацин. Секој ден од секој магацин се изнесувало по 280 kg брашно, па по пет дена во првиот магацин останало 2 пати повеќе брашно, отколку во вториот магацин. По колку kg брашно имало во секој магацин на почетокот?

15. Две деца заеднички купиле една книга, која чинела 45 денари. Едното дете дало 2 пати повеќе отколку другото. По колку денари дало секое дете?

16. Една банкнота од 50 денари раситнета е во 13 монети: 5 денарки и 2 денарки. Колку имало 5-денарки, а колку 2-денарки?

17. Во еден ресторан ручале 15 луѓе, мажи и жени. Секој маж платил по 400 денари, а секоја жена по 325 денари за ручекот. Колку биле мажи, а колку жени, ако сите вкупно платиле 5550 денари?

18. Во две основни училишта има вкупно 800 ученици. Во едното училиште имало 66 ученици повеќе отколку во другото. По колку ученици имало во секое училиште?

19. Еден авион низ ветер лета со брзина од 190 km на час, а спроти ветерот лета со брзина од 160 km на час. Да се определи брзината на ветерот и сопствената брзина на авионот!

20. Таткото сега е постар од синот за 32 години, а по 7 години ќе биде 3 пати постар од синот. Колку години има таткото, а колку синот?

21. Таткото е 4 пати постар од синот, а синот е 27 години помлад од таткото. Колку години има синот, а колку таткото?

22. Во два сада имало 36 литри течност. Ако од првиот сад прелееме во вториот 2 литра, во двата сада ќе има исто количество течност. По колку литри течност имало во секој сад?

23. Имаме два раствора од 30% и 55% солна киселниа. Колку литри треба да земеме од првиот и вториот раствор за да добиеме 50 литри раствор од 50% солна киселина?

24. Мајсторот и неговиот ученик требало во една смена да изработат 130 детали. Мајсторот ја натфрлил нормата за 10%, а ученикот - за 20%, па така, тие изработиле 148 детали. Колкава била нормата за мајсторот, а колкава - за ученикот?

25. Кој е спротивниот настан на следниот настан: При фрлање на зар да се падне број поголем од 2? Пресметај ја неговата вредност.

26. Во еден клас има 32 ученика. Покажи дека постојат барем два ученика чии презимиња почнуваат со иста буква и постојат барем два ученика родени на ист датум, но не мора ист месец и иста година.

27. Колкава е веројатноста со фрлање на зар да се падне непарен број? Кој е спротивниот настан и која е неговата веројатност?

28. Колкава е веројатноста од шпил со 52 карти со случаен избор на една карта да извлечеш: а) десетка, б) срце?

задачи ЗА САМОКОНТРОЛА - III

1. Најди ги сите парови природни броеви, што се решенија на равенката:
а) $x+y=8$, б) $xy=12$.

2. За кои вредности на с системот линеарни равенки нема решение:
а) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ cx-6y=7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x+5y=8 \\ 4x+cy=15 \end{cases}$?

3. За кои вредности на c системот линеарни равенки има бесконечно множество решенија: а) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=c \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ cx-2y=10 \end{cases}$?

4. За кои вредности на a и b правата $y=ax+b$ минува низ точките $A(-1,\ 2)$ и В $(2,\ 5)$?

5. Одреди ја точката во која графикот на равенката $3x-4y=12$ ја сече:
а) x - оската, б) y - оската.

6. **Стара кинеска задача**: Во еден кафез имало питоми зајци и фазани, кои заедно имале 100 нозе и 36 глави. Колку зајаци, а колку фазани имало во кафезот?

7. **Стара кинеска задача**: Една права трска, чија висина е 9 стопи, прекршена е така што со врвот да ја допира земјата на растојание 3 стопи од долниот крај на трската. На која височина е прекршена трската?

8. Збирот на два броја е еднаков на 299. Првиот број претставува 15% од вториот. Кои се тие броеви?

9. Колку е сега часот, ако изминатиот дел од денот претставува 20 % од денот што преостанува?

10. Покажи дека меѓу 15 луѓе постојат тројца кои се родени на ист ден во неделата.

11. Петар замислил еден број помеѓу 51 и 100. Колкава е веројатноста дека Петар замислил прост број?

12. Во една продавница од 30 продадени машини за перење, во гарантниот рок добиле две рекламации. Во продавницата имало нарачано 2 500 машини. Колку рекламации на овие машини се очекуваат да пристигнат по нивната продажба?

Тема 4

ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

А ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА ВО ПРОСТОРОТ

IV.1. ЗАЕМНИ ПОЛОЖБИ НА ТОЧКИ, ПРАВИ И РАМНИНИ ВО ПРОСТОРОТ

Две основни гранки на геометријата се: планиметрија и стереометрија. **Планиметрија** е делот од геометријата што ги проучува *рамнинските фигури*, додека **стереометрија** е делот од геометријата што ги проучува *просторните фигури*. Во изминатите години се среќававме со рамнински фигури (триаголник, четириаголник, многуаголник, кружница и др.), а во оваа тема цел на проучување ќе бидат геометриските тела како просторни фигури (коцка, квадар, пирамида, топка и др.). За таа цел, неопходно е најпрво да се запознаеме со основните елементи од стереометријата (точка, права и рамнина) и со нивната заемна положба во просторот.

Знаеме дека **точка, права и рамнина** се основни фигури во геометријата и нив не ги дефинираме. Со нивна помош можеме да дефинираме нови поими и да формулираме тврдења, односно теореми. Извесен број елементарни тврдења (својства) не ги докажуваме и ги викаме **аксиоми**, а со нивна помош можеме да ги докажуваме останатите тврдења. Од аксиомите една веќе ти е позната, а тоа е *аксиомата за паралелност,* која гласи:

Низ дадена точка што не лежи на дадена права, минува единствена права која е паралелна со дадената права.

Овде ќе се запознаеме со неколку нови аксиоми и теореми. Се договараме точките да ги бележиме со големите латински букви ($A,B,C,...$), правите со малите латински букви ($a,b,c,...$) а рамнините со големите грчки букви ($\Sigma, \Pi, \dots$).

IV. 1. 1. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ТОЧКА И ПРАВА

Секоја права ќе ја сфаќаме како едно множество чиишто елементи се точки. Затоа за една точка A и една права a точна е само една од двете можности:

- $A \in a$ и во тој случај велиме, дека **точката** A **лежи на правата** a, односно **правата** a **минува низ точката** A (црт. 1а),

- $A \notin a$ и во тој случај велиме, дека точката A **не лежи** на правата a, односно правата a **не минува** низ точката A (црт. 1б).

Цртеж 1

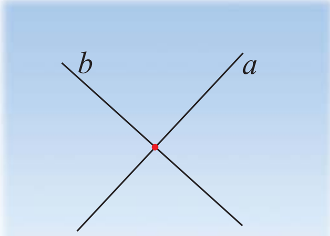
Меѓутоа, не секое множество од точки во просторот претставува права. За правите ги прифаќаме следниве аксиоми.

A_1: *На секоја права лежат безброј точки.*

A_2: *Постојат барем три точки кои не лежат на иста права.*

A_3: *Низ кои било две различни точки минува единствена права.*

Од аксиомата A_3 произлегува дека, ако секоја од правите a и b минува низ точките A и B, тогаш правите a и b **се совпаѓаат**. Затоа, за произволни прави a и b точна е само една од можностите:



Цртеж 2

I) $a \cap b = \varnothing$,

II) a и b имаат само една заедничка точка (црт. 2) и во тој случај велиме дека правите a и b **се сечат**,

III) $a = b$, т.е. правите **се совпаѓаат**.

За три или повеќе точки велиме дека се **колинеарни,** ако постои права која минува низ тие точки. Затоа аксиомата A_2 може да се формулира и вака:

Постојат барем три неколинеарни точки.

1. Објасни зошто множеството $\{A\}$ не може да биде права. Од која аксиома произлегува тоа?

2. Објасни зошто множеството од сите точки во просторот не претставува права. Од која аксиома произлегува тоа?

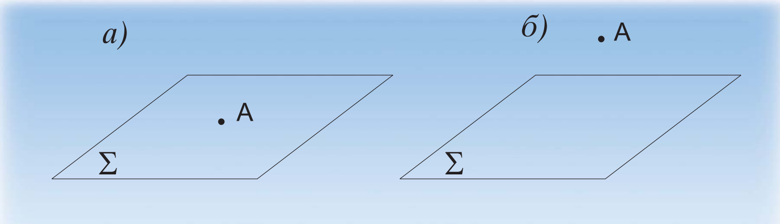
3. Нацртај две кружници што се сечат, а потоа објасни зошто кружниците не можеме да ги сметаме како прави. Од која аксиома произлегува тоа?

IV. 1.2. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ТОЧКА И РАМНИНА

Секоја рамнина ќе ја сфаќаме како едно множество чиишто елементи се точки. За нагледно претставување на рамнината, обично цртаме паралелограм (црт.3), но тоа не значи, дека рамнината се состои од точките во тој паралелограм. Проблемот доаѓа оттаму, што се обидуваме точките од просторот да ги пренесеме во рамнината на листот. За една точка A и рамнина Σ точна е само една од двете можности:

- $A \in \Sigma$ и во тој случај велиме, дека точката A **лежи** на рамнината Σ, односно рамнината Σ **минува** низ точката A (црт. 3а).

- $A \notin \Sigma$ и во тој случај велиме, дека точката A **не лежи** на рамнината Σ, односно рамнината Σ **не минува** низ точката A (црт. 3б).



Цртеж 3

Не секое множество од точки во просторот претставува рамнина. За рамнините ги прифаќаме следните аксиоми:

A_4: *Кои било три неколинеарни точки определуваат една единствена рамнина, која минува низ нив.*

A_5: *Постојат барем четири точки во просторот, кои не лежат во иста рамнина.*

За четири или повеќе точки во просторот велиме, дека се **компланарни** ако постои рамнина која минува низ тие точки. Затоа аксиомата A_5 може да се формулира и вака:

Постојат барем четири некомпланарни точки во просторот.

4. Листовите во една тетратка се прицврстени на две места за корицата. Колку различни положби можеш да направиш на еден лист од тетратката без да го отцепиш од корицата? Колку рамнини минуваат низ две различни точки во просторот?

5. Објасни зошто множеството точки од просторот не може да претставува рамнина. Од која аксиома произлегува тоа?

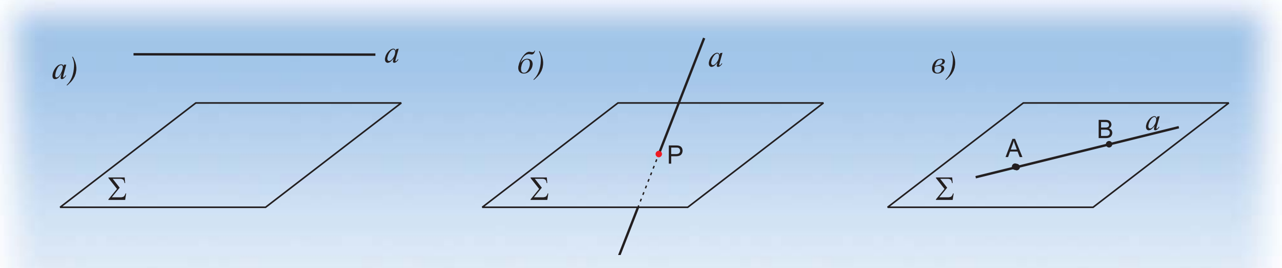
IV. 1.3. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И РАМНИНА

За заемната положба на права и рамнина ја прифаќаме следнава аксиома.

A_6: *Ако две различни точки A и B, од една права лежат во рамнината Σ, тогаш и секоја точка од правата а лежи во рамнината Σ.*

Врз основа на оваа аксиома, лесно ќе определиме што се може да биде пресекот $a \cap \Sigma$ на правата a и рамнината Σ. Според A_6, ако две точки од правата a лежат во рамнината Σ, тогаш $a \subseteq \Sigma$. Затоа, за произволна права a и произволна рамнина Σ точна е само една од можностите:

- a и Σ немаат заеднички точки, т.е. $a \cap \Sigma = \varnothing$ и во тој случај велиме, дека правата a е **паралелна** со рамнината Σ и пишуваме $a \| \Sigma$ (црт.4а)



Цртеж 4

- a и Σ имаат само една заедничка точка P, т.е. $a \cap \Sigma = \{P\}$ и во тој случај велиме правата a ја **прободува** рамнината Σ (црт. 4б), а точката P се вика **пробод**.

- секоја точка од правата a припаѓа на рамнината Σ, т.е. $a \subseteq \Sigma$ и во тој случај велиме, дека правата a **лежи** во рамнината Σ (црт. 4в). Ако a лежи во Σ тогаш, исто така, усвојуваме дека a и Σ се паралелни, т.е. $a \| \Sigma$.

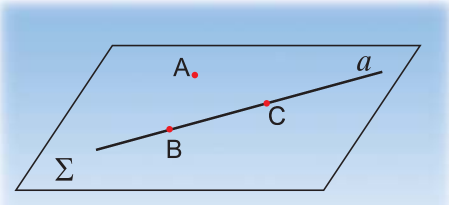
Според тоа, **една права или е паралелна со рамнината** Σ **(ако** $a \cap \Sigma = \varnothing$ **или** $a \subseteq \Sigma$), **или правата** ***a*** **ја прободува рамнината** Σ **(ако** $a \cap \Sigma = \{P\}$).

Теорема 1. *Права* a *и точка* $A \notin a$ *определуваат единствена рамнина* Σ.

Доказ*. Нека се дадени права a и точка $A \notin a$. На правата a избираме произволни различни точки B и C (црт. 5). Тогаш точките A, B и C не лежат на иста права, па според A_4 постои рамнина Σ која минува низ A, B и C. Според A_6 важи $a \subseteq \Sigma$.

Значи, покажавме дека постои (барем една) рамнина Σ, која минува низ A и $a \subseteq \Sigma$.

Дали може да постои и друга рамина Σ_1 со истото својство? Не може, бидејќи ако $A \in \Sigma_1$ и $a \subseteq \Sigma_1$, тогаш $A,B,C \in \Sigma_1$. Освен тоа $A,B,C \in \Sigma$, па според аксиомата A_4 мора да важи $\Sigma_1 = \Sigma$. Со тоа доказот е завршен.



Цртеж 5

IV. 1.4. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ ВО ПРОСТОР

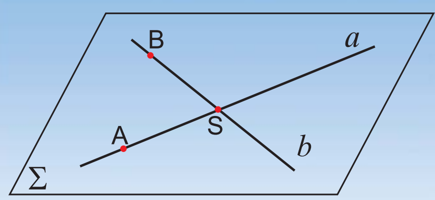
Во IV.1.1 видовме дека за две прави a и b важи само една од можностите: a и b немаат заеднички точки; a и b се сечат, т.е. имаат една заедничка точка; или тие се совпаѓаат, односно $a = b$. Аналогно на теоремата 1 важи следната теорема.

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

Теорема 2. *Ако правите a и b се сечат, тогаш постои единствена рамнина Σ таква што* $a \subseteq \Sigma$ *и* $b \subseteq \Sigma$.

Доказ*. Нека правите a и b се сечат во точка S (црт.6). На правата a избираме точка A различна од S, а на правата b избираме точка B различна од S. Точките A, B и S не се колинеарни, па според A_4 постои рамнина Σ која минува низ точките A, B и S. Од A_6 следува $a \subseteq \Sigma$ (бидејќи A, S $\in \Sigma$) и $b \subseteq \Sigma$ (бидејќи B, S $\in \Sigma$). Значи, таква рамнина Σ постои. Ако Σ_1, исто така, е рамнина за која $a \subseteq \Sigma_1$ и $b \subseteq \Sigma_1$, тогаш A, B, S $\in \Sigma_1$. Од единственоста во A_4 следува дека $\Sigma_1 = \Sigma$. Значи рамнината Σ е единствена и со тоа доказот е завршен.

Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е коцка (црт. 7). Правите a = AB и b = CC_1 не лежат во иста рамнина. Навистина, кога тие би лежеле во иста рамнина Σ, тогаш и точките A,B,C и C_1 ќе лежат во Σ што очигледно е контрадикција. Значи, постојат прави што не лежат во иста рамнина и за таквите прави велиме дека се **разминувачки.**



Цртеж 6

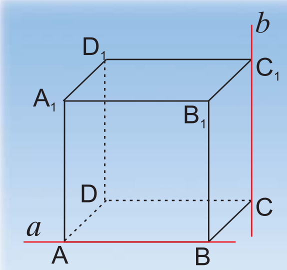
6. На цртеж 7 најди неколку парови разминувачки прави.

Дефиниција. *Две прави a и b што лежат на иста рамнина и немаат заеднички точки, или се совпаѓаат, се викаат* ***паралелни прави*** *и пишуваме* $a \parallel b$.

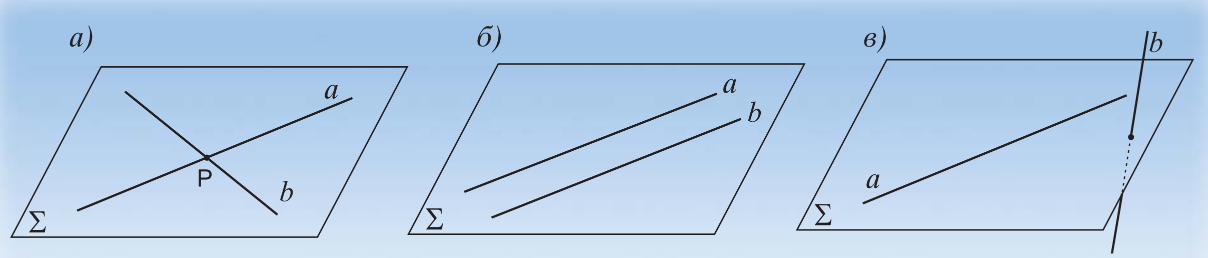
7. На цртеж 7 најди неколку парови паралелни прави.

Врз основа на претходната дискусија гледаме дека за две прави важи само една од можностите:

- правите **се сечат** (црт. 8а)
- правите **се паралелни** (или **се совпаѓаат** во специјален случај)(црт. 8б)
- правите **се разминуваат** (црт. 8в).



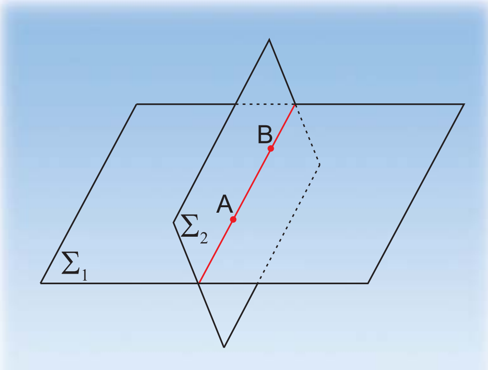
Цртеж 7



Цртеж 8

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

IV. 1.5. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ РАМНИНИ



Цртеж 9

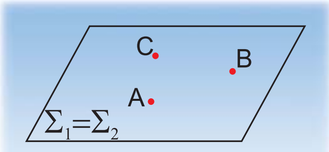
За заемната положба на две рамнини ја прифаќаме следната аксиома.

A_7: *Ако две рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка.*

Од A_7 непосредно заклучуваме дека ако Σ_1 и Σ_2 се различни рамнини кои имаат заедничка точка A, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка B, па според тоа имаат и заедничка права AB. (црт. 9). Но, освен правата AB тие не можат да имаат уште некоја заедничка точка. Навистина, ако покрај правата AB имаат и заедничка точка C што не припаѓа на таа права, тогаш според теорема 1 правата AB и точката C определуваат единствена рамнина која ги содржи правата и точката. Значи, мора да е $\Sigma_1 = \Sigma_2$, а ова противречи на нашата претпоставка дека $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$.

8. Наведи неколку пара рамнини на цртеж 7, кои што се сечат.

Ако две рамнини се еднакви како множества точки, т.е. ако $\Sigma_1 = \Sigma_2$, за нив велиме дека се **совпаѓаат**. За нив често пишуваме $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. За две рамнини да се совпаѓаат доволно е тие да имаат три заеднички неколинеарни точки (црт. 10).



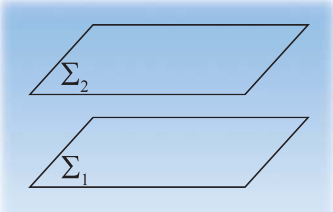
Цртеж 10

Дефиниција. *За две рамнини Σ_1 и Σ_2 велиме дека се паралелни ($\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$) ако тие немаат заедничка точка или се совпаѓаат.*

9. Наведи неколку пара паралелни рамнини спрема цртеж 7.

Според претходно кажаното, гледаме дека две рамнини Σ_1 и Σ_2 имаат само една од следните две заемни положби:

- тие **се паралелни** - цртеж 11 (или **се совпаѓаат** во специјален случај - (црт. 10)
- тие **се сечат** - цртеж 9.



Цртеж 11

задачи

10. Колку прави минуваат низ: а) една точка, б) две различни точки во просторот?

11. Колку прави определуваат три различни точки што не лежат на иста права?

12. Колку прави определуваат четири точки во просторот, такви што кои било три не лежат на иста права?

13. Докажи дека рамнина и една права што не лежи на неа не можат да имаат повеќе од една заедничка точка.

14. Познато е дека $p \cap \Sigma = \{M\}$ и $a \| \Sigma$. Каква заемна положба можат да имаат правите p и a?

15. Може ли пресекот на две рамнини да се состои точно од 5 точки?

16. Дали е доволно само да се каже:

а) Рамнината е определена со три точки, б) Рамнината е еднозначно определена со две прави, в) Рамнината е еднозначно определена со права и точка? Кој услов треба да се истакне?

17. Нека ABCDA'B'C'D' е квадар. Скицирај ги рамнините определени со: а) правата AB и точката C', точките A, D и B', в) правите BD и B'D'.

18. Правата p ја прободува рамнината Σ. Дали може на рамнината Σ да лежи права што ќе биде паралелна на правата p?

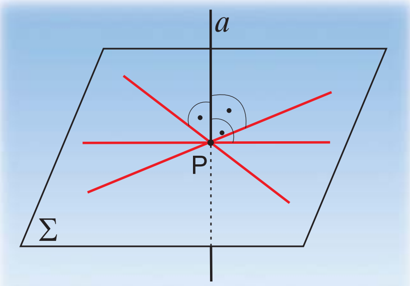
19. Какви заемни положби можат да имаат две прави: а) во рамнина, б) во просторот?

20. Колку прави можат да се повлечат од дадена точка, кои се нормални на дадена права?

IV. 2. ПАРАЛЕЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ И ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ

IV. 2.1. НОРМАЛА НА РАМНИНА

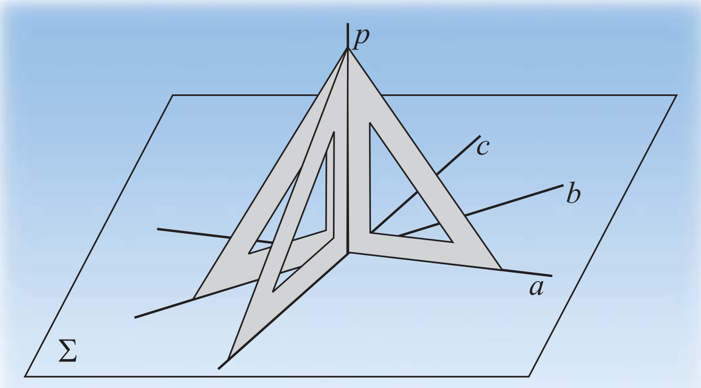
Дефиниција. *За правата a ќе велиме дека е нормална на рамнината Σ, ако правата a е нормална на секоја права која минува низ прободот на правата и рамнината (црт. 12) и пишуваме* $a \perp \Sigma$.



Цртеж 12

Но, за да провериме дали една права a е нормална на Σ, дали има потреба да проверуваме дека правата a е нормална на секоја права во Σ што минува низ прободот P (а такви прави има безброј), ќе го направиме следниот обид. На картон поставуваме два правоаголни триаголника така што ќе припоиме две катети од триаголниците, а останатите две катети нека лежат на картонот (црт. 13) при што зафаќаат агол различен од 0° и 180°.

Припоените катети определуваат права p, а другите две катети нека определуваат прави a и b. Очигледно $p \perp a$ и $p \perp b$. Ако сега трет правоаголен триаголник го поставиме така што едната катета се припои кон двете совпаднати катети, ќе забележиме дека втората катета целосно ќе лежи на картонот. Ако оваа катета определува права c (црт. 13), обидот покажува $c \perp p$.



Цртеж 13

Всушност, обидот покажува дека важи следната теорема која нема да ја докажуваме.

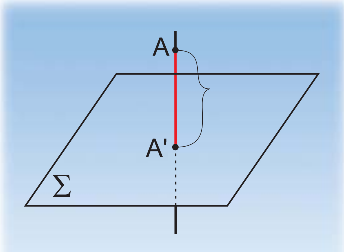
Теорема 1. *Ако една права p ја прободува дадена рамнина* Σ *и е нормална на две различни прави од таа рамнина кои минуваат низ прободот* $p \cap \Sigma$, *тогаш правата p е нормална на рамнината* Σ.

Оваа теорема има голема практична примена. На пример, во градежништвото, sидарот со помош на две мерења може да провери дали некоја цевка е нормална на некоја рамнина. Ќе наведеме уште две теореми без доказ.

Теорема 2. *Ако две прави a и b се нормални на една рамнина* Σ, *тогаш правите a и b се паралелни.*

Теорема 3. *Низ дадена точка A може да се повлече само една права која е нормална на дадена рамнина.*

Во теорема 3 лесно се покажува дека не е можно од дадена точка A да се повлечат две нормали кон дадена рамнина Σ. Навистина, ако може да се повлечат две нормали, тогаш тие нека ја сечат рамнината Σ во точки X и Y. Триаголникот AXY има два прави агла: во точка X и во точка Y, што е контрадикција.

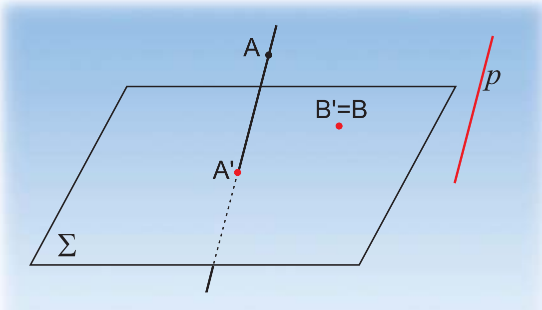


Цртеж 14

Нека A е произволна точка, а Σ произволна рамнина и $A \notin \Sigma$. Да повлечеме нормала од точката A кон рамнината Σ. Нека A' е прободот на нормалата со рамнината Σ. Должината $\overline{AA'}$ се нарекува **растојание** од точката A до рамнината Σ.

IV.2.2. ПАРАЛЕЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ

Земете еден предмет, на пример, пенкало, и набљудувајте ја неговата сенка врз рамен лист хартија. Со вртење на листот ќе забележите дека должината на сенката на пенкалото може да биде поголема, еднаква или помала од должината на пенкалото. Во секоја фиксна положба на листот, всушност, станува збор за *паралелно проектирање* од причина што сончевите зраци можеме да ги сметаме за паралелни.



Цртеж 15

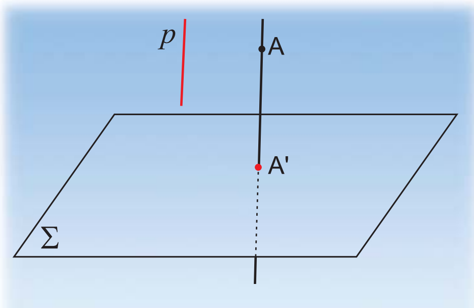
Паралелното проектирање го дефинираме на следниот начин. Нека е дадена рамнина Σ и права p која не е паралелна со Σ (црт. 15). Низ произволна точка A од просторот повлекуваме права паралелна со p и нека таа права ја прободува рамнината Σ во точка A'. Во специјален случај, ако $B \in \Sigma$, тогаш B' се совпаѓа со B. Со тоа е дефинирано пресликување од множеството на точки во просторот на рамнината Σ кое се нарекува **паралелно проектирање**.

Точката A' се вика **проекција** на точката A врз рамнината Σ. Правецот определен со правата p се нарекува **проектирачки правец**, а рамнината Σ се нарекува **проекциона рамнина**.

1. Ако p е проектирачки правец за една паралелна проекција, кој е потребен и доволен услов да точките A и B се проектираат во иста точка?

IV.2.3. ОРТОГОНАЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ

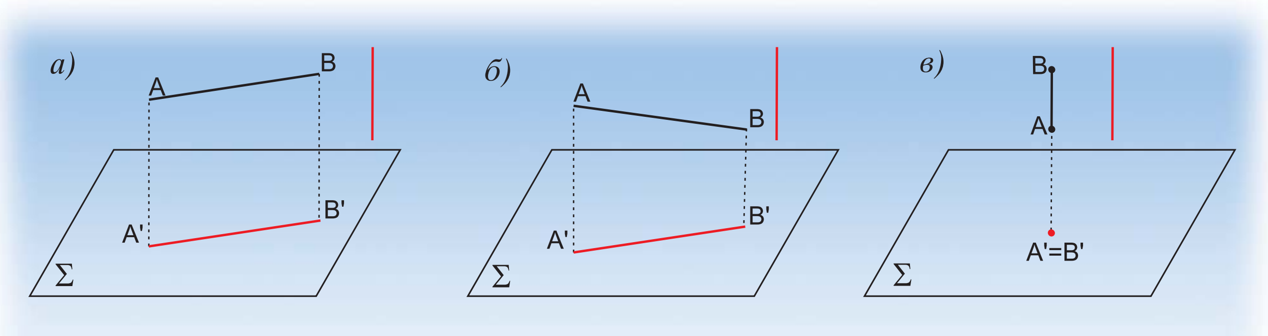
Во специјален случај ако при паралелното проектирање проектирачкиот правец е нормален на рамнината Σ, добиваме **ортогонално проектирање.** Затоа ортогоналното проектирање се задава само со проекционата рамнина Σ. Ако точката A се проектира во точка A', тогаш за точката A' велиме дека е **ортогонална проекција** на точката A врз рамнината Σ (црт.16).



Цртеж 16

Ако паралелното проектирање не е ортогонално, тогаш велиме дека е **косо проектирање**.

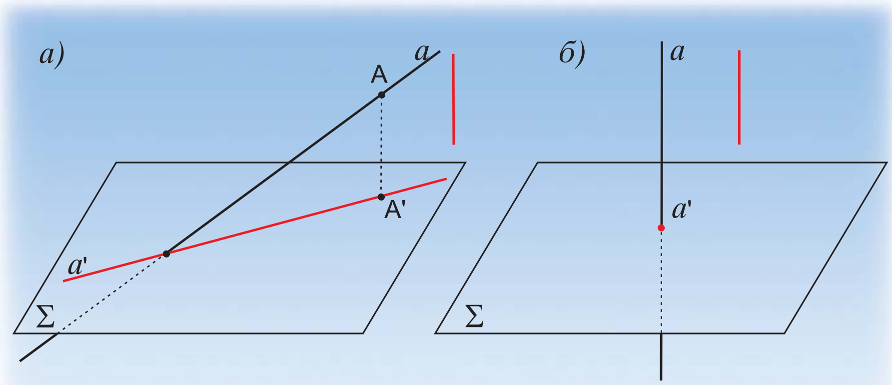
Ако е дадена фигура F, тогаш нејзина проекција врз рамнината Σ е множество точки што се проекции на точките од фигурата F. На црт. 17 а), б), в) дадени се ортогоналните



Цртеж 17

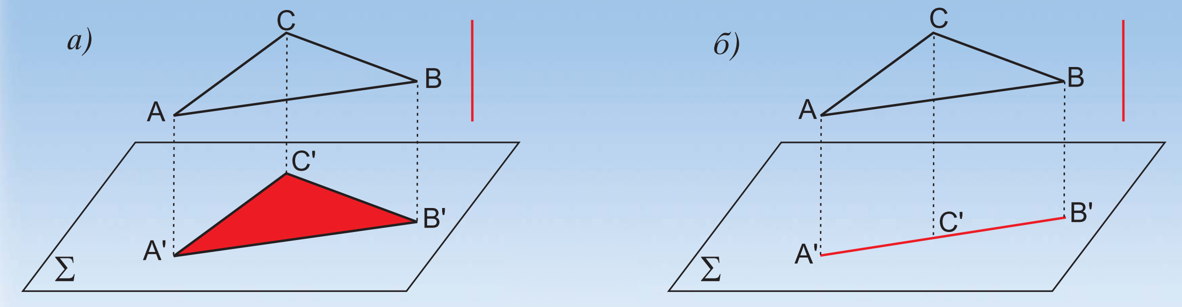
проекции на отсечка AB. Забележуваме дека, ако $AB \parallel \Sigma$, тогаш отсечката A'B' е паралелна и еднаква на AB, а ако $AB \perp \Sigma$, тогаш проекцијата претставува точка.

На цртеж 18 а), б), в) дадени се ортогонални проекции на права a. Забележуваме дека нејзината проекција е права (црт. 18 а) или точка (црт. 18б).



Цртеж 18

На цртеж 19 а), б) дадени се проекции на триаголник. Забележуваме дека проекцијата може да биде триаголник (црт. 19а), но, може да биде и отсечка (црт. 19б) доколку A',B' и C' се колинеарни точки.



Цртеж 19

2. Во проекционата рамнина избери: а) отсечка, б) права, в) триаголник а потоа нацртај ги соодветните ортогонални проекции.

За ортогоналните проекции важат следниве две теореми.

Т

Теорема 4. *За произволна отсечка AB и нејзината ортогонална проекција A'B' важи неравенството* $\overline{AB} \geq \overline{A'B'}$.

Теорема 5. *Нека точката A не лежи во рамнината* Σ *и нека A' е ортогонална проекција на точката A врз* Σ*, а B е произволна точка од* Σ *различна од A'. Тогаш важи* $\overline{AA'} < \overline{AB}$.

И двете теореми се последица на фактот дека хипотенузата е поголема од катетите. Од теоремата 5 произлегува дека растојанието од точката A до рамнината Σ е најкраткото од сите растојанија $\overline{AB}$, каде $B \in \Sigma$.

задачи

3. Колку рамнини минуваат низ дадена точка, коишто се нормални на дадена права p?

4. Ако a и b се паралелни прави, што можеш да кажеш за нивните слики a' и b' при ортогонална проекција?

5. Ако a и b се нормални прави, дали мора и нивните слики a' и b' да бидат нормални прави при: а) паралелна проекција б) ортогонална проекција?

6. Што претставува проекцијата на четириаголник при ортогонално проектирање? Дали може да биде триаголник?

7. Нека A, B и C се три колинеарни точки при што B лежи меѓу A и C. Дали при ортогонална проекција A', B' и C' се колинеарни и дали мора B' да лежи меѓу A' и C'?

