Ирена Стојменовска
Скопје

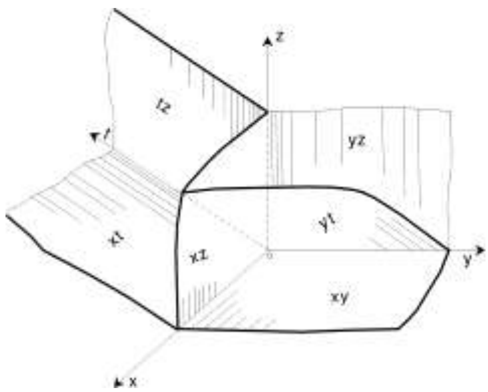
ЧЕТИРИДИМЕНЗИОНАЛНА КОЦКА

1. Четиридимензионален простор

При воведувањето на четиридимензионалниот простор немаме можност да се служиме со нагледни геометриски претстави, бидејќи просторот кој нé опкружува е тродимензионален. Но, во еднодимензионалниот, дводимензионалниот и тридимензионалниот простор геометриските поими можат да се претстават и аналитички (со помош на добро познатиот метод на координати), па соодветната постапка ќе ја примениме и при воведувањето на четиридимензионалниот простор. Определувајќи ја точката од правата како реален број, точката од рамнината како подреден пар реални броеви, точката од тродимензионалниот простор - како подредена тројка реални броеви, сосема е природно геометријата на четиридимензио-налниот простор да се изгради со определување на точката како подредена четворка реални броеви. Геометриска фигура во овој замислен четиридимензионален простор ќе биде некое множество точки (како впрочем и кај "обичната" геометрија).

2. Координатни оски и рамнини

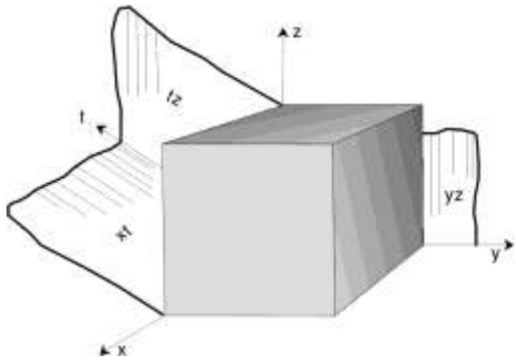
Точка во четиридимензионален простор се нарекува секоја подредена четворка (реални) броеви *(x,y,z,t)*.



Во еднодимензионалниот простор имавме една координатна оска, во дводимензионалниот - две, а во тродимензионалниот - три координатни оски, па природно е да четиридимензионалниот простор има четири координатни оски: *x*-оска множетсво точки $(x,0,0,0)$ $x\in R$, *y*-оска множетсво точки $(y,0,0,0)$ $y\in R$, *z*-оска множетсво точки $(z,0,0,0)$ $z\in R$, *t*-оска множетсво точки $(t,0,0,0)$ $t\in R$ Координатни рамнини во четиридимензионалниот простор се множества точки кај кои две од четирите координати имаат произволни (реални) вредности, а останатите две се еднакви на нула. Ги има вкупно шест (цртеж горе): рамнина *xy*- (множество точки $(x, y, 0, 0)$, $x,y \in R$), рамнина *xz*, рамнина *xt*, рамнина *yz*, рамнина *yt* и рамнина *zt*.

Секоја од овие координатни рамнини минува низ две координатни оски а низ секоја оска минуваат по три координатни рамнини. Сите шест координатни рамнини имаат една заедничка точка. Тоа е точката (0, 0, 0, 0) т.е. координатниот почеток. Но во четиридимензионалниот простор постојат и тридимензионални координатни "рамнини". Тоа се множествата точки кај кои три од четирите координати се произволни, а четвртата е еднаква на нула. Ги има вкупно четири: рамнина xyz - множество точки $(x, y, z, 0)$, $x, y, z \in R$; рамнина xyt - множество точки $(x, y, 0, t)$, $x, y, t \in R$; рамнина xzt - множество точки $(x, 0, z, t)$, $x, z, t \in R$ и рамнина yzt - множество точки $(0, y, z, t)$, $y, z, t \in R$.

