35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 16.2.2014.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena

---

poeni	zadatak	
3	1.	Dato je 100 realnih brojeva. Svaki broj je povećan za 1. Ispostavilo se da je suma kvadrata svih brojeva ostala nepromenjena. Odrediti kako će se suma kvadrata promeniti, ako još jednom svaki broj povećamo za 1.
4	2.	Oljina mama je ispekla 15 pitica: 7 sa kupusom, 7 sa mesom i jednu sa višnjama, a nakon toga ih je poređala u krug, baš u tom redosledu, u smeru kretanja kazaljki na satu. Olja želi da pojede piticu sa višnjama. Sve pitice izgledaju identično i Olja ne zna koja je sa višnjama, ali zna da su pitice poređane u navedenom redosledu. Da li Olja može da pojede piticu sa višnjama ako joj je dozvoljeno da proba najviše 3 od ostalih pitica?
4	3.	Polja tablice dimenzije 7×5 popunjena su brojevima. Petar ne zna koji je broj na kom polju, ali zna da je suma brojeva u svakom pravougaoniku dimenzije 2×3 (i 3×2) jednaka 0. Ukoliko ga zanima koji je broj na nekom konkretnom polju, Petar tu informaciju plaća 100 dinara. Koji je najmanji broj dinara potreban Petru da bi saznao kolika je ukupna suma brojeva na svim poljima tablice?
5	4.	Na stranici BC trougla ABC uočena je tačka L takva da je $AL = 2 \cdot CM$, pri čemu je M sredina stranice AB. Ukoliko je $\angle ALC = 45^o$, dokazati da je $AL \perp CM$.
6	5.	Ali Baba i 40 razbojnika žele da pređu preko Bosforskog moreuza. Oni su se poređali u vrstu: Ali Baba na čelu vrste, a za njim 40 razbojnika. Ali Baba je u prijateljskim odnosima sa svojim susedom i sa razbojnikom koji stoji pored njegovog suseda; svaki drugi čovek iz vrste je u prijateljskim odnosima jedino sa ljudima koji stoje pored njega. Za prelazak preko moreuza, oni imaju samo jedan čamac koji može da preveze 2 ili 3 čoveka odjednom (nije dozvoljeno da se samo jedan čovek vozi u čamcu, niti više od 3 čoveka). Takođe, svi ljudi u čamcu moraju da budu međusobno u prijateljskim odnosima. Da li Ali Baba i 40 razbojnika sigurno mogu da pređu preko moreuza?

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 16.2.2014.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena

---

poeni	zadatak	
4	1.	Džeki ima 36 kamenčića čije su mase 1 gram, 2 grama, ..., 36 grama. Čen ima super-lepak takav da je jedna njegova kap dovoljna da spoji dva kamenčića u jedan (sa dve kapi lepka je moguće spojiti tri kamenčića u jedan itd). Čen želi da spoji neke kamenčiće tako da u novonastalom skupu kamenčića Džeki neće moći da izabere jedan ili više njih sa ukupnom masom od tačno 37 grama. Odrediti koliko je najmanje kapi lepka potrebno da bi Čen ispunio svoj cilj.
4	2.	Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ su međusobno normalne. Neka su M i N tačke na stranicama AD i CD, redom, takve da su uglovi $\angle ABN$ i $\angle CBM$ pravi. Dokazati da je AC paralelno sa MN.
5	3.	Ali Baba i 40 razbojnika žele da pređu preko Bosforskog moreuza. Oni su se poređali u vrstu: Ali Baba na čelu vrste, a za njim 40 razbojnika. Ali Baba je u prijateljskim odnosima sa svojim susedom i sa razbojnikom koji stoji pored njegovog suseda; svaki drugi čovek iz vrste je u prijateljskim odnosima jedino sa ljudima koji stoje pored njega. Za prelazak preko moreuza, oni imaju samo jedan čamac koji može da preveze 2 ili 3 čoveka odjednom (nije dozvoljeno da se samo jedan čovek vozi u čamcu, niti više od 3 čoveka). Takođe, svi ljudi u čamcu moraju da budu međusobno u prijateljskim odnosima. Da li Ali Baba i 40 razbojnika sigurno mogu da pređu preko moreuza?
5	4.	Prirodni brojevi a, b, c i d su uzajamno prosti po parovima i važi $$ab + cd = ac - 10bd.$$ Dokazati da među njima postoje tri broja tako da je jedan od njih jednak sumi preostala dva.
5	5.	Tri šetača – Miške, Marko i Nikola se šetaju po stranicama i dijagonalama konveksnog četvorougla $ABCD$. Miške počinje u temenu A i šeta se maršutom $AB - BC - CD$. Marko se šeta duž dijagonale AC; on kreće iz A u isto vreme kad i Miške i stiže u C u isto vreme kad i Miške. Nikola se šeta duž dijagonale BD; on kreće iz B u isto vreme kada Miške prolazi kroz B i stiže u D u isto vreme kad i Miške. Da li se može destiti da se Marko i Nikola nađu u istom trenutku u preseku dijagonala AC i BD? Brzine svih šetača su konstantne.