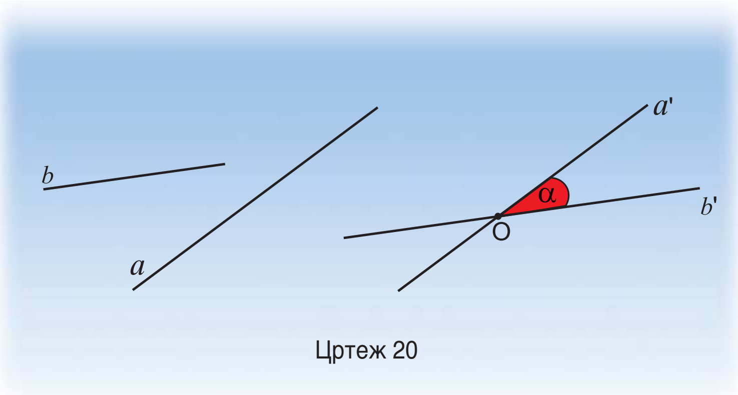
8. Докажи ја теоремата 4. Кога важи равенството?

9. Докажи ја теоремата 5.

10. Дали отсечки со еднакви должини при ортогонална проекција се пресликуваат во отсечки со еднакви должини?

IV.3. АГЛИ МЕЃУ ПРАВИ И РАМНИНИ*

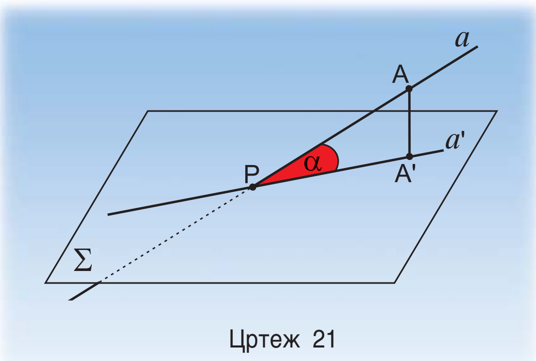
Нека a и b се непаралелни прави во просторот. Тогаш тие или се сечат или се разминувачки. Ако a и b се сечат, тогаш тие лежат во една рамнина Σ. *Под агол меѓу правите a и b го подразбираме аголот што тие го образуваат во рамнината* Σ. Ако правите се разминувачки, избираме произволна точка O и низ неа повлекуваме прави $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$. (црт. 20) Правите a' и b' се сечат, па, *под агол меѓу разминувачките прави a и b го подразбираме аголот помеѓу a' и b'.*



Цртеж 20

Значи, во секој случај аголот меѓу две прави се сведува на агол меѓу две прави што се сечат. Да напоменеме дека, две прави што се сечат тие образуваат два напоредни агла а ние се договараме да го земеме помалиот од нив. Затоа ако φ е агол меѓу две прави, тогаш $0° \leq \varphi \leq 90°$. Ако правите a и b се паралелни, тогаш усвојуваме дека аголот меѓу нив е 0°.

1. Нацртај квадар а потоа избери неколку прави и определи ги аглите меѓу нив.



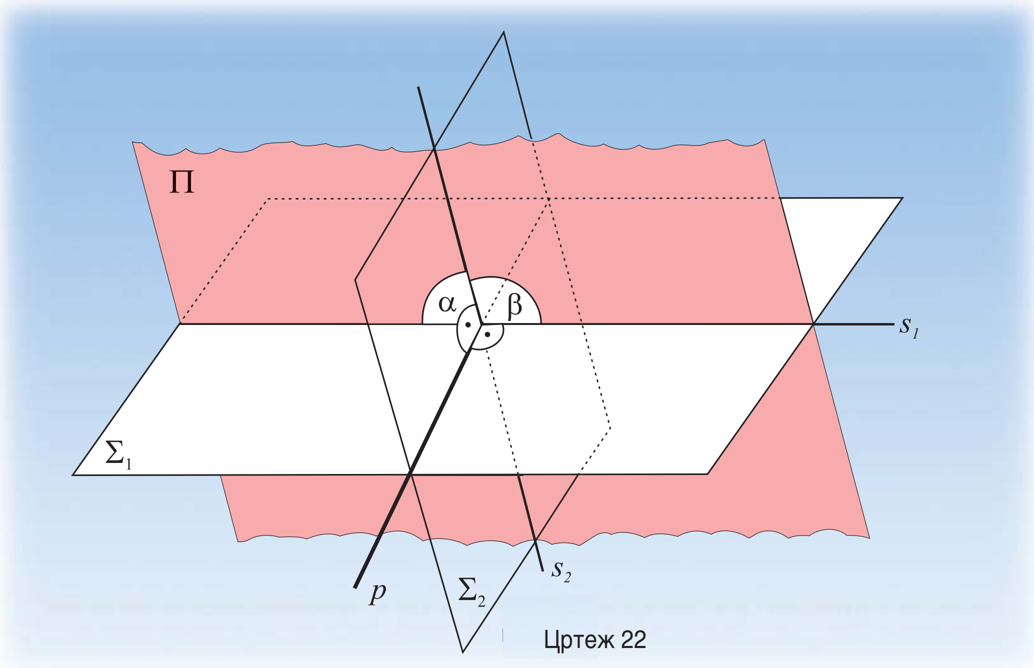
Цртеж 21

Ако аголот меѓу две прави е 90°, за правите велиме дека се нормални. Нека се дадени права a и рамнина Σ. **Агол меѓу правата *a* и рамнината Σ е аголот помеѓу правата *a* и нејзината ортогонална проекција *a'* врз рамнината** Σ (црт. 21) и означуваме $\measuredangle(a,\Sigma)$. Во случај кога правата a е нормална на рамнината Σ, проекцијата a' е точка и тогаш дополнително дефинираме дека $\measuredangle(a, \Sigma) = 90°$.

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

2. Нека $a \subseteq \Sigma$. Определи го аголот $\measuredangle(a, \Sigma)$.

На крај да земеме две рамнини Σ_1 и Σ_2 кои не се паралелни. Тогаш тие се сечат вдолж некоја права p. Поставуваме рамнина П која е нормална на пресечната права p (црт. 22). Рамнината П ги сече рамнините Σ_1 и Σ_2 вдолж правите s_1 и s_2 соодветно.



Цртеж 22

Правите s_1 и s_2 образуваат два напоредни агла α и β. Помалиот од овие два агла го викаме **агол меѓу рамнините** Σ_1 и Σ_2. Значи, за аголот φ меѓу две рамнини важи $0° \leq \varphi \leq 90°$. Ако рамнините се паралелни, тогаш усвојуваме дека аголот меѓу нив е 0°.

Ако аголот меѓу две рамнини е 90°, за рамнините велиме дека се **заемно нормални**. Нормални се, на пример, рамнината на подот и рамнината на некој ѕид во соба. Може да се докаже тврдењето дека, рамнините Σ и П се нормални ако во рамнината Σ постои права a којашто е нормална на рамнината П.

3. Отвори една книга така што двете корици образуваат некој агол. Со помош на агломер измери го тој агол.

задачи

4. Нека правата p ја прободува рамнината Σ. Разгледај го аголот меѓу правата p и произволна права во рамнината Σ. Кој од тие агли е најмал? (Можеш да избереш лист од хартија за рамнина Σ, а пенкало за права p).

5. Нека рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат вдолж правата p. Низ произволна точка од правата p повлечи прави s_1 и s_2 во рамнините Σ_1 и Σ_2 кои се нормални на правата p.
Дали $\measuredangle(s_1, s_2) = \measuredangle(\Sigma_1, \Sigma_2)$?

6. Кој услов е потребен и доволен за проекцијата на триаголникот ABC врз рамнината Σ да биде отсечка?

7. Нека Σ_1 и Σ_2 се две рамнини, а s_1 и s_2 се прави такви што $s_1 \perp \Sigma_1$ и $s_2 \perp \Sigma_2$. Покажи дека $\measuredangle(\Sigma_1, \Sigma_2) = \measuredangle(s_1, s_2)$.

8. Нека рамнините Σ_1 и Σ_2 се нормални. Ако низ произволна точка од пресечната права издигнеме нормала s на рамнината Σ_1, каде ќе лежи правата s?

9. Од точката M, што лежи надвор од рамнината Σ, повлечена е наведната отсечка $\overline{MA} = 12\text{ cm}$, која со рамнината Σ образува агол од: а) 30°, б) 45°, в) 60°. Одреди го растојанието од точката M до рамнината Σ.

10. Едната катета на еден рамнокрак правоаголен триаголник лежи на рамнината Σ. Хипотенузата на тој триаголник со рамнината Σ зафаќа агол од 30°. Да се одреди аголот меѓу другата катета и хипотенузата.

11. Отсечката AB со должина $\overline{AB} = 8\text{ cm}$ е паралелна на дадена рамнина Σ. Отсечката BA', каде A' е ортогоналната проекција на A врз Σ, со Σ образува агол од 60°. Да се одреди должината на отсечката BA' и растојанието на отсечката AB до рамнината Σ.

IV.4. ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

Предметите коишто нѐ опкружуваат околу нас се различни видови на физички тела. За сите нив е основно што тие се дел (подмножество) од просторот. Физичките тела се карактеризираат и според материјата од која се составени. Од геометриска гледна точка нас не нѐ интересира материјата од која се составени, па затоа апстрахирајќи го ова својство на физичките тела ги добиваме геометриските тела.

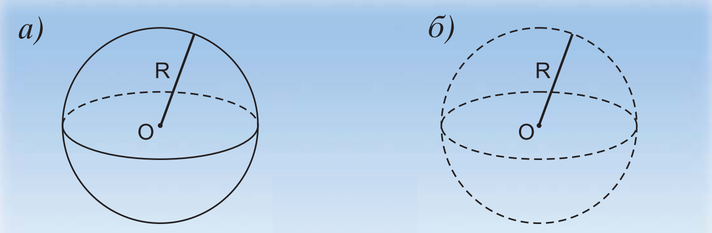
Две својства се карактеристични за геометриските тела. Геометриското тело мора да е ограничено од сите страни. Тоа значи, дека во која било насока во просторот, тоа не може да се протега до бескрајност. Едноставно, ќе велиме дека тоа е **ограничено**. Второто својство е поврзано со површината на телото. Границата, која го одвојува делот од просторот кој го зафаќа геометриското тело од останатиот дел надвор од него, се нарекува **површина на телото**.

Површината на геометриското тело го дели просторот на **внатрешна и надворешна област**. Унијата на внатрешната област и границата го сочинуваат телото. Сега можеме да дефинираме:

Геометриското тело е ограничен дел (подмножество) од просторот, кој својата граница (површина на телото) ја содржи како подмножество.

Примери за тело се: коцка, квадар, топка, конус, цилиндар, пирамида и др. Да ја разгледаме топката како геометриско тело. Таа се дефинира како множество точки во просторот кои се наоѓаат на растојание не поголемо од R од некоја фиксна точка O, односно $\{X | \overline{OX} \leq R\}$ (црт. 23а). Границата (неговата површина) во овој случај е сферата $\{X | \overline{OX} = R\}$ и тоа е подмножество на топката.

Меѓутоа, множеството $\{X \mid \overline{OX} < R\}$ (црт. 23б) не е геометриско тело, бидејќи во себе не ја содржи границата.



Цртеж 23

Површината на геометриското тело може да биде составена од рамни делови (многуаголници) и од закривени површини. Во зависност од тоа, каква е површината, разликуваме **рабести** и **валчести тела**.

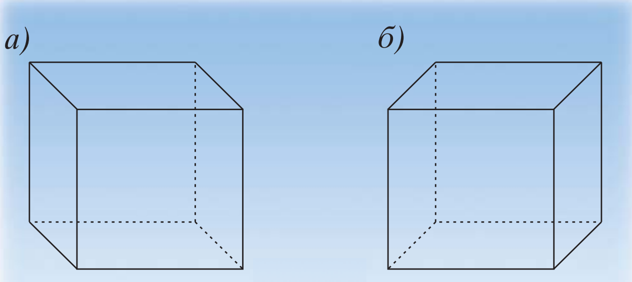
Геометриското тело што е заградено само од рамни површини (многуаголници), се вика рабесто тело.

Геометриското тело што е заградено само со крива површина или со криви и рамни површини се вика валчесто тело.

Од рабестите тела, понатаму ќе ги изучуваме призмата и пирамидата, а од валчестите тела ќе ги изучуваме цилиндарот, конусот и топката. Рабесто тело, чија граница се состои од конечен број многуаголници, се вика **полиедар**. Многуаголниците што ја образуваат границата на полиедарот се викаат **ѕидови**, а нивните страни се нарекуваат **рабови** на полиедарот. Темињата на многуаголниците, исто така, ги викаме **темиња** на полиедарот.

1. Колку а) ѕидови, б) рабови, в) темиња, има еден квадар?

При цртањето на геометриските тела, ние, всушност, ги цртаме нивните проекции врз некоја рамнина во зависност од проектирачкиот правец, односно насоката од која ние го набљудуваме телото. Бидејќи должините на проекциите на отсечките, во општ случај, не се еднакви на вистинската големина, затоа, при цртање на геометриските тела, не секогаш, се запазуваат должините на рабовите. Затоа, страните на квадратот ги цртаме како паралелограми. Вообичаено е геометриските тела да ги цртаме како да ги гледаме однапред, малку одозгора и малку од лево или од десно. На цртеж 24а нацртана е коцка гледана од лева страна, а на цртеж 24б гледана од десна страна.

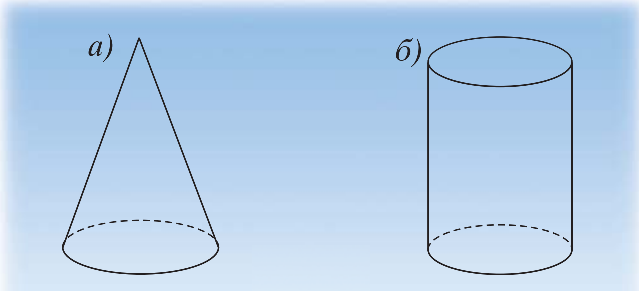


Цртеж 24

Кога коцката ја гледаме, само однапред (ниту малку одозгора ниту од лево ниту од десно) цртежот би бил само квадрат и тоа не дава претстава за коцката. Кога од истата насока цртаме конус или цилиндар би добиле триаголник и правоаголник, а тоа не дава визуелна претстава за соодветното тело. Кога би ги гледале конусот и цилиндарот малку од високо ќе го добиеме цртеж 25 а, б.

Забележуваме дека основите на конусот и цилиндарот не ги цртаме како кружници, туку како **елипси**.

Вообичаено е невидливите рабови или криви линии да ги цртаме со испрекинати линии.



Цртеж 25

задачи

2. Што е геометриско тело?
3. Што е а) рабесто тело, б) валчесто тело?
4. Што се а) ѕидови, б) рабови, в) темиња на полиедарот?
5. Дали од едно теме на полиедарот може да излегуваат само а) 2 раба, б) 3 рабови, в) 4 рабови?
6. Цилиндар и конус се поставени на хоризонтална рамнина Σ. Нацртај како ќе изгледаат овие две тела гледани одозгора.
7. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нацртај ја оваа коцка ако таа се набљудува од правец определен со дијагоналата AC_1.

6 ПРИЗМА

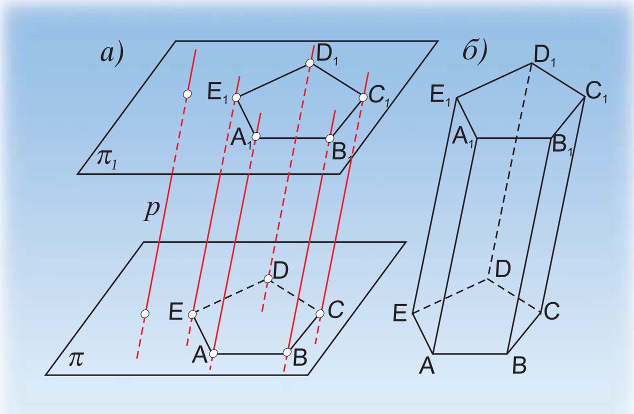
IV.5. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ НА ПРИЗМАТА

Нека π и π_1 се две паралелни рамнини, а p - една права што ги сече рамнините π и π_1 (црт. 26). На рамнината π да земеме еден кој и да било конвексен многуаголник, на пример, петаголникот ABCDE и низ неговите темиња да повлечеме прави - паралелни на правата p.

Така повлечените прави ќе ја прободат рамнината π_1 во пет точно одредени точки $A_1B_1C_1D_1E_1$, кои определуваат друг петаголник $A_1B_1C_1D_1E_1$ во рамнината π_1 (црт. 26).

Очигледно е дека со транслација за вектор $\overrightarrow{A_1A}$ петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ ќе се совпадне со петаголникот ABCDE. Според тоа, тие се складни: $ABCDE \cong A_1B_1C_1D_1E_1$.

Четириаголниците ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, итн. се паралелограми (црт.26) (Зошто?).

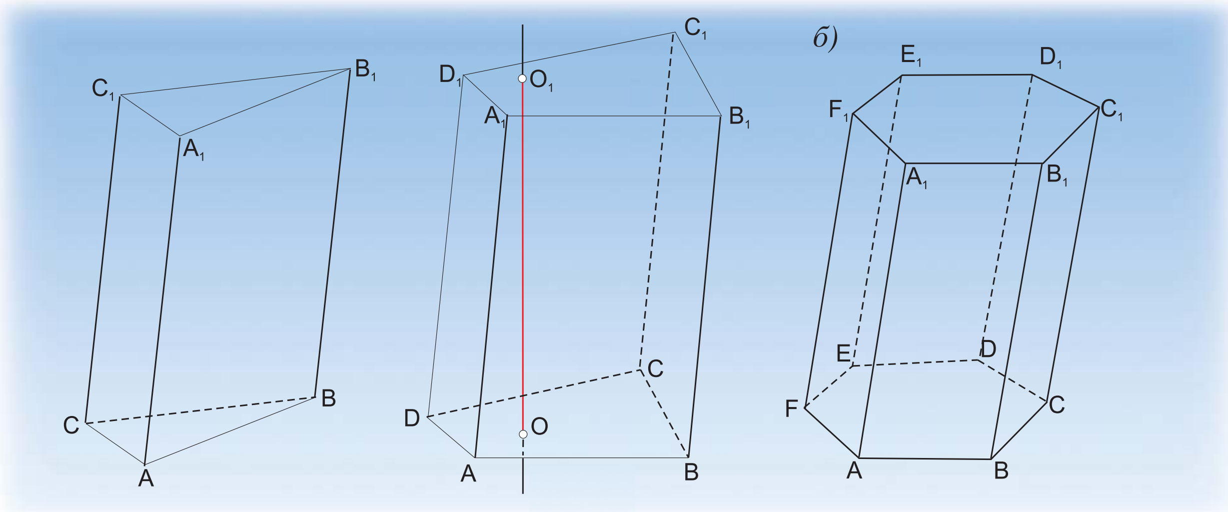


Цртеж 26

Површината, којашто е составена од двата складни петаголника ABCDE и $A_1B_1C_1D_1E_1$ и петте паралелограми ABB_1A_1, BCC_1B_1,... (црт. 26б) го разбива множеството точки од просторот, што не ѝ припаѓат на две области: внатрешна и надворешна. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело и тоа полиедар.

Тој полиедар (црт. 26б) го викаме **петаголна призма**.

Во рамнината π, ако наместо петаголник земеме друг многуаголник, на пример: триаголник, четириаголник, односно шестаголник, на сличен начин, ќе добиеме и други полиедри, кои се викаат **триаголна, четириаголна**, односно **шестаголна призма** (црт. 27). Сите тие со заедничко име се викаат **призми**.



Цртеж 27

Дефиниција: *Еден полиедар се вика* ***призма****, ако два негови ѕида се два складни многуаголника, што лежат во две паралелни рамнини, а другите ѕидови се паралелограми што имаат по една заедничка страна со секој од спомнатите ѕидови.*

Двата складни многуаголника се викаат уште и **основи** (или **бази**) на призмата, а паралелограмите - **бочни** (или **околни**) **ѕидови** на призмата. Сите бочни ѕидови на призмата велиме дека ја образуваат **бочната површина** на призмата.

Страните на основите ги викаме **основни рабови** на призмата ($AB, BC, ..., A_1B_1, ...$-црт. 27), а сите други рабови - **бочни рабови** на призмата ($AA_1, BB_1, CC_1, ...$-црт. 27). Темињата на основите ги викаме **темиња** на призмата.

Отсечките што сврзуваат две темиња на една призма, кои не лежат на ист ѕид, се викаат **просторни дијагонали** или само **дијагонали** на таа призма.

Растојанието од произволна точка O_1 од едната основа до другата основа, т.е. растојанието од точката O_1 до нејзината ортогонална проекција O, се вика **висина** на призмата и ја означуваме со H, т.е. $\overline{OO_1} = H$ (црт. 27).

Од дефиницијата на призмата следуваат следниве две важни својства на призмата:

1°Сите бочни рабови на призмата се паралелни и еднакви меѓу себе, како отсечки од паралелни прави заклучени меѓу две паралелни рамнини.

2° Секои два основни раба што лежат на ист бочен ѕид на призмата, се паралелни и еднакви.

задачи

1. Што е призма, што се бочни ѕидови а што е бочна површина на призмата?

2. Кои се основни, а кои бочни рабови на призмата?

3. Нацртај една четириаголна призма, а потоа повлечи ги сите нејзини просторни дијагонали.

4. Кои својства ги имаат бочните рабови на призмата, а кои основните рабови што лежат на еден ист бочен ѕид?

5. Колку основни, а колку бочни рабови има: а) триаголна, б)четириаголна, в) петаголна призма?

6. Што е висина на призма?

IV.6. ВИДОВИ И ПРЕСЕЦИ НА ПРИЗМИТЕ

Во зависност од тоа дали основата на призмата е триаголник, четириаголник, петаголник, итн., призмата соодветно ја викаме **триаголна, четириаголна, петаголна**, итн.

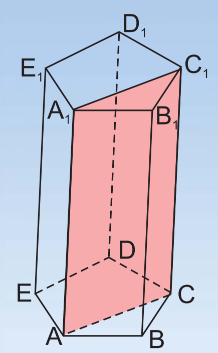
Разгледајте ги цртежите 26 и 27! На нив се нацртани по една триаголна, четириаголна, петаголна и шестаголна призма. Како што гледате, со непрекинати линии ги цртаме сите видливи рабови, а со испрекинати линиии - сите невидливи рабови.

Ако бочните рабови на една призма се нормални на нејзините основи, тогаш неа ја викаме **права призма**. Во спротивен случај, призмата ја викаме **коса**. Ние ќе ги разгледуваме само правите призми. Кај правите призми висината е еднаква на должината на бочните рабови, а сите бочни ѕидови се правоаголници (Зошто?).

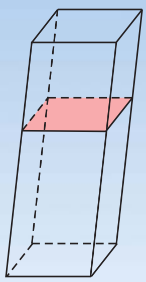
Дефиниција: *Права призма, на која основите се правилни многуаголници, се вика* ***правилна призма***.

За правилните призми карактеристично е тоа што: **Сите основни рабови се еднакви меѓу себе, а сите бочни ѕидови се складни правоаголници.**

Рамнината што минува низ една дијагонала на основата на призмата и низ еден нејзин бочен раб, се вика **дијагонална рамнина**; а рамнинската фигура што се добива кога призмата ја пресечеме со дијагоналната рамнина се вика **дијагонален пресек** на призмата. На цртеж 28 паралелограмот AA_1C_1C е еден дијагонален пресек на нацртаната призма.



Цртеж 28



Цртеж 29

Очигледно е дека: секој дијагонален пресек на призмата е паралелограм, а кај правата призма тој е правоаголник.

Разликуваме уште пресек што се добива кога призмата ја пресечеме со рамнина паралелна на основите на призмата, наречен **паралелен пресек** (црт. 29). Очигледно е дека кај секоја призма паралелниот пресек е фигура складна на основите на призмата.

задачи

1. Што претставуваат бочните ѕидови на косата призма? Дали може меѓу нив да има и правоаголник?
2. Ако сите бочни ѕидови на една призма се правоаголници, каква е таа призма?
3. Зошто бочните ѕидови на призмата се паралелограми?
4. Кои пресеци на призмата се викаат дијагонални? Кои призми немаат дијагонални пресеци?
5. Што претставуваат дијагоналните пресеци на правите призми?

6. Колку дијагонални пресеци можат да се направат низ еден бочен раб кај:
а) триаголната, б) четириаголната, в) петаголната, г) n - аголната призма?

7. Колку дијагонали, а колку дијагонални пресеци можат да се направат низ еден бочен раб кај: а) четириаголна, б) петаголна, в) шестаголна призма?

IV.7. ПАРАЛЕЛОПИПЕД

Дефиниција 1. *Призма, чиишто основи се паралелограми, ја викаме* ***паралелопипед****.*

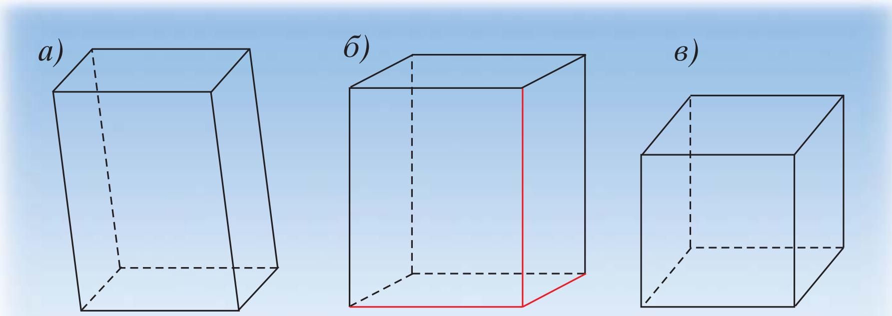
Значи, сите ѕидови на паралелопипедот се паралелограми.

Паралелопипедите, како и секоја призма можат да бидат прави или коси (црт. 30).

Дефиниција 2. *Прав паралелопипед, на кој основите му се правоаголници, се вика уште и правоаголен паралелопипед или* ***квадар*** *(црт. 30б).*

Квадарот ви е добро познат на сите. Сите негови ѕидови се правоаголници, па затоа кои и да било три раба што излегуваат од едно негово теме се два по два заемно нормални (црт. 30).

Должините на три рабови што излегуваат од едно исто теме на квадарот се викаат **димензии (должина, ширина и висина)** на квадарот (црт. 30).



Цртеж 30

Очигледно е дека: квадарот што има две еднакви димензии претставува **правилна четириаголна призма**, а квадар на кој трите димензии му се еднакви, се вика **коцка** (црт. 30 в).

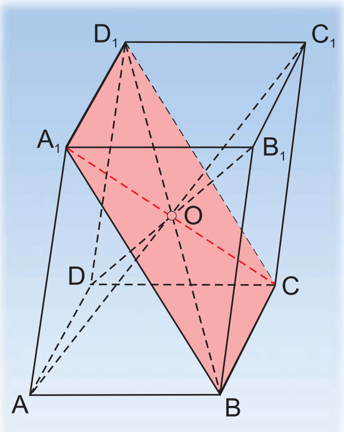
Паралелопипедот има четири дијагонали AC_1, DB_1, BD_1 и CA_1 (црт. 31).

Теорема 1. *Дијагоналите на паралелопипедот се сечат во една точка и се преполовуваат од неа.*

Доказ*: Да ги разгледаме дијагоналите BD_1 и CA_1 (црт. 31). Тие лежат во дијагоналниот пресек BCD_1A_1. Бидејќи четириаголниците ABCD и ADD_1A_1 се паралелограми, затоа и дијагоналниот пресек BCD_1A_1 е паралелограм. Значи, дијагоналите BD_1 и CA_1 на паралелопипедот, како дијагонали на паралелограмот BCD_1A_1 се сечат во точката O и се преполовуваат од неа. Се докажува дека и другите две дијагонали AC_1 и DB_1 на паралелопипедот се сечат во истата точка O и се преполовуваат од неа.

Ѕидовите на паралелопипедот што немаат заеднички темиња се викаат **спротивни ѕидови**.

Теорема 2. *Спротивните ѕидови на паралелопипедот се паралелни и складни.*



Цртеж 31

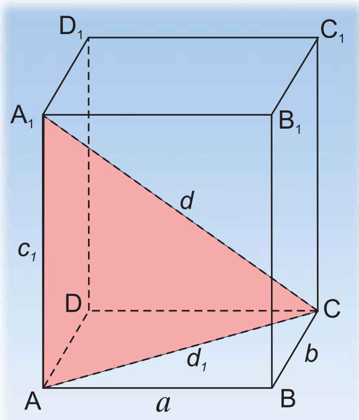
Доказ*: Да ги разгледаме спротивните ѕидови ABB_1A_1 и DCC_1D_1 на паралелопипедот (црт. 31). Бидејќи сите ѕидови на паралелопипедот се паралелограми, затоа: $AB \parallel DC$, $AA_1 \parallel DD_1$. Според тоа, ѕидовите ABB_1A_1 и DCC_1D_1 на паралелопипедот се паралелни.

Од тоа што сите ѕидови на паралелопипедот се паралелограми следува дека рабовите AD, BC, B_1C_1 и A_1D_1 се паралелни и еднакви. Според тоа, при транслација за вектор $\overrightarrow{AD}$ ѕидот ABB_1A_1 ќе се совпадне со спротивниот ѕид DCC_1D_1 на паралелопипедот (црт.31). Значи, тие се складни.

Теорема 3. *Квадратот од дијагоналата на правоаголниот паралелопипед (т.е. квадарот) е еднаков на збирот од квадратите на трите негови димензии.*

Доказ: Димензиите на квадарот (на црт. 32) нека се $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$ и $\overline{AA_1} = c$ а должините на дијагоналата на квадарот и дијагоналата на неговата основа да ги означиме со d и d_1, т.е. нека $\overline{CA_1} = d$ и $\overline{AC} = d_1$ (црт. 32). Знаеме дека, кај квадарот бочниот раб е нормален на рамнината на неговата основа. Значи, триаголникот A_1AC е правоаголен. Од него имаме: $d^2 = d_1^2 + c^2$. А од правоаголниот триаголник ABC ($AB \perp BC$) имаме: $d_1^2=a^2+b^2$.

Оттука добиваме: $d^2=a^2+b^2+c^2$.



Цртеж 32

Последица: *Дијагоналите на квадарот се еднакви. (Зошто?).*

*За оние кои сакаат да ги прошират своите знаења.

Бидејќи трите димензии на коцката се еднакви $a=b=c$, затоа, во согласност со горнава теорема за нејзината дијагонала d, добиваме:

$$d^2=a^2+a^2+a^2 \text{ или } d^2=3a^2, \text{ односно } d=a\sqrt{3}.$$

На пример, ако коцката има раб $a = 8$ cm, нејзината дијагонала ќе биде долга:

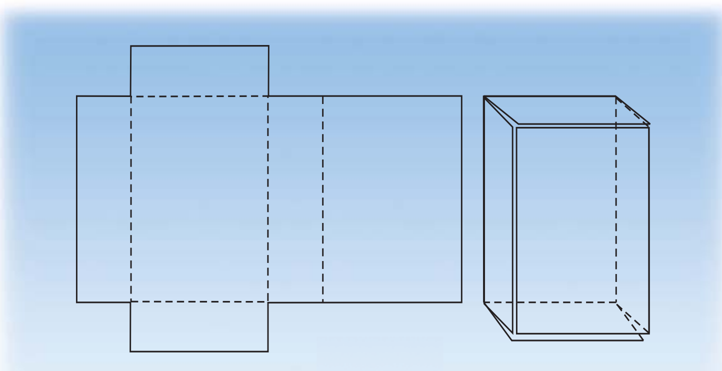
$$d=a\sqrt{3}=8\sqrt{3}\approx 8\cdot 1,73=13,84 \text{ (cm)}.$$

задачи

1. Која призма се вика паралелопипед? Во што е разликата меѓу прав и правоаголен паралелопипед?
2. Каква фигура е пресекот на една коцка и рамнина што е нормална на една нејзина дијагонала?
3. Дали може коцката да се пресече со една рамнина, така што, да се добие пресек: а) рамностран триаголник, б) рамнокрак триаголник, в) правоаголник, г) квадрат, д) трапез?
4. Одреди ја должината на дијагоналата на квадар, ако неговите димензии се: а) 3 cm, 4 cm, 12 cm, б) 2 cm, 3 cm, 6 cm!
5. Одреди ја должината на дијагоналата на коцка, чиј раб е 18 cm!
6. Одреди го растојанието од темето на коцка до неговата дијагонала, ако нејзиниот раб е е долг 1 m!
7. Познати се две димензии на еден квадар 12 cm и 21 cm и должина на дијагоналата 29 cm. Одреди ја неговата трета димензија!

IV. 8. МРЕЖА НА ПРИЗМА

Површината со која е ограничена призмата, да замислиме, дека е разрежана по еден бочен раб и по сите (освен по еден) основни рабови на нејзините основи. Ако потоа сите нејзини ѕидови ги собориме (легнеме) во една рамнина, ќе добиеме фигура, која се вика **мрежа** на призмата (црт. 33).

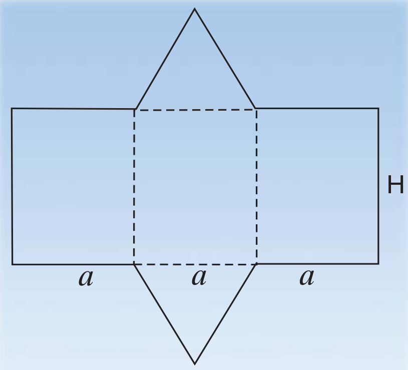


Цртеж 33

Очигледно е дека бочната површина на секоја права призма се развива во еден општ правоаголник ABCD, што е составен од толку правоаголници, колку што призмата има бочни ѕидови. Тој правоаголник има должина еднаква на периметарот на основата на призмата и висина еднаква на висината на призмата (црт. 33).

Задача: Да ја нацртаме мрежата на една правилна триаголна призма со основен раб $a = 1{,}5$ cm и висина $H = 2$ cm.

Бочната површина на правилната триаголна призма се состои од три складни правоаголници, чии страни се a и H, а нејзините основи се рамнострани триаголници со страна a. Кога тоа го знаеме, цртањето на мрежата станува вака: прво цртаме еден до друг три правоаголници со страни $a = 1{,}5$ cm и $H = 2$ cm, а потоа над спротивните страни на кој и да било од нив цртаме уште два рамнострани триаголника со страна $a = 1{,}5$ cm. Така ја добиваме бараната мрежа на правилната триаголна призма (црт. 34).

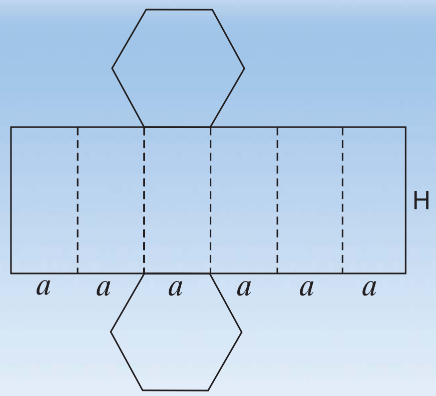


Цртеж 34

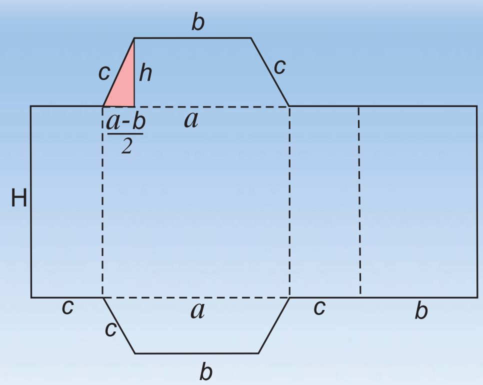
Зошто ни е потребно цртањето мрежи на геометриските тела?