Секоја од тридомензионалните координатни рамнини “минува” низ координатниот почеток и низ три координатни оски (изразот “минува” го употребуваме сакајќи да кажеме дека координатниот почеток и секоја од точките на оските ѝ припаѓаат на сооодветната “рамнина”). Секоја дводимензионална рамнина е пресек на две тридимензионални рамнини. На пример, рамнината xy е пресек на тридимензионалните рамнини xyz и xyt т.е. се состои од сите точки кои му припаѓаат на едното и на другото множество. На цртежот десно е претставена тридимензионалната координатна рамнина xyz (претставена како паралелопипед - таа ги содржи оските x, y и z и рамнините xy, xz и yz).



3. Растојание помеѓу точки во четиридимензионален простор

Методот на координати дава можност да се определи растојанието помеѓу две точки на правата, во рамнината и во просторот. Имено, растојанието меѓу точките $A(x_1)$ и $B(x_2)$ од еднодимензионалниот простор го пресметуваме со формулата $d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$ т.е. $d(A,B) = |x_1 - x_2|$; за растојанието меѓу точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2,, y_2)$ од рамнината имаме

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ ,$$

а пак растојанието меѓу точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ е

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\ .$$

Аналогно, растојание меѓу две точки $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$ од четиридимензионалниот простор е бројот $d(A, B)$ определен со:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}\ .$$

4. Четиридимензионална коцка

Коцка (т.е. “обичната” тродимензионална коцка) е множество точки (x, y, z) такви што $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$; $0 \le z \le 1$.

Забелешка. се разбира, во просторот има и други коцки. На пример, множеството точки определено со неравенствата: $-1 \le x \le 1$; $1 \le y \le 1$; $-1 \le z \le 1$ исто така претставува коцка. Тоа е коцка со специфична положба во однос на координатните оски - кооринатниот почеток е нејзин центар, а координатните оски и координатните рамнини се оски и рамнини на симетрија. Сепак, најпогодна за разгледување е токму коцката определена со претходните услови која ја нарекуваме “единечна”).

Квадрат (во рамнината) е множество точки (x, y), $0\leq x\leq 1$; $0\leq y\leq 1$ т.е. квадратот е дводимензионален аналог на коцката (затоа понекогаш се нарекува и “дводимензионална коцка”). Аналог на овие фигури во еднодимензионалниот простор (на правата), е множество точки x, $0\leq x\leq 1$ па можеме да сметаме дека сегментот е “еднодимензионална коцка”.

Четиридимензионална коцка е множество точки (x, y, z, t) кои ги задоволуваат неравенствата: $0\leq x\leq 1$; $0\leq y\leq 1$; $0\leq z\leq 1$; $0\leq t\leq 1$.

4.1. Градба на четиридимензионалната коцка

Ќе ги разгледаме по ред коцките со разни димензии. Сегментот е определен со неравенството $0\leq x\leq 1$ па неговатата граница ја сочинуваат две точки: 0 и 1. Останатите точки ќе ги наречеме внатрешни. Границата на квадратот се состои од четири точки и четири сегмента, т.е. има елементи од два вида: точки (темиња) и сегменти (ребра). Границата на тридимензионалната коцка има елементи од три вида: темиња - ги има осум, ребра - ги има дванаесет и страни (квадрати) - ги има шест. Доколку се договориме наместо со имињата на фигурите да се служиме со бројот n - еднаков на нивните соодветни димензи: за сегмент n=1, за квадрат n=2, за коцка n=3; наместо со имињата на елементите кои ги сочинувааат границите на фигурите - да се служиме со нивните соодветни димензии: за страна n=2, за ребро n=1, при што темето ќе го сметаме за елемент со димензија 0, ја добиваме следнава табела:

	димензија на граница		
димензија на коцка	0	1	2
1	2	-	-
2	4	4	-
3	8	12	6

Сакаме да го пополниме четвртиот ред од табелата. За таа цел, ќе се обидеме да заклучиме како се изградени границите на четиридимензионалната коцка.

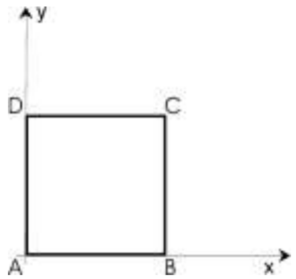
Границата на сегментот $(0\leq x\leq 1)$ се состои од две точки: $x = 0$ и $x = 1$.

Квадратот $(0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 1)$ има четири темиња: (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1, 1).