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Napredna prolećna varijanta, 1.3.2014.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je student osvojio najveći broj poena

---

points	problems
3	1. Deda Mraz je deci podelio 47 čokoladica i 74 štrudlica. Svaka devojčica dobila je za jednu više čokoladicu od svakog dečaka, a svaki dečak dobio je za jednu više štrudlicu od svake devojčice. Koliko je dece bilo?
5	2. Petar želi da obeleži neka polja table 5×5 tako da Vasa nije u mogućnosti da na tu tablu postavi nekoliko figurica u obliku slova L sastavljenih od 3 kvadratića, tako da su sva obeležena polja pokrivena postavljenim figuricama, kao i da se nikoje dve figurice ne preklapaju, niti neka figurica viri sa table. Koji je najmanji broj polja koji Petar treba da obeleži da bi u ovome uspeo?
6	3. Na kvadratni sto stavljena je kvadratna krpa, ne obavezno iste veličine, tako da na krpi nema prevoja i nabora. Svi uglovi stola ostali su nepokriveni, a svi delovi krpe koji vise sa stola su trougaoni. Poznato je da su dva susedna viseća dela podudarna. Dokazati da su i druga dva viseća dela podudarna.
7	4. Kralj je pozvao dva čarobnjaka i rekao im je sledeće: "Prvi će zapisati 100 ne obavezno različitih prirodnih brojeva, a drugom će biti zadatak da pogodi koji su brojevi zapisani (ako ima jednakih, onda mora pogoditi za svaki broj koliko je puta zapisan). Prvi čarobnjak može da pomogne drugom čarobnjaku na sledeći način. On može da sastavi listu međusobno različitih prirodnih brojeva takvu da je svaki broj sa te liste ili jednak nekom zapisanom broju, ili jednak sumi nekih zapisanih brojeva. Drugi čarobnjak ne sme da zna koji su od brojeva sa liste jednaki zapisanom broju a koji su suma zapisanih brojeva, ali na osnovu te liste treba da pogodi koji su brojevi zapisani. Bilo kakvog dodatnog dogovora među vama ne sme da bude. Ako u tome ne uspete, pogubiću vas, a ako uspete, za svaki broj sa liste otkinuću vam po jednu dlaku sa brade". Odrediti najmanji broj dlaka koje čarobnjaci moraju da izgube po ceni da ostanu živi.
7	5. U ravni je dato nekoliko belih i nekoliko crnih tačaka i između svake dve tačke različitih boja konstruisana je duž. Svakoj duži dodeljen je jedan prirodan broj. Ispostavilo se da ako krenemo od jedne tačke i krećemo se po dužima tako da se nakon nekoliko koraka vratimo u tu tačku, proizvod brojeva pridruženih dužima po kojima se krećemo kada idemo od bele tačke do crne, jednak je proizvodu brojeva pridruženih dužima po kojima se krećemo kada idemo od crne tačke do bele. Da li odatle sledi da je moguće svakoj tački pridružiti po jedan prirodan broj tako da je broj pridružen svakoj duži jednak proizvodu brojeva pridruženih njenim temenima?
9	6. Kocka $3 \times 3 \times 3$ sastavljena je od kockica $1 \times 1 \times 1$. Koji je najveći broj kockica $1 \times 1 \times 1$ koje možemo ukloniti, tako da preostalo telo zadovoljava: 1) Projekcija tela na ravan svake strane prvobitne kocke je kvadrat 3×3; 2) Od bilo koje kockice možemo doći do bilo koje druge kockice prelazeći iz kockice u njoj susednu kockicu (susedne kockice su one koje dele jednu stranu)?
9	7. Na kružnici u smeru kretanja kazaljki na satu date su tačke $A_1, A_2, ..., A_{10}$, koje se mogu podeliti u 5 parova dijametralno suprotnih tačaka. U početku se u svakoj tački nalazi po jedan skakavac. Svakog minuta, jedan skakavac preskače jednog od svojih suseda i dolazi u tačku na kružnici tako da se rastojanje između njega i preskočenog skakavca nije promenilo. Pri tome, nije dozvoljeno preskočiti bilo kog drugog skakavca, niti doći u već okupiranu tačku. Nakon nekog trenutka, u tačkama $A_1, A_2, ..., A_9$ nalazio se po jedan skakavac, a deseti je bio na luku $A_9A_{10}A_1$. Da li odatle sledi da je taj skakavac obavezno bio u tački A_{10}?