Мрежите ги користиме за правење (склопување) модели на телата, а, исто така, тие ни помагаат и за пресметување на плоштината на површините на тие тела.

За да направиме (склопиме) модел на призмата потребно е прво, да ја нацртаме нејзината мрежа на картон, а потоа да ја исечеме и картонот да го превиткаме по испрекинатите линии. Ако сакаме така склопениот модел на призмата да остане составен, потребно е со хартија за лепење (селотејп) да ги покриеме (залепиме) ѕидовите на призмата што се здружуваат.



Цртеж 35



Цртеж 36

На цртеж 35 и 36 нацртани се мрежите на една правилна шестаголна призма и една права четириаголна призма, чија основа е рамнокрак трапез. Направете модели на тие призми.

задачи

1. Нацртај мрежа на правилна петаголна призма, чиј основен раб е a = 1,5 cm и висината H = 5 cm.
2. Нацртај мрежа на шестаголна призма, чиј основен раб е 1,2 cm, а висината 4 cm.
3. Нацртај ја мрежата на коцка, чиј раб е a = 2cm!
4. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилна шестаголна призма, чиј основен раб е a = 2cm и висината H = 5 cm.
5. Колку оски на симетрија има мрежата на правилна триаголна призма што е нацртана на цртеж 34?
6. Правоаголник со должина 9 cm и ширина 6 cm претставува бочна површина на една правилна триаголна призма. Нацртај ја мрежата на таа призма! (Внимавај, можни се две решенија.)
7. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилна шестаголна призма кај која поголемиот дијагонален пресек претставува квадрат. Ако основниот раб на призмата е 2 cm, колакава е висината на таа призма?
8. Нацртај мрежа и направи модел на квадар, кој има должина a = 2cm и ширина b = 3cm, а дијагоналниот пресек му претставува квадрат. Колкава е висината на тој квадар?
9. Нацртај мрежа на квадар со страни a = 2cm, b = 3cm и c = 4cm, а потоа пресметај ја неговата плоштина.

IV.9. ПЛОШТИНА НА ПРИЗМА

Поимот плоштина на геометриските слики (затворени и ограничени рамнински области) ни е познат од минатата година.

Границата на секое геометриско тело претставува некоја површина, која ја викаме **површина на геометриското тело**.

Површината на призмата, знаете, се состои од два складни многуаголника - основи на призмата и одреден број паралелограми - бочна површина на призмата.

Дефиниција: *Под плоштина на површината на една призма, или кратко,* ***плоштина на призмата****, ќе го подразбираме збирот од плоштините на двете нејзини основи и плоштината на нејзината бочна површина.*

Ако плоштината на призмата ја означиме со P, а плоштината на нејзината основа (база) со B, а плоштината на бочната површина - со M, тогаш, во согласност со горнава дефиниција, ќе важи формулата:

$$P = 2B + M$$

Тоа е општа формула за пресметување на плоштината на која и да било призма.

Ако ги разгледаме цртежите 33, 34, 35, 36 забележуваме, дека бочната површина на секоја права призма всушност, претставува, еден правоаголник, чија должина е еднаква на периметарот на основата на призмата, а висината му е еднаква на висината на призмата. Според тоа, важи:

Теорема: *Плоштината на бочната површина на права призма е еднаква на производот од периметарот на основата и висината на призмата, т.е.*

$$M = L \cdot H$$

IV.9.1. ПЛОШТИНА НА КВАДАР И КОЦКА

Квадарот е права четириаголна призма чии основни и бочни ѕидови се правоаголници. Ако димензиите на квадарот ги означиме со a, b, c (при што c е висина), тогаш плоштината на основата е $B = ab$, а бочната плоштина ќе биде

$M = (2a + 2b)c = 2ac + 2bc$. Според тоа, формулата за плоштина гласи:

$$P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc, \text{ т.е. } \boldsymbol{P = 2(ab + ac + bc)}.$$

Коцката е ограничена со шест складни квадрати. Ако должината на работ на коцката ја означиме со a, тогаш плоштината на секој од шесте квадрати ќе биде еднаква на a^2, па формулата за плоштина на коцката гласи:

$$\boldsymbol{P = 6\, a^2.}$$

Задача 1. Еден куфер чии димензии се: должина $a = 1$ m, ширина $b = 6$ dm и висина $c = 25$ cm треба да се обвие со платно. Колку m^2 платно е потребно?

Решение: Задачата се сведува на одредување на плоштината на куферот, чии димензии се познати. Пред да ги замениме мерните броеви на димензиите во формулата за плоштина на квадар, тие димензии треба да ги изразиме во исти единици мерки. Во нашиот случај, ако сакаме бараната плоштина на куферот да ја добиеме во m^2, тогаш неговите димензии ќе ги изразиме во метри: $a = 1$m, $b = 6$dm $= 0{,}6$ m, $c = 25$cm $= 0{,}25$m, па ќе добиеме:

$$P = 2(ab + ac + bc) = 2(1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}25) = 2\,(m^2).$$

Значи, за обвивање на куферот потребно е 2 m^2 платно.

Задача 2: Да се пресмета работ на коцка, чија плоштина изнесува $P = 384\ cm^2$.

Решение: Бидејќи површината на коцката ја сочинуваат шест складни квадрати, затоа плоштината на секој од тие квадрати ќе биде: $a^2 = \frac{P}{6} = \frac{384}{6} = 64\left(cm^2\right)$, а оттука ја одредуваме и должината на работ на коцката $a = \sqrt{64} = 8\left(cm\right)$.

IV.9.2. ПЛОШТИНИ НА НЕКОИ ПРАВИЛНИ И НЕКОИ ПРАВИ ПРИЗМИ

Со примери ќе го покажеме пресметувањето на плоштината на некои правилни и прави призми.

Задача 3. Да се пресмета плоштината на правилна четириаголна призма со основен раб $a = 5$ cm и висина $H = 12$ cm.

Решение: Правилната четириаголна призма за основа има квадрат. Плоштината на нејзината основа е $B = a^2$, а плоштината на бочната површина ќе биде $M = 4aH$.

Значи, плоштината на правилна четириаголна призма ќе биде:

$$P = 2B + M = 2a^2 + 4aH, \quad \text{односно} \quad P = 2a(a + 2H).$$

Ако во добиената формула замениме $a = 5$ cm и $H = 12$ cm, добиваме:

$$P = 2a(a + 2H) = 2 \cdot 5 (5 + 2 \cdot 12) = 10 \cdot 29 = 290\ (cm^2).$$

Задача 4. Да се пресмета плоштината на правилна триаголна призма, чиј основен раб е $a = 6$ cm, а висината е $H = 10$ cm.

Решение: Кај правилната триаголна призма основите се рамнострани триаголници $\left(B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$, а бочната површина се состои од три складни правоаголници ($M = 3aH$).

Според тоа, формулата за плоштина на правилната триаголна призма гласи:

$$P = 2B + M = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH = a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3H\right).$$

Оттука добиваме: $P = 6\left(\frac{6\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 10\right) \approx 6\left(3 \cdot 1,73 + 30\right) = 6 \cdot 35,19 = 211,14\left(cm^2\right)$.

Задача 5. Да се пресмета плоштината на правилна шестаголна призма, чиј основен раб е $a = 2$ cm, а висината е $H = 7,5$ cm.

Решение: Кај правилната шестаголна призма е $B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, а $M = 6aH$.

Според тоа, формулата за плоштина на правилната шестаголна призма ќе гласи:

$$P = 2B + M = 2\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH = 3a^2\sqrt{3} + 6aH = 3a\left(a\sqrt{3} + 2H\right).$$

Оттука добиваме:

$$P = 3a\left(a\sqrt{3} + 2H\right) \approx 3\cdot 2\cdot\left(2\cdot 1{,}73 + 2\cdot 7{,}5\right) = 6\cdot\left(3{,}46 + 15\right) = 6\cdot 18{,}46 = 110{,}76$$

т.е. $P \approx 110{,}76\,(\text{cm}^2)$.

Задача 6. Да се пресмета плоштината на права триаголна призма, чија висина е $H = 8$ cm, а за основа има правоаголен триаголник со катети $a = 2{,}4$ cm и $b = 3{,}2$ cm.

Решение: Ќе ја пресметаме прво плоштината на основата:

$$B = \frac{ab}{2} = \frac{2{,}4\cdot 3{,}2}{2} = 1{,}2\cdot 3{,}2 = 3{,}84\left(\text{cm}^2\right).$$

За пресметување на бочната плоштина потребно е да се знае и хипотенузата c на основата. Со примена на Питагоровата теорема наоѓаме дека:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 3{,}2^2} = \sqrt{5{,}76 + 10{,}24} = \sqrt{16} = 4\left(\text{cm}\right).$$

Потоа ја пресметуваме бочната плоштина:

$$M = (a+b+c)H = (2{,}4 + 3{,}2 + 4)\cdot 8 = 9{,}6\cdot 8 = 76{,}8\,(\text{cm}^2).$$

Бараната плоштина на дадената призма е

$$P = 2B + M = 2\cdot 3{,}84 + 76{,}8 = 7{,}68 + 76{,}8 = 84{,}48,\ \text{т.е. } P = 84{,}48\,(\text{cm}^2).$$

Задача 7. Да се пресмета плоштината на права четириаголна призма, чија висина е $H = 12$ cm, а основата е ромб со дијагонали $d_1 = 8$ cm и $d_2 = 6$ cm.

Решение: Прво ја пресметуваме плоштината на основата на призмата:

$$B = \frac{d_1\cdot d_2}{2} = \frac{8\cdot 6}{2} = 24\left(\text{cm}^2\right).$$

За пресметување на плоштината на бочната површина потребно е да ја определиме должината на основниот раб на призмата. Со примена на Питагоровата теорема, наоѓаме дека:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\left(\text{cm}\right).$$

Бочната плоштина е: $M = 4aH = 4\cdot 5\cdot 12 = 240\,(\text{cm}^2)$, а плоштината на призмата

$P = 2B + M = 2\cdot 24 + 240 = 288\,(\text{cm}^2)$.

Задача 8. Да се пресмета плоштината на права четириаголна призма чија висина е $H = 14$ cm, а основата е рамнокрак трапез, чии паралелни страни се долги $a = 9$ cm, $b = 4$ cm, а кракот $c = 6{,}5$ cm.

Решение. За пресметување на плоштината на трапезот (основата на призмата) потребно е да ја определиме висината на тој трапез (црт. 36). Со примена на Питагоровата теорема висината на рамнокракиот трапез ќе биде:

$$h=\sqrt{c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{6,5^2-\left(\frac{9-4}{2}\right)^2}=\sqrt{42,25-6,25}=6(\text{cm}).$$

Потоа наоѓаме дека: $B=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{(9+4)\cdot 6}{2}=13\cdot 3=39\left(\text{cm}^2\right)$,

а $M=(a+b+2c)\cdot \text{H}=(9+4+2\cdot 6,5)\cdot 14=26\cdot 14=364\,(\text{cm}^2)$.

На крајот лесно ја наоѓаме и бараната плоштина на дадената призма, таа ќе биде:

$P=2B+M=2\cdot 39+364=78+364=442\,(\text{cm}^2)$.

задачи

1. Пресметај ја плоштината на квадар чии димензии се:

а) $a=6{,}4$ cm, $b=5$ cm, $c=3{,}5$ cm, б) $a=1{,}8$ dm, $b=1$ dm, $c=7{,}5$ cm.

2. Плоштината на една коцка е 150 cm^2. Определи го нејзиниот раб.

3. Изрази ја плоштината на коцката како функција, од нејзината дијагонала!

4. Пресметај ја дијагоналата на коцка, чија плоштина е 150 cm^2.

5. Бочната плоштина на една правилна четириаголна призма изнесува 240 cm^2, а висината 1 dm. Определи ја плоштината на таа призма.

6. Пресметај ја плоштината и должината на дијагоналата на правилна четириаголна призма со основен раб $a=11$cm и висина 2,5 dm.

7. Плоштината на правилна четириаголна призма изнесува 288 cm^2, а, само нејзината бочна плоштина изнесува 169 cm^2. Определи ја висината на призмата!

8. Да се определи плоштината на правилна шестаголна призма, ако се познати нејзината висина 5 cm, и должината на нејзината најголема дијагонала $d=13$ cm.

9. Во салата на еден ресторан се наоѓаат 4 столбови, кои имаат форма на правилна шестаголна призма со основен раб 25 cm и висина 5,5 m. Колку m^2 платно е потребно за нивно обивање?

10. Права призма со висина 12 cm, за основа има рамнокрак трапез, чии паралелни страни се долги 9 cm и 3 cm и висина 4 cm. Одреди ја плоштината на таа призма.

11. Права призма со висина 8,5 cm за основа има рамнокрак триаголник. Пресметај ја плоштината на призмата ако рамнокракиот триаголник има основа a = 5 cm и крак b=6,5 cm.

12. Основата на права призма е ромб со дијагонали 3 cm и 4 cm, а дијагоналата на бочниот ѕид е долга 6,5 cm. Определи ја плоштината на призмата!

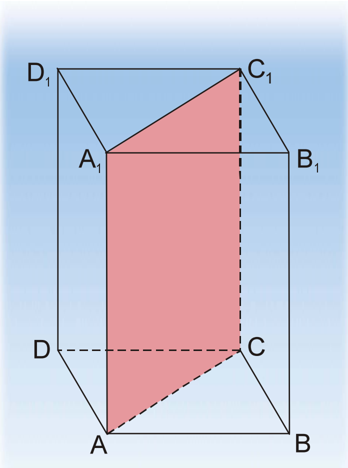
IV.10. ВОЛУМЕН НА ПРИЗМА

IV.10.1. ОПШТО ЗА ВОЛУМЕН НА ТЕЛАТА

На цртеж 37 претставена е правилна четириаголна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Со нејзиниот дијагонален пресек ACC_1A_1 добиваме две прави триаголни призми, кои имаат складни основи и складни висини. Тие две триаголни призми, гледаме, имаат заеднички ѕид - дијагоналниот пресек ACC_1A_1, но немаат ниту една заедничка внатрешна точка. За нив велиме, дека се две **соседни призми**, а за секоја од нив велиме дека е дел (т.е. подмножество) од правилната четириаголна призма.

Да си замислиме: едната триаголна призма, на пример, $ABCA_1B_1C_1$ да ја движиме на некој начин (со ротација и транслација) така што, таа да се совпадне со другата триаголна призма $CDAC_1D_1A_1$. Тоа ќе го постигнеме ако темињата A,B,C,A_1,B_1,C_1 на првата триаголна призма ги доведеме да се совпаднат соодветно со темињата C,D,A, C_1,D_1,A_1, на втората триаголна призма (црт. 37). Очигледно е дека, при тоа, површината (границата) и внатрешноста на едната ќе се совпадне со површината и внатрешноста на другата.

За две тела, кои на некој начин можат да се совпаднат во сите свои делови, велиме дека се **складни** (**конгруентни**). На пример, двете триаголни призми на цртеж 37 се складни.



Цртеж 37

Поимот **волумен** на геометриските тела го воведуваме, на сличен начин, како и поимот плоштина на геометриските слики.

Волуменот на едно геометриско тело T, што симболички го означуваме со V (T) или само со V, го разгледуваме како величина од посебен вид, која ги карактеризира геометриските тела и ги има следниве својства (аксиоми за волумен):

1°. Секое геометриско тело има точно определен позитивен волумен, т.е. $V(T)>0$.

2°. Ако телата T_1 и T_2 се складни, тогаш $V(T_1) = V(T_2)$.

3°. Ако телото T е составено од делови (соседни тела) T_1 и T_2, што немаат заеднички внатрешни точки, тогаш $V(T) = V(T_1) + V(T_2)$.

4°. Коцка со раб 1cm *се зема дека има волумен* $1cm^3$.

Волуменот на телото, како и секоја друга величина, може да се мери и изразува со броеви. Да се измери волуменот на едно тело значи, да се одреди колку пати се содржи во него волуменот на друго тело што е примен за единица. Бројот, кој покажува единицата мерка колку пати се содржи во (или каков дел е од неа) волуменот што го мериме, се вика **мерен број** на тој волумен.

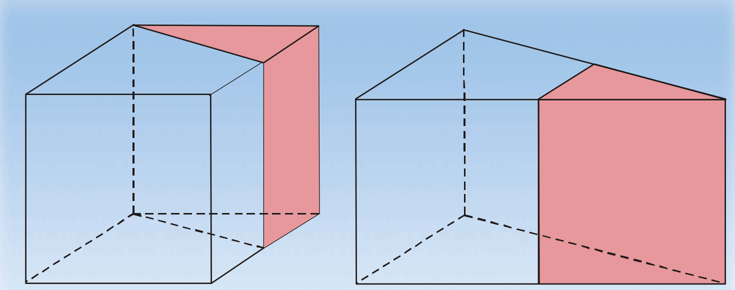
При избирањето на единиците мерки за волумен практично се покажало тие да бидат усогласени со единиците мерки за должина на отсечките. На пример, од должинските единици: m, dm, cm и mm, се изведени мерки за волумен: *метар кубен* (m^3), *дециметар кубен* (dm^3), *сантиметар кубен* (cm^3) и *милиметар кубен* (mm^3).

Еден метар кубен (m^3) е волуменот на коцка со раб долг 1m.

Две тела, што имаат еднакви волумени, се викаат **еднакво големи** (или **еквивалентни**).

Од својствата 2° и 3° следува дека:

Еднакво големи се: а) секои две складни тела, б) секои две тела кои се составени од соодветно складни делови (црт. 38), в) секои две тела, кои можат да се дополнат со складни делови до две складни тела.

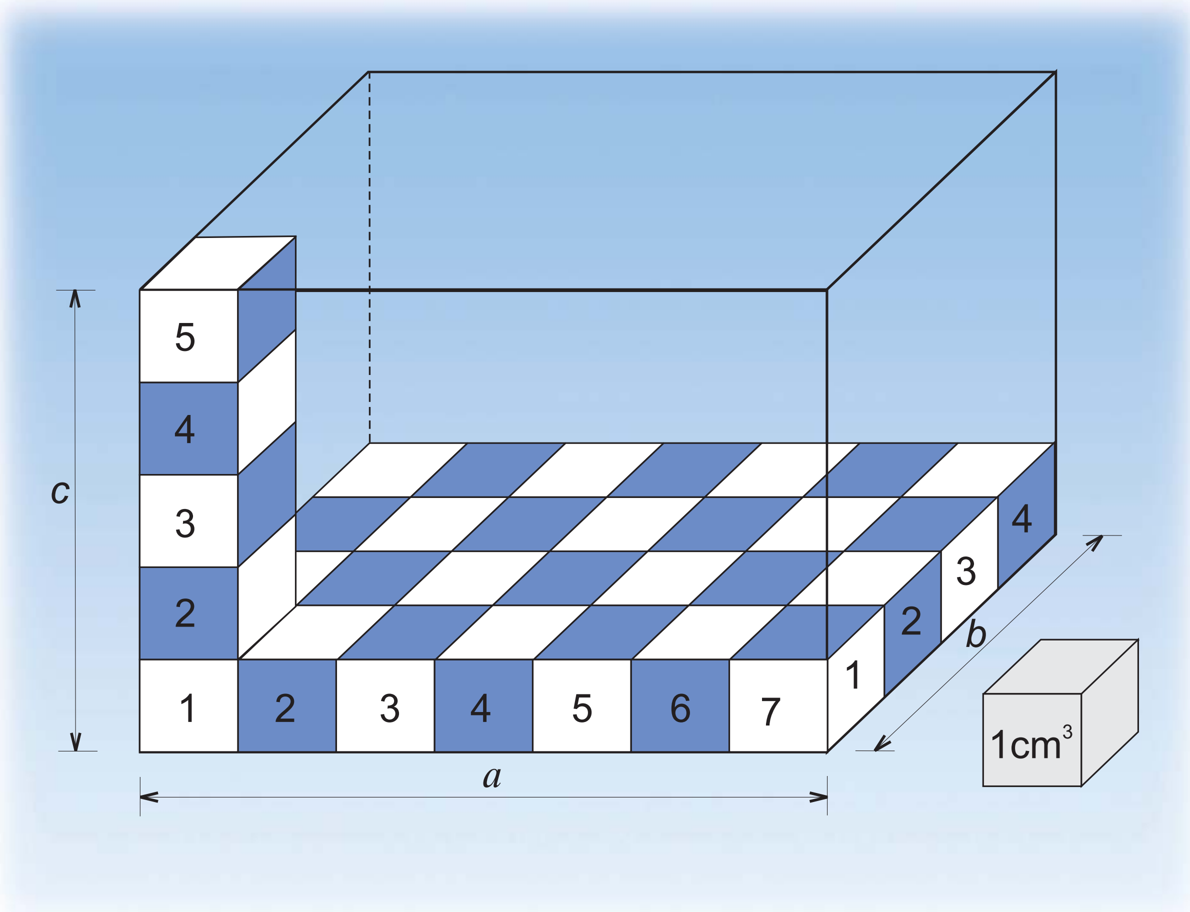


Цртеж 38

IV.10.2. ВОЛУМЕН НА КВАДАР И КОЦКА

Теорема: *Волуменот на квадарот е еднаков на производот од неговите три димензии, т.е.*

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Цртеж 39

Доказ: Во зависност од тоа, дали димензиите a, b и c на квадарот се изразени во природни, рационални или ирационални броеви, ќе разликуваме три случаи:

а) Димензиите на квадарот нека се изразени со природни броеви, на пример $a = 7$ cm, $b = 4$ cm и $c = 5$ cm (црт. 39).

Основата на квадарот може да се разбие на $B = ab = (7 \cdot 4)\ \text{cm}^2 = 28\ \text{cm}^2$. Над секој од тие $ab = 28\ \text{cm}^2$ од основата можеме да поставиме по $1\ \text{cm}^3$. Значи, на целата основа на квадарот можеме да поставиме вкупно $28\ \text{cm}^3$. На тој начин добиваме еден пласт (слој) од коцки висок 1 cm, што ја покрива основата на квадарот. Такви пластови во целиот квадар можат да се поставаат 5, бидејќи висината на квадарот има $c = 5$ cm. Според тоа, волуменот на дадениот квадар ќе биде $V = abc = (7 \cdot 4 \cdot 5)\ \text{cm}^3 = 140\ \text{cm}^3$.

б) Димензиите на квадарот нека се изразени со рационални броеви, на пример,

$$a = \frac{3}{4}\text{m},\ \ b = \frac{1}{2}\text{m}\ \ \text{и}\ \ c = \frac{2}{5}\text{m}.$$

Рационалните броеви a, b и c можеме да ги доведеме на заеднички именител и добиваме

$$a=\frac{p}{n},\ b=\frac{q}{n} \text{ и } c=\frac{r}{n} \text{ (во нашиот случај } a=\frac{15}{20}\text{ m},\ b=\frac{10}{20}\text{ m и } c=\frac{8}{20}\text{ m).}$$

Ако делот $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{20}\right)$ од метарот го земеме за нова должинска единица, тогаш очигледно е дека таа единица ќе се содржи во димензиите a, b и c на квадарот, соодветно p, q и r пати (во нашиот случај 15, 10 и 8 пати). Според тоа, димензиите на дадениот квадар во новите единици ќе бидат изразени со природните броеви p, q и r; па неговиот волумен ќе биде еднаков на pqr нови кубни единици.

Очигледно е дека, старата кубна единица (метар кубен) ќе содржи n^3 ($20^3 = 8\,000$) нови кубни единици. Затоа, за да го одредиме волуменот на дадениот квадар со старите кубни единици, производот $p\,q\,r$ треба да го поделиме со бројот n^3. Така добиваме:

$$V=\frac{pqr}{n^3} \text{ или } V=\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}\cdot\frac{r}{n}.$$

Но, бидејќи $\frac{p}{n}=a$, $\frac{q}{n}=b$, $\frac{r}{n}=c$, затоа и во овој случај ќе биде $V = abc$.

Во конкретниов случај, квадарот со димензии $a=\frac{3}{4}\text{m}, b=\frac{1}{2}\text{m}$ и $c=\frac{2}{5}\text{m}$ има волумен

$$V=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{20}(\text{m}^3).$$

в) Може да се докаже дека формулата за волумен на квадарот $V = abc$ важи и кога неговите димензии се изразени со ирационални броеви, но за тоа се потребни дополнителни знаења.

Бидејќи коцката е специјален случај на квадар, кај кого сите димензии се еднакви, т.е. $b = c = a$, затоа формулата за пресметување на волуменот на коцката гласи:

$V = a\cdot a\cdot a$, т.е. $\boldsymbol{V = a^3}$. Значи:

Волуменот на коцката е еднаков на кубот од должината на нејзиниот раб.

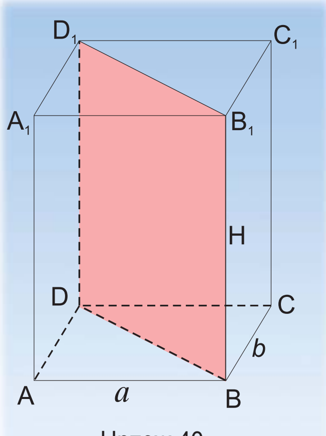
На пример, коцка со раб $a = 9$ cm, ќе има волумен: $V = a^3 = 9^3 = 729$ (cm^3).

Ако со B и H ги означиме соодветно плоштината на основата и должината на висината на квадарот, тогаш формулата $V = abc$, кога ќе земеме предвид дека $ab = B$ и $c = H$ може да се запише уште и во следниов вид:

$$V=BH$$

IV.10.3. ВОЛУМЕН НА ПРАВА ПРИЗМА

Нека е даден квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (црт. 40). Очигледно е дека со дијагоналниот пресек BDD_1B_1 дадениот квадар се разделува на две складни триаголни призми $ABDA_1B_1D_1$ и $BCDB_1C_1D_1$, бидејќи основите им се складни правоаголни триаголници ($\Delta ABD \cong \Delta BCD$) и имаат еднакви висини. Според тоа, тие се и еднакво големи, т.е имаат еднакви волумени. Тоа, пак, значи дека волуменот на секоја од добиените триаголни призми е еднаков на половина од волуменот на дадениот квадар.



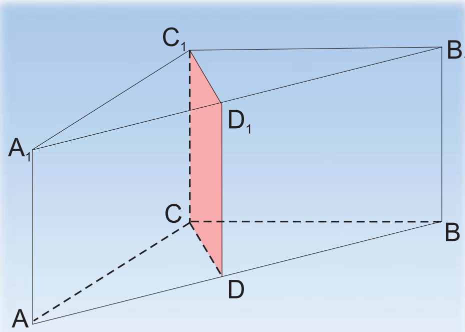
Цртеж 40

Дадениот квадар со основни рабови a и b и висина H има волумен еднаков на abH. Ако волуменот на едната триаголна призма го означиме со V, тој ќе биде еднаков на:

$$V=\frac{abH}{2}=\frac{ab}{2}\cdot H\ .$$

Бидејќи основата на триаголната призма е правоаголен триаголник со катети a и b, затоа изразот $\frac{ab}{2}$ всушност, претставува, плоштина на нејзината основа. Ако изразот $\frac{ab}{2}$ го означиме со B, ја добиваме формулата:

$$V=BH.$$



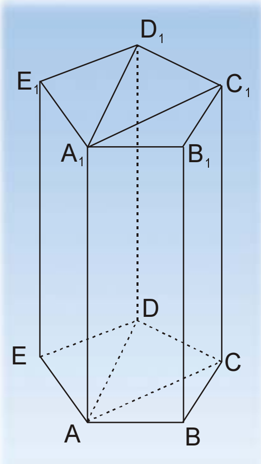
Цртеж 41

Значи, волуменот на права призма, чија основа е правоаголен триаголник, е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на нејзината висина.

Да земеме сега една, која и да било, права триаголна призма $ABCA_1B_1C_1$ (црт. 41). Да ја пресечеме таа призма со една рамнина, која минува низ работ CC_1 и е нормална на бочниот ѕид ABB_1A_1. Тогаш ќе биде: $CD \perp AB$ и $C_1D_1 \perp A_1B_1$(црт. 41).

Гледаме, дадената триаголна призма се разделува на две други триаголни призми, чии основи се правоаголни триаголници. Ако со B, B_1 и B_2 ги означиме соодветно плоштините на основите на дадената призма и добиените од неа две други триаголни призми, а со H - нивната заедничка висина; тогаш волуменот на дадената триаголна призма ќе биде: $V=B_1H+B_2H=(B_1+B_2)H=BH$, бидејќи е $B_1+B_2=B$.

На крајот, да земеме и една, која и да било, права призма. Нека тоа биде, на пример, петаголна призма на цртеж 42. Гледаме дека со дијагоналните пресеци ACC_1A_1 и ADD_1A_1 што минуваат низ бочниот раб AA_1, дадената петаголна призма се разделува на три триаголни призми.



Цртеж 42

Ако плоштината на основите на добиените триаголни призми ги означиме со B_1,B_2 и B_3 а нивните волумени со V_1, V_2,V_3 тогаш, ќе имаме:

$$V_1=B_1H,\quad V_2=B_2H,\quad V_3=B_3H.$$

Бидејќи волуменот (V) на дадената призма е еднаков на збирот на волумените на добиените триаголни призми, затоа тој ќе биде:

$$V=V_1+V_2+V_3=B_1H+B_2H+B_3H=(B_1+B_2+B_3)H.$$

Но бидејќи збирот од плоштините на основите на триаголните призми $B_1 + B_2 + B_3$ е еднаков на плоштината на основата на дадената петаголна призма (B), добиваме дека:

$$V=BH.$$

На ист начин, и секоја друга призма можеме да ја поделиме на одреден број триаголни призми, па според тоа важи следнава:

Теорема: *Волуменот на секоја права призма е еднаков на производот од плоштината на основата и висината, т.е.*

$$V=BH.$$

Правилната четириаголна призма за основа има квадрат, затоа плоштината на нејзината основа ќе биде $B = a^2$, а волуменот: $V = a^2H$.

Кај правилната триаголна призма основата е рамностран триаголник, чија плоштина е: $B=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па според тоа, формулата за волумен гласи: $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$.

Основата на правилната шестаголна призма е правилен шестаголник, чија плоштина е: $B=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, па според тоа, формулата за волумен гласи $V=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot H$.

Задача 1. Да се пресмета волуменот на права призма, чија висина е $H = 9,5$ cm, ако за основа има рамнокрак триаголник со основа $a = 5$ cm и крак $b = 6,5$ cm.

Решение: За пресметување на плоштината на рамнокракиот триаголник (основа на призмата) потребно е, прво, да ја определиме висината на тој триаголник. Со примена на Питагоровата теорема, наоѓаме:

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{6,5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{42,25-6,25}=\sqrt{36}=6\left(\text{cm}\right).$$

Потоа наоѓаме: $B=\dfrac{ah}{2}=\dfrac{5\cdot 6}{2}=15\left(\text{cm}^2\right)$, а волуменот е: $V = BH = 15 \cdot 9,5 = 142,5\ (\text{cm}^3)$.

Задача 2. Во еден сад што има форма на права призма со основа рамнокрак трапез, ставено е 8,4 dm^3 вода. До која висина ќе се наполни садот, ако рамнокракиот трапез има паралелни страни $a = 34$ cm, $b = 16$ cm и крак $c = 15$ cm?

Решение: Бидејќи водата во садот ќе заземе иста форма како и садот, затоа задачата се сведува на определување на висината на призмата, кога се познати нејзиниот волумен и рабовите при основата.

Бидејќи волуменот на призмата е $V = BH$, затоа $H = \frac{V}{B}$.

За да ја решиме задачата, прво, треба да ја пресметаме плоштината на основата, т.е. плоштината на рамнокракиот трапез. Со примена на Питагоровата теорема, прво, ја определуваме висината на трапезот:

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{34-16}{2}\right)^2} = \sqrt{225-81} = \sqrt{144} = 12\,(\text{cm}).$$

Значи: $B = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{(34+16)\cdot 12}{2} = 50\cdot 6 = 300\,(\text{cm}^2)$.

Бидејќи $V = 8,4\ \text{dm}^3 = 8\,400\ \text{cm}^3$, затоа $H = \frac{V}{B} = \frac{8400}{300} = 28\,(\text{cm})$.

Според тоа, садот ќе се наполни до висината $H = 28$ cm.

Задача 3. Еден мермерен столб има форма на правилна шестаголна призма со основен раб $a = 32$ cm и висина H = 4 m. Да се одреди масата на тој столб во килограми.

Решение: Поимот маса на едно материјално тело ви е познат од физиката. Таа се мери во грамови (g), килограми (kg) или тони (t). Знаете дека, масата на 1 cm^3 од некоја материја изразена во грамови се вика **густина** на таа материја, која се означува со s. Секоја материја има определена густина. На пример, дестилираната вода на 4°C има густина 1, железото има густина $s = 7{,}8$; бакарот - $s = 8{,}9$; мермерот $s = 2{,}7$ итн.

Кога ќе кажеме, дека густината на мермерот е $s = 2{,}7$, тоа, значи, дека 1 cm^3 мермер има маса 2,7 g. Оттука е јасно, дека бараната маса M на мермерниот столб во нашата задача ќе биде еднаква на производот од неговиот волумен и густината $s = 2{,}7$, на мермерот т.е.

$$M = Vs.$$

Според тоа, прво ќе го пресметаме волуменот на столбот:

$$V = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot 32^2\cdot 400\cdot\sqrt{3}}{2} \approx 3\cdot 1024\cdot 200\cdot 1,73 \approx 1063000\,(\text{cm}^3).$$

Тогаш ќе биде: $M = Vs = 1063000\cdot 2{,}7 = 287010\,(\text{g})$.

Значи, мермерниот столб има маса $\approx$ 287 kg.

задачи

1. Пресметај го волуменот на правилна четириаголна призма со основен раб 4 cm и висина 13,5 cm.

2. Пресметај го волуменот на правилна триаголна призма со периметар на основата 16,5 cm и висина 10 cm.

3. Пресметај го волуменот на коцка, чија плоштина изнесува 96 cm^2.

4. Да се определи дијагоналата на коцка, чиј волумен е 64 dm^3.

5. Колку кутии, долги 3 dm со ширина 2,5 dm и дебелина 8 cm, можат да се сместат во еден сандак со димензии 1,5 m, 1 m и 0,8 m?

6. Димензиите на еден квадар се: 30cm, 1m и 9m. Одреди го работ на коцка што има еднаков волумен со тој квадар!

7. Резервоар во форма на квадар има димензии 9 m, 4 m и 2,5 m. За колку време ќе се наполни тој, ако во него се влеваат по 5 литри во секоја секунда?

8. Како ќе се промени волуменот на коцката, ако нејзиниот раб:
а) се зголеми 3 пати, б) се намали 2 пати?