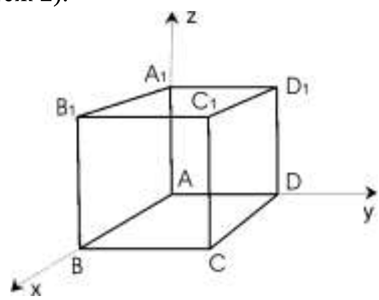
Коцката $(0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 1;\ 0\leq z\leq 1)$ има осум темиња: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).

Аналогно, темиња на четиридимензионална коцка: $0\leq x\leq 1;\ 0\leq y\leq 1;\ 0\leq z\leq 1;\ 0\leq t\leq 1$ се точки (x, y, z, t), при што x, y, z и t примаат вредност 0 или 1. Ги има вкупно шеснаесет: ако ги земеме комбинациите од три цифри (координатите на темињата на тродимензионалната коцка чиј број е осум) и ако кон секоја од овие тројки додадеме прво нула а потоа еден, од секоја тројка се ќе се добијат по две четворки, т.е. четиридимензионалната коцка има вкупно 8x2=16 темиња.

Кај квадратот ребрата беа определени со следните услови (цртеж 1): [$0\leq x\leq 1$, $y=0$] (ребро AB); [$x=1$, $0\leq y\leq 1$] (ребро BC); [$0\leq x\leq 1$, $y=1$] (ребро DC); [$x=0$, $0\leq y\leq 1$] (ребро AD). Кај точките од ребрата на тридимензионалната коцка, две од координатите имаат постојана вредност 0 или 1, а третата координата ги добива сите вредности помеѓу 0 и 1. На пример, [$x=0,\ y=0,\ 0\leq z\leq 1$] (ребро AA_1); [$0\leq x\leq 1,\ y=0,\ z=1$] (ребро A_1B_1); [$x=1,\ 0\leq y\leq 1,\ z=1$] (ребро B_1C_1), се некои од ребрата на тродимензионалната коцка (цртеж 2).



цртеж 1



цртеж 2

По аналогија, ребра на четиридимензионална коцка се множества точки кај кои сите координати освен една се постојани (еднакви на 0 или 1), а четвртата ги прима сите вредности од 0 до 1. За да го определиме нивниот број, ребрата на четиридимензионална коцка ќе ги поделиме во четири групи: нека во првата група променлива координата е x (при што $0\leq x\leq 1$), а y, z и t добиваат постојани вредности 0 или 1 во сите можни комбинации. Бидејќи постојат осум различни комбинации од тројки составени од нули и единици, во оваа група има осум ребра. Бројот на ребра од втората група - каде променлива координата е y ($0\leq y\leq 1,\ x,z,t\in\{0,1\}$) е исто така осум, како и бројот на ребрата од третата и четвртата група, т.е. четиридимензионалната коцка има вкупно 32 ребра.

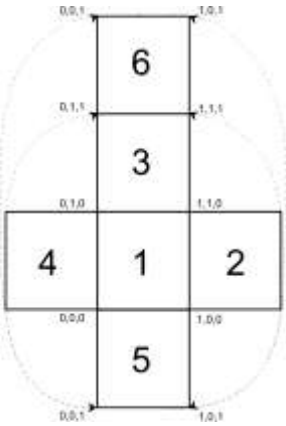
Кај тридимензионалната коцка, освен темиња и ребра, имаме и страни. Кај секоја од страните, две координати се менуваат (добивајќи ги сите можни вредности од 0 до 1), а една координата е постојана. На пример, страната ABB_1A_1 (цртеж 2) е определена со [$0\leq x\leq 1,\ y=0,\ 0\leq z\leq 1$].

Повторно по аналогија, имаме: дводимензионална страна (неопходноста од поточно именување на страната ќе ја објасниме подоцна) на четиридимензионална коцка е множество точки такви што две од координатите ги примаат сите вредности помеѓу 0 и 1, а останатите две се постојани (еднакви на 0 или 1). На пример, [$0\leq x\leq 1,\ y=0,\ 0\leq z\leq 1,\ t=1$] е една дводимензионална страна на четиридимензионалната коцка. Определи го бројот на дводимензионалните страни на четиридимен-зионална коцка. (упатство: искористи го бројот на ребра и страни на тридимензионалната коцка). Откако утврди дека четиридимензионалната коцка има 24 дводимензионални страни, можеме да ја пополниме и четвртата редица од претходната табела. Но, за да табелата биде пополна, потребно е да се додаде уште една колона. Имено, сегментот имаше само еден вид граница - точка, кај квадратот се додадоа ребрата, а кај коцката -квадратите т.е. дводимензионалните страни. Природно е да се очекува дека кај четири-димензионалната коцка, освен веќе познатите елементи (граници), ќе се појави и нов вид на граница чија димензија ќе биде еднаква на три.