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Napredna prolećna varijanta, 1.3.2014.

Stariji uzrast (2. 3. i 4. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je student osvojio najveći broj poena

---

points	problems	
3	1.	Maša je napisala nekoliko jedinica i između njih dopisala znake $+$ i $\cdot$, kao i neke zagrade i kao rezultat dobila 2014. Miška je sve znake $+$ zamenio sa $\cdot$, a znake $\cdot$ zamenio je znakom $+$ i takođe dobio 2014. Da li je ovo moguće?
	2.	Da li je tačno da se svaki konveksan poligon može podeliti pravom na dva poligona jednakih obima i jednakih
4	a)	najdužih stranica?
4	b)	najkraćih stranice?
6	3.	Kralj je pozvao dva čarobnjaka i rekao im je sledeće: "Prvi će zapisati 100 ne obavezno različitih pozitivnih realnih brojeva, a drugom će biti zadatak da pogodi koji su brojevi zapisani (ako ima jednakih, onda mora pogoditi za svaki broj koliko je puta zapisan). Prvi čarobnjak može da pomogne drugom čarobnjaku na sledeći način. On može da sastavi listu međusobno različitih realnih brojeva takvu da je svaki broj sa te liste ili jednak nekom zapisanom broju, ili jednak sumi nekih zapisanih brojeva. Drugi čarobnjak ne sme da zna koji su od brojeva sa liste jednaki zapisanom broju a koji su suma zapisanih brojeva, ali na osnovu te liste treba da pogodi koji su brojevi zapisani. Bilo kakvog dodatnog dogovora među vama ne sme da bude. Ako u tome ne uspete, pogubiću vas, a ako uspete, za svaki broj sa liste otkinuću vam po jednu dlaku sa brade". Odrediti najmanji broj dlaka koje čarobnjaci moraju da izgube po ceni da ostanu živi.
7	4.	U koordinatnoj ravni obeležene su sve tačke sa celobrojnim koordinatama (x, y) takvim da je $0 \leq y \leq 10$. Koliko najviše obeleženih tačaka može istovremeno pripadati grafiku jednog polinoma 20-tog stepena sa celobrojnim koeficijentima.
8	5.	Dat je nejednakokraki trougao. Petar i Vasa igraju sledeću igru: u jednom potezu prvo Petar odabere jednu tačku u ravni, a Vasa odabere da li će obojiti tu tačku u crveno ili plavo. Petar pobeđuje ako se može naći trougao sličan onom datom i takav da su mu sva tri temena obojena istom bojom. Pronaći minimalan broj poteza potreban Petru da bi pobedio, bez obzira na početni trougao i Vasinu igru.
9	6.	U nekoj zemlji svakom gradu je dodeljen po jedan broj, tako da su svi dodeljeni brojevi međusobno različiti. Za svaka dva od dodeljenih brojeva, zapisano je da li su gradovi sa tim brojevima povezani direktnom avionskom linijom, ili nisu. Poznato je da za bilo koja dva dodeljena broja M i N, moguće je izvršiti drugačije dodeljivanje brojeva gradovima, tako da se gradu kome je bio dodeljen broj M sada dodeli broj N, a da zapis među kojim "brojevima" postoji direktna avionska linija i dalje ostane potpuno tačan. Da li odatle sledi da je za svaka dva dodeljena broja M i N moguće drugačije dodeliti brojeve gradovima, tako da grad koji je imao broj N sada ima broj M i da grad koji je imao broj M sada ima broj N, a da zapis među kojim "brojevima" postoje linije i dalje bude tačan?
10	7.	Dat je polinom $P(x)$ takav da je $P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x),$ gde je $Q(x)$ takođe polinom. Dokazati da je u polinomu $(P(x) + 1)^{100}$ koeficijent uz x^{99} jednak nuli.

