

ПРАВА И КРУЖНИЦА НА ОЈЛЕР

Великанот во математиката, Леонард Ојлер е роден во 1707 год. во Базел, Швајцарија. Првите математички знаења ги добил од својот татко, Паул Ојлер, кој бил свештеник. Таткото на Леонард настојувал неговиот син да ја продолжи семејната традиција, да стане свештеник, но Леонард иако во 1724 година завршил теологија се определил за изучување на природните науки. Тој се запишал на Базелскиот универзитет и успех ги завршил студиите по математика и механика. За неговите првни научни дострели посебна заслуга има Јохан Бернули, со кого Ојлер во младоста добра соработувал, и по чија препорака добил место во Руската академија на науки. Леонард на деветнаесет годишна возраст ја напишал својата докторска дисертација од областа на акустиката. Истата ја подготвува за учество на конкурсот за професор по физика на Базелскиот универзитет. Во 1731 година е избран за професор по физика, а две години подоцна веќе работел на катедрата по математика. Во 1727 година Леонард претстојува во Сан Петербург, а од 1741 година, на покана од царот Фридрих II, оди да работи во Академијата на науките во Берлин и тука останува до 1766 год. Недоразбирањата со Фридрих II се причина за повторното одење во Сан Петербург, каде останал до крајот на животот.

Леонард Ојлер во текот на шеесте годишната активна научна работа напишал околу 850 научни трудови од областа на математиката, физиката и астрономијата. Неговиот допринос во развојот на современата научна мисла е толку голем, што најголемите научници времето во кое живеел го нарекуваат "тек на Ојлер", а Лаплас на младите математичари им сугерираше: "Почитувајте го Ојлер, тој е учител на сите нас." Ојлер умрел во 1783 г.

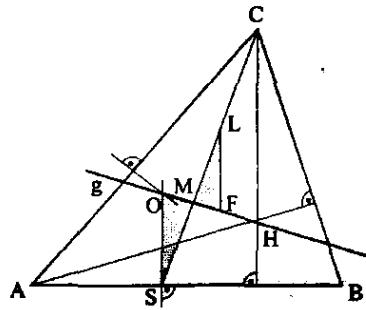
Во овој напис ќе ви презентираме две теореми на Леонард Ојлер.

Теорема 1. Ортоцентарот, тежиштето и центарот на описаната кружница на триаголникот лежат на една права.

Доказ. Ако триаголникот е рамнокрак или правоаголен, тогаш тврденьето е очиг-

ледно. Затоа нека претпоставиме дека триаголникот не е ниту рамнокрак, ниту правоаголен. Ќе го разгледаме случајот кога триаголникот е остроаголен и разностран (прт. 1). Во овој случај ортоцентарот H и центарот на описаната кружница O определуваат права p . Нека CS е тежишната линија повлечена од темето C и $M = p \cap CS$. Ќе докажеме дека точката M е тежишните на триаголникот ABC .

Со F и L да ги означиме средините на

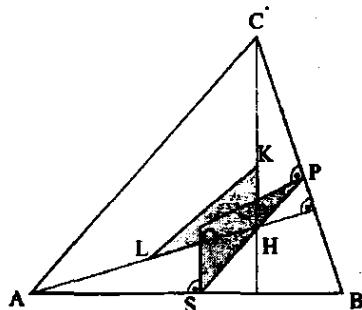


Црт. 1
отсечките MH и MC , соодветно. Тогаш, отсечката LF е средна линија за $\triangle MHC$, па е

$$(1) \quad \overline{CH} = 2\overline{LF}, \quad CH \parallel LF.$$

Ќе докажеме дека $\overline{CH} = 2\overline{OS}$, $CH \parallel OS$. Најавистина, ако P, L и K се средини на BC, AH и CH , соодветно, тогаш отсечките PS и LK се средни линии за $\triangle ABC$ и $\triangle AHC$, соодветно (прт.2). Според тоа, $\overline{PS} = 2\overline{LK}$, $PS \parallel LK$. Но, $LH \parallel OP$, $CH \parallel OS$. Значи, $\triangle LHK \cong \triangle POS$, односно $\overline{KH} = \overline{OS}$, т.е. $\overline{CH} = 2\overline{OS}$.

Од досега изнесеното и од (1) следува

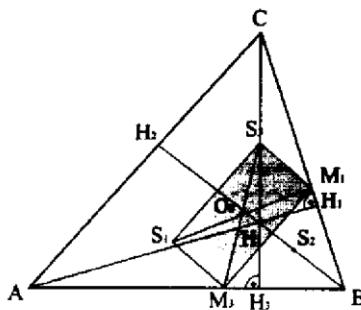


Црт. 2
дека отсечките OS и LF се паралелни и еднакви. Затоа $\triangle OSM \cong \triangle FLM$, од што следува дека $\overline{SM} = \overline{FL}$ и $\overline{LM} = \overline{SC}$, т.е.

$\overline{CM} : \overline{MC} = 2:1$. Следствено, точката M е тежиште на $\triangle ABC$.

Забелешка. Правата, на која лежат ортоцентарот, тежиштето и центарот на опишаната кружница околу еден триаголник ја нарекуваме **Ојлерова права**.

Теорема 2. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Ако со M_1, M_2, M_3 ги означиме средините на страните BC, CA, AB со H_1, H_2, H_3 подножните точки на висините спуштени од темињата A, B, C и со S_1, S_2, S_3 средините на отсечките AH, BH, CH , соодветно, тогаш точките $H_1, H_2, H_3, S_1, S_2, S_3, M_1, M_2, M_3$ лежат на една кружница, која ја нарекуваме **Ојлерова кружница** (прт. 3).



Прт. 3

Доказ. Отсечките S_1M_3 и M_1S_3 се средни линии на триаголниците ABH и BCH , соодветно, па затоа $S_1M_3 \parallel BH \parallel S_3M_1$ и $S_1M_3 = BH = S_3M_1$, т.е. четириаголникот $S_1M_3M_1S_3$ е паралелограм. Од друга страна $BH \perp AC$ и како $S_1S_3 \parallel AC$ и $S_1M_3 \parallel BH$ добиваме $S_1S_3 \perp S_3M_1$ т.е. четириаголникот $S_1M_3M_1S_3$ е правоаголник. Нека дијагоналиите на правоаголникот се сечат во точка O_o . Јасно, точките S_1, M_3, M_1, S_3 лежат на кружница $K(O_o, \overline{OM}_1)$. $\Delta M_3S_3H_3$ е правоаголен со хипотенеза M_3S_3 . Значи, $\overline{OH}_3 = \overline{OM}_3 = \overline{OS}_