9. Од три метални коцки со должини на рабовите 3 cm, 4 cm и 5 cm излиена е една коцка. Одреди го работ на таа коцка.

10. Еден базен има форма на правилна четириаголна призма со основен раб внатре 1,4 m. Колку литри вода треба да се испушти од базенот, така што нивото на водата во него да се спушти за 18 cm?

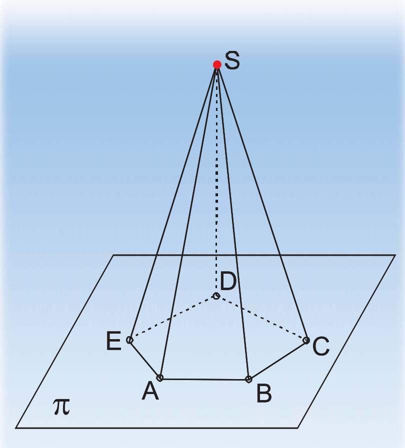
11. Колкава собна површина можеме да покриеме со 0, 64 m^3 штици ако тие се дебели 2,5 cm?

12. Колкава е масата на еден лист цинкова ламарина што има форма на квадар со должина 2 m, ширина 1,2 m и дебелина 2 mm? Цинкот има густина 7,1.

13. Треба да се направи цистерна во форма на правилна четириаголна призма со основен раб 1,5 m. Колку треба таа да е длабока, за да собира 90 хектолитри?

В ПИРАМИДА

IV. 11. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ НА ПИРАМИДАТА



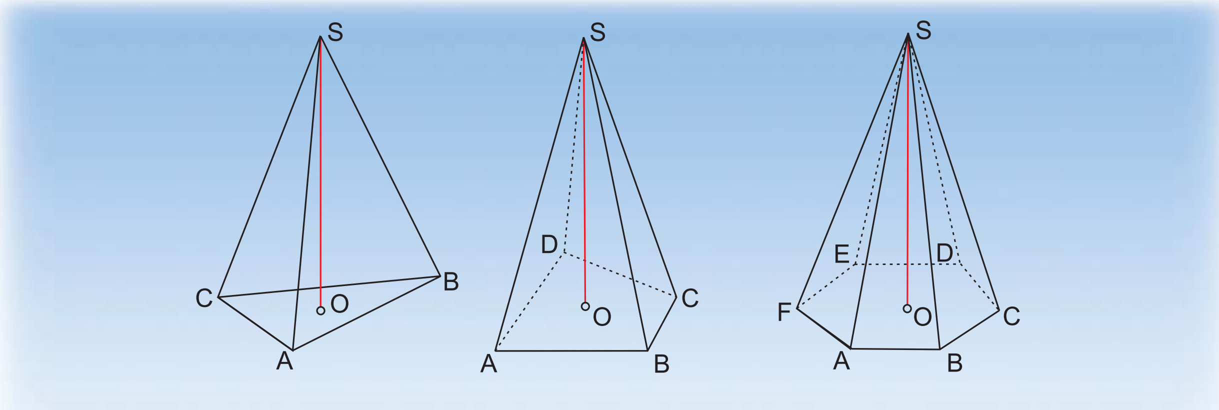
Цртеж 43

Во рамнината π нека е даден еден конвексен многуаголник, на пример, петаголникот ABCDE, а надвор од рамнината π да земеме една произволна точка S (црт. 43). Ако точката S ја соединиме со секое теме од петаголникот ABCDE, ќе добиеме и пет триаголници: ABS, BCS, CDS, DES и EAS.

Површината, што е составена од петаголникот ABCDE и петте триаголници кои имаат едно заедничко теме S, го разбива множеството точки од просторот на два дела: внатрешен и надворешен. Унијата од таа површина и внатрешниот дел претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело, и тоа полиедар. Тој полиедар го викаме **петаголна пирамида** (црт. 43).

Ако во рамнината π, наместо петаголник земевме друг многуаголник, на пример триаголник, четириаголник, односно шестаголник, на сличен начин, ќе добиевме други полиедри, кои се викаат: **триаголна, четириаголна**, односно **шестаголна пирамида** (црт. 44). Сите тие со заедничко име се викаат **пирамиди**.

Дефиниција: *Еден полиедар се вика* ***пирамида****, ако еден ѕид е многуаголник, а другите ѕидови се триаголници со едно заедничко теме и по една заедничка страна со многуаголникот.*



Цртеж 44

Многуаголникот го викаме **основа** (или **база**) на пирамидата; триаголниците што имаат заедничко теме S, ги викаме **бочни ѕидови** на пирамидата, а точката (темето) S - **врв** на пирамидата.

Сите бочни ѕидови на пирамидата велиме дека ја образуваат **бочната површина** на пирамидата.

Страните на основата ги викаме **основни рабови** на пирамидата (AB, BC, CD... на црт. 43), а сите други рабови - **бочни рабови** на пирамидата (AS, BS, CS, ... на црт. 43).

Пирамидите ги цртаме како на цртежите 43 и 44. Со непрекинати линии ги цртаме сите видливи рабови, а со испрекинати линии - сите невидливи рабови.

Висина на пирамидата се вика отсечката од нормалата што е повлечена од врвот кон рамнината на основата на пирамидата (SO на црт. 44). Висина на пирамидата ја викаме уште и должината на таа отсечка, односно растојанието од врвот до рамнината на основата на пирамидата и ја означуваме со H.

задачи

1. Што е тоа основа, бочна површина, врв, висина на пирамидата?

2. Дали може висината на пирамидата да се совпадне со еден бочен раб на пирамидата?

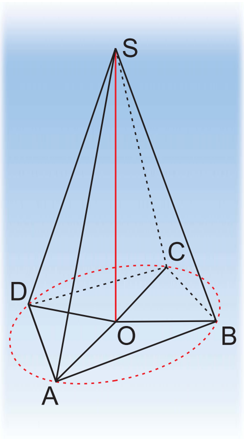
3. Дали можат некои бочни ѕидови на пирамидата да бидат нормални на основата? Ако може, колку најмногу такви бочни ѕидови може да има пирамидата?

4. Колкав најмал број на: а) ѕидови, б) темиња, в) рабови може да има еден полиедар и кој е тој полиедар?

IV. 12. ВИДОВИ И СВОЈСТВА НА ПИРАМИДИТЕ. ДИЈАГОНАЛЕН ПРЕСЕК

Зависно од бројот на страните на основата, пирамидите можат да бидат: **триаголни, четириаголни, петаголни**, итн.

Триаголната пирамида уште ја викаме и **тетраедар**. Бидејќи сите ѕидови на тетраедарот се триаголници, затоа, кој и да било од нив може да се земе за негова основа.



Цртеж 45

Кај некои пирамиди може да се случи сите бочни рабови да се еднакви еден на друг, а кај други да не е таков случај.

Да разгледаме една пирамида со еднакви бочни рабови, на пример, нека е таква четириаголната пирамида SABCD на цртеж 45. Нека O е ортогонална проекција на врвот S врз рамнината на основата на пирамидата SABCD кај која е $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=\overline{SD}$ (црт. 45).

Ако точката O ја соединиме со темињата A, B, C и D ќе ги добиеме правоаголните триаголници SOA,SOB, SOC и SOD. Тие триаголници се складни, бидејќи имаат складни хипотенузи и една заедничка катета OS. Од нивната складност, следува дека и другите катети им се еднакви, т.е. дека $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$.

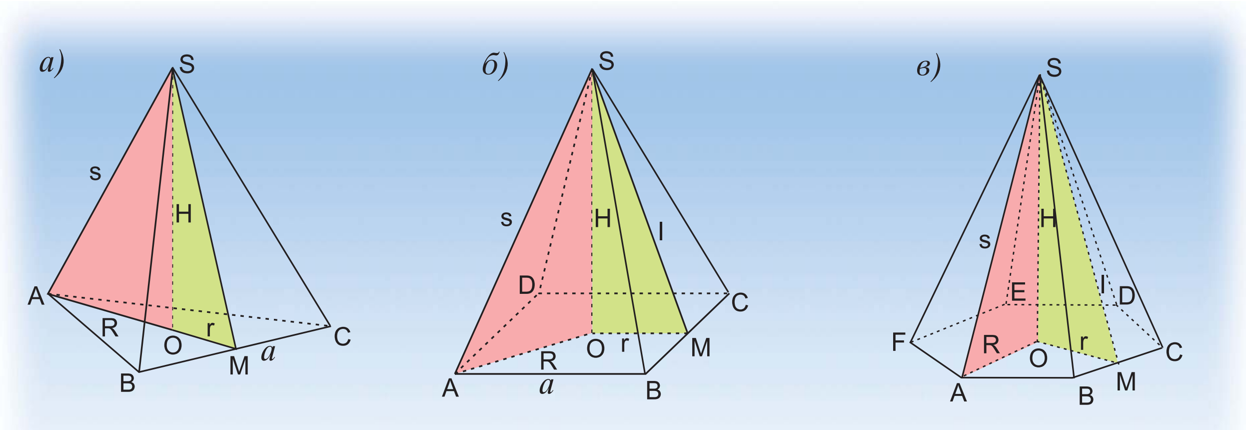
Тоа значи, дека околу основата на разгледуваната пирамида може да се опише кружница, чиј центар е во подножјето на висината на таа пирамида.

Ако разгледаме и друга, која и да било, пирамида со еднакви бочни рабови, очигледно е дека ќе дојдеме до ист заклучок. Значи, важи: *Основата на која и да било пирамида со еднакви бочни рабови е тетивен многуаголник, чиј центар на опишаната кружница е во подножјето на висината на таа пирамида.*

Дефиниција: *Пирамида со еднакви бочни рабови, чија основа е правилен многуаголник, се вика* ***правилна пирамида***.

За правилните пирамиди карактеристично е тоа што: сите основни рабови се еднакви меѓу себе, а сите бочни ѕидови се складни рамнокраки триаголници.

Висината на кој и да било бочен ѕид на правилната пирамида, што е повлечена кон соодветниот основен раб, се вика **апотема** на пирамидата (SM на црт. 46).



Цртеж 46

Апотемите на правилната пирамида се еднакви (Зошто?).

Правилна триаголна пирамида, кај која бочниот раб е еднаков на основниот раб, се вика уште и **правилен тетраедар**.

На цртеж 46 нацртани се правилна триаголна, четириаголна и правилна шестаголна пирамида, на чие разгледување посебно ќе се задржиме. За нив ќе ги употребуваме следните ознаки:

Должината на основниот раб ќе ја означуваме со a, на бочниот раб - со s, на висината - со H и на апотемата - со h.

Ќе покажеме дека горниве четири елементи a, s, H и h на правилните пирамиди не се независни еден од друг, односно ако се познати кои и да било два од нив, лесно можат да се одредат и другите два елемента.

Од цртеж 46 гледате дека ортогоналните проекции на бочниот раб SA и апотемата SM врз рамнината на основата на правилните пирамиди, всушност, претставуваат, радиуси R и r на опишаната и впишаната кружница на правилниот многуаголник што е основа на правилната пирамида.

Должините на тие радиуси R и r, како што ни е познато, се функции од должината на страната a на правилниот многуаголник и тоа:

- кај рамностраниот триаголник: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
- кај квадратот: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, r = \frac{a}{2}$
- кај правилниот шестаголник: $R = a, r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Значи, со помош на тие формули лесно ги одредуваме радиусите R и r кога е позната должината на основниот раб a на соодветната правилна пирамида.

Од друга страна пак, од правоаголните триаголници SAO, SOM и SMC со примена на Питагоровата теорема имаме

- ΔSAO: $s^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{R}^2$, односно $\mathrm{H}^2 = s^2 - \mathrm{H}^2$
- ΔSOM: $h^2 = \mathrm{H}^2 + \mathrm{r}^2$, односно $\mathrm{H}^2 = h^2 - \mathrm{r}^2$
- ΔSMC: $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, односно $h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Задача: Правилна четириаголна пирамида има основен раб a = 14 cm и бочен раб s = 25 cm. Да се одредат висината и апотемата на пирамидата.

Решение: Од правоаголниот триаголник SAO (црт. 46б) имаме:

$$H = \sqrt{s^2 - R^2} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{25^2 - \frac{14^2}{2}} =$$

$$\sqrt{625 - \frac{196}{2}} = \sqrt{625 - 98} = \sqrt{527} \approx 23(\mathrm{cm}).$$

Апотемата h можеме да ја одредиме или од правоаголниот триаголник SOM или од

ΔSMC (црт. 46б). Од ΔSMC добиваме:

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24(\mathrm{cm}).$$

Значи, дадената пирамида има висина H $\approx$ 23 cm и апотема h = 24 cm.

Пресекот што се добива, кога пирамидата ќе се пресече со рамнина, која минува низ врвот и една која и да било дијагонала на основата, се вика **дијагонален пресек** на пирамидата.

задачи

1. Пирамидата чија основа е: а) рамнокрак триаголник, б) правоаголен триаголник, в) ромб, г) ромбоид, д) рамнокрак трапез, ѓ) делтоид, дали може да биде со еднакви бочни рабови? Зошто?

2. Кои пирамиди ги викаме правилни? Кој е неопходен и доволен услов за да биде една пирамида правилна?

3. Ако основата на една пирамида е правилен многуаголник, дали таа мора да е правилна?

4. Ако бочните рабови на една пирамида се еднакви еден на друг, дали таа мора да е правилна?

5. Дали кај правилната пирамида постои точка што е еднакво оддалечена од сите темиња и од врвот на пирамидата?

6. Една правилна четириаголна пирамида има основен раб 10 cm и апотема 13 cm. Одреди ја висината на пирамидата!

7. Правилна шестаголна пирамида има основен раб 4 cm и висина 5, 5 cm. Одреди ја нејзината апотема!

8. Правилна триаголна пирамида има основен раб 6 cm и бочен раб 4 cm. Одреди ја висината и апотемата на таа пирамида!

9. Правилна четириаголна пирамида со основен раб a = 10 cm има висина H = 12 cm. Одреди го бочниот раб и апотемата на пирамидата!

10. Одреди ја висината на правилен тетраедар, чиј раб е a = 8 cm!

11. Дали може дијагоналниот пресек на пирамидата да биде: а) рамнокрак триаголник, б) правоаголен триаголник, в) рамностран триаголник?

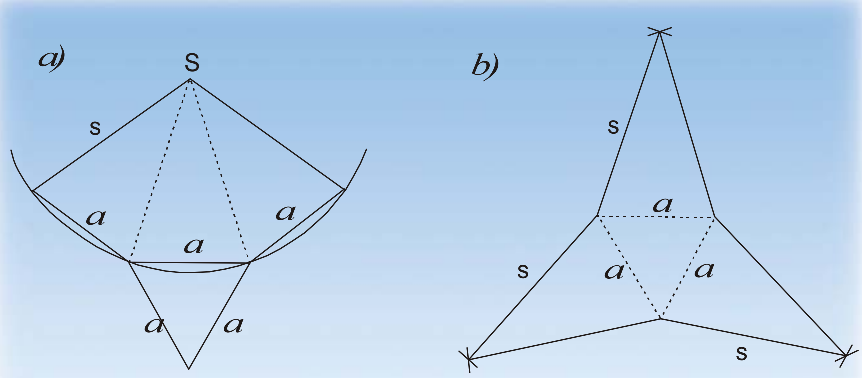
12. Ако еден правилен тетраедар го исечеме в должј трите бочни рабови и така добиената фигура ја расклопиме и поставиме во рамнина, каква фигура ќе добиеме?

IV.13. МРЕЖА НА ПИРАМИДА

Ако основата и бочните ѕидови на пирамидата ги расклопиме и поставиме сите да легнат во една рамнина, ќе ја добиеме мрежата на пирамидата.

Да ја нацртаме мрежата на правилната триаголна пирамида со основен раб a и бочен раб s.

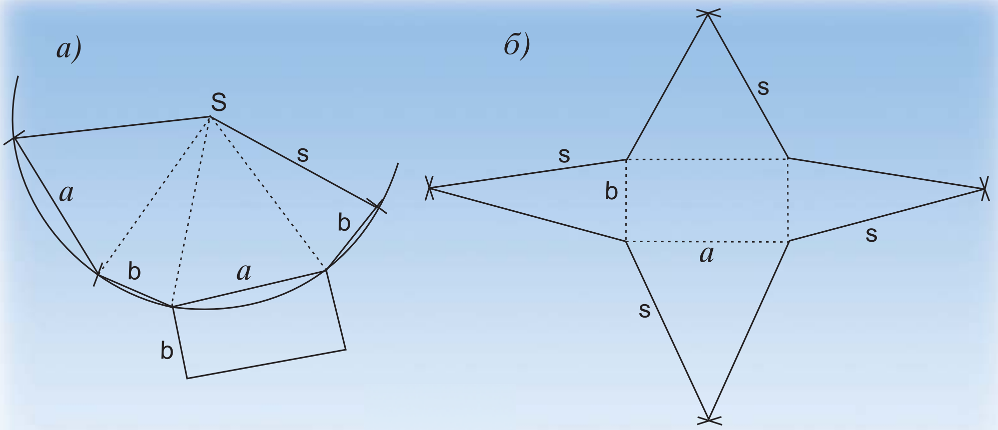
Бараната мрежа на правилната триаголна пирамида ја цртаме вака: Од некоја точка S опишуваме кружен лак со радиус што е еднаков на бочниот раб s на пирамидата (црт. 47а). Потоа, по опишаниот кружен лак, со шестар три пати го пренесуваме основниот раб a на пирамидата како тетива на тој лак. Соединувајќи ги добиените точки на



Цртеж 47

кружниот лак со точката S, а потоа и по ред една со друга, ќе добиеме три рамнокраки триаголници, што ни ги претставуваат бочните ѕидови на правилната триагонална пирамида. На крајот над еден основен раб го конструираме и рамностраниот триаголник - основа на пирамидата. Така ја добиваме бараната мрежа на правилната триаголна пирамида (црт. 47а).

Мрежата на правилна триаголна пирамида може да се нацрта и на друг начин, како на цртеж 47б. Тука, прво, нацртана е основата на пирамидата, а потоа над секој нејзин раб е конструиран по еден рамнокрак триаголник со крак, што е еднаков на бочниот раб s на пирамидата.



Цртеж 48

На сличен начин ја цртаме и мрежата на правилна четириаголна и правилна шестаголна пирамида.

На црт. 48а и б нацртана е на два начина мрежата на една четириаголна пирамида со еднакви бочни рабови, чија основа е правоаголник со димензии $a = 2$ cm и $b = 1$ cm, а бочниот раб на пирамидата е $s = 2,5$ cm. Објасни ја постапката како е нацртана таа.

задачи

1. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилна триаголна пирамида, чиј основен раб е $a = 5$ cm и бочен раб $c = 8$ cm.
2. Колку оски на симетрија има мрежата на правилна триаголна пирамида, што е нацртана на: црт. 47а, б) црт. 47б?
3. Нацртај ја мрежата на правилна четириаголна пирамида, чиј основен раб е $a = 3$ cm и бочен раб $s = 7,5$ cm.

4. Нацртај ја мрежата и направи модел на четириаголна пирамида со еднакви бочни рабови c = 7 cm, а основата на пирамидата е правоаголник со димензии $a = 5,5$ cm и $b = 3$ cm.

5. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилен тетраедар, чиј раб е $a = 6$ cm.

6. Нацртај ја мрежата и направи модел на триаголна пирамида со еднакви бочни рабови $s = 7$cm, чии основни рабови се $a = 3$ cm, $b = 4,5$ cm и $c = 6$ cm.

7. Нацртај ја мрежата на триаголна пирамида со еднакви бочни рабови $c = 5$ cm, а основата ѝ е рамнокрак триаголник со основа $a = 3$ cm и крак $b = 4$ cm.

8. Нацртај ја мрежата на една триаголна пирамида со еднакви бочни рабови $c = 7$ cm, а основата ѝ е правоаголен триаголник со катети $a = 3$ cm и $b = 4$ cm.

9. Нацртај мрежа на една пирамида, пресметај ги плоштините на сите нејзини делови, а потоа собери ги тие плоштини.

IV.14. ПЛОШТИНА НА ПИРАМИДА

Да се определи плоштината на една пирамида, значи да се најде збирот од плоштините на сите нејзини ѕидови. Површината (границата) на пирамидата се состои од еден многуаголник - бочна површина на пирамидата, и определен број триаголници - бочна површина на пирамидата. Ако плоштината на основата на пирамидата ја означиме со B, а плоштината на бочната површина - со M, тогаш за плоштината P на пирамидата важи формулата:

$$P = B + M$$

Плоштината на пирамидата е еднаква на збирот од плоштините на нејзината основа и нејзината бочна површина.

Од сите видови пирамиди, ние ќе се задржиме, само на пресметувањето на плоштината на правилните пирамиди и плоштината на некои пирамиди со еднакви бочни рабови.
Ќе покажеме дека важи следната:

Теорема: *Плоштината на бочната површина на секоја правилна пирамида е еднаква на полупроизводот од периметарот (L) на основата и должината на апотемата (h) на пирамидата, т.е.* $M = \frac{Lh}{2}$.

Доказ: Плоштината на еден бочен ѕид (рамнокрак триаголник) на правилната n - аголна пирамида е еднаква на $\frac{a \cdot h}{2}$, каде што a е должината на основниот раб, а h - должината на апотемата на пирамидата. Но, бидејќи бочната површина на правилната n- аголна пирамида се состои од n складни триаголници, затоа нејзината плоштина ќе биде:

$$M = n \cdot \frac{ah}{2} = \frac{nah}{2}.$$

Ако земеме предвид дека $na = L$, каде L е периметар на основата, тогаш добиваме:

$$M = \frac{Lh}{2}.$$

Од општата формула за плоштината на пирамидата и докажаната теорема лесно ги добиваме и формулите за плоштина на правилните: триаголна, четириаголна и шестаголна пирамида.

За правилната триаголна пирамида, бидејќи е $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а $M=\frac{3ah}{2}$ затоа формулата за плоштина гласи:

$$P=B+M=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3ah}{2}, \text{ односно } \boldsymbol{P=\frac{a}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+3h\right)}.$$

За правилната четириаголна пирамида, бидејќи е $B=a^2$, а $M=\frac{4ah}{2}=2ah$ затоа

$$P=B+M=a^2+2\,ah, \text{ односно } \boldsymbol{P=a\,(a+2h)}.$$

За правилната шестаголна пирамида, бидејќи е $B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $M=\frac{6ah}{2}=3ah$, затоа:

$$P=B+M=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+3ah, \text{ односно } \boldsymbol{P=3a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+h\right)}.$$

Правилниот тетраедар, бидејќи е ограничен со четири складни рамнострани триаголници со страна a, затоа формулата за неговата плоштина гласи:

$$P=4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\cdot\sqrt{3}.$$

Плоштината на неправилните пирамиди ја наоѓаме, кога, прво, ќе ги најдеме поодделно плоштините на сите нејзини ѕидови, а потоа истите ги собереме.

Задача 1. Да се пресмета плоштината на правилната триаголна пирамида, која има основен раб $a=6$ cm и висина $H=8$ cm.

Решение: Прво треба да ја пресметаме апотемата на пирамидата. Неа ја добиваме со примена на Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник SOM (црт. 46а), од каде што:

$$h=\sqrt{H^2+r^2}, \text{ а бидејќи } r=\frac{a\sqrt{3}}{6}, \text{ тогаш}$$

$$h=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{8^2+\left(\frac{6\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{64+3}=\sqrt{67}\approx 8{,}2\text{cm}.$$

Бараната плоштина на пирамидата ќе биде:

$$P=\frac{a}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+3h\right)=\frac{6}{2}\left(\frac{6\sqrt{3}}{2}+3\cdot 8{,}2\right)\approx 3\left(3\cdot 1{,}73+24{,}6\right)=$$

$$3\left(5{,}19+24{,}6\right)=3\cdot 29{,}79=89{,}37, \text{ т.е. } P\approx 89{,}37\text{cm}^2.$$

Задача 2. Да се пресмета плоштината на правилна четириаголна пирамида, чиј основен раб е $a=10$ cm, а бочниот раб $s=13$ cm.

Решение: Прво, ќе ја пресметаме должината на апотемата на пирамидата:

$$h=\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12(\text{cm}).$$

Потоа, ја пресметуваме плоштината на пирамидата:

$$P=a(a+2h)=10(10+2\cdot 12)=10\cdot 34=340\,(\text{cm}^2).$$

Задача 3. Да се пресмета плоштината на правилна шестаголна пирамида, чија висина е $H=8$ cm, а бочниот раб $s=10$ cm.

Решение: Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник AOS (црт. 46 в) прво, го определуваме, радиусот на опишаната кружница R околу основата. Тој ќе биде:

$$R=\sqrt{s^2-H^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6(\text{cm}).$$

Бидејќи $R=a$, тоа значи, дека основниот раб на дадената пирамида ќе биде $a=6$ cm. Потоа ја определуваме и должината на апотемата на пирамидата од правоаголниот триаголник SOM (црт. 46 в), па добиваме:

$$h=\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{10^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=\sqrt{100-9}=\sqrt{91}\approx 9,54(\text{cm}).$$

Бараната плоштина на пирамидата е:

$$P=3a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+h\right)\approx 3\cdot 6\left(\frac{6\cdot 1,73}{2}+9,54\right)=18\cdot(5,19+9,54)=265,14\ ,$$

т.е. $P\approx 265,14\ \text{cm}^2$.

Задача 4. Четириаголна пирамида со складни бочни рабови и висина $H=6$ cm за основа има правоаголник, чии димензии се: $a=16$ cm и $b=5$ cm. Да се пресмета плоштината на таа пирамида.

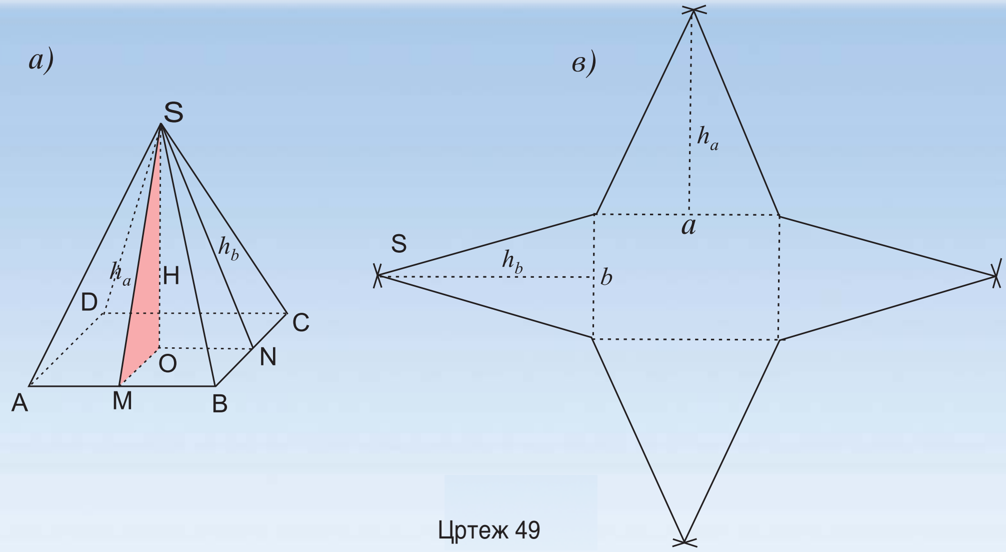
Решение: Како изгледа една таква пирамида и нејзината мрежа, може да се види на цртеж 49. Плоштината на нејзината основа ќе биде $B=ab$, а бочната површина ја сочинуваат четири рамнокраки триаголници, од кои два по два се складни.

Ако висините на нескладните бочни ѕидови ги означиме со h_a и h_b, тогаш плоштината на бочната површина ќе биде:

$$M=2\cdot\frac{ah_a}{2}+2\cdot\frac{bh_b}{2}=ah_a+bh_b.$$

Според тоа формулата за плоштина на четириаголна пирамида со складни бочни рабови и основа правоаголник, гласи:

$$P=ab+ah_a+bh_b.$$



Цртеж 49

Прво, ќе ги определиме бочните висини h_a и h_b со помош на Питагоровата теорема од правоаголните триаголници SOM и SON (црт. 49а).

$$h_a = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 2,5^2} = \sqrt{36 + 6,25} = \sqrt{42,25} = 6,5(\text{cm}),$$

$$h_b = \sqrt{H^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10(\text{cm}).$$

Потоа ја определуваме плоштината на дадената пирамида:

$$P = ab + ah_a + bh_b = 16 \cdot 5 + 16 \cdot 16,5 + 5 \cdot 10 = 80 + 104 + 50 = 234\,(\text{cm})^2.$$

задачи

1. Пресметај ја плоштината на правилна триаголна пирамида со основен раб 5 cm и бочен раб 6 cm.

2. Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб 3 cm и бочен раб 7,8 cm.

3. Пресметај ја плоштината на правилна шестаголна пирамида со основен раб $a = 14$ cm и бочен раб $s = 2,5$ dm.

4. Пресметај ја плоштината на правилен тетраедар со раб 12 cm.

5. Мрежата од правилен тетраедар нацртана е во форма на рамностран триаголник со страна 12 cm. Одреди ја висината на тетраедарот.

6. Колку ќерамиди се потребни за покривање на една куќа, чиј покрив има форма на правилна четириаголна пирамида со основен раб 9 m и бочен раб 7,5 m, ако за покривањето на 1 m² потребни се 15 ќерамиди.

7. Правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 8$ cm има плоштина 448 cm^2. Определи ја висината и бочниот раб на пирамидата.

8. Правоаголен триаголник со катети $a = 3$ cm и $b = 4$ cm претставува основа на една триаголна пирамида со еднакви бочни рабови долги по 8 cm. Пресметај ја плоштината на таа пирамида.

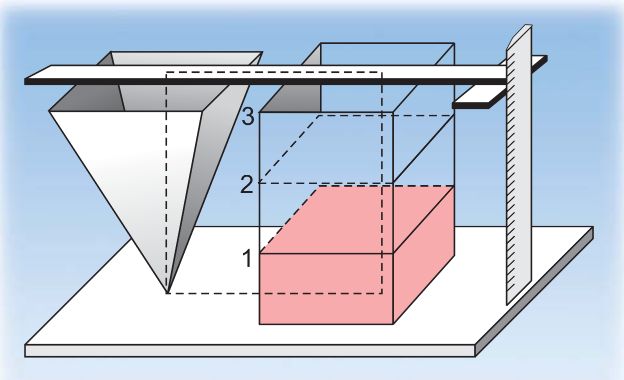
9. Бочната плоштина на една правилна триаголна пирамида изнесува M = 144 cm^2. Одреди го основниот раб на пирамидата, ако нејзината апотема е долга 12 cm.

10. Апотемите на правилна четириаголна пирамида се еднакви на основниот раб на пирамидата. Најди формула по која ќе се пресметува плоштината на таквите правилни четириаголни пирамиди, а потоа пресметај ја плоштината на една таква пирамида, чиј раб е долг 12 cm.

11. Правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 11$ cm има плоштина 792 cm^2. Одреди го бочниот раб и висината на таа пирамида.

12. Плоштината на една правилна четириаголна пирамида, изнесува 90 cm^2, а плоштината на нејзината бочна површина е 65 cm^2. Пресметај ги должините на основниот раб и висината на таа пирамида.

IV.15. ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА



Цртеж 50

Од подебел картон (или ламарина) да направиме модели на правилна четириаголна пирамида и правилна четириаголна призма, такви што, тие да имаат складни основи и еднакви висини. Од моделот на призмата да ја отфрлиме едната негова основа, а моделот на пирамидата нека е без основа (црт. 50), така што, тие да станат две кутии.

Ако моделот - пирамида го наполниме со ситен песок (или вода), а потоа песокот го пресипеме во моделот - призма, ќе забележиме дека моделот - призма ќе се наполни до горе со песок дури по третото пресипување.

Ако направиме сличен обид и со некои други модели на пирамида и призма, кои имаат складни основи и еднакви висини, ќе дојдеме до ист заклучок, имено дека:

Волуменот на пирамидата е 3 пати помал (претставува $\frac{1}{3}$) од волуменот на призмата, која има основи и висина еднакви на основата и висината на пирамидата.

Бидејќи волуменот на призмата е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на висината, т.е. на BH, од горните обиди насетуваме дека ќе важи следната теорема.

Теорема: *Волуменот на пирамидата е еднаков на* $\frac{1}{3}$ *од производот на плоштината на нејзината основа и должината на висината, т.е.* $V=\frac{1}{3}\cdot BH$

Од горнава теорема лесно ги добиваме и специјалните формули за плоштина на правилните пирамиди, и тоа:

- за правилна триаголна пирамида $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$, т.е. $\boldsymbol{V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{12}}$,
- за правилна четириаголна пирамида $V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot H$, т.е. $\boldsymbol{V=\frac{a^2H}{3}}$,
- за правилна шестаголна пирамида $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot H$, т.е. $\boldsymbol{V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{2}}$.

Задача 1. Да се определи волуменот на правилната четириаголна пирамида, чиј бочен раб е еднаков на основниот раб $a=8$ cm.

Решение: Со примена на Питагоровата теорема, прво, ќе ја одредиме висината на пирамидата. Од правоаголниот триаголник SAO (црт. 46 б) при $s=a=8$ cm, имаме:

$$H=\sqrt{s^2-R^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{8^2-\left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{64-32}=\sqrt{32}\approx 5,7(\text{cm}).$$

Волуменот на пирамидата, ќе биде:

$$V=\frac{a^2H}{3}\approx\frac{8^2\cdot 5,7}{3}=64\cdot 1,9=121,6,\ \text{т.е. } V\approx 121,6\ \text{cm}^3.$$

Задача 2. Колкава маса има една правилна триаголна пирамида од бакар со основен раб $a=6$ cm и бочен раб $s=10$ cm, ако знаеме дека густината на бакарот е 8,9?

Решение: Масата на пирамидата ќе ја добиеме, кога нејзиниот волумен ќе го помножиме со густината на бакарот. Затоа, прво, го пресметуваме волуменот, но за пресметување на волуменот потребно е да ја знаеме висината на пирамидата.

Висината на пирамидата ќе ја добиеме со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник SOA (црт.46 а).

$$H=\sqrt{s^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{10^2-\left(\frac{6\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{100-12}=\sqrt{88}\approx 9,4\ (\text{cm}).$$

Според тоа, $V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{12}\approx\frac{36\cdot 9,4\cdot 1,73}{12}=3\cdot 9,4\cdot 1,73=48,786$, т.е. $V\approx 48,8\ \text{cm}^3$.

Бараната маса M, ќе биде: $M=V\cdot s=48,8\cdot 8,9=434,32$ (g).

Задача 3. Да се пресмета волуменот на правилна шестаголна пирамида со основен раб $a = 4$ cm, ако плоштината на нејзиниот најголем дијагонален пресек изнесува 26 cm^2.