	димензија на граница			
димензија на	0	1	2	3
1	2	-	-	-
2	4	4	-	-
3	8	12	6	-
4	16	32	24	?

Тридимензионална страна на четиридимензионална коцка е множество точки чии што три координати ги примаат сите вредности од 0 до 1, а една е постојана (еднаква е на 0 или 1). На пример, [$0\leq x\leq 1,\ y=0,\ 0\leq z\leq 1,\ 0\leq t\leq 1$] е една тридимензионална страна на четиридимензионалната коцка. Ги има вкупно осум: имаме само една постојана координата, за која пак, има две можни вредности 0 и 1, па значи кај четиридимензионалната коцка има вкупно 2x4=8 тродимензионални страни (претстави ги аналитички).

Откако ја согледавме градбата на четиридимензионалната коцка, веќе сме чекор поблиску до нејзината”геометриска претстава”.



Познато е дека тридимензионалната коцка можеме да ја претставиме со модел - во дводимензионална рамнина (цртеж 3). Со спојувањето на соодветните темиња од моделот, добиваме тридимензионална коцка. На сличен начин, обиди се да направиш модел на четиридимензионалната коцка. Тоа ќе биде тродимензионална фигура која ќе се состои од осум помали тродимензионални коцки. (Обиди се да ги означиш сooодветните темиња, ребра, дводимензионални и тродимензионални страни).

Цртеж 3

Во продолжение следуваат некои (елементарни) задачи за четиридимензионалната коцка.

1. Должината на секое ребро кај четиридимензионалната (единечна) коцка, како и кај квадратот, како и кај “обичната” коцка, е еднаква на еден (под должина на ребро подразбираме растојание меѓу темињата кои лежат на тоа ребро). Пресметај ги растојанијата помеѓу другите темиња на четиридимензионалната коцка (избери едно теме, најдобро темето (0, 0, 0, 0) и пресметај ги растојанијата од тоа теме до сите останати).

2. Со решавање на претходната задача, забележа дека сите темиња на четиридимензионалната коцка можат да се поделат во четири групи: темиња од прва група (кои се на растојание 1 од (0, 0, 0, 0)), темиња од втора група - на растојание $\sqrt{2}$, темиња од трета група - на растојание $\sqrt{3}$ и темиња од четврта група - на растојание $\sqrt{4}$=2 од координатниот почеток. Колку темиња (од секоја група) има кај четиридимензионалната коцка?

3. Сигурно утврди дека темињата (0, 0, 0, 0) и (1, 1, 1, 1) се најодалечени (тие се на растојание еднакво на 2). Овие темиња ќе ги наречеме спротивни, а отсечката која ги поврзува - главна дијагонала на четиридимензионалната коцка. Колку различни патишта водат од темето (0, 0, 0, 0) до спротивното теме (1, 1, 1, 1), ако се оди по ребрата на таа коцка? За секој од нив означи ги по ред темињата низ кои треба да се помине.
Забелешка: *како што забележа, најмалиот број на ребра низ кои треба да се помине за да се стаса од темето (0, 0, 0, 0) до темето (1, 1, 1, 1) е четири, па велиме дека темето (1, 1, 1, 1) е од четврти ред во однос на темето (0, 0, 0, 0).*

4. Познато е дека кај тродимензионалната коцка постојат четири пара меѓусебно спротивни темиња т.е. во тродимензионалната коцка можат да се повлечат четири главни дијагонали. Колку главни дојагонали можат да се повлечат во четиридимензионалната коцка?

5. Четиридимензионална коцка со центар во координатниот почеток е множество точки определено со : $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$. Пресметај ги растојанијата од темето (1, 1, 1, 1) до сите останати. Кои темиња ќе бидат темиња од прв ред во однос на темето (1, 1, 1, 1) (т.е. до кои темиња се доаѓа тргнувајќи од темето (1, 1, 1, 1) а минувајќи само преку едно ребро)? Кои темиња ќе бидат од втор ред? Кои од трет? А од четврти?