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 13 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3 1. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

Б. Френкин

4 2. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

К. Кноп

4 3. Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b). Пусть натуральное число n таково, что

$$(n, n+1) < (n, n+2) < \cdots < (n, n+35).$$

Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

Б. Френкин

5 4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$. Докажите, что $KL = BC$.

Е. Бакаев

6 5. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

Е. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 13 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3 1. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

К. Кноп

4 2. На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника: YBA и ZAC — во внешнюю сторону, а XBC — внутрь (соответственные вершины перечисляются в одинаковом порядке). Докажите, что $AYXZ$ — параллелограмм.

фольклор, предложил А. Бердников

4 3. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a, b будем обозначать $[a, b]$. Пусть натуральное число n таково, что

$$[n, n+1] > [n, n+2] > \dots > [n, n+35].$$

Докажите, что $[n, n+35] > [n, n+36]$.

Б. Френкин

5 4. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

Е. Бакаев

6 5. Космический аппарат сел на астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат прополз по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там построили точную трехмерную модель траектории аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ползал аппарат?

Е. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

5 1. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

Г. Жуков, Н. Косинов

5 2. Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

Н. Авилов

6 3. В треугольнике ABC угол C прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

Р. Гордин

7 4. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

Е. Бакаев

9 5. В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

П. Кожевников

10 6. Число

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если $3n+1$ — простое число, то числитель получившейся дроби делится на $3n+1$.

М. Малкин

12 7. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Е. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
5	1. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного? *Е. Бакаев*
6	2. Найдите все n, для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^ℓ, где $0 \le k, \ell \le n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^\ell$ не будут иметь общих точек. *Г. Жуков*
6	3. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BD, BE лежат на одной окружности. *А. Заславский*
7	4. Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых? *Bong-Gyun Koh (Южная Корея)*
	5. Существуют ли такие две функции f и g, принимающие только целые значения, что для любого целого x выполнены соотношения:
3	а) $f(f(x)) = x, \quad g(g(x)) = x, \quad f(g(x)) > x, \quad g(f(x)) > x$?
5	б) $f(f(x)) < x, \quad g(g(x)) < x, \quad f(g(x)) > x, \quad g(f(x)) > x$? *Л. Стунжас*
9	6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник? *Е. Бакаев*
14	7. На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причём через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.) *А. Шаповалов, А. Лебедев*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 16 февраля 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько? *А. В. Шаповалов*
4	2. Мама испекла одинаковые с виду пирожки: 7 с капустой, 7 с мясом и один с вишней, и выложила их по кругу на круглое блюдо именно в таком порядке. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. Оля знает, как лежали пирожки, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Оле наверняка добиться этого, надкусив не больше трех невкусных пирожков? *А. В. Хачатурян*
4	3. Клетки таблицы 7×5 заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике 2×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы? *Е. В. Бакаев*
5	4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L так, что AL в два раза больше медианы CM. Оказалось, что угол ALC равен 45°. Докажите, что AL и CM перпендикулярны. *Р. Г. Женодаров*
6	5. На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящих в очереди — друзья, а Али-Баба ещё дружит с разбойником, стоящим через одного от него? *А. В. Шаповалов*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 16 февраля 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4

1. У Чебурашки есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, …, 36 г, а у Шапокляк есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить 3 камня двумя каплями и так далее). Шапокляк хочет склеить камни так, чтобы Чебурашка не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ей хватит, чтобы осуществить задуманное?