Решение: Најголемиот дијагонален пресек кај правилната шестаголна пирамида претставува рамнокрак триаголник, чија основа е $2R$, а висината во исто време му е и висина на пирамидата. Според тоа, формулата за плоштина на тој пресек ќе гласи:

$$P_{\text{д.пр.}} = \frac{2R \cdot H}{2} = RH .$$

Бидејќи, пак, $P_{\text{д.пр.}} = 26$, а $R = a = 4$ cm, затоа од равенката $26 = 4H$ наоѓаме $H = \frac{26}{4} = 6,5(\text{cm})$. Бараниот волумен на пирамидата ќе биде:

$$V = \frac{a^2 H\sqrt{3}}{2} = \frac{4^2 \cdot 6,5 \cdot 1,73}{2} = 8 \cdot 6,5 \cdot 1,73 = 89,96 \text{, т.е.} \quad V \approx 90 \text{ cm}^3.$$

задачи

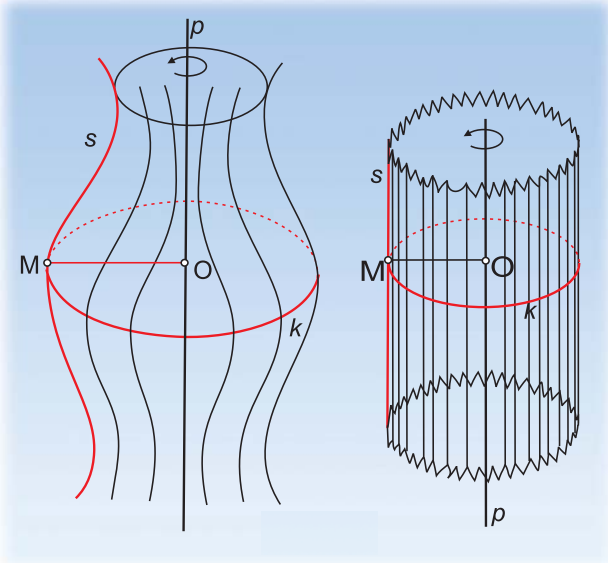
1. Пресметај го волуменот на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 6$ cm и бочен раб $c = 9$ cm.
2. Кеопсовата пирамида во Египет има за основа квадрат со страна $a = 234$ m. Пирамидата е висока 148 m, пресметај го нејзиниот волумен.
3. Волуменот на една правилна четириаголна пирамида е $B = 405$ cm^3, а висината $H = 15$cm. Одреди го основниот раб на пирамидата.
4. Правилна четириаголна пирамида со основен раб 8 cm има волумен 576 cm^3. Определи ги висината и плоштината на таа пирамида.
5. Основниот раб на една правилна шестаголна пирамида е 4,5 cm, а плоштината на поголемиот дијагонален пресек е 72 cm^3. Пресметај го волуменот на пирамидата!
6. Висината на една правилна четириаголна пирамида е $H = 7$ cm, а плоштината на дијагоналниот пресек е 19, 73 cm^2. Пресметај го волуменот на пирамидата.
7. Плоштината на бочната површина на една правилна четириаголна пирамида изнесува 65 cm^2, а основниот раб е $a = 5$ cm. Определи го волуменот на пирамидата.
8. Пресметај го волуменот на правилна триаголна пирамида, чиј основен раб е $a = 9$ cm, а бочниот раб е $c = 15$ cm.
9. Изведи формула за пресметување волумен на правилен тетраедар со раб a.
10. Пресметај го волуменот на правилен тетраедар со раб 1 dm.
11. Масивна метална коцка со раб 6 cm претопена е во правилна четириаголна пирамида, чиј основен раб е еднаков на работ на коцката. Колкава ќе биде висината на пирамидата?
12. Како ќе се промени волуменот на една правилна пирамида, ако: основниот раб го зголемиме 2 пати, а висината ја намалиме 2 пати, б) основниот раб го зголемиме 3 пати, а висината остане непроменета?

Г ЦИЛИНДАР

IV.16. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ НА ЦИЛИНДАРОТ. ПРЕСЕЦИ НА ЦИЛИНДАР

Ќе покажеме дека некои површини можат да бидат образувани со движење на дадена линија во просторот.

Нека s е произволна рамнинска крива, која во специјален случај може да биде и права, а p - една неподвижна права наречена **оска**, која со кривата s лежи на иста рамнина (црт. 51)



Цртеж 51

Да замислиме дека кривата s се врти, (ротира) во просторот околу дадената неподвижна права p. При тоа, вртење претпоставуваме дека кривата што ротира и оската на вртењето се така заемно цврсто сврзани, што произволната точка $M \in s$ секогаш образува кружница k со центар $O \in p$, чија рамнина е нормална на оската p (црт. 51). Притоа, се образува една површина која се вика **ротациона површина**. Значи, *ротациона површина се вика површината, која се образува при вртењето (ротацијата) на една крива, околу дадена неподвижна права, наречена оска на вртењето.*

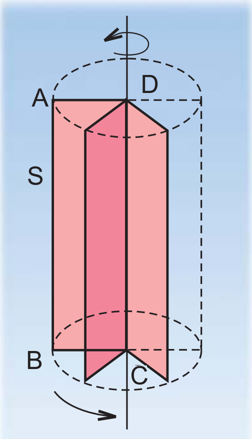
Кривата s што ја образува ротационата површина се вика нејзина **генератриса.**

Ако генератрисата е права паралелна на оската на вртењето, тогаш добиената ротациона површина се вика уште и **кружна цилиндрична површина**. Ротационата и кружната цилиндрична површина се закривени (валчести) површини. Тоа, значи, дека ниеден нивен дел не може да се совпадне со дел од рамнина.

Од горното следува дека пресекот на која и да било ротациона површина и една рамнина што е нормална на оската на вртењето, секогаш е кружница.

Дефиниција 1. *Тело, кое е настанато со вртење на некоја фигура околу некоја неподвижна оска на вртењето, се вика* ***ротационо тело****.*

Да го разгледаме вртењето на правоаголникот ABCD околу една негова страна, на пример, околу страната CD (црт. 52). Очигледно е дека правата CD, околу која се врти правоаголникот ABCD, ќе претставува оска - на вртењето. Според тоа, сите точки од страната CD остануваат неподвижни. Спротивната страна AB на правоаголникот, што е паралелна на оската на вртењето, ќе образува површина која е дел од некоја кружна цилиндрична површина. Другите две страни, пак, AD и BC на правоаголникот, ќе образуваат два складни паралелни круга со центри во точките D и C и радиус $r = \overline{AD} = \overline{BC}$.



црт. 52

Површината, која е составена од кружната цилиндрична површина што е образувана од отсечката AB и двата складни паралелни круга што се образувани од отсечките AD и BC (црт. 52), го разбива множеството точки од просторот (што не ѝ припаѓаат) на две области: **внатрешна** и **надворешна**. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. геометриско тело, кое го викаме **прав кружен цилиндар**.

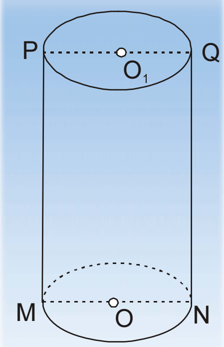
Постојат и други видови цилиндри, но бидејќи ние ќе разгледуваме само прави кружни цилиндри, затоа просто ќе ги викаме само цилиндри.

Дефиниција 2. ***Цилиндар*** *се вика телото што е ограничено со една цилиндрична површина и два складни паралелни круга.*

Двата складни паралелни круга се викаат **основи** (или **бази**) на цилиндарот, а делот од кружната цилиндрична површина заклучен меѓу основите - **бочна површина** на цилиндарот. Радиусот на секоја основа се вика **радиус** на цилиндарот, а отсечката AB во секоја нејзина положба при вртењето, се вика **генератриса** на цилиндарот.

Правата што минува низ центрите на основите на цилиндарот се вика **оска** на цилиндарот, а отсечката од неа меѓу центрите на основите - **висина** на цилиндарот.

Цилиндарот го цртаме како на цртеж 53. Прво, го цртаме правоаголникот MNQP со основа MN - дијаметарот на цилиндарот и висина MP - висината на цилиндарот (црт. 53). Основите на цилиндарот ги цртаме како елипси и тоа, задниот дел на елипсата при долната основа на цилиндарот го цртаме со испрекинати линии.



црт. 53

1. Правоаголникот ABCD се врти околу страната AB. Што образува при тоа вртење: а) точката C, б) точката D, в) страната BC, г) страната CD, д) страната AB?

Од начинот на кој настанува ротационото тело цилиндар, следува дека:

- **Сите генератриси на цилиндарот се еднакви и паралелни меѓу себе.**
- **Секоја генератриса е нормална на рамнините на основите на цилиндарот.**
- **Висината на цилиндарот е еднаква и паралелна на секоја генератриса на цилиндарот.**

Должините на радиусот, висината и генератрисата на цилиндарот ќе ги означуваме соодветно со буквите R, H и s.

Кај цилиндарот ќе ги издвоиме следните пресеци:

1°. Пресекот што се добива кога цилиндарот ќе се пресече со рамнина, која е паралелна на рамнините на основите на цилиндарот, се вика **паралелен пресек** (црт. 54 а). Тој секогаш е круг складен на основите.

2°. Пресекот што минува низ оската на цилиндарот се вика **оскин пресек**. Тој секогаш е правоаголник, чии страни се: дијаметарот на основата и генератрисата на цилиндарот (црт. 54 б). Во специјален случај оскиниот пресек на цилиндарот може да биде и квадрат. Тоа ќе биде кога генератрисата на цилиндарот е еднаква на дијаметарот на основата.

Цилиндар, на кој оскиниот пресек е квадрат, се вика **рамностран цилиндар**.

2. Кој пресек кај цилиндарот се вика: а) паралелен пресек, б) оскин пресек? Каква фигура претставува секој од нив?

задачи

3. Наведи неколку примери на предмети кои имаат форма на цилиндар.

4. Определи го радиусот и генератрисата на цилиндарот, што се добива кога правоаголникот со страни $a = 7$ cm и $b = 4$ cm се врти околу:

а) страната a, б) страната b,

в) симетралата на страната a, г) симетралата на страната b!

5. Дали кај прав цилиндар постои точка, што е еднакво оддалечена од секоја точка на кружниците на двете негови основи? Која е таа точка?

6. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на цилиндар, чии радиус и висина се: а) R = 4 cm, H = 7 cm, б) R = 1, 8 cm, H = 5 cm.

7. Определи ја должината на дијагоналата на оскиниот пресек на цилиндар со радиус 1,5 dm и висина 4 dm.

8. Колкава плоштина има оскиниот пресек на рамностран цилиндар со радиус $R = 1$ dm?

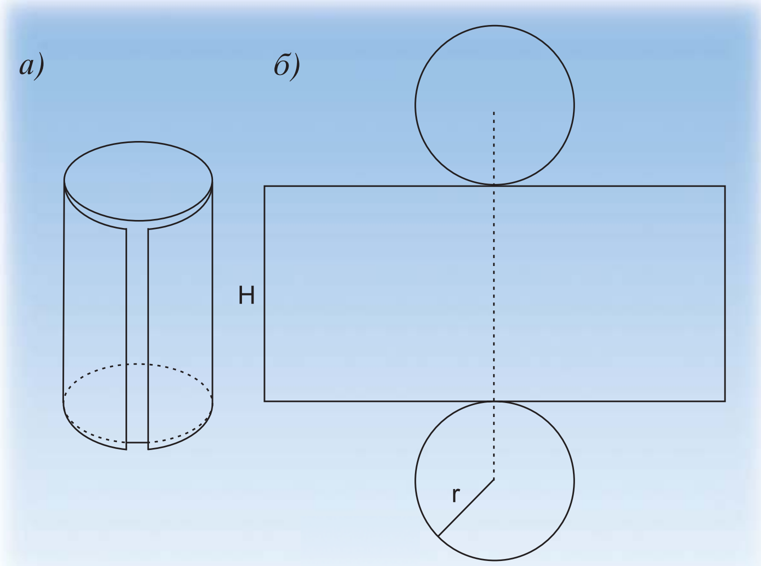
9. Плоштината на оскиниот пресек на еден рамностран цилиндар изнесува 2,25 dm^2. Определи ги радиусот и висината на цилиндарот.

10. Плоштината на оскиниот пресек на еден цилиндар, со висина 32 cm изнесува 416 cm^2. Одреди го радиусот на цилиндарот.

11. Во цилиндар со висина 15 cm поставена е рамнина паралелна на оската на цилиндарот на растојание 4 cm од неа. Рамнината отсекува од кружницата на основата на цилиндарот кружен лак 60°. Најди ја плоштината на добиениот пресек.

12. Ако бочната површина на цилиндарот ја исечеме долж една генератриса, тогаш каква фигура добиваме?

IV.17. ЦРТАЊЕ МРЕЖА НА ЦИЛИНДАР



Цртеж 55

Да земеме една кутија од конзерва, што има форма на цилиндар, и да ја изрежеме по кружниците на основите и по една генератриса, како што е покажано на цртеж 55а. Ако потоа кутијата ја развиеме, така што нејзината бочна површина, заедно со основите да ги поставиме да легнат во една рамнина, ќе ја добиеме мрежата на цилиндарот (црт. 55б). Како што гледаме:

Мрежата на цилиндарот се состои од два складни круга и еден правоаголник.

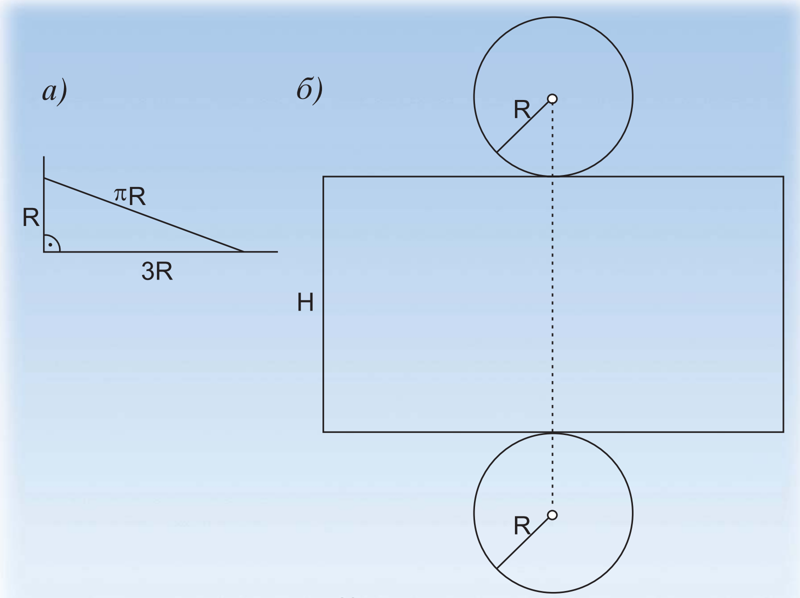
Правоаголникот ќе има должина еднаква на периметарот на основата ($L=2\pi R$) и висина еднаква на висината на цилиндарот.

Задача: Да се нацрта мрежата на цилиндарот со радиус $R=0{,}8$ cm и висина $H=2{,}5$ cm.

Решение: Прво, ја цртаме развиената бочна површина на цилиндарот, т.е. правоаголникот со должина $2\pi R$ и висина $H = 2{,}5$ cm. Должината $2\pi R$ кога ни е познат радиусот, лесно може да се пресмета. Бидејќи е $R=0{,}8$ cm, наоѓаме дека: $2\pi R \approx 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}8 = 5{,}024\,(\text{cm}) \approx 5\,(\text{cm})$.

Должината πR може приближно да се определи и конструктивно како хипотенуза на правоаголен триаголник со катети R и 3R (црт. 56а). Ако должината πR е определена, тогаш лесно ја определуваме и бараната должина $2\pi R$.

Кога сѐ тоа е готово, го цртаме правоаголникот со должина $2\pi R = 5$ cm и висина $H = 2{,}5$ cm. На крајот од двете страни на тој правоаголник црта-



Цртеж 56

ме по еден круг со радиус R = 0,8 cm, кои се допираат до него. Така ја добиваме бараната мрежа на цилиндарот (црт. 56б).

Модел на цилиндар можеме да направиме на следниов начин:

На парче картон (или ламарина) прво ја цртаме мрежата на цилиндарот по дадените негови димензии, потоа неа ја сечеме; правоаголникот го свиткуваме да стане бочна површина на цилиндарот, а круговите ги преклопуваме како на цртеж 55а. Склопениот модел за да остане трајно составен, потребно е круговите и бочната плоштина, каде што се здружуваат, да ги залепиме.

задачи

1. Нацртај ја мрежата на цилиндар, чии димензии се:
   а) R = 1 cm и H = 3,5 cm, б) R = 1,5 cm, и H = 2,5 cm.
2. Нацртај ја мрежата и направи модел на рамностран цилиндар, ако е:
   а) R = 1,4 cm, б) H = 5 cm.
3. Нацртај ја мрежата на полуцилиндар (тело што се добива кога цилиндарот ќе се преполови со еден негов оскин пресек), ако: R = 2 cm и H = 6,5 cm.

   Потоа, направи модел на полуцилиндарот од картон!
4. Нацртај ја мрежата на буре што има форма на цилиндар со радиус на основата 4 dm и висина 1,2 m во размер 1 : 20.
5. Нацртај мрежа на еден цилиндар, а потоа пресметај ги плоштините на рамнинските фигури.

IV.18. ПЛОШТИНА НА ЦИЛИНДАР

Од дефиницијата и мрежата на цилиндарот гледаме дека неговата површина (граница) се состои од два складни круга и една кружна цилиндрична површина - бочна површина на цилиндарот. Според тоа:

Плоштината на цилиндарот е еднаква на збирот на плоштините на двата складни круга - основите и неговата бочна плоштина, т.е.

$$P = 2B + M,$$

каде што B е плоштина на едната основа (круг), а M - плоштина на бочната површина на цилиндарот.

Знаете дека плоштината на кругот ја пресметуваме по формулата $B = \pi R^2$. Бочната површина на цилиндарот е крива површина, но кога таа ќе се развие во рамнината од неа се добива еден правоаголник, чија должина е еднаква на должината на кружницата на основата, а висината е еднаква на висината на цилиндарот (црт. 55 б). Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Бочната плоштина на цилиндарот е еднаква на производот од должината на кружницата на основата и висината на цилиндарот, т.е.*

$$M = 2\pi R \cdot H.$$

Според тоа, плоштината на цилиндарот ќе биде:

$$P = 2B + M = 2\cdot\pi R^2 + 2\pi R\cdot H, \text{ т.е. } \mathbf{P = 2\pi R(R+H)}.$$

Кај рамностраниот цилиндар висината е еднаква на дијаметарот на основата, т.е. $H = 2R$. Според тоа, формулата за плоштина на рамностраниот цилиндар, гласи:

$$P = 2\pi R(R+H) = 2\pi R(R+2R) = 2\pi R\cdot 3R, \text{ т.е. } P = 6\pi R^2.$$

Задача 1. Да се пресмета плоштината на цилиндар, чиј радиус на основата е 18 cm, а висината му е 5 dm.

Решение: Ако сакаме плоштината на цилиндарот, што треба да ја пресметаме, да биде изразена во dm^2, тогаш и должината на радиусот треба да биде изразена во dm, т.е. $R = 18\,cm = 1{,}8\,dm$.

Со замена на вредностите на R и H во формулата добиваме:

$$P = 2\pi R(R+H) \approx 2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}8\cdot(1{,}8+5) = 6{,}28\cdot 1{,}8\cdot 6{,}8 = 76{,}8672\,(dm^2).$$

Задача 2. Бочната плоштина на еден рамностран цилиндар е $M = 72\ dm^2$. Колкава е неговата плоштина?

Решение: Бочната плоштина на рамностраниот цилиндар е еднаква на:

$M = 2\pi RH = 2\pi R\cdot 2R$ односно $M = 4\pi R^2$. Бидејќи бочната плоштина (M) е позната, од неа можеме да ја определиме вредноста на πR^2, т.е. $\pi R^2 = \frac{M}{4} = \frac{72}{4} = 18$.

Заменувајќи ја најдената вредност на πR^2 во формулата за плоштина на рамностраниот цилиндар, добиваме: $P = 6\pi R^2 = 6\cdot 18 = 108\,(dm^2)$.

задачи

1. Пресметај ја плоштината на цилиндар, чиј радиус и висина се:
   а) $R = 3,8$ cm, $H = 2,5$ cm, б) $R = 7$ cm, $H = 4$ dm.
2. Бочната плоштина на рамностран цилиндар е $M = 9\ dm^2$. Пресметај ја плоштината на тој цилиндар!
3. Пресметај ја плоштината на рамностран цилиндар, ако е дадено:
   а) $R = 1$ dm, б) $R = 15$ cm, в) $H = 1$ m.
4. Плоштината на еден рамностран цилиндар е еднаква на 1701 cm^2. Одреди го радиусот на цилиндарот.
5. Пресметај ја плоштината на телото, што се добива, кога квадрат со страна a =7 cm се врти околу една своја страна!
6. Еден столб за лепење огласи има дијаметар 8 dm, а е висок 2,3 m. Колку m^2 огласи можат да се залепат на него?
7. Колку метри квадратни ламарина е потребно за изработка на 25 еднакви ќунци за печка, чија должина е 0,8 m, а дијаметарот на отворот изнесува 12 cm?

8. Бочната плоштина на еден цилиндар изнесува 188,4 cm^2. Пресметај ја плоштината на тој цилиндар, ако неговата висина е 7,5 cm!

9. Плоштината на бочна површината на еден цилиндар изнесува 141,3 cm^2, а радиусот на основата му е 4,5 cm. Пресметај ја плоштината на тој цилиндар!

10. Една коцка од дрво со раб 15 cm треба да се изделка во најголем можен цилиндар. Одреди ја плоштината на добиениот цилиндар!

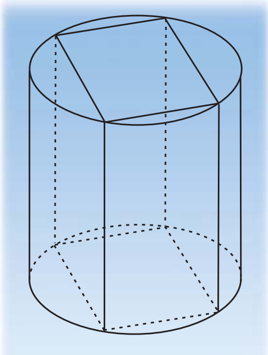
11. Еден цилиндар од дрво со дијаметар 14 cm и висина 2 dm треба да се изделка во можно најголема правилна четириаголна призма. Одреди ја плоштината на таа призма!

12. Одреди го односот од бочната плоштина на цилиндарот и плоштината на неговиот оскин пресек.

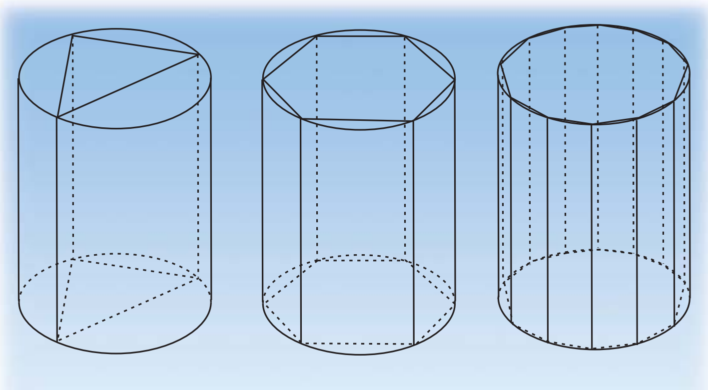
IV.19. ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДАР

За една призма велиме дека е впишана во даден цилиндар, ако многуаголниците на основите на призмата се впишани во круговите на основите на цилиндарот, а бочните рабови на призмата се генератриси на цилиндарот (црт. 57).

На цртеж 58 претставени се три складни цилиндри, во кои се впишани по една правилна призма и тоа, во првиот е впишана правилна триаголна, во вториот - правилна шестаголна, а во третиот - правилна дванаесетаголна призма.



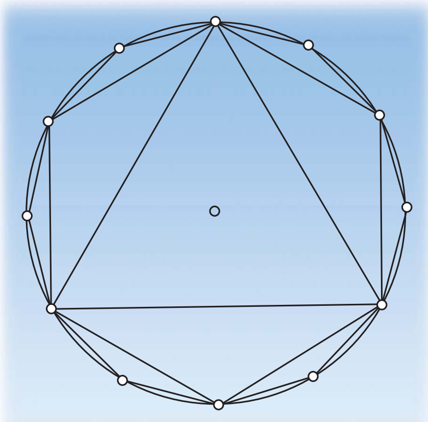
Цртеж 57



Цртеж 58

Гледате дека основите на впишаните правилни призми во трите складни цилиндри на цртеж 58 се правилни многуаголници што се впишани во складни кругови.

Ако во даден круг (или во складни кругови) впишуваме правилни многуаголници со поголем и сè поголем број страни (црт. 59), очигледно е дека периметрите на тие многуаголници ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до периметарот на кругот; а, исто така, и нивните плоштини ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до плоштината на дадениот круг.



Цртеж 59

Поради тоа, разбирливо е дека и волумените на впишаните правилни призми во цилиндарот, кога бројот на нивните бочни ѕидови станува с поголем и поголем, исто така, ќе растат и с повеќе ќе се приближуваат до волуменот на цилиндарот во кој се впишани.

Тоа не упатува на заклучок дека за пресметување на волуменот на цилиндарот можеме да ја користиме истата формула што ја изведовме за волумен на призмите:

$$V=BH.$$

Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Волуменот на цилиндарот е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на висината, т.е.*

$$V=BH.$$

Но бидејќи $B=\pi R^2$, затоа $\mathbf{V = \pi R^2 H}$.

Кај рамностраниот цилиндар, знаеме дека $H=2R$, па според тоа, формулата за неговиот волумен, гласи: $V=\pi R^2 H=\pi R^2\cdot 2R$, односно

$$\mathbf{V = 2\pi R^3}.$$

Задача 1. Колку литри вода собира едно буре што има форма на цилиндар со радиус на основата 3 dm и висина $H=10$ dm?

Решение: Знаете дека литарот е единица мерка за волумен на течности, која е еднаква (еквивалентна) на волуменот од 1 dm^3. Значи, волуменот на бурето изразен во литри е еднаков на неговиот волумен изразен во dm^3. Волуменот на бурето во dm^3 ќе биде:

$$V=\pi R^2 H\approx 3{,}14\cdot 3^2\cdot 10=3{,}14\cdot 90=282{,}6\,(dm^3).$$

Значи, бурето собира 282, 6 *l*.

Задача 2. Бакарна жица долга 50 m има маса 200 *g*. Пресметај го дијаметарот на жицата, ако густината на бакарот е $s=8{,}9\ g/cm^3$.

Решение: Бидејќи масата е $M=Vs$, затоа волуменот на жицата ќе биде:

$$V=\frac{M}{s}=\frac{200}{8{,}9}=\frac{2000}{89}=22{,}47\left(cm^3\right).$$

Од $V=\pi R^2 H$ добиваме дека $R^2=\frac{V}{\pi H}$, $R=\sqrt{\frac{V}{\pi H}}$, т.е.

$$R=\sqrt{\frac{V}{\pi H}}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{V}{H}}=\sqrt{0{,}318\cdot\frac{22{,}47}{5000}}=\sqrt{0{,}318\cdot 0{,}004494}\approx 0{,}0378\,(cm).$$

Значи, дијаметарот на жицата е: $d=2R=2\cdot 0{,}0378=0{,}0756\,(cm)=0{,}756\,(mm)\approx\frac{3}{4}(mm)$.

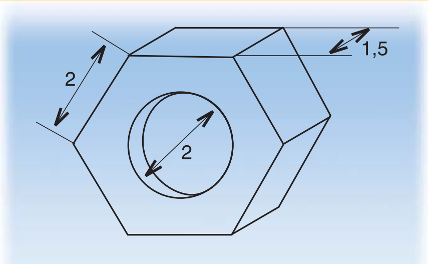
Задача 3. Правоаголник со страни a = 7, 5 cm и b = 3 cm се врти околу страната a. Да се пресмета волуменот на цилиндарот што притоа се добива.

Решение: Страната a ќе биде висина на цилиндарот, а страната b ќе биде радиус на основата. Волуменот на цилиндарот ќе биде:

$$V=\pi b^2 a \approx 3,14\cdot 3^2\cdot 7,5=211,95\approx 212\,(cm^3).$$

задачи

1. Пресметај го волуменот на цилиндар, чиј радиус и висина се:
а) R = 2,6 cm, H = 7,2 cm, б) R = 4 cm, H = 1,2 dm.
2. Пресметај го волуменот на рамностран цилиндар, ако: а) R = 6 cm, б) H = 20 cm.
3. Пресметај колку литри собира еден лонец со дијаметар на отворот 5 dm и висина 5 dm.
4. Еден базен што има форма на цилиндар собира 70,65 m^3 вода. Определи ја длабочината на базенот, ако дијаметарот му е 6 m.
5. Ископан е бунар со дијаметар на отворот 1,5 m и притоа е исфрлено 14,13 m^3 земја. Пресметај ја длабочината на бунарот!
6. Пресметај го волуменот на цилиндар што е висок 5 cm, а периметарот на основата му е 12,56 cm.
7. Колку треба да е висок еден казан, за да собира 125 литри, а да има дијаметар на дното 5 dm?
8. Една цистерна за бензин, што има форма на цилиндар, долга е 7,5 m и има дијаметар на основата 1,6 m. Колку литри собира таа?
9. Една бакарна жица со дијаметар на пресекот 2 mm има маса 280 kg. Определи ја должината на жицата, ако s = 8,9.
10. Цилиндар висок 2 dm има волумен V = 14,13 dm^3. Пресметај ја неговата плоштина.
11. Во полупразен цилиндричен сад со дијаметар на основата 9,2 cm потопуваме еден камен. Определи го волуменот на каменот, ако нивото на водата во садот се покачи за 33 cm.
12. Пресметај ја масата на еден железен детаљ, што е прикажан на цртеж 60. Димензиите се дадени во cm, а s = 7,8.

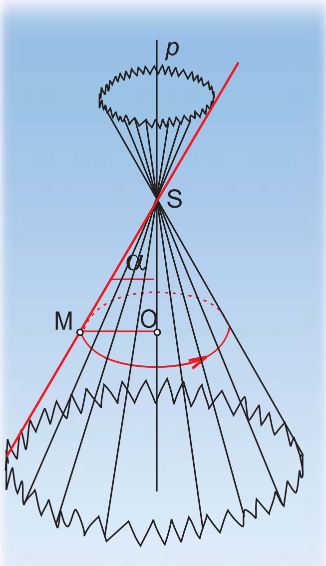


Цртеж 60

Д КОНУС

IV. 20. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ НА КОНУСОТ. ОСКИН ПРЕСЕК

Видовме дека кружната цилиндрична површина е ротациона површина што се добива кога нејзината генератриса е права паралелна на оската на вртењето. Сега ќе се запознаеме со еден друг вид на ротациона површина, чија генератриса е права што ја сече оската на вртењето.

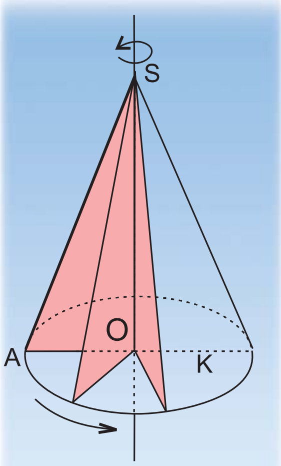


Цртеж 61

Нека p е една произволна неподвижна права што ќе ја земеме за **оска на вртењето**, а s - некоја права што ја сече оската p под остар агол α во некоја точка S (црт. 61). Да замислиме дека правата s се врти (ротира) во просторот околу неподвижната права p, така што постојано ја сече правата p во точката S под ист агол α. При тоа вртење на генератрисата s околу оската p, очигледно е дека нормалата MO, што е спуштена од произволната точка $M \in s$ и $M \notin p$ кон правата p, образува круг со центар O и рамнина нормална на оската p, а точката M образува кружница што го ограничува тој круг.

Ротационата површина, што ја образува генератрисата s при ова вртење, се вика **кружна конусна површина**. Кружната конусна површина исто како и цилиндричната површина е закривена (валчеста) површина. Точката S се вика **врв** на конусната површина.

Да го разгледаме вртењето на еден правоаголен триаголник AOS $(AO \perp SO)$ околу една негова катета, на пример, околу катетата OS (црт. 62). Очигледно е дека: правата OS, околу која се врти правоаголниот триаголник AOS ќе претставува оска на вртењето. Според тоа, сите точки од страната OS остануваат неподвижни. Хипотенузата AS на правоаголниот триаголник, што ја сече косо оската на вртењето, ќе образува површина што е дел од некоја кружна конусна површина, чиј врв е во точката S. Другата катета, пак, AO на триаголникот, бидејќи е нормална на оската на вртењето, ќе образува круг со центар O и радиус $R = \overline{OA}$ (црт. 62).



Цртеж 62

Површината, која е составена од делот на кружната конусна површина со врв S, што е образувана од хипотенузата AS и кругот K$(O, \overline{OA})$ што е образуван од катетата OA (црт. 62) го разбива множеството точки од просторот (што не ѝ припаѓаат) на две области: внатрешна и надворешна. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело, кое го викаме **прав кружен конус**.

Постојат и други видови конуси, но, бидејќи ние ќе разгледаме, само прави кружни конуси, затоа ќе ги викаме само конуси.

Дефиниција: ***Конус*** *се вика тело што е ограничено со дел од една кружна конусна површина со врв S и еден круг.*

Врвот на конусната површина се вика **врв на конусот**, кругот се вика **основа** (или **база**) на конусот, а делот од конусната површина заклучен меѓу врвот и основата - **бочна површина** на конусот.

Радиусот на основата се вика **радиус на конусот**, а отсечката SA која го сврзува врвот S со која и да било точка од кружницата на основата се вика **генератриса** на конусот.

Правата што поминува низ врвот S и центарот на основата се вика **оска на конусот**, а отсечката SO од оската меѓу врвот и центарот на основата - **висина на конусот**.

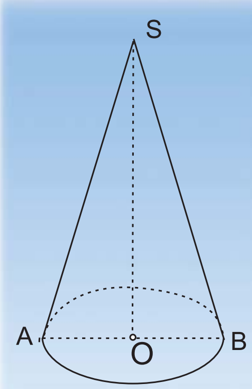
Од начинот на кој настанува ротационото тело-конус, следува дека: **сите генератриси на конусот имаат иста должина**.

1. Правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B се врти околу катетата BC. Што образува при тоа вртење:

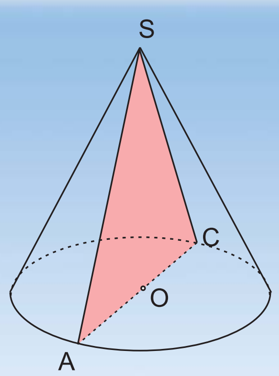
а) темето A, б) страната AB, в) страната AC, г) правоаголниот триаголник ABC?

Должините на радиусот, висината и генератрисата на конусот ќе ги означуваме соодветно со буквите R, H и s. Всушност, тоа се должини на страните на правоаголниот триаголник AOS (црт. 62), па според тоа, ќе го задоволуваат равенството $s^2 = R^2 + H^2$.

Конусот го цртаме како на цртеж 63. Прво, го цртаме рамнокракиот триаголник ABS со основа AB - дијаметарот на конусот и кракот AS - генератриса на конусот (црт. 63). Кружницата на основата на конусот ја цртаме како елипса, при што еден нејзин дел што е невидлив го цртаме со испрекината линија.



Цртеж 63



Цртеж 64

Ако една рамнина што го сече конусот минува низ оската на конусот, тогаш пресекот се вика и **оскин пресек** на конусот. Оскиниот пресек на конусот е рамнокрак триаголник (ΔSAC на црт. 64), чии страни се: две генератриси и дијаметарот на основата на конусот.

Во специјален случај оскиниот пресек на конусот може да биде и рамностран триаголник. Тоа ќе биде, ако генератрисата на конусот е еднаква на дијаметарот на основата, т.е. ако $s = 2R$.

Конус, на кој оскиниот пресек е рамностран триаголник, се вика **рамностран конус**.

задачи

2. Каква фигура е пресекот на еден прав конус со рамнина, која е: а) нормална на оската, б) мине низ оската? Кој од тие пресеци се вика оскин пресек?

3. Наброј неколку примери на предмети кои имаат форма на конус.

4. Определи ги должините на радиусот и генератрисата на конусот што се добива кога рамнокрак триаголник со основа $a = 6$ cm и крак $b = 5$ cm се врти околу симетралата на основата?

5. Дали во прав конус постои точка, што е еднакво оддалечена од секоја точка на кружницата на основата и врвот на конусот? Ако постои, која е таа точка?

6. Дали може должината на генератрисата на конусот да биде еднаква на: а) неговата висина, б) радиусот на основата? Образложи го одговорот!

7. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на конус, чија генератриса и радиус на основата се: а) $s = 13$ cm, R = 5 cm, б) $s = 8$cm, R = 4,8 cm, в) $s = 4{,}5$ cm, R = 2,7 cm.

8. Определи ја плоштината на оскиниот пресек на рамностран конус со радиус на основата R = 6 cm!

9. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на конус чија висина е 15 cm, а генератрисата $s = 17$ cm.

10. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус, чија висина е 9,6 cm, изнесува 69,12 cm^2. Определи го радиусот и генератрисата на конусот!

11. Одреди ја плоштината на оскиниот пресек на конус, чија генератриса $s = 6$ cm е наведната спрема рамнината на основата под агол а) 60°, б) 45°, в) 30°.

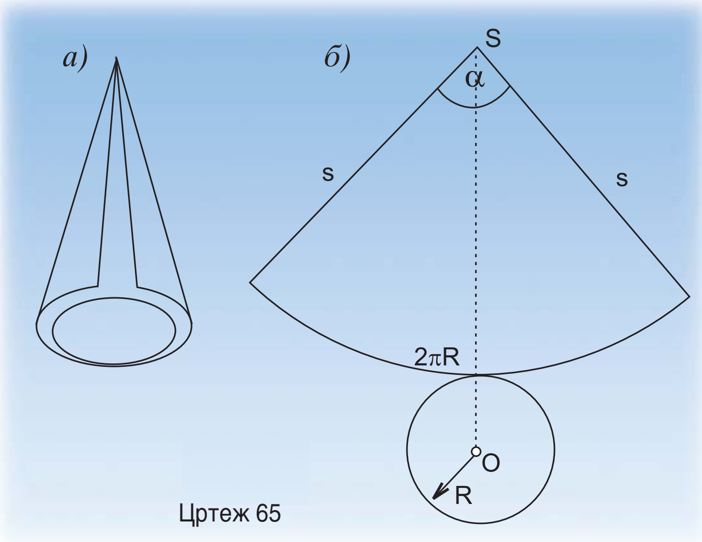
12. Ако бочната површина на еден конус ја исечеме долж една генератриса, тогаш каква фигура ќе добиеме?

IV.21. МРЕЖА НА КОНУС

Да земеме еден конус од картон или ламарина, па да го изрежеме по кружницата на основата и по една генератриса, како што тоа е покажано на цртеж 65 а. Ако потоа основата и бочната површина на конусот ги развиеме, така што да можеме нив да ги поставиме да лежат во една рамнина, ќе ја добиеме мрежата на конусот (црт. 65 б).

Забележуваме дека, бочната површина на конусот се развива во еден кружен исечок (сектор) чиј радиус е еднаков на генератрисата (s) на конусот, а должината на лакот - на должината на кружницата на основата (2πR). Според тоа, мрежата на конусот се состои од еден круг и еден кружен исечок (црт. 65 б).

Задача: Да се нацрта мрежата на конус, чиј радиус на основата е R = 1,2 cm, а генератрисата $s = 4$ cm.



Цртеж 65

Решение: Прво, ќе ја нацртаме развиената бочна површина на конусот, т.е. кружниот исечок A_1A_2S, чиј радиус е еднаков на $s = 4$ cm, а должината на лакот му е еднаква со должината на кружницата (2π R) на основата на конусот. Но, за да го нацртаме тој кружен исечок, потребно е претходно да го одредиме неговиот припаден централен агол α.

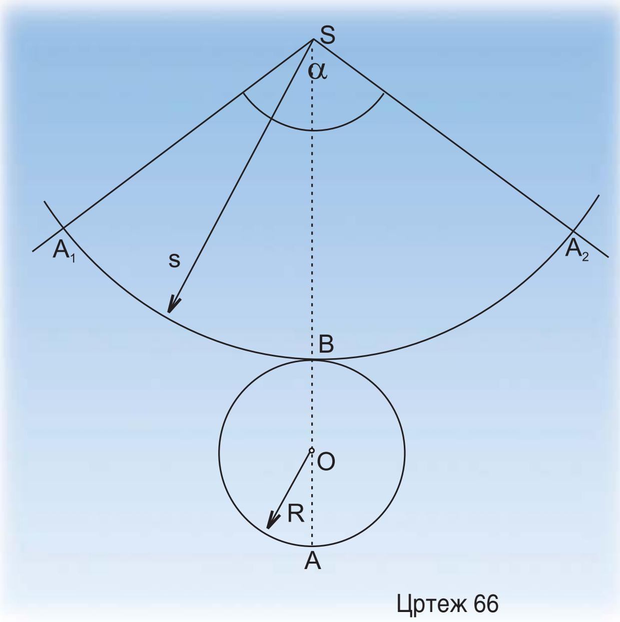
Познато ви е дека должината на кружниот лак ја пресметуваме според формулата $l = \dfrac{\pi R\alpha}{180}$, каде што R е радиус на кружницата чиј дел е тој лак. Во овој случај, кај нашиот кружен исечок, што сакаме да го нацртаме, радиус е генератрисата s на конусот, а должината, пак, на лакот треба да биде еднаква уште и со периметарот на основата на конусот, т.е. треба да е 2π R.

ртеж 43

Според тоа, треба да постои односот $\dfrac{\pi s\alpha}{180} = 2\pi R$ од каде што бараниот централен агол на нашиот кружен исечок ќе биде:

$$\alpha = \frac{360° R}{s} = \frac{360° \cdot 1,2}{4} = 108°.$$

Сега, со помош на агломер, го цртаме централниот агол $\alpha = \measuredangle A_1SA_2 = 108°$, па околу неговото теме S опишуваме кружен лак со радиус $s = 4$ cm (црт. 66). Така го добиваме кружниот исечок A_1A_2S. Потоа кој и да било радиус на кружниот исечок го продолжуваме (надвор од лакот A_1A_2) за отсечката BO, која е еднаква на радиусот на конусот R = 1,2 cm. На крајот од точката O опишуваме кружница со радиус на конусот. Така ја добиваме мрежата на дадениот конус.



Цртеж 66

Наместо генератрисата може да биде дадена висината на конусот. Во тој случај, генератрисата s на конусот ја определуваме конструктивно, како хипотенуза на правоаголниот триаголник, чија една катета е радиусот на основата (R), а другата катета е висината (H) на конусот.

Ако сакаме да направиме модел на конус од картон, тогаш, прво, ја цртаме неговата мрежа на парче картон, а потоа ја сечеме. Кога кружниот исечок ќе го свиткаме така што да стане бочна површина на конусот, а кругот да го преклопиме ќе го добиеме бараниот модел на конусот.

задачи

1. Нацртај ја мрежата на конус, чии димензии се:
а) R = 1,4 cm, s = 3,5 cm, б) R = 3 cm и H = 4 cm.
2. Нацртај ја мрежата на рамностран конус, ако е: а) R = 4, 2 cm, б) s = 7 cm. Покажи дека развиената бочна површина на рамностраниот конус е полукруг со радиус s!
3. Нацртај мрежа на полуконус (тело што се добива кога конусот се преполови со еден негов оскин пресек), ако е R = 2,7 cm и s = 7 cm. Потоа направи модел на полуконусот!
4. Колкав централен агол има кружниот исечок, што се добива со развивање на бочната површина на конус со радиус 3 dm и генератриса 1 dm.
5. Колкав централен агол има кружниот исечок, што се добива со развивање на бочната површина на конус со радиус 6 cm и висина 8 cm.
6. Кружниот исечок, чиј радиус е 6 cm, има централен агол 150°. Тој кружен исечок е свиткан во бочна површина на конус. Одреди го радиусот на добиениот конус?
7. Полукруг со радиус 7,2 cm е свиткан во бочна површина на конус.
Колкав е радиусот на основата на тој конус?
8. Висината на еден конус е еднаква на радиусот на основата на конусот.
Каков триаголник е оскиниот пресек на тој конус?
9. Во кои случаи, аголот при врвот на оскиниот пресек на еден прав конус ќе биде:
а) остар, б) прав, в) тап?
10. Колкава е плоштината на кружен исечок со радиус r и должина l на соодветниот лак?

IV.22. ПЛОШТИНА НА КОНУС

Како што видовме, површината (границата) на конусот се состои од една основа (круг) и една кружна конусна површина - бочна површина на конусот. Според тоа:

Плоштината на конусот е еднаква на збирот на плоштината на основата и плоштината на неговата бочна површина, т.е.

$$\mathbf{P = B + M,}$$

каде што B е плоштина на основата, а M - плоштина на бочната површина на конусот.

Основата на конусот е круг, па затоа $B = \pi R^2$.

Бочната површина на конусот е крива површина, но кога таа ќе се развие во рамнина, од неа се добива еден кружен исечок (сектор), чиј радиус е еднаков на генератрисата (s) на конусот, а должината на лакот - на должината на кружницата ($2\pi R$) на основата на конусот.

Познато ни е дека, плоштината на кружен исечок е еднаква на полупроизводот од должината на кружниот лак и неговиот радиус. Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Бочната плоштина на конусот е еднаква на полупроизводот од должината на кружницата на основата и должината на неговата генератриса:*

$$M = \frac{2\pi R \cdot s}{2}, \text{ т.е. } M = \pi R s.$$

Оттука следува дека, формулата за плоштина на конусот, ќе гласи:

$$P = B + M = \pi R^2 + \pi R s, \text{ односно } \mathbf{P = \pi R\,(R + s)}.$$

Кај рамностраниот конус, бидејќи е $s = 2R$ формулата за неговата плоштина ќе гласи:

$P = \pi R\,(R + 2R) = \pi R \cdot 3R = 3\pi R^2$.

Задача 1. Покривот на една кула има форма на конус со генератриса $s = 4{,}5$ m и дијаметар на основата $d = 6$ m. Колку метри квадратни ламарина е потребно за покривање на кулата?

Решение: Тука доаѓа предвид само плоштината на бочната површина на конусот, која ја пресметуваме според формулата: $M = \pi R s \approx 3{,}14 \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 42{,}39$.

Значи, за покривање на кулата потребно е 42,39 m^2 ламарина.

Задача 2. Правоаголен триаголник ABC со катети $a = 4$ cm, $b = 7{,}5$ cm се врти околу катетата b. Да се пресмета плоштината на добиеното ротационо тело.

Решение: При тоа вртење ќе се добие конус со радиус $R = a = 4$ cm и висина $H = b = 7{,}5$ cm. За пресметување на плоштината на добиениот конус потребно е да ја знаеме неговата генератриса.

Генератрисата на конусот е еднаква на хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC, а ќе ја определиме со примена на Питагоровата теорема:

$$s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{4^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{16 + 56{,}25} = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5\,(\text{cm}).$$

Потоа, со замена на $R = 4$ cm и $s = 8{,}5$ cm во формулата за плоштина на конусот, добиваме:

$$P = \pi R\,(R + s) \approx 3{,}14 \cdot 4 \cdot (4 + 8{,}5) = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 12{,}5 = 3{,}14 \cdot 50 = 157\,(\text{cm}^2).$$

задачи

1. Пресметај ја плоштината на конус, чиј радиус и генератриса се:
а) $R = 3{,}5$ cm, $s = 1$ dm, б) $R = 8$ cm, $s = 2$ dm.

2. Пресметај ја плоштината на конус, ако е познато:
а) $R = 3{,}5$ cm, $H = 12$ cm, б) $R = H = 5$ cm, в) $s = 18$ cm, $H = \dfrac{2s}{3}$.

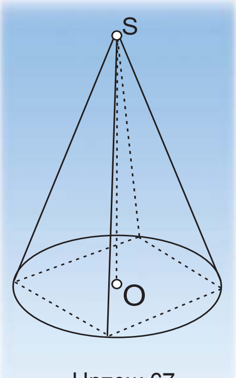
3. Кружен исечок, чиј радиус е 1,2 cm и централен агол 150°, е свиткан во бочна површина на конус. Пресметај ја плоштината и висината на тој конус.

4. Пресметај ја плоштината на рамностран конус, ако е: а) $s = 7$ cm, б) R = 4 cm.
5. Полукруг со радиус 8 cm е свиткан во бочна површина на конус. Пресметај ја плоштината на тој конус!
6. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус е 192 cm^2, а висината му е 16 cm. Пресметај ја плоштината на конусот!
7. Еден столб во форма на цилиндар со дијаметар на основата 9 dm и висина 2,5 m, завршува на врвот со рамностран конус, што има основа како и цилиндарот. Пресметај ја плоштината на тој столб!
8. Одреди го односот од плоштината на основата (B) и:
а) бочната плоштината (M), б) плоштината (P) на еден рамностран конус.
9. Плоштината на основата на еден рамностран конус е B = 157 cm^2. Одреди ја бочната плоштина и плоштината на тој конус.
10. Плоштината на еден рамностран конус е P = 129 dm^2. Определи го неговиот радиус.
11. Рамнокрак триаголник со основа 12 cm и висина 8 cm се врти околу својата основа. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело!
12. Квадрат со страна 6 cm се врти околу едната своја дијагонала. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело!

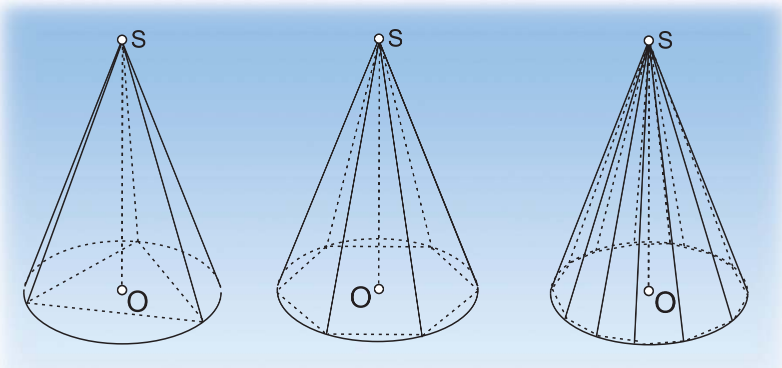
IV.23. ВОЛУМЕН НА КОНУС

За една пирамида велиме дека е ***вйишана*** во даден конус, ако нејзината основа е многуаголник - впишан во кружницата на основата на конусот, а врвот и се совпаѓа со врвот на конусот (црт. 67). Очигледно е дека, бочните рабови на пирамидата, што е впишана во конус, се генератриси на конусот.

За една пирамида, пак, велиме дека е ***ойишана*** околу даден конус, ако нејзината основа е многуаголник - опишан околу кружницата на основата на конусот, а врвот се совпаѓа со врвот на конусот. Во тој случај, бочните ѕидови на опишаната пирамида ќе ја допираат бочната површина на конусот.



Цртеж 67



Цртеж 68

На цртеж 68 претставени се три складни конуси, во кои се впишани по една правилна пирамида и тоа во првиот, е впишана правилна триаголна, во вториот - правилна шестаголна, а во третиот - правилна дванаесетаголна пирамида.

Ако во даден конус (или во складни конуси) впишуваме правилни пирамиди со поголем и с поголем број страни (ѕидови) (црт. 68), очигледно е дека, плоштините на основите на тие пирамиди ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до плоштината на основата на конусот, а, исто така, и волумените на така впишаните правилни пирамиди ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до волуменот на дадениот конус.

Тоа н упатува на заклучок, дека за пресметување на волуменот на конусот можеме да ја ползуваме истата формула со која го пресметуваме и волумен на пирамидите $V=\frac{BH}{3}$.

Според тоа ќе важи следнава:

Теорема: *Волуменот на конусот е еднаков на* $\frac{1}{3}$ *од производот на плоштината на неговата основа и должината на висината, т.е.*

$$V=\frac{BH}{3}\text{, но бидејќи } B=\pi R^2\text{, затоа } \boldsymbol{V=\frac{\pi R^2 H}{3}}.$$

За определување на волуменот на рамностран конус ($s = 2R$) прво потребно е да ја определиме неговата висина. Со примена на Питагоровата теорема имаме:

$$H^2=(2R)^2-R^2=4R^2-R^2=3R^2\text{, а оттука } H=\sqrt{3R^2}=R\sqrt{3}.$$

Според тоа, формулата за волумен на рамностраниот конус гласи:

$$V=\frac{\pi R^2 H}{3}=\frac{\pi R^2 R\sqrt{3}}{3}\text{, т.е. } \boldsymbol{V=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}}.$$

Задача 1. Еден куп песок има форма на конус со генератриса $s = 2{,}5$ m и периметар на основата $L = 12{,}56$ m. Да се определи волуменот на песокот?

Решение: Од познатиот периметар на основата $L = 2\pi R$, прво, го наоѓаме радиусот:

$$R=\frac{L}{2\pi}\approx\frac{12{,}56}{2\cdot 3{,}14}=\frac{12{,}56}{6{,}28}=2(\text{m}),$$

а потоа со примена на Питагоровата теорема - висината на конусот:

$$H=\sqrt{s^2-R^2}=\sqrt{2{,}5^2-2^2}=\sqrt{6{,}25-4}=\sqrt{2{,}25}=1{,}5(\text{m}).$$

Волуменот на песокот ќе биде:

$$V=\frac{\pi R^2 H}{3}\approx\frac{3{,}14\cdot 2^2\cdot 1{,}5}{3}=3{,}14\cdot 4\cdot 0{,}5=3{,}14\cdot 2=6{,}28\text{, т.е. } V\approx 6{,}28\text{ m}^3.$$

Задача 2. Колкава маса има оловен рамностран конус со дијаметар $d = 8$ cm, кога се знае дека густината на оловото е 11,4?

Решение: Прво го пресметуваме волуменот на рамностраниот конус:

$$V=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}\approx\frac{3{,}14\cdot 4^3\cdot 1{,}73}{3}=115{,}8869\text{, т.е } V\approx 115{,}9\text{ cm}^3$$

Масата на конусот ќе биде: $M=Vs=115{,}9\cdot 11{,}4=1321{,}26$ (g), т.е. $M\approx 1{,}32$ kg.

задачи

1. Пресметај го волуменот на конус, ако се дадени:
а) $r = 7$ cm, H = 6 cm, б) $r = 3$ cm, $s = 5$ cm, в) H = 3 dm, $s = 3,4$ dm, г) $s = 2$ dm, H = R.

2. Пресметај го волуменот на рамностран конус, ако е дадено:
а) R = 6 cm, б) $s = 14$ cm, в) H = 5 cm!

3. Висината на еден конус е 4 m, а периметарот на основата му е 15,7 m.
Пресметај го неговиот волумен!

4. Одреди колку cm^3 течност собира една чаша во форма на конус со висина 7 cm и дијаметар на отворот 9 cm!

5. Волуменот на конусот $V = 10\pi$ cm^3, а висината му е H = 12 cm.
Одреди го радиусот на конусот!

6. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус е 43 cm^2, а радиусот му е 4,3 cm. Пресметај го волуменот на тој конус!

7. Едно парче ламарина, во форма на кружен исечок со радиус 6 dm и централен агол 216° е свиткано во конус. Одреди го волуменот на добиениот конус!

8. Да се пресмета волуменот на конус, ако плоштината на бочната површина му е $M = 15\pi$ cm^2, а плоштината на основата $B = 9\pi$ cm^2.

9. Еден рамностран цилиндар и еден рамностран конус се слепени со своите складни основи, чиј дијаметар е $d = 6$ cm. Да се одреди плоштината и волуменот на така комбинираното тело.

10. Рамнокрак триаголник со основа $a = 2,8$ dm и крак $b = 5$ dm ротира околу висината. Одреди го волуменот на добиеното тело!

11. Квадрат со дијагонала $d = 8$ cm ротира околу една своја дијагонала. Да се пресметаат плоштината и волуменот на добиеното тело!

12. Ромб со страна $a = 5$ cm и висина $h = 4$ cm ротира околу една своја страна. Да се одредат плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

Ѓ ТОПКА

IV.24. ПОИМ ЗА СФЕРА И ТОПКА. ЕЛЕМЕНТИ

Нека *O* е произволна точка од просторот и *R* кој и да било позитивен реален број.

Дефиниција 1. *Множеството од сите точки од просторот, чиешто растојание од дадена фиксна точка O е еднакво на R, го викаме* ***сфера*** *и го означуваме со S (O, R).*

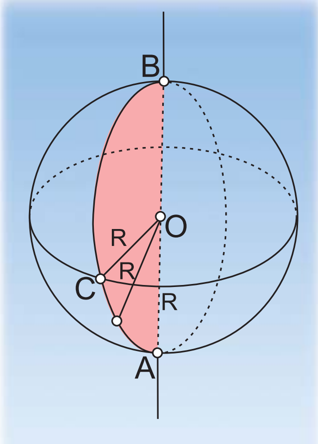
Точката O ја викаме **центар** на сферата, а бројот R **радиус** на сферата. Отсечката што го соединува центарот на сферата со која и да било точка M од неа, исто така, ја викаме радиус на сферата, бидејќи $\overline{OM} = R$. Отсечката, пак, која соединува две произволни точки од сферата, се вика нејзина **тетива**. А тетива на сферата што минува и низ нејзиниот центар се вика дијаметар на сферата. Очигледно е дека должината на секој **дијаметар** е еднаква на два радиуса, т.е. $d = 2R$.

Крајните точки на кој и да било дијаметар ги викаме **дијаметрално спротивни точки** на сферата.

Потсетете се на дефиницијата на кружницата! Во што е разликата меѓу кружницата и сферата? Во што се разликуваат дефинициите на тие две фигури (множества од точки)?

Знаете дека кружницата е крива затворена линија во рамнината, а каква фигура е сферата?

Замислете си дека една полукружница со центар O и радиус R ротира околу својот дијаметар AB (црт. 69). Очигледно е дека при тоа вртење секоја точка M од образуваната ротациона површина е на растојание R од центарот на полукружницата. Значи, таа ротациона површина е една сфера S(O, R).



Цртеж 69

Според тоа, сферата можеме да ја разгледуваме како ротациона површина што се добива при вртењето на една полукружница околу својот дијаметар.

Очигледно е дека сферата S(O, R) го разбива множеството точки од просторот (што не и припаѓаат) на две области: *внатрешна* и *надворешна*. Унијата на сферата и нејзината внатрешна област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно тело, кое го викаме **топка**.

Значи: **Топка се вика телото што е ограничено со една сфера**.

Потсетете се на дефиницијата на круг! Топката, слично на дефиницијата на кругот, обично ја дефинираме вака:

Дефиниција: 2. ***Топка*** *е множество на сите точки од просторот, чиешто растојание од една фиксна точка O не е поголемо од R и ја означуваме со T [O, R].*

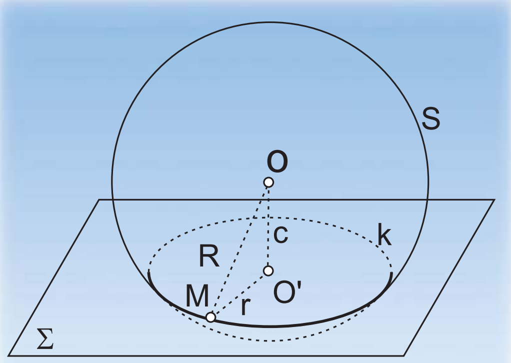
Можеме да забележиме дека сферата $S(O, R)$ е подмножество од топката $T\,[O, R]$ и претставува негова граница.

Центарот, радиусот, тетивата и дијаметарот на сферата $S(O, R)$, исто така, се викаат: ***центар***, ***радиус***, ***тетива*** и ***дијаметар*** и на топката $T\,[O,R]$.

Низ центарот O на една топка $T[O, R]$ да поставиме рамнина Σ. Пресекот $\Sigma \cap T[O,R]$ е рамнинска фигура која се состои од сите точки, чие растојание до точката $O \in \Sigma$ не е поголемо од R. Затоа, овој пресек ќе претставува круг со центар во O и радиус R и се нарекува **голем круг**.

Значи, *голем круг е пресекот на една топка и рамнина, која минува низ центарот на топката.*

Пресекот на една сфера $S(O, R)$ со произволна рамнина, која минува низ центарот на сферата, е кружница со центар во O и радиус R и се нарекува **голема кружница**.



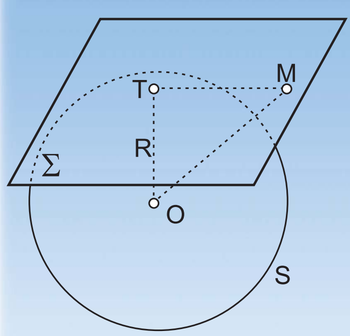
Цртеж 70

Ако, пак, сферата $S(O,R)$ ја пресечеме со рамнина Σ за која растојанието од O до Σ е c, при што $0 < c < R$, (црт 70), ќе покажеме дека пресекот ќе биде кружница, но со помал радиус. Нека O' е ортогонална проекција на точката O врз рамнината Σ. Користејќи дека $\overline{OM} = R$ и $\overline{OO'} = c$ (црт. 70), од правоаголниот триаголник OO'M добиваме

$$r = \overline{MO'} = \sqrt{\overline{OM}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{R^2 - c^2} < R$$

и r ќе биде радиус на бараната кружница. Оваа кружница се нарекува **мала кружница**. Ако наместо пресекот на сферата S(O, R) и рамнината Σ бараме пресек на топката T(O, R) и рамнината Σ, бараниот пресек ќе биде круг со истиот радиус r со истиот центар O'. Овој круг се нарекува **мал круг**.

Ако бараме пресек на топка T[O,R] или сфера S(O, R) со рамнината Σ при што точката O се наоѓа на растојание R до Σ, тогаш пресекот ќе биде една точка T (црт.71). Во тој случај за Σ велиме дека е **тангентна рамнина** за топката T[O, R], односно сферата S(O, R), а T се нарекува **допирна точка**. Ако, пак, растојанието од точката O до рамнината Σ е поголемо од R, тогаш рамнината Σ и топката T[O, R], односно сферата S(O, R) немаат заеднички точки.



Цртеж 71

На пример, ако Земјата како тело ја третираме како топка, тогаш екваторот претставува голема кружница. Исто така, произволно избран меридијан е полукружница како дел од голема кружница. Секоја паралела, различна од екваторот претставува мала кружница.

задачи

1. Каква фигура е множеството точки во просторот, кои од дадена точка T се оддалечени 4,5 cm?
2. Каква фигура претставува пресекот на топка и рамнина?
3. Топка со радиус 3,4 cm е пресечена со рамнина, која е на растојание 1,6 cm од центарот. Одреди ги радиусот, периметарот и плоштината на добиениот пресек!
4. Една топка е пресечена со рамнина, која е на растојание 3 cm од центарот. Определи го радиусот на топката, ако добиениот пресек има плоштина 50,24 cm^2.
5. Радиусот на една топка е 1 dm. Пресметај ги периметарот и плоштината на пресекот, што го преполовува радиусот на топката?
6. Еден град се наоѓа на 45° северна географска ширина. Одреди ја должината на паралелата на која се наоѓа тој град, ако знаеме дека радиусот на Земјата е 6370 km.
7. Пресметај го радиусот на топка, ако периметарот на големиот круг на топката е 18,84 cm.
8. Пресметај го радиусот на топка, ако плоштината на еден нејзин голем круг е 78,5 cm^2.
9. Низ кои две точки од сферата можат да се повлечат повеќе големи кружници?
10. Три паралелни рамнини го расекуваат дијаметарот на топката на четири еднакви делови. Одреди ги плоштините на добиените пресеци на топката со тие рамнини, ако топката има радиус R= 12 cm.

IV.25. ПЛОШТИНА НА СФЕРА

Сферата е крива површина исто како и бочните површини на цилиндарот и конусот. Видовме дека и цилиндричната и конусната површина успеавме да ги „развиеме" во една рамнина, т.е. да ги направиме рамни. Меѓутоа, сферата, за разлика од нив, по никаков начин не можеме да ја „развиеме" (со сите свои делови да ја поставиме) во една рамнина. Затоа, немаме можности да ја добиеме мрежата на сферата и од неа да согледаме како ќе ја пресметуваме нејзината плоштина.

За плоштината на сферата важи следната теорема, која ќе ја прифатиме без доказ.

T

Теорема: *Плоштината на сферата е еднаква на четирикратната плоштина на нејзиниот голем круг, т.е.*

$$P = 4 \cdot \pi R^2, \qquad (1)$$

каде што R е радиус на сферата, односно топката.

Ако не е позната плоштината на сферата, а треба да се определи нејзиниот радиус, тогаш од формулата (1) лесно наоѓаме дека:

$$R^2 = \frac{P}{4\pi}\text{, односно } R = \sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{P}{4}}\text{, каде што } \frac{1}{\pi} \approx 0,318.$$

Последица. *Плоштините на две сфери се однесуваат како квадратите на нивните радиуси:*

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4\pi R_1^{\ 2}}{4\pi R_2^{\ 2}} = \frac{R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2}}.$$

Задача 1. Околу коцка со раб $a = 6$ cm опишана е сфера. Да се пресмета плоштината на таа сфера.

Решение. Бидејќи сите темиња на коцката мораат да лежат и на опишаната сфера околу неа, затоа центарот на сферата ќе се наоѓа во онаа точка од коцката, која е еднакво оддалечена од сите нејзини темиња. Таа точка е пресекот на дијагоналите на коцката.

Според тоа, опишаната сфера околу коцката ќе има радиус еднаков на половина од должината на дијагоналата на коцката, т.е.

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,(\text{cm}).$$

Бараната плоштина ќе биде:

$$P = 4\pi R^2 = 4\pi\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 4\pi\cdot 27 = 108\pi\left(\text{cm}^2\right).$$

Задача 2. Периметарот на големиот круг на една топка е 9π dm. Да се пресмета плоштината на топката.

Решение: Од периметарот на големиот круг можеме да го одредиме радиусот на топката, т.е. од $L = 2\pi R$ ќе имаме:

$$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{9\pi}{2\pi} = 4,5\,(\text{dm}).$$

Бараната плоштина на топката, тогаш ќе биде:

$$P = 4\pi R^2 = 4\pi\cdot 4,5^2 = 4\pi\cdot 20,25 = 81\pi \approx 254,34\,(\text{dm}^2).$$

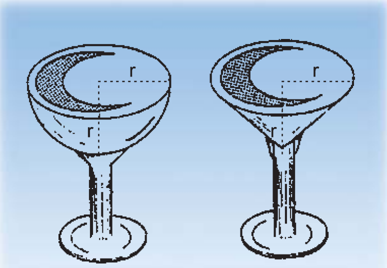
задачи

1. Пресметај ја плоштината на топка, чиј радиус е: а) 3,5 cm, б) 1 dm, в) 14 cm.
2. Плоштината на топка е 452,16 cm^2. Одреди ја плоштината на големиот круг на топката!
3. Плоштината на големиот круг на една топка е 9π cm^2. Пресметај ја плоштината на топката!
4. Пресметај ја плоштината на површината на Земјата, кога знаеш дека должината на екваторот е 40 000 km.
5. Како се однесуваат плоштините на две сфери, чии радиуси се: $R_1 = 2$ cm и $R_2 = 3$ cm?
6. Како се однесуваат радиусите на две сфери, ако нивните плоштини се однесуваат: а) 1 : 4, б) 4 : 9, в) 4 : 25?
7. Колку пати треба да се зголеми должината на дијаметарот на сферата, така што нејзината плоштина да се зголеми: а) 4 пати, б) 9 пати, в) 25 пати, г) 100 пати?
8. Радиусите на две сфери се 6 cm и 5 cm. Определи го радиусот на сферата чија плоштина е еднаква на: а) збирот, б) разликата од плоштините на дадените сфери.
9. Куполата на една ѕвездарница има форма на полусфера со дијаметар 15 m. Колку m^2 бакарна ламарина е потребно за покривање на таа купола, ако на отпадоци се смета, уште 18%?
10. Радиусот на Марс, приближно, е еднаков на половина од радиусот на Земјата, а радиусот на Јупитер е 11 пати поголем од радиусот на Земјата. Колку пати плоштината на површината на Јупитер е поголема од плоштината на: а) Земјата, б) Марс?
11. Дадена е коцка со раб $a = 9$ cm. Одреди ја плоштината на топка, што е: а) впишана во коцката, б) опишана околу коцката.
12. Докажи дека: рамностран конус и полутопка, кои имаат складни основи, имаат еднакви плоштини!

IV.26. ВОЛУМЕН НА ТОПКА

Да земеме две чаши од кои едната има форма на полутопка, а другата форма на конус. Чашите нека имаат еднакви радиуси на отворите, а длабочините нека им бидат исто колку што е радиусот на отворите (црт. 72)

Ако имаме две такви чаши, тогаш лесно се уверуваме дека првата полутопчеста чаша се наполнува точно со две полни конусни чаши вода. Тоа ни покажува дека волуменот на полутопката е два пати поголем од волуменот на конусот, што има радиус и висина еднакви на радиусот на полутопката; а волуменот на целата топка ќе биде четири пати поголем од волуменот на тој конус.



Цртеж 72

Бидејќи волуменот на конус, чија висина е H = R е еднаков на:

$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot R}{3} = \frac{\pi R^3}{3}$, затоа волуменот на топката, ќе биде: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

Теорема 1: *Волуменот на топка со радиус* R *е еднаков на* $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. (1)

Забележуваме дека волуменот на топката може да се запише во облик $V = \frac{R}{3} \cdot P$ каде $P=4\pi R^2$ е плоштина на топката.

Задача 1. Да се одреди масата на едно ѓуле (железна топка), чиј дијаметар е 14 cm, ако $s = 7{,}8$.

Решение: Прво, ќе го пресметаме волуменот на ѓулето:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \approx \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 7^3}{3} = 4{,}19 \cdot 343 = 1437{,}17 \text{ т.е. } V \approx 1437 \text{ cm}^3.$$

Масата на ѓулето ќе биде: $M = Vs = 1437 \cdot 7{,}8 = 11208{,}6 \text{ (g)} \approx 11{,}2 \text{ (kg)}$.

Задача 2. Одреди го волуменот на топка, чија плоштина е 100π cm^2.

