ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 11 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1? *Егор Бакаев*
4	2. Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник? *Егор Бакаев*
5	3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3. *Егор Бакаев*
5	4. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB — точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$. *Егор Бакаев*
	5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если
3	а) $m = 99$;
3	б) $m = 100$? *Егор Бакаев*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 11 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

3 1. Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p+n$?

Борис Френкин

4 2. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK — биссектриса в треугольнике ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD.

Егор Бакаев, Александр Зимин

4 3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

Егор Бакаев

4. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

2 а) $m = 99$;

2 б) $m = 100$?

Егор Бакаев

5 5. Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

Георгий Жуков

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

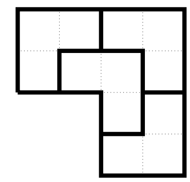
Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток — выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).



2 а) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

3 б) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

Егор Бакаев

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

2 а) $k = 9$;

4 б) $k = 8$?

Александр Шаповалов

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника

3 а) не больше $3P/4$, где P — периметр этого треугольника;

5 б) не меньше $3p/4$, где p — полупериметр этого треугольника.

Лев Емельянов

8 **4.** Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Александр Шаповалов

8 **5.** В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

Павел Кожевников

6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

3 а) числа 1, 2, 4;

7 б) любые 100 различных действительных чисел?

Koh, Bong-Gyun (Южная Корея)

10 **7.** У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

Михаил Евдокимов

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

3 **1.** Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

Борис Френкин

6 **2.** Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

Павел Кожевников

6 **3.** Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше, чем $1/2016$.

Александр Храбров

7 **4.** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180°.

Максим Дидин

5. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2\pm0,5)\pm0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

2 а) числа 1, 2, 4;

6 б) любые 100 различных действительных чисел?

Koh, Bong-Gyun (Южная Корея)

6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

6 а) $h=17$ см;

6 б) $h=18$ см?

Михаил Евдокимов

12 **7.** Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

Никита Гладков

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 28 февраля 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке — ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки — ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков? *Егор Бакаев*
4	2. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $60°$. Пусть H — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают). *Александр Зимин*
5	3. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016? *Фольклор, предложил Михаил Евдокимов*
5	4. В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены черным цветом, а остальные клетки — белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике черных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.) *Егор Бакаев*
5	5. На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами? *Михаил Евдокимов*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 28 февраля 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Точку внутри выпуклого четырехугольника соединили со всеми вершинами и с четырьмя точками на сторонах (по одной на стороне). Четырёхугольник оказался разделен на восемь треугольников с одинаковыми радиусами описанных окружностей. Докажите, что исходный четырёхугольник — вписанный. *Егор Бакаев*
4	2. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016? *Фольклор, предложил Михаил Евдокимов*
4	3. В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены черным цветом, а остальные клетки — белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике черных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.) *Егор Бакаев*
6	4. Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и находит приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он выбирает из списка любые два числа, складывает их, отбрасывает у суммы знаки после запятой (если они есть) и записывает результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он делает то же самое, и так далее, пока в списке не останется одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме? *Михаил Евдокимов*
	5. На каждом из 12 рёбер куба отметили его середину. Обязательно ли сфера проходит через все отмеченные точки, если известно, что она проходит
3	а) через какие-то 6 из отмеченных точек;
3	б) через какие-то 7 из отмеченных точек? *Михаил Евдокимов*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.

Алексей Толпыго

2. Существуют ли такие целые числа a и b, что

2 — а) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет?

3 — б) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет?

(Знаком $[k]$ обозначается целая часть числа k, то есть наибольшее целое число, не превосходящее k.)

Александр Храбров

6 — 3. Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.

Илья Богданов

8 — 4. Художник-абстракционист взял деревянный куб $5 \times 5 \times 5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов — чёрный, белый или красный — так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)

Михаил Евдокимов

8 — 5. Пусть p — простое число, большее 10^k. Взяли число, делящееся на p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, делящееся на p. В него вставили k-значное число B — между двумя соседними цифрами числа A, — и результат снова оказался делящимся на p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр.

Илья Богданов

9 — 6. Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения?

Изяслав Вайнштейн

7.

5 — а) Есть $2n + 1$ батареек ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

5 — б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

Александр Шаповалов

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа. *Алексей Толпыго*
5	2.	Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$. *Илья Богданов*
6	3.	Пусть M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE \neq CF$ и $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Найдите $\angle AEM$. *Максим Прасолов*
8	4.	В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос «есть ли дорога между ними?». Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов. *Константин Кноп*
8	5.	На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. (Многочлен называется приведённым, если его старший коэффициент равен 1.) Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на любые два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, такие что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней. *Александр Кузнецов*
	6.	Напомним, что палиндром — это слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево.
4	а)	Есть неограниченный набор карточек со словами «abc», «bca», «cab». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?
6	б)	Есть неограниченный набор красных карточек со словами «abc», «bca», «cab» и синих карточек со словами «cba», «acb», «bac». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек? *Александр Грибалко, Иван Митрофанов*
	7.	На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов? Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки. Решите задачу в случаях:
4	а)	$N = 3$;
6	б)	$N = 4$. *Александр Бердников*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 20 марта 2016 г.

1. На доске написано произведение $\log_{\bigcirc}\square\cdot\ldots\cdot\log_{\bigcirc}\square$, всего 50 множителей. У Васи есть 100 карточек: $\boxed{2}$, ..., $\boxed{51}$ и (52), ..., (101). Вася выкладывает круглые карточки на места кружочков и квадратные — на места квадратиков. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может получить Вася.

Георгий Жуков

2. На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K, затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM, полученные таким образом, касаются одной окружности.

Егор Бакаев

3. Прямоугольник $p\times q$, где p, q — натуральные взаимно простые числа, $p < q$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите суммарный периметр всех этих треугольников.

Алексей Толпыго

4. На сборах теннисистов было 30 мастеров и 30 юниоров. Каждый мастер сыграл с одним мастером и пятнадцатью юниорами, а каждый юниор — с одним юниором и пятнадцатью мастерами. Докажите, что найдутся такие два мастера и два юниора, что эти мастера сыграли между собой, юниоры — между собой, каждый из двух мастеров — хотя бы с одним из двух юниоров, а каждый из двух юниоров — хотя бы с одним из двух мастеров.

Александр Грибалко

5. В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?

Михаил Евдокимов

6. На доске написано N чисел: все они различны, и одно из них равно 0. Можно взять любой ненулевой многочлен, каждый коэффициент которого равен одному из написанных чисел (среди коэффициентов могут быть равные), и дописать на доску все корни этого многочлена. За несколько таких операций на доске оказались все целые числа от -2016 по 2016 (и возможно ещё какие-то числа). Найдите наименьшее возможное значение N.

Георгий Жуков