Е. В. Бакаев

4

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны. На сторонах AD и CD отмечены соответственно точки M и N так, что углы ABN и CBM прямые. Докажите, что прямые AC и MN параллельны.

А. А. Полянский

5

3. На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящих в очереди — друзья, а Али-Баба ещё дружит с разбойником, стоящим через одного от него?

А. В. Шаповалов

5

4. Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству
$$ab + cd = ac - 10bd.$$
Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

Б. Р. Френкин

5

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пешеход Петя выходит из вершины A, идёт по стороне AB и далее по контуру четырёхугольника. Пешеход Вася выходит из вершины A одновременно с Петей, идёт по диагонали AC и одновременно с Петей приходит в C. Пешеход Толя выходит из вершины B в тот момент, когда её проходит Петя, идёт по диагонали BD и одновременно с Петей приходит в D. Скорости пешеходов постоянны. Могли ли Вася и Толя прийти в точку пересечения диагоналей O одновременно?

Б. Р. Френкин

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 2 марта 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3 1. Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей?

А. В. Бакаев

5 2. На клетчатой доске 5×5 Петя отмечает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки неперекрывающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток (уголки разрешается класть только «по клеточкам»). Какое наименьшее число клеток должен отметить Петя, чтобы Вася не смог выиграть?

А. В. Шаповалов

6 3. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, ее размеры могут отличаться от размеров стола.)

Е. В. Бакаев

7 4. Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по натуральному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков?

И. И. Богданов

7 5. Дано несколько белых и несколько черных точек. От каждой белой точки идет стрелка в каждую черную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту из стрелок, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах?

А. А. Пахарев

9 6. Из кубиков $1\times 1\times 1$ склеен куб $3\times 3\times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

• со стороны любой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета — видны 9 кубиков фигуры);

• переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от любого кубика добраться до любого другого?

А. А. Марачев

9 7. На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, …, A_{10}, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, …, A_9, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}?

Е. В. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 2 марта 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Незнайка хвастается, что написал в ряд несколько единиц, поставил между каждыми соседними единицами знак «+» или «×», расставил скобки и получил выражение, значение которого равно 2014; более того, если в этом выражении заменить одновременно все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», все равно получится 2014. Может ли он быть прав? *В. А. Клепцын*
	2.	Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и
4	а)	равными наибольшими сторонами?
4	б)	равными наименьшими сторонами? *А. В. Шаповалов*
6	3.	Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по положительному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков? *И. И. Богданов*
7	4.	Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена? *Г. К. Жуков*
8	5.	Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)? *К. А. Кноп*
9	6.	Каждому городу в некоторой стране присвоен индивидуальный номер. Имеется список, в котором для каждой пары номеров указано, соединены города с данными номерами железной дорогой или нет. Оказалось, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N, но список по-прежнему будет верным. Верно ли, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N, город с номером N получит номер M, но список по-прежнему будет верным? *А. А. Пахарев, М. Б. Скопенков, А. В. Устинов*
10	7.	Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям: $$P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x), \text{ где } Q(x) - \text{некий многочлен.}$$ Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю. *Д. А. Звонкин*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 10 марта 2014 г.

---

1. В множестве $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ выбрали подмножество A. Оказалось, что никакой квадратный трехчлен, все три коэффициента которого принадлежат A, не имеет действительных корней. Какое наибольшее число элементов могло быть в A?

Г. Жуков

2. Дан треугольник ABC. Луч, проведенный из вершины B через середину AC, пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке P. Прямая PC пересекает прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла A, в точке Q. Докажите, что $BA = BQ$.

Ф. Ивлев

3. Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит *значимость* k, если после этого у него будет k статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы k статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?

И. Богданов, Е. Молчанов

4. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' — центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D — центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани — равные треугольники. Вневписанная сфера — это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

А. Заславский

5. В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили K клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что $K \geq 100$.

П. Кожевников

6. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрант $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Л. Стунжас