Решение: Од формулата $P = 4\pi R^2$ ќе го одредиме радиусот на топката:

$$R = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100\pi}{4\pi}} = \sqrt{25} = 5(\text{cm}).$$

Бараниот волумен на топката, кога се познати нејзината плоштина и радиус, ќе биде:

$$V = P \cdot \frac{R}{3} = 100\pi \cdot \frac{5}{3} \approx 523{,}3(\text{cm}^3).$$

задачи

1. Пресметај го волуменот на топка, чиј радиус е: а) 2,5 cm, б) 4 cm, в)12 cm.
2. Да се пресмета плоштината и волуменот на топка, чиј дијаметар е:
   а) 9 cm, б) 2,6 dm, в) 3 cm.
3. Колку метри кубни стаклена маса е потребно за да се направат 500 стаклени лустери во форма на топка, со внатрешен дијаметар 32 cm, а надворешен дијаметар 33,4 cm?

4. Имаме две чаши, од кои едната има форма на полутопка со радиус R, а другата форма на конус со радиус на основата R и висина 2R. Која чаша собира повеќе?

5. Во една коцка со раб $a = 7$ cm е впишана топка. Пресметај ја плоштината и волуменот на таа топка?

6. Шуплива метална топка со надворешен дијаметар 4 dm и дебелина на ѕидот 5 cm, треба да се претопи во масивна топка. Одреди го радиусот на добиената топка!

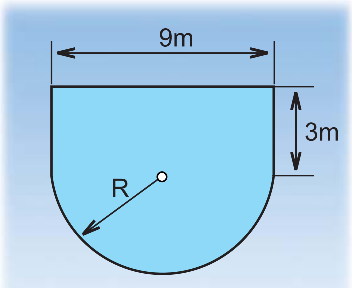
7. Радиусите на две метални топки се: 7,5 cm и 4,5 cm. Одреди го радиусот на топката што се добива кога двете топки ќе се претопат во една. (Користи дека $8^3 = 512 \approx 513$).

8. Пресметај го волуменот на атмосферата, ако знаеш дека таа е дебела 200 km, а радиусот на Земјата е 6370 km.

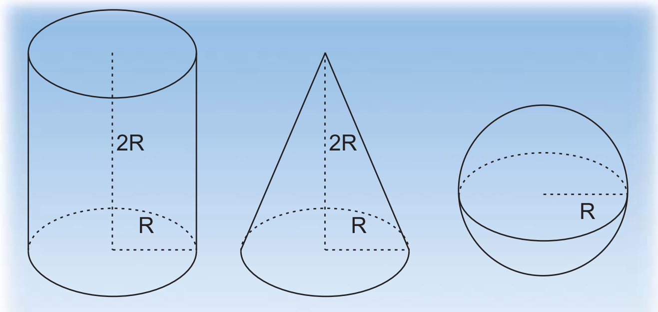
9. Една масивна топка од бакар има маса 10 kg. Одреди го радиусот на топката, ако густината на бакарот е 8,9.

10. Три метални топки со радиус 3 cm, 4 cm и 5 cm треба да се претопат во една топка. Одреди го радиусот на новата топка! (Користи дека $6^3 = 216$).

11. Еден резервоар за вода се состои од полутопка со радиус 4,5 m и еден цилиндар со ист толкав радиус на основата (црт. 73). Колку hl вода собира тој резервоар, ако висината на цилиндричниот дел од него изнесува H = 3 m?



Цртеж 73



Цртеж 74

12. На цртеж 74 нацртани се: цилиндар, конус и топка. Радиусите на основите на цилиндарот и конусот се еднакви на радиусот на топката, а висините на цилиндарот и конусот се еднакви на дијаметарот на топката. Покажи дека волуменот на цилиндарот е еднаков на збирот од волумените на конусот и топката.

задачи ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - IV

1. Колку прави определуваат 4 различни точки A, B, C и D такви што A, B и C се колинеарни, а D не е колинеарна со нив?

2. Колку рамнини се определени со 4 некомпланарни точки во просторот?

3. Правите a, b и c две по две се сечат. Ако правите b и c лежат во рамнината Σ, дали и правата a лежи во рамнината Σ?

4. Рамнината е определена со две различни паралелни прави. Докажи.

5. Докажи дека, ако правата p е паралелна со некоја права q која лежи во рамнината Σ, тогаш $p \| \Sigma$.

6. Пресметај ја должината $\overline{AB}$, ако е познато дека $\overline{A'B'} = 7\text{cm}$, $\overline{AA'} = 4\text{cm}$ и $\overline{BB'} = 8\text{cm}$, каде A' и B' се ортогоналните проекции на точките A и B врз рамнината Σ.

7. Плоштината на бочната површина на една правилна триаголна призма изнесува 390 cm^2, а нејзината висина е 2 dm. Определи го волуменот на призмата.

8. Права призма со висина 10 cm за основа има ромб, чија страна е a = 5 cm и една дијагонала d_1 = 6 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на таа призма.

9. Може ли метална прачка, долга 16, 5 cm да се смести во кутија која има форма на квадар чии димензии се: 12 cm, 9 cm и 8 cm?

10. Права призма со висина 8, 5 cm за основа има рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза од 4 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата.

11. Кибритна кутија има димензии 5 cm, 3 cm и 1,5 cm. Колку такви кутии треба да се сложат во најмал пакет што ќе има форма на коцка? Пресметај го волуменот на таков пакет.

12. Правилен тетраедар има плоштина 62,28 cm^2. Пресметај ги неговиот раб и висината.

13. Права триаголна пирамида со бочен раб s = 9 cm за основа има рамнокрак триаголник, чија основа е a = 5 cm и крак b = 6,5 cm. Пресметај ја плоштината на таа пирамида.

14. Висината на една правилна триаголна пирамида е еднаква на половината од нејзиниот основен раб. Пресметај ја плоштината на пирамидата, ако a = 6 cm.

15. Правилна четириаголна пирамида со основен раб a = 10 cm за дијагонален пресек има рамностран триаголник. Пресметај ги плоштината и волуменот на таа пирамида.

16. Радиусот на опишаната кружница околу основата на правилна триаголна пирамида е R = 3 cm, а висината на пирамидата е H = 4 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

17. Колку литри вода истекува во 1 секунда од една водоводна цевка со дијаметар на отворот 7 cm, ако брзината на течењето на водата е 3 m/s ?

18. Пресметај ја плоштината на еден цилиндар, ако плоштината на основата изнесува 50, 24 cm^2, а плоштината на оскиниот пресек е 88 cm^2.

19. Дијагоналата на оскиниот пресек на еден цилиндар, што е висок 8 cm, еднаква е на 10 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на цилиндарот.

20. Резервоарот за бензин на еден автомобил има форма на цилиндар со внатрешен дијаметар 0,3 m и висина 0,6 m. Резервоарот е наполнет $\frac{2}{3}$ од неговата висина. Со тоа количество на бензин дали може автомобилот да измине 180 km пат, ако на 100 km троши 14 l бензин. Ако може, колку литри бензин ќе му останат?

21. Плоштината на бочната површина на еден прав конус изнесува $M = 36\pi$ cm^2, а периметарот на основата му е 9π cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на тој конус.

22. Ромб со дијагонали $d_1 = 6,6$ cm и $d_2 = 4,2$ cm се врти околу дијагоналата d_1. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

23. Плоштината и волуменот на рамностран конус изрази ги како функции од неговата висина.

24. Рамнокрак трапез со основи $a = 13$ cm и $b = 7$ cm се врти околу: а) основата a, б) основата b. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиените тела.

25. Еден рамнокрак правоаголен триаголник со плоштина 18 cm^2 се врти а) околу хипотенузата, б) околу една катета. Пресметај ги плоштините и волумените на добиените ротациони тела.

26. Колку грама злато е потребно за позлатување на 200 еднакви топчиња со дијаметар 2 cm, ако ги покриваме со слој дебел 0,2 mm. Специфичната тежина на златото е $s = 9,4$.

27. Ако оловна топка со радиус 3 cm ја ставиме во цилиндричен сад со вода, чиј радиус на основата е 4 cm, за колку ќе се издигне нивото на водата во садот?

28. Оловна топка со радиус 6 cm треба да се претопи во топченца со радиус 1 cm. Колку такви топченца ќе се добијат?

29. Од бакарна топка со радиус 10 cm истегната е жица со дијаметар 2 mm. Најди ја должината на жицата.

30. Од дрвена коцка со раб $a = 8$ cm изделкана е можно најголема топка. Пресметај колку проценти од материјалот оди во отпадоци.

задачи ЗА САМОКОНТРОЛА - IV

1. Колку прави можат да определуваат четири точки во просторот кои не лежат во иста рамнина?

2. За точките A, B и C во просторот нека важи $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{AC} = 12\text{cm}$ и $\overline{BC} = 7\text{cm}$. Нека A', B' и C' се ортогонални проекции на точките A, B и C врз рамнината Σ. Што може да се каже за точките A', B' и C'?

3. Плоштината на една правилна четириаголна призма, со основен раб a = 2,5 dm, изнесува 92,5 dm^2. Определи ја висината на призмата.

4. Пресметај го волуменот на правилна шестаголна призма со основен раб 3 cm, ако плоштината на поголемиот дијагонален пресек изнесува 72 cm^2.

5. Плоштината на бочната површина на една правилна шестаголна пирамида изнесува M = 168 cm^2. Пресметај ја висината на пирамидата, ако основниот раб ѝ е $a = 6$ cm.

6. Бочните рабови на една правилна триаголна пирамида се заемно нормални и секој од нив е долг по 12 cm. Пресметај ги волуменот и плоштината на пирамидата.

7. Определи ја висината на цилиндар, ако радиусот на основата му е $R = 1{,}5$ dm, а плоштината $P = 61{,}23$ dm^2.

8. Правоаголник со страни a и b се врти еднаш околу страната a, а потоа околу страната b. Одреди го односот од волумените на добиените две ротациони тела.

9. Висината на конусот е 12 cm, а аголот при врвот на неговиот оскин пресек е 120°. Определи ја плоштината на конусот.

10. Волуменот на еден конус е $V = 27\pi$ cm^3, а радиусот му е $R = 3$ cm. Определи ја висината на тој конус.

11. Пресметај ја плоштината на површината на Месечината, кога знаеш дека нејзиниот радиус е 1740 km.

12. Како се однесуваат волумените на две топки, чии радиуси се R_1 и R_2?

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

ТЕМА I. СЛИЧНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИ

I. **1** стр. 6

2. а) 2, б) 1, в) 8, г) 4. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** а) 3: 2, б) 3, в) 25 : 3. **5.** а) $x = 15$, $y = 5$, б) $x = 3$, $y = 6$. **6. Упатство.** а) $x = 2a$, $y = a$ и $z = 4a$. **Одг.** $x = 6$, $y = 3$, $z = 12$. **7.** а) $x = 5$, б) $x = 7,5$. **8.** $x = 6$.

I. **2** стр. 8

1. $\frac{5}{8}$, не. **2.** 7, 5 cm. **3.** Не. **4.** а) $\overline{AB} < \overline{CD}$, б) $\overline{AB} = \overline{CD}$, в) $\overline{AB} < \overline{CD}$. **5.** а) не, б) не. **6.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, 1, 1, \frac{5}{3}$. **7.** а) $\frac{6}{5}$, б) $\frac{2}{3}$, в) $\frac{9}{4}$, г) 2, д) $\frac{4}{5}$. **8.** 1 : 2. **9.** $\overline{AB} : \overline{MN} = \overline{RS} : \overline{PQ}$, $\overline{RS} = 12\,\text{cm}$. **10.** а) да (15 : 8 = 7, 5 : 4), б) не, в) да (8 : 4 = 12 : 6). **11.** $\overline{AB} = 4\,\text{cm}, \overline{MN} = 10\,\text{cm}$.

I. **3** стр. 10

3. Упатство. Прво подели ја отсечката на 5 еднакви дела. **4. Упатство**. Отсечката MN подели ја на 4 еднакви дела, а потоа на 5 дела. **6. Упатство**. Отсечката PQ прво подели ја на 9 еднакви дела. **7. Упатство**. Отсечката AB раздели ја на 3 (= 5 - 2) еднакви дела, а потоа продолжи ја на 2 такви дела на кај точката B. **9. Упатство**. Отсечката со должина L раздели ја на половина и едниот дел раздели го во однос 5 : 3. **10. Упатство**. Отсечката *A*B раздели ја во однос 3 : 2.

I. **4** стр. 13

1. а) $\frac{16}{3}\text{cm}$, б) $\frac{9}{2}\text{cm}$. **2.** а) Да, б) не. **3.** а) $a \parallel c$, $b \parallel d$, б) $a \nparallel b, a \nparallel d, b \nparallel c, c \nparallel d$.
5. а) $\overline{OC} : \overline{OD}, \overline{AC} : \overline{BD}$, б) $\overline{AC} : \overline{CD}$, в) $\overline{OB} : \overline{OD}$.

I. 5 стр. 15

1. $\overline{A_1B_1} = 8\,\text{cm}, \overline{B_1C_1} = 12\,\text{cm}$. **2.** 2 : 3. **3.** 1, 6 dm. **5.** $\overline{BD} = 1{,}8\,\text{cm}, \overline{DF} = 3{,}6\,\text{cm}, \overline{FL} = 1{,}2\,\text{cm}$. **6.** $\overline{DC} = 6\,\text{cm}, \overline{AD} = 4\,\text{cm}$. **7. Упатство**. Користи дека $\overline{AM} : \overline{AM} = \overline{NC} : \overline{NM}$ и $\overline{AD} : \overline{AN} = \overline{CM} : \overline{MN}$. **11.** Бараната отсечка ќе биде четврта геометриска пропорционала во пропорцијата: а) $a : c = x : b$, б) $a : b = x : c$, в) $a : b = c : x$.

I. 6 стр. 18

2. а) да, б) да, в) не, г) да. **3.** $k = \overline{A_1B_1} : \overline{AB}$. **4.** $\frac{5}{4}$. **6.** Само за $k = 1$. **8.** а) се зголемуваат (k пати), б) се намалуваат $\frac{1}{k}$ пати. **9.** а) $k = \frac{1}{3}$, б) $k = \frac{1}{2}$, в) $k = \frac{1}{6}$. **10.** Сите тврдења се точни. **11.** H ≈ 107 km.

I. 7 стр. 20

1. Да. **2.** Да. **3.** Слични се восогласност со вториот признак за сличност. **5.** Да. **6.** Слични се во согласност со третиот признак за сличност. **8.** а) да, б) да, в) не. **9.** 15 cm и 18 cm. **10.** Три пара: $\Delta MNC \sim \Delta ABC$, $\Delta MEC \sim \Delta ADC$ и $\Delta ENC \sim \Delta DBC$, б) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$, $\Delta AMC \sim \Delta ENC$ и $\Delta MBC \sim \Delta NDC$. **11.** $\Delta ADC \sim \Delta BAC$. **12.** $\Delta ABC \sim \Delta MNC \sim \Delta KBL \sim \Delta SNL$. **13.** L = 12 cm, L_1 = 36 cm, L_1: L = 3.

I. 8 стр. 23

1. 7, 5 cm, b_1 = 12, 5 cm и c_1 = 15 cm. **2.** 9 cm, 13, 5 cm и 13 , 5 cm. **3.** L_1 = 10 cm, L = 25 cm. **4.** 6,2 cm, 9,3 cm и 12, 4cm. **5.** 6 cm, 10 cm, 12 cm. **6.** 2:3. **7. Упатство**. Користи дека $R = \frac{c}{2}$. **8.** $h_b : h_a = a : b$ бидејќи $ah_a = bh_b$, $h_a : \frac{h_a h_b}{h_c} = h_a \cdot \frac{h_c}{h_a h_b} = h_a : h_c = b : c$, бидејќи $bh_b = ch_c$. Значи, $h_b : h_a : \frac{h_a h_b}{h_c} = a : b : c$.

I. 9 стр. 25

1. 6, 37 cm. **2.** 49 : 9. **3.** Ако коефициентот на сличност е k, тогаш е $s_1 = ks$, $P_1 = k^2P$ па за радиусот на впишаната кружница на сличниот триаголник добиваме $r_1 = \frac{P_1}{s_1} = \frac{k^2P}{ks} = k \cdot \frac{P}{s} = kr$. **4.** Ако k е коефициентот на сличност, тогаш $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$ и $P_1 = k^2P$, па за радиусот на опишаната кружница на сличниот триаголник добиваме: $R_1 = \frac{a_1b_1c_1}{4P_1} = \frac{ka \cdot kb \cdot kc}{4k^2P} = \frac{kabc}{4P} = kR$. **5.** Ако k е коефициент на сличност, тогаш $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$, $s_1 = ks$, па за плоштината на сличниот триаголник добиваме:

$P_1 = \sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)} = \sqrt{ks(ks-ka)(ks-kb)(ks-kc)} = \sqrt{k^4 s(s-a)(s-b)(s-c)} =$

$k^2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = k^2 P$.

I. 10 стр. 27

1. 30 m. **2.** 3 m. **3.** 22, 5 km, а размерот е 1 : 250 000. **4.** $\overline{BD}=7,5$ cm, $\overline{OD}=6$ cm.

5. $7\frac{8}{13}$ cm. **Упатство**. Користи го третиот признак за сличност. Коефициентот на сличност е 1 : 2. **7.** Нека тетивите се AB и CD а пресечната точка е O. Тогаш $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$ како периферни агли над лакот $\overset{\frown}{AD}$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ како периферни агли над лакот $\overset{\frown}{BC}$. Затоа ΔAOC ~ ΔDOB, па оттука $\overline{OA}:\overline{OD}=\overline{OC}:\overline{OB}$, односно $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$. **8. Упатство**. Продолжи ја висината CD на триаголникот ABC преку точката D до точката D_1 при што $\overline{CD_1}=7$cm, а потоа низ D_1 повлечи права p || AB. **11.** ΔSBC ~ ΔSDA бидејќи $\measuredangle SBC = \measuredangle SDA$ како периферни агли над лакот $\overset{\frown}{AC}$, а освен тоа аголот кај темето S им е заеднички. Од сличноста следува дека $\overline{SB}:\overline{SD}=\overline{SC}:\overline{SA}$, односно $\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}\cdot\overline{SD}$. **12.** Три пара: ΔABC ~ ΔACD, ΔABC ~ ΔCBD и ΔACD ~ ΔCBD.

I. 11 стр. 29

1. b = 12 cm, $a_c = \frac{25}{13}$cm, $b_c = \frac{144}{13}$cm, $h = \frac{60}{13}$cm. **2.** a = 8 cm, c = 10 cm, a_c = 6, 4 cm, h = 4, 8 cm.

3. $a \approx 16,2$ cm, $b \approx 10,8$ cm, $c = 19,5$ cm, $a_c = 13,5$ cm. **4.** $a = 12$ cm, $b = 8\sqrt{3}$cm, $c = 24$ cm, $h = 6\sqrt{3}$cm. **5.** $a \approx 6,4$ cm, $b \approx 8$ cm. **6.** 12 cm. **7.** Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C и $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{CD}=h$ е висината спуштена од темето C. а) Од ΔBCD ~ ΔBAC следува $h : b = a : c$, $h=\frac{ab}{c}\sqrt{3}$. б) Користејќи дека $a^2 = a_c \cdot c$ и $b^2 = b_c \cdot c$ добиваме $\frac{a^2}{a_c} = c = \frac{b^2}{b_c}$. **10. Упатство**. Ако a и b се страните на правоаголникот, тогаш $x = \sqrt{ab}$ е страната на квадратот. **11. Упатство**. x е геометриска средина на отсечките: а) $2a$ и b, б) $\frac{a}{2}$ и b, в) a и $b + c$. **12.** а) 13 cm, б) 5 cm.

I. 12 стр. 32

4. а) да, б) не, в) не, г) да. **5.** а) 13 cm, б) 11,4 cm, в) 17 cm, г) 28,9 m. **6.** а) $8\sqrt{2}$ cm, б) 10 m, в) 5,6 cm, г) 8,47 m. **7.** а) L $\approx$ 156,83 cm, P $\approx$ 1052 cm^2, б) 67,6 cm, P $\approx$ 196 cm^2, в) L $\approx$ 41 m, P $\approx$ 72,2 m^2. **8.** 36 cm. **9.** L $\approx$ 52,81 cm, P = 104 cm^2. **10.** 5,12 m. **11.** 12 cm. **12.** $(3+\sqrt{3})b \approx 4,73b$.

I. 13 стр. 35

1. Упатство. Најпрво конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот од плоштините на првите два квадрата. **5.** а) $x=\sqrt{1^2+1^2}$, б) $x=\sqrt{2^2+2^2}$, в) $x=\sqrt{3^2+1^2}$.

6. Упатство. а) $x=\sqrt{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$, б) $x=\sqrt{\left(a-\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$.

I. 14 стр. 41

1. а) 11, 4 cm, б) 10, 5 cm. **2.** 5 cm. **3.** 2, 1 cm. **4.** 4, 2 cm. **5.** $r \approx 6{,}5$ cm, R ≈ 13 cm. **6.** 3, 5 cm. **7.** 14, 6 cm. **8.** $\overline{BF}=5$ cm, $\overline{CF}=9{,}2$ cm, $\overline{CD}=13$ cm. **9.** 6 cm. **10.** 3 cm. **11.** а) 7 cm, б) 19 cm. **12.** $\overline{AB}=r\sqrt{3}$.

Задачи за повторување и утврдување - I - стр. 42

1. 4, 2 cm. **2.** $\overline{MB}=4{,}8$ cm, $\overline{AB}=8{,}4$ cm. **3.** $\overline{AT}:\overline{AB}=m:(m+n)$, $\overline{TB}:\overline{AB}=n:(m+n)$.

4. а) 10 :7, б) 3 : 10, в) 10 : 3. **5.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. **6.** 3, 6 cm.

7. а) 4,5 cm, б) 6 cm. **8.** 6 cm. **9.** 4, 5 cm. **11.** $k_1=\frac{1}{2}, k_2=\frac{1}{3}, k_3=6, k_4=\frac{1}{6}$. **12. Упатство**. ΔABD ~ ΔCAB бидејќи и двата триаголника имаат агли 36°, 72°, 72°.

13. 10 cm, 18cm. **14.** 4, 8 cm. **15.** Помалата основа е долга $14\frac{2}{3}$ cm, а дијагоналата 22 cm. **16.** 17 cm. **17. Упатство**. Одреди ги прво растојанијата d_1 и d_2 на секоја тетива од центарот. **Одговор**. а) 1, 4 cm, б) 4, 6 cm. **18.** 5 cm и $5\sqrt{3}$ cm. **19.** 11, 3 m и 10, 4 m. **20.** 8 km. **21.** h = 1, 5 m, d = 3, 9 m. **22.** $a_3=r\sqrt{3}$, $a_4=r\sqrt{2}$ и $a_6=r$, па $a^2_6+a^2_6=2r^2+r^2=3r^2=a^2_3$. **23. Упатство**. Бараната отсечка x cm конструирај ја врз основа на пропорцијата: а) $b:a=a:x$, б) $a:1=x:b$, в) $a:b=x:1$.

Задачи за самоконтрола - I - стр. 43

1. а) да, б) да. **2.** Да. **3.** 4,5 cm, 7,5 cm и 9 cm. **6. Упатство.** Нека ΔABC~ ΔA'B'C'. а) Ако AA_1 и $A'A'_1$ се бисектриси, користејќи го првиот признак за сличност прво докажи дека $\Delta ABA_1 \sim \Delta A'B'A'_1$. б) Ако AA_1 и $A'A'_1$ се тежишни линии, користејќи го вториот признак за сличност прво докажи дека $\Delta ABA_1 \sim \Delta A'B'A'_1$. **7.** Ако a и b се основата и висината на триаголникот, тогаш $x=\sqrt{\frac{ah}{2}}=\sqrt{\frac{a}{2}\cdot h}$ е страната на бараниот квадрат. **8.** 3,7 cm. **9.** 112,5 km. **10.** 10,06 cm. **11.** а) 13, б) 10, в) 5. **12.** $L=36\sqrt{3}$ cm, r = 6 cm, R = 12 cm.

ТЕМА II. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА.

II. **1** - стр. 46

3. а) За $a = 3$ добиваме невистинит исказ $9 + 1 = 6$, б) за $x = 1$ имаме $4 = 11$, в) за $x = -2$ тоа преминува во невистинит исказ $|-2| = -2$, односно $2 = -2$. **4.** За $x = 0$ имаме $0 = 0$; за $x = 3$ имаме $9 = 9$, но за $x = 2$ равенството $x^2 = 3x$ преминува во невистинит исказ $4 = 6$. **5.** Идентитети се б), в) и д). **6.** Тие се идентитети.

II. **3** - стр. 48

1. Решенија се -2 и 1. **2.** а) 4, б) 3, в) 1 и 4, г) 0, -1 и 1. **3.** На пример: а) $x = -2$, б) $(x + 3)(x - 1) = 0$, в) $x(x - 1)(x - 4) = 0$, г) $x + 1 = x$, **4.** а) $3x - 5 = 0$, б) $3x - 5 = 4$, в) $3x - 5 = -2$. **5.** За а) 2 и 5, б) 4, в) 3, г) 1, 2 и 3, д) 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, ѓ) 3 и 4. **6.** а), б), в), г) Да.

II. **4** - стр. 50

2. $x = 3$ е решение на втората равенка, но не и на првата равенка. **3.** а) да, б), в) не се еквивалентни.

II. **5** - стр. 53

1. Да. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Не. На пример, ако го помножиме со 0, добиваме точно равенство. **5.** Се добива: а), б), точно бројно равенство. **6.** Се добива еквивалентна равенка. **7.** Можат. **8.** а) $x^2 - 3x + 2x = 7 - 2$, б) $x^2 - 3x + 2 - 7 + 2x = 0$. **10.** а) $18x - 2 = 5 - 6x$, б) $2 + 2x = 4x - 1$, в) $3(2x - 3) - 2(x - 1) = 12x + 12$, г) $2(x - 1) - 3(x - 2) = x + 3$. **11.** а) Не се, б) се еквивалентни, в) се еквивалентни. **12.** а) 11, б) 4, в) 15, г) 3, д) -1, ѓ) 4.

II. **6.** - стр. 55

3. а) $-5x+6=0$, $a=-5$, $b=6$, б) $6x+4=0$, $a=6$, $b=4$.

II. **7** - стр. 57

1. а) 16, б) -1, **2.** а) $-\frac{1}{6}$, б) $-\frac{1}{4}$. **3.** а) 7, б) $\frac{14}{5}$. **4.** а) 12, б) 4. **5.** а) 9, б) $-\frac{3}{4}$, **6.** а) 2, б) -4. **7.** а) 5, б) $\frac{1}{2}$. **8.** а) -6, б) 4.

II. **8** - стр. 61

1. 56. **2.** 125. **3.** 125. **4.** 13. **5.** 12, 13, 14. **6.** 36. **7.** 18^o и 72^o. **8.** $a = 8$ cm. **9.** 21 cm и 29 cm. **10.** 5 cm. **11.** $a = 5$ cm. **12.** $a = 7$ cm, $b = 8$ cm, $c = 9$ cm.

II. **9** - стр. 64

1. а), в) невистинит, б, г) вистинит. **2.** а) невистинит. б), в), г) вистинит.
3. а) Задоволено е за $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, б) за $x \in \{-1, 0, 1\}$. **4.** а) $a - b < 0$, б) $a - b > 0$, в) $a - b = 0$.

II. **10** - стр. 66

1. а), б), в), г) Вистинито. **2.** а), б) вистинити се за секој позитивен реален број, а невистинити се за секој непозитивен реален број. в) вистинито за секој реален број, г) вистинито за секој реален број, освен за $x = 0$. **3.** а) $-x < 6$, б) $-2 > 7$, в) $2 - x < 8$.
4. Еквивалентно е на неравенствата $-5 < x$ и $x > 9$. **5. Упатство**. Двете страни на првото неравенство подели ги со бројот 2. **Одговор**. Од $1 < 3$ и $3 < 5$ следува двојното неравенство $1 < 3 < 5$.

II. **11** - стр. 68

1. По тоа што на бројната оска се избрани две фиксни точки што им одговараат на броевите 0 и 1. **2.** а) што се надесно од почетокот 0, б) налево од почетокот 0. **4.** $(x, y) \cup [x, y] = [x, y]$, $(x, y) \cap [x, y] = (x, y)$. **5.** а) (3, 5), б) (1, 7), в) (1, 3). **6.** а), б) За секој $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, в) за $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

II. **13** - стр. 72

1. Еквивалентни се: а), б), в), г). **2.** а) $x - 2 - 2x < x + 1$, б) $3x - 4 > x - 5$. **3.** а) $6x - 3 > 2x + 5 \Leftrightarrow 6x - 2x > 5 + 3 \Leftrightarrow 4x > 8 \Leftrightarrow x > 2$, б) $\frac{2x-1}{3} < \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2(2x-1) < 3x + 6 \Leftrightarrow 4x - 3x < 6 + 2 \Leftrightarrow x < 8$.

II. **14** - стр. 75

1. а) $M = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, б) $M = (-1, \infty)$. **2.** а) $M = (-9, \infty)$, б) $M = \left(\frac{9}{7}, \infty\right)$. **3.** а) $M = (-\infty, 5)$, б) $M = \left(2\frac{1}{2}, \infty\right)$. **4.** а) $M = \varnothing$, б) $M = \varnothing$. **5.** а) $M = \left(4\frac{3}{13}, \infty\right)$, б) $M = \left(2\frac{1}{5}, \infty\right)$.

II. **15** - стр. 76

1. а) За $x \in (-\infty, 2)$, **2.** а) $k \in (2, \infty)$, б) $k = 2$, в) $k \in (-\infty, 2)$. **3.** За а) $m \in (-2, \infty)$, б) $m \in (-1, \infty)$, б) $\in (-\infty, 4)$. **4.** а) При $m \geq -2$, $x > \frac{2-5}{m+2}$; а при $m < -2$, $x < \frac{2-5}{m+2}$, б) $x < \frac{3a-2}{2}$, $x \in$ R.
5. При $k \geq -3$, $x < \frac{2k-1}{k+3}$, а при $k < -3$, $x > \frac{2k-1}{k+3}$, б) при $c \leq 2$, $x > \frac{c^2+6}{2-c}$, а при $c > 2$, $x < \frac{c^2+6}{2-c}$.

II. **17** - стр. 79

1. а) $M = \left(2\frac{1}{2}, \infty\right)$, б) $M = \varnothing$. **2.** а) $M = (-2, \infty)$, б) $M = \varnothing$. **3.** а) $M = (4, \infty)$, б) $M = \left(1\frac{4}{7}, 11\right)$.
4. За а) $m \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, б) $m \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, в) $m = \frac{2}{3}$. **5. Упатство**. Изразите за a, b и c треба да го задоволуваат двојното неравенство $a - c < b < a + c$, односно
$(2p+3) - (p+13) < 4p - 5) < (2p+3) + (p+13)$. **Одговор**. За $-\frac{1}{3} < p < 21$, односно за $p \in \left(-\frac{1}{3}, 21\right)$.

II. 18. - стр. 81

1. Линеарни функции се: а), б), в) и д). **2.** $f(\mathrm{D}) = \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 7\}$. **3.** $f(x) = x + 3$, $g(x) = -x$. **4.** $l = 2 + 0,00012\, t^{o}$. Линеарна функција. $\mathrm{P} = 3x$. Линеарна функција. **6.** $y = 24,5 \cdot x$. Линеарна функција. **7.** $y = 2n + 2$, $n \leq 60$. **8.** $y = \frac{3}{5} \cdot x$. **9.** $y = 8{,}9x$. **10.** $\mathrm{S} = 250\, t$. Линеарна функција.

II. 19. - стр. 84

2. а) I и III, б) II и IV квадрант. **3.** $y = 12x$, б) 2 700 l. **4.** $y = 0,6\, x$, D = N. **5.** $\mathrm{S} = 4\, t$.
6. $y = \frac{120}{100} \cdot x = 1{,}2x$. **7.** $y = 1,118x$.

II. 21. - стр. 87

1. Графиците се две паралелни прави. **2.** S(3, 2). **3.** 1^{o}. а) За $x = 4$, б) за $x \in (4, \infty)$, в) за $x \in (-\infty, 4)$. 2^{o}. y расте кога x расте. 3^{o}. на интервалот [0, 6]. **4.** На графикот му припаѓаат точките A(0, 3) и C(2, –1). **5.** Точката: а) (0, 4), б) (2, 0). **6.** Добива вредност нула за $x = 2$, а) $x \in (-\infty, 6)$, б) $x \in (6, \infty)$.

II. 22. - стр. 89

1. а) $-\frac{4}{3}$, б) $\frac{2}{3}$, в) 0. **2.** а) растечка, б) опаѓачка, в) константна, г) опаѓачка, д) растечка.

II. 23. - стр. 91

1. $x = 1\frac{1}{2}$, б) $x = -15$, в) $x = 1$. **2.** а) $x = 6$, б) $x = 2\frac{2}{3}$, в) $x = 3$. **3.** а) $x = 1$, б) $x = -3$. **4.** $x = 3$, б) $x = \frac{5}{6}$.
5. а) нема решение, б) двата графика се совпаѓаат, т.е. равенката е идентитет. **6.** а) нема решение, б) равенката е идентитет, т. е. секој реален број е нејзино решение.

Задачи за повторување и утврдување - II - стр. 91

1. а), б) е решение. **2.** а) $x = -1$, б) нема решение, в) $x = \frac{19}{11}$. **3.** а) тие се еквивалентни, б) не се еквивалентни. **4.** 5 и 6. **5.** Задоволено е за $x = 3$, $x = 4$ и $x = 5$. **6.** а) [0, 3), б) (–3, 8], в) [0, 5), г) $(-\infty, 8]$. **7.** а) $\mathrm{M} = (-\infty, 6)$, б) $\mathrm{M} = (-\infty, 2)$. **8.** а) $-2x + 1 < 5 - x$, б) $-4x > 12$, в) $2x < 2$. **9.** а) $M = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, б) $\mathrm{M} = (1, \infty)$, в) $\mathrm{M} = \varnothing$. **10.** а) $\{(a,1),(b,1)\}$, $\{(a,2),(b,2)\}$, $\{(a,3),(b,3)\}$, $\{(a,1),(b,2)\}$, $\{(a,1),(b,3)\}$, $\{(a,2),(b,3)\}$, б) $\{(a,1),(b,2)\}$, $\{(a,1),(b,3)\}$ и $\{(a,2),(b,3)\}$. **11.** а) За $x = \frac{2}{3}$, б) за $x = 2$. **12.** За $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, б) за $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. **13.** Имало 30 деца и 7 клупи. **14.** **Доказ**. Познато е дека важи неравенството $a + b > c$. Кон двете негови страни додај c, па ќе добиеш $a + b + c > 2c$, односно $\frac{a+b+c}{2} > c$, штд. **15.** а) $x = 4$, б) $x = 1$, в) $x < 4$, г) $x > 4$. **16.** $y \in [-1, 4]$. **17.** Вредноста на y ќе се зголеми: а) од –3 до 3, б) од –13 до –5. **18.** а) $y = 4,5x + 7$. **19.** $y = 77F^{o}$,

$x=-32\cdot\frac{5}{9}\approx-17,8°C$. **20.** $y=420-8t$. После 34 минути во кадата ќе останат 148 литри вода. Кадата ќе се испразни за 52,5 минути.

Задачи за самоконтрола - II - стр. 93

1. Две решенија $x=0$ и $x=3$. **2.** а) $x=12$, б) $x=\frac{7}{4}$, в) $y=2$. **3.** а), б) еквивалентна равенка. **4. Упатство**. Ако се отсечени $\frac{2}{5}$, тогаш останало уште $\frac{3}{5}$ од топот. Значи $\frac{3}{5}\cdot x=24$. **Одговор**. 40 m платно. **5.** Ќерката има 12 години, а таткото 48 години. **6.** Ќе добиеш: а) точно, б) неточно равенство. **7.** а) $A\cup B=(-2,\infty)$, б) $A\cap B=[0,3]$. **8.** а) $M=(2,\infty)$, б) $M=\left(2\frac{1}{3},\infty\right)$. **9.** а) $M=(5,\infty)$, б) $M=(-\infty,3)$, в) $M=\varnothing$, г) $M=(-2,0)$. **10.** $k=\frac{1}{3}, b=\frac{10}{3}$. **11.** Во точката: а) A(4; 0), б) B(0; -3). **12.** За a = 2.

ТЕМА III. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

III. 1. - стр. 96

2. а) (0,4), (1, 4), (2, 4), (3, 4), б) (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 4). **3.** Равенките се еквивалентни. **4.** а) $y=-\frac{2}{3}\cdot x+\frac{5}{3}$, б) $y=3x-1$, в) $y=-\frac{1}{3}x$. **5.** а) $x=\frac{1}{2}y+2$, б) $x=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$, в) $x=2y$.

III. 2. - стр. 99

1. а) $x-4y=18$, б) $3y-4x=13$, **3.** а) $\left(0,-\frac{9}{5}\right)$, б) $\left(4\frac{1}{2},0\right)$, в) $\left(-1,-2\frac{1}{5}\right)$, г) $\left(9\frac{1}{2},2\right)$. **7.** $y=1$. **8.** 4. **9.** $c=-7$. **10.** Графиците се паралелни.

III. 3. - стр. 101

2. $f(x_0,y_0)=0$ и $g(x_0,y_0)=0$. **3.** Решение е само парот (0,–2). **4.** (0, 0) е бараното решение. **5.** (2; 1).

III. 4. - стр. 104

1. а) (3, 1), б) $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, в) (–3, –1). **2.** а) има едно решение, б) нема решение, в) има бесконечно многу решенија. **3.** Минува. **4.** а), б) има решение. **6.** $a=2$, $b=2$. **8.** Не.

III. **5.** - стр. 105

1. а) Да, б) да. **4.** Системите не се еквивалентни, бидејќи (0, 0) е решение на едниот систем, а не е решение на другиот систем. **5.** $\left(3,\frac{1}{2}\right)$. **6.** $\left(-\frac{1}{4},1\frac{1}{2}\right)$.

III. **6.** - стр. 108

1. а) (8, 2), б) (3, 3), в) (–3, –5), г) (–2, –1). **2.** а) $\left(\frac{1}{2},3\right)$, б) (1, 3). **3.** а) (2, 1), б) (5, –1). **4.** а) (–1, 2), б) нема решение. **5.** а) (6, 2), б) (3, 2). **6.** а) (12, 20), б) (16, 15). **7.** а) $\left(\frac{91}{19},\frac{105}{19}\right)$, б) (2, 3).

III. **7.** - стр. 110

1. $\left(\frac{3}{2},1\right)$, б) $\left(2\frac{29}{35},1\frac{2}{5}\right)$. **2.** а) (10, 7), б) (1, 2). **3.** а) (–2, 1), б) (3, 2). **4.** а) (4, 1), б) (2, 1). **5.** а) (2, 1), б) (7, 8). **6.** а) (3, 4), б) (7, 2).

III. **8.** - стр. 113

1. 76 и 54. **2.** 45 и 28. **3.** 13 и 65. **4.** 7 cm и 3, 5 cm. **5.** 36^o, 36^o и 108^o. **6.** 15^o, 75^o, 90^o. **7.** 21, 5 cm и 17, 5 cm. **8.** 18 cm и 9 cm. **9.** Сливи имало 60 дрвја, круши имало 30 дрвја, а јаболка имало 90 дрвја. **10.** I – 248, II – 124. III – 88 работници. **11.** Мали тетратки имало 11, а големи 6. **12.** 5 - денарки имало 16, а 2 - денарки 10. **13.** 8 тони и 9 тони.

III. **9.** - стр. 115

1. Ако во секој од џебовите има помалку од 51 денар, значи најмногу 50, тогаш во двата џеба има вкупно не повеќе од 2·50=100 денари, што противречи на условот на задачата. **2.** Ако во хотелот има најмногу 33 соби, тогаш вкупно можат да се сместат најмногу 33· 3=99 луѓе, што противречи на условот на задачата. **3. Упатство.** 2 · 365<1000. **4.** Мите имал 7 неуспешни обиди со 3 клуча несоодветни за таа брава. Бидејќи 7=3 · 2+1, затоа постои клуч со кој Мите 3 пати се обидувал да отклучи.

III.**10.** - стр. 117

2. Не е доволен. Бројот 4 е мал. **3.** 60. **4.** $\approx$60000.

III. **11.** - стр. 119

4. Случаен настан.

III. **12.** - стр. 120

1. Примерокот е добро избран, бидејќи крвната група кај човек не се менува до крајот на животот. Потоа претпоставуваме дека тој фактор не се менува од едно до друго населено место. Во Р. Македонија очекуваме да има околу 260 000 жители со негативна крвна група. **2.** 500 000.

III. 13. - стр. 122

4. а) не, б), в), г) да, д), ѓ) не. **5.** Веројатноста на спротивниот настан е $1-p$. **6.** 0, 33. **7.** 0, 25.

III. 14. - стр. 124

3. а) $V=\frac{25}{100}=0{,}25$, б) $V=\frac{35}{100}=0{,}35$, в) $V=\frac{40}{100}=0{,}4$. **4.** Има само еден поволен настан, т.е. m=1, а бројот на сите настани е 6. Одг. а) $V=\frac{1}{6}$. **5.** Заборавената цифра е $x\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Одг. $V=\frac{1}{10}=0{,}1$. **6.** Множеството на сите елементарни настани за можните збирови $i+j$ $(1\le i,j\le 6)$ е $6\cdot 6$=36, а од нив поволни настани се само 6: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1. Одг. $V=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. **7.** 0,25.

Задачи за повторување и утврдување - III - стр. 124

1. Решенија се, на пример, (1, 3) и (3, 7), а не се решенија (0, 0), (1, 2). **2.** Таков е системот $2x+y=3, x+y=1$. **3.** Да. **4.** (2, –1). **5.** Не е добро, бидејќи правите се сечат под мал агол. **6.** Во случај кога постои коефициент пред x или y еднаков на 1 или –1. **7.** Системот нема решение. **8.** Решение е секој пар броеви $(x, 2x+1)$. **9.** $(1, 1)$. **11.** $a=0$. **12.** $a=-3, b=5$. **13.** $\left(-5,\frac{1}{3}\right)$.

14. 6 100 kg и 3750 kg. **15.** 30 g и 15 g. **16.** 5 – денарки имало 8, а 2 - денарки имало 5. **17.** Мажи биле 9, а жени 6. **18.** 367 и 433 ученици. **19.** Брзината на авионот е 173 km /час, а на ветерот 15 km / час. **20.** Таткото има 41 година, а синот 9 години. **21.** Синот има 9 години, а таткото 36 години. **22.** 20 l и 16 l. **23.** Од 30% киселина треба да се земат 10 l, а од 55% киселина да се земат 40 l. **24.** Нормата на мајсторот била 80 детали, а на ученикот 50 детали. **25.** Спротивниот настан е „При фрлање на зар да се падне еден или два", а неговата веројатност е $\frac{1}{3}$. **26.** Веројатноста е $\frac{1}{2}$. Спротивен настан е да се падне парен број, а неговата веројатност исто така е $\frac{1}{2}$. **27.** а) $\frac{1}{13}$. б) $\frac{1}{4}$. **28.** а) $\frac{1}{13}$ б) $\frac{1}{4}$.

Задачи за самоконтрола - III - стр. 126

1. а) (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) и (7, 1), б) (1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1). **2.** а) За $c=9$, б) за $c=20$. **3.** а) За $c=9$, б) за $c=6$. **4. Упатство**. Реши го системот равенки $\begin{cases}-a+b=2\\2a+b=5\end{cases}$. **Одговор**. за $a=1, b=3$. **5.** Во точката а) $A(4, 0)$, б) B(0,–3).

6. Упатство. Реши го системот равенки $\begin{cases}4x+2y=100\\x+y=36\end{cases}$. **Одговор**. 14 зајци и 22 фазани. **7.** На висина 4 стопи. **8.** 39 и 260. **9. Упатство**. Реши го системот равенки $\begin{cases}x+y=24\\x=\frac{20y}{100}\end{cases}$.

Одговор. Сега е 4 часот. **11.** $\frac{1}{5}$. **12.** 167.

ТЕМА IV - ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

IV. 1 - стр. 132

1. Следува од A_1. **2.** Следува од A_2. **3.** Следува од A_3. **4.** Низ две точки од просторот минуваат безброј рамнини. **5.** Следува од A_5. **10.** а) безброј, б) една. **11.** 3. **12.** 6. **14.** Се сечат или се разминуваат. **15.** Не. **16**. Не. а) трите точки да не се колинеарни, б) правите треба да се сечат или да се паралелни, в) точките да не лежат на правата. **18.** Не. **19.** а) да се паралелни или да се сечат, б) да се паралелни, или да се сечат, или да се разминуваат. **20.** Една.

IV. 2 - стр. 136

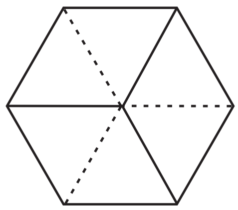
1. $p \parallel AB$. **3.** Една рамнина. **4.** $a' \parallel b'$. **5.** а) не, б) не. **6.** Четириаголник или отсечка, а триаголник не може да биде. **7.** A', B' и C' се колинеарни и при тоа B' лежи помеѓу A' и C'. **8.** Равенството важи ако $AB \parallel \Sigma$. **10.** Не секогаш.

IV. 3. - стр. 138

2. 0^o. **4.** Најмал е аголот што правата p го зафаќа со нејзината ортогонална проекција врз рамнината Σ. **5.** Равенството важи. **6.** Потребен и доволен услов е рамнината на триаголникот ABC да е нормална на рамнината Σ. **8.** $s \subseteq \Sigma_2$. **9.** а) 6cm, б) $8,46\text{ cm}$, в) $10,38\text{ cm}$. **10.** 45^o. **11.** $\overline{BA'} = 16\text{ cm}$, а растојанието од отсечката AB до рамнината Σ е $8\sqrt{3} \approx 13,84\text{ cm}$.

IV. 4 - стр. 141

1. а) 6, б) 12, в) 8. **5.** а) не, б) да, в) да. **7.**



IV. 5 - стр. 143

5. а) основни рабови има 6, а бочни 3, б) основни рабови има 8, а бочни 4, в) основни рабови има 10, а бочни 5.

IV. 6 - стр. 144

1. Бочните рабови се паралелограми, а меѓу нив може да има и правоаголник. **2.** Права призма. **3.** Триаголните призми немаат дијагонали. **5.** Правоаголници. **6.** а) 0, б) 1, в) 2, г) $n-3$. **7.** а) нема дијагонали и дијагонални пресеци, б) дијагонали има 10, а дијагонални пресеци 5, в) дијагонали има 18, а дијагонални пресеци има 9.

IV. 7 - стр. 147

2. Рамностран триаголник или шестаголник. **3.** а) да, б), в) да, г), д) да. **4.** а) 13 cm, б) 7 cm. **5.** 31,18 cm. **6.** Нека дијагоналата е AC_1 и го бараме растојанието од C до AC_1. Страните на правоаголниот триаголник ACC_1 се $1, \sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. За висината во правоаголен триаголник важи $h = \frac{ab}{c}$ (бидејќи $ch = 2P = ab$), па бараното растојание е $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 0,82\text{m}$.

7. 16cm.

IV. 8 - стр. 149

5. Две. **7.** Висината е 4 cm. **8.** Висината е 8 cm. **9.** 52 cm^2.

IV. 9 - стр. 153

1. а) 143, 8 cm^2, б) 7, 8 dm^2. **2.** 5 cm. **3.** $P = 6\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2$ =2d^2. **4.** 8, 66 cm^2. **5.** 312 cm^2. **6.** P= 1342 cm^2, d = 29, 78 cm. **7.** 5, 48 cm. **8.** 304, 77 cm^2. **9.** 33 m^2. **10.** 312 cm^2. **11.** 183 cm^2, **12.** 72 cm^2.

IV. 10 - стр. 161

1. 216 cm^3. **2.** 130, 83 cm^3. **3.** 64 cm^3. **4.** 6, 93 dm. **5.** 200 кутии. **6.** 30 cm. **7. Упатство**. Пресметај го волуменот во литри. **Одговор**. 5 часа. **8.** а) ќе се зголеми 27 пати, б) ќе се намали 8 пати. **9.** 6 cm. **10.** 353 l. **11.** 25, 6 m^2. **12.** 34, 08 kg. **13.** 4 m.

IV. 11 - стр. 163

2. Може. **3.** Може најмногу два бочни ѕида да бидат нормални на основата. **4.** а) Најмалиот број на ѕидови е 4 и тоа е можно кај тетраедарот, б) најмалиот број на темиња е 4 и тоа е можно кај тетраедарот, в) најмалиот број на рабови е 6 и тоа е можно кај тетраедарот.

IV. 12 - стр. 166

1. а), б) може, в), г) не може, д) може, ѓ) не може. **3.** Не мора. **4.** Не мора. **5.** Да. **6.** $\sqrt{94} \approx 9,7\text{cm}$. **7.** 4,27 cm. **8.** 2 cm. **9.** Бочниот раб има должина $\sqrt{94} \approx 9,7\text{cm}$, апотемата има должина 13 cm. **10.** 6,53 cm. **11.** а) може, б) може, в) може. **12.** Рамностран триаголник.

IV. 13 - стр. 167

2. а) една оска, б) три оски.

IV. 14 - стр. 171

1. 51,72 cm^2. **2.** 54,93 cm^2 **3.** 1514,22 cm^2. **4.** 249 cm^2. **5.** 5,7 cm. **6.** 1620 керамиди. **7. Упатство**. Прво определи ја апотемата на пирамидата. **Одговор** H $\approx$ 23,7 cm, s = 24,3 cm. **8.** 52,6 cm^2 **9.** 8 cm. **10.** P = 3a^2. За a = 12 cm се добива P = 432 cm^2. **11. Упатство**. Определи ја прво апотемата на пирамидата. **Одговор**. $s \approx$ 31 cm, H = 30 cm. **12.** a = 5 cm, H = 6 cm.

IV. 15 - стр. 174

1. 95 cm^3. **2.** 2701 m^3. **3.** 9 cm. **4.** H = 27 cm, P $\approx$ 500 cm^2. **5.** 280, 6 cm^3. **6.** 37, 1 cm^3. **7.** 50 cm^3. **8.** 214, 3 cm^3. **9.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **10.** 0, 12 dm^3. **11.** 18 cm. **12.** а) ќе се зголеми 2 пати, б) ќе се зголеми 9 пати.

IV. 16 - стр. 177

1. а) кружница, б) кружница, в) круг, г) бочна површина, д) отсечка. **4.** а) R = 4 cm, s = 7 cm, б) R = 7 cm, s = 4 cm, в) R = 3,5 cm, s = 4 cm, г) R = 2 cm, s = 7 cm. **5.** Таква точка постои. Тоа е средината на висината. **6.** а) 56 cm^2, б) 18 cm^2. **7.** 5 dm. **8.** 4 dm^2. R = 7, 5 cm, H = 15 *cm*. **10.** 6, 5 *cm*. **11.** 69, 28 cm^2. **12.** Правоаголник.

IV. **18** - стр. 180

1. а) 6, 87 dm^2, б) 20, 68 dm^2. **2.** 13, 5 dm^2. **3.** а) 18, 9 dm^2, б) 42, 4 dm^2, в) 4, 7 m^2. **4.** 9, 5 cm. **5.** 616 cm^2. **6.** 5, 8 m^2. **7.** 7, 54 m^2 лим. **8.** 289 cm^2. **9.** 268, 5 cm^2. **10.** 10, 6 dm^2. **11.** 988 cm^2. **12.** π.

IV. **19** - стр. 183

1. а) 153 cm^3, б) 603 cm^3. **2.** 1356, 5 cm^3, б) 6, 28 dm^3. **3.** 137 l. **4.** 2, 5 m. **5.** 8 m. **6.** 62, 8 cm^3. **7.** 6, 37 dm. **8.** 15072 l. **9.** $\approx$ 10 km. **10.** 33 dm^2. **11.** $\approx$ 2, 2 dm^3. **12.** $\approx$ 85 g.

IV. **20** - стр. 186

1. а) кружница, б) круг, в) конусна бочна површина, г) конус. **2.** а) круг, б) рамнокрак триаголник и тоа е оскиниот пресек. **4.** R = 3 cm, s = 5 cm. **5.** Постои и таа може да се добие како центар на опишаната кружница околу кој било оскин пресек. **6.** а), б) не може. **7.** а) 60cm^2, б) 30, 72cm^2, в) 9, 72 cm^2. **8.** 62,35 cm^2. **10.** R = 7,2 cm. **11.** а) 15,59 cm^2, б) 18 cm^2, в) 15, 59 cm^2.

IV. **21** - стр. 188

4. 108°. **5.** 216°. **6. Упатство**. Генератрисата на конусот има должина 6 cm. **Одговор**. 2, 5 cm. **7.** 3, 6 cm. **8.** Правоаголен триаголник. **9.** а) ако R < H, б) ако R = H, в) ако R > H. **10.** $P = \frac{lr}{2}$.

IV. **22** - стр. 189

1. а) 148, 5 cm^2, б) 7, 03 dm^2. **2.** а) 176 cm^2, б) 20 cm^2, в) 174 cm^2. **3. Упатство**. Радиусот на кружниот исечок претставува генератриса на конусот. Определи го прво радиусот на конусот. **Одговор**. P $\approx$ 2, 67 dm^2, H $\approx$ 1, 09 dm. **4.** а)115, 5 cm^2, б) 151 cm^2. **5.** 151 cm^2. **6.** 1206 cm^2. **7.** 8, 34 m^2. **8.** а) 1 : 2, б) 1 : 3. **9.** M = 314 cm^2, P = 471 cm^2. **10.** 3, 7 dm. **11.** 502, 4 cm^2. **12.** 160 cm^2.

IV. **23** - стр. 192

1. а) 307, 72 cm^3, б) 37, 68 cm^3, в) 8 dm^3, г) 2,96 cm^3. **2.** а) 391 cm^3, б) 1865 cm^3, в) 154 cm^3. **3.** 26, 17m^3. **4.** 148,5 dm^3. **5.** 1, 58 cm. **6.** 193, 5 cm^3. **7. Упатство**. Најди го прво радиусот на добиениот конус. **Одговор**. 65, 1 dm^3. **8.** 37, 68 cm^3. **9.** P $\approx$ 198 cm^2, V $\approx$ 218,45 cm^3. **10.** 9, 85 dm^3. **11.** P $\approx$ 142 cm^2, V $\approx$ 67cm^3. **12. Упатство**. Добиеното тело претставува цилиндар на кого од едната страна му е прилепен конус, а од другата страна е извлечен ист таков конус. **Одговор**. P = 80π $\approx$ 251, 2 cm^2, V = 80π $\approx$ 251,2 cm^3.

IV. **24** - стр. 195

1. Сфера S(T, 4, 5 cm). **2.** Круг, точка или празно множество. **3.** *r* = 3 cm, L = 18,84 cm, P = 28, 26 cm^2. **4.** R = 5cm. **5.** L = 44, 4 cm, P $\approx$ 157 cm^2. **6.** 28 287 km. **7.** 3 cm. **8.** 5 cm. **9.** Низ дијаметрално спротивни точки. **10.** 339,12 cm^2; 452,16 cm^2; 339,12 cm^2.

IV. 25 - стр. 197

1. а) $153,86\ cm^2$, б) $12,56\ dm^2$, в) $2461,76\ cm^2$. **2.** $113,04\ cm^2$. **3.** $113,04\ cm^2$. **4.** $509554140\ km^2$. **5.** 4 : 9. **6.** а) 1 : 2, б) 2 : 3, в) 2 : 5. **7.** а) 2 пати, б) 3 пати, в) 5 пати, г) 10 пати. **8.** а) 7, 81 cm, б) 3, 32 cm. **9.** $416,8\ m^2$. **10.** а) 121 пати, б) 484 пати. **11.** а) $254,34\ cm^2$, б) $763,02\ cm^2$. **12.** Ако радиусот на основата е R, тогаш двете тела имаат плоштина $3\pi R^2$. **Забелешка**. За плоштина на полутопка земи ја предвид и плоштината на големиот круг.

IV. 26 - стр. 198

1. а) $65,42\ cm^3$, б) $268\ cm^3$, в) $7234,56\ cm^3$. **2.** а) $P = 254,34\ cm^2$, $V = 381,5\ cm^3$, б) $P = 21,23\ dm^2$, $V = 9,2\ dm^3$, в) $P = 28,26\ dm^2$, $V = 14,13\ dm^3$. **3.** $1,175\ m^3$. **4.** Чашите собираат подеднакво. **5.** $P = 154\ cm^2$, $V = 180\ cm^3$. **6.** 1, 67 dm. **7. Упатство.** Добиената топка ќе има волумен еднаков на збирот од волумените на двете топки. **Одговор**. 8 cm. **8.** 105 163 000 000 km^3. **9.** 6, 45 cm. **10.** 6 cm. **11.** 20983 hl. **12.** $V_K + V_T = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{6\pi R^3}{3} = 2\pi R^3 = V_Ц$.

Задачи за повторување и утврдување - IV - стр. 199

1. 4. **2.** 4. **3.** Да. **4. Упатство**. Избери две точки од едната права и една точка од втората права. Тие се неколинеарни и определуваат една рамнина. Тоа е бараната рамнина. Покажи дека таа рамнина е единствена. **5.** Ако p не е паралелна со Σ, тогаш p ја прободува рамнината Σ во некоја точка P. Но, паралелните прави p и q определуваат рамнина Π и притоа $P \in \Pi$. Правата q минува низ P (зошто?), па добиваме дека правите p и q се сечат во точка P - контрадикција. **6.** 8, 06 cm. **7.** $365,5\ cm^3$. **8.** $P = 248\ cm^2$, $V = 240\ cm^3$. **9.** Може. **10.** $P \approx 89,6\ cm^2$, $V = 34\ cm^3$. **11.** Пакетот ќе содржи 150 кутии а неговиот волумен ќе биде $3375\ cm^3$. **12.** $a = 6$ cm, $H = 4,9\ cm^3$. **13.** $91 cm^2$. **14.** $47\ cm^2$. **15.** $P \approx 360\ cm^2$, $V \approx 400\ cm^3$. **16.** $P \approx 45\ cm^2$, $V \approx 15,6\ cm^3$. **17.** 11, 5 литри во секунда. **18.** $376,8\ cm^2$. **19.** $P \approx 208\ cm^2$, $V \approx 226\ cm^3$. **20.** Може да помине, и ќе му останат уште 3,1 литри бензин. **21.** $P \approx 177\ cm^3$, $V \approx 140\ cm^3$. **22.** $P \approx 51,4\ cm^2$, $V \approx 30,5 cm^3$. **23.** $P = \pi H^2, V = \frac{1}{3}\pi H^3$. **24.** а) $P \approx 301\ cm^2$, $V \approx 452\ cm^3$, б) $P \approx 452\ cm^2$, $V \approx 553\ cm^3$. **25.** а) $P \approx 160\ cm^2$, $V \approx 160\ cm^3$, б) $P \approx 272\ cm^2$, $V \approx 226\ cm^3$. **26.** 975 g. **27.** 2, 25 cm. **28.** 216. **29.** $1\frac{1}{3}$ km. **30.** $\approx 48\%$.

Задачи за самоконтрола - IV - стр. 201

1. 6. **2.** A', B' и C' се колинеарни и B' лежи помеѓу A' и C'. **3.** 8 dm, **4.** $280,6\ cm^3$. **5.** 9, 2 cm. **6.** $V = 288\ cm^3$, $P = 341\ cm^2$. **7.** 5 dm. **8.** $V_1 : V_2 = (\pi b^2 a) : (\pi a^2 b) = b : a$. **9.** $2922,8\ cm^2$. **10.** 9 cm. **11.** 38 026 656 km^2. **12.** $R^3_1 : R^3_2$.

АЗБУЧНИК НА ПОИМИТЕ

Агол меѓу
- две прави 137
- две рамнини 138
- права и рамнина 137

Аксиома за паралелност 127
Апотема на пирамида 164
Бројна оска 67
Бочна површина
- на конус 185
- на пирамида 162
- на призма 142

Бочни ѕидови
-на пирамида 163
- на призма 143

Бочни рабови
- на пирамида 163
- на призма 143

Висина на
- конус 185
- пирамида 163
- призма 143
- цилиндар 176

Веројатност 120
- на настан 120

Волумен на
- квадар 155
- коцка 155
- пирамида 172
- права призма 153
- тело 154

Генератриса на
- конус 185
- цилиндар 176

Геометриско тело 139
-, валчесто 140
-, рабесто 140
-, ѕидови на 140
-, рабови на 140
-, површина на 140
-, темиња на 140

График на
- линеарна равенка 98
- функција 82

Дијагонала на
- квадар 146
- коцка 147
- паралелопипед 145
- призма 143

Дијагонална рамнина 144
Дијагонален пресек на
- призма 144
- пирамида 165

Димензии на квадар 145
Дијаграм

Евклидова теорема 28
Еквивалентни
- равенки 50
- неравенки 69
- системи равенки 105

Идентитет 46
Интервал 67
-, бесконечен 68
-, затворен 67
-, отворен 67
-, полуотворен 67

Ѕидови
-, бочни
- на паралелопипед 140

Квадар 155
Коцка 155
Коефициент на пропорционалност 7
Колинеарни точки 128
Компланарни точки 129
Конус
-, прав кружен 184
-, основа на 185
-, врв на 185
-, радиус на 185
-, мрежа на 187
-, оскин пресек на 185

Линеарна равенка
- со една непозната 55
- со две непознати 97
-, нормален вид на 55
-, график на 98

Линеарна неравенка
- со една непозната 73

Линеарна функција 80
-, график на 82

Мрежа на призма 147
- на пирамида 167
- на конус и цилиндар 187, 178

Настан
-, невозможен 118
-, случаен 118
-, поволен 120
-, спротивен 121

Неравенка
- со една непозната 63
- со две непознати 63
-, решение на 69
-, линеарна 64

Неравенство 62
-, бројно 63
- со променлива 63
-, алгебарско 63
-, двојно 65

Однос на периметрите на два слични триаголника 21
Однос на плоштините на два слични триаголника 24

Основа на
- призма 142

- пирамида 168
- конус 191
- цилиндар 182
Паралелопипед 151
-, дијагонали на 152
-, спротивни ѕидови на 152
Пирамида
-, правилна 170
-, основни рабови на 169
-, врв на 168
Питагорова теорема 30
Плоштина на
- конус 194
- пирамида 174
- призма 155
- сфера 201
- цилиндар 185
Површина
-, бочна 168, 148, 191
-, ротациона 181
-, кружна цилиндрична 181
-, кружна конусна 190
Полиедар
-, ѕидови на 146
-, рабови на 146
-, темиња на 146
Популација 124
-, обем на 125
Прави 133
-, паралелни 137
-, разминувачки 137
Примерок 125
-, обем на 125
Пресек
-, паралелен 150, 183
-, дијагонален 150
-, оскин 183, 191
Призма
-, права 149
-, коса 149
-, правилна 150
-, паралелен пресек на 150
Проектирање
- на точка 135
-, ортогонално 135
-, паралелно 134
-, косо 135
Проекција 135
Проектирачки правец 135
Пропорционални отсечки 7, 28
Пропорција 6
Размер
-, обратен 5
-, вредност на 5
-, продолжен 6

Равенка
- со една непозната 47
- со две непознати 47
-, непознати на 47
-, решение на 48
-, дефинициона област на 46

Растојание од точка до рамнина 140
Равенство 45
Рамнини 127
-, паралелни 132
-, нормални 138
Решавање на систем линеарни равенки
-, метод на замена 104
-, метод на спротивни коефициенти 106
-, метод на графичко решавање 109

Систем линеарни равенки
- со две непознати 100
-, хомоген 101
Систем линеарни неравенки 77
Сличност
-, коефициент на 17
-, признаци за 19
Статистичка маса 119
Сфера
-, мала кружница на 194
-, голема кружница на 194
-, плоштина на 195
Талесова теорема 11
Тетраедар 163
-, правилен 194
Тангентна рамнина
- на топка 194
Топка
-, радиус на 193
-, дијаметар на 194
-, голем круг на 194
-, мал круг на 194
-, центар на 193
-, волумен на 197
Триаголник
-, Египетски 31
-, Индиски 31
Фигури 127
-, просторни 127
-, рамнински 127
-, слични 17
Функција
- на правата пропорционалност 81
-, линеарна 81
-, нула на 88
Цилиндар
-, прав кружен 176
-, радиус на 176
-, оска на 176
-, рамностран 174
-, оскин пресек на 177

СОДРЖИНА

Тема I

СЛИЧНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИ

А ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

I.1. Размер 5
I.2. Пропорционални отсечки 7
I.3. Делење на отсечка на еднакви делови 9
I.4. Талесова теорема 11
I.5. Примена на Талесовата теорема 13

Б СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

I.6. Слични фигури. Слични триаголници 16
I.7. Признаци за сличност на триаголниците 19
I.8. Однос на периметрите на два слични триаголника 21
I.9. Однос на плоштините на два слични триаголника 24
I.10. Примена на сличноста на триаголници 25

В ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

I.11. Сличност во правоаголен триаголник (Евклидови теореми) 28
I.12. Питагорова теорема 30
I.13. Примена на Питагоровата теорема во конструктивните задачи 33
I.14. Примена на Питагоровата теорема на рамнински геометриски фигури 36
Задачи за повторување и утврдување - I 42
Задачи за самоконтрола - I 43

Тема 2
ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА
ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

А ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

II.1. Равенство. Идентитет. Равенка 45
II.2. Видови равенки 47
II.3. Решение на равенка 48
II.4. Еквивалентни равенки 50
II.5. Основни својства на равенствата и равенките 51
II.6. Општ вид на линеарна равенка со една непозната 54
II.7. Решавање на линеарни равенки со една непозната 55
II.8. Примена на линеарна равенка со една непозната 58

Б ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

II.9. Неравенство и неравенка 62
II.10. Својства на бројните неравенства 64
II.11. Бројна оска. Интервали 67
II.12. Решение на неравенка. Еквивалентни неравенки 69
II.13. Теореми за еквивалентни неравенки 70
II.14. Решавање на линеарна неравенка со една непозната 73
II.15. Примена на линеарни неравенки со една непозната 75

В СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

II.16. Решение на систем линеарни неравенки со една непозната 77
II.17. Решавање на систем линеарни неравенки со една непозната 78

Г ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

II.18 Линеарна функција 80
II.19. График на функцијата $y = ax$ 82
II.20. График на функцијата $y = ax + b$ 84
II.21. Заемна положба на графиците на некои линеарни функции 86
II.22. Растење, опаѓање и нула на линеарна функција 88

II.23. Графичко решавање на линеарна равенка со една непозната 89
Задачи за повторување и утврдување - II 91
Задачи за самоконтрола - II 93

Тема 3
СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

А ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

III.1. Еквивалентни линеарни равенки со две непознати 97
III.2. Линеарна равенка со две непознати 95

Б СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

III.3. Систем од две линеарни равенки со две непознати 100
III.4. Графичко решавање на систем линеарни равенки со две непознати... 102
III.5. Еквивалентни системи 105
III.6. Решавање на систем линеарни равенки со две непознати
со метод на замена 107
III.7. Решавање на систем линеарни равенки со две непознати
со метод на спротивни коефициенти 109
III.8. Примена на системите линеарни равенки со две непознати 111

В РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

III.9. Принцип на Дирихле 114
III.10. Популација. Примерок 116
III.11. Настан. Сигурен и случаен настан 117
III.12. Системски и случаен избор на податоци 119
III.13. Веројатност на случаен настан 120
III.14. Експериментална проверка на резултатите 122
Задачи за повторување и утврдување - III 124
Задачи за самоконтрола - III 126

Тема 4

ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

А ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА ВО ПРОСТОРОТ

IV.1. Заемни положби на точки, прави и рамнини во просторот 127
IV.1.1. Заемна положба на точка и права 128
IV.1.2. Заемна положба на точка и рамнина 129
IV.1.3. Заемна положба на права и рамнина 129
IV.1.4. Заемна положба на две прави во просторот 130
IV.1.5. Заемна положба на две рамнини 132
IV.2. Паралелно проектирање и ортогонално проектирање 133
IV.2.1. Нормала на рамнина 133
IV.2.2. Паралелно проектирање 134
IV.2.3. Ортогонално проектирање 135
IV.3. Агли меѓу прави и рамнини 137
IV.4. Геометриски тела 139

Б ПРИЗМА

IV.5. Поим и елементи на призмите 141
IV.6. Видови и пресеци на призмите 145
IV.7. Паралелопипед 145
IV.8. Мрежа на призма 147
IV.9. Плоштина на призма 149
IV.9.1. Плоштина на квадар и коцка 150
IV.9.2. Плоштина на некои правилни и некои прави призми 151
IV.10. Волумен на призма 154
IV.10.1. Општо за волумен на телата 154
IV.10.2. Волумен на квадар и коцка 155
IV.10.3. Волумен на права призма 158

В ПИРАМИДА

IV.11. Поим и елеменети на пирамидата ... 162
IV.12. Видови и својства на пирамидите. Дијагонален пресек ... 163
IV.13. Мрежа на пирамида ... 166
IV.14. Плоштина на пирамида ... 168
IV.15. Волумен на пирамида ... 172

Г ЦИЛИНДАР

IV.16. Поим и елементи на цилиндарот. Пресеци на цилиндар ... 175
IV.17. Мрежа на цилиндар ... 178
IV.18. Плоштина на цилиндар ... 179
IV.19. Волумен на цилиндар ... 181

Д КОНУС

IV.20. Поим и елементи на конусот. Оскин пресек ... 184
IV.21. Мрежа на конус ... 186
IV.22. Плоштина на конус ... 188
IV.23. Волумен на конус ... 190

Ѓ ТОПКА

IV.24. Поим за сфера и топка ... 193
IV.25. Плоштина на сфера ... 195
IV.26. Волумен на топка ... 197
Задачи за повторување и утврдување - IV ... 199
Задачи за самоконтрола - IV ... 201

Одговори и упатства ... 203

Азбучник на поимите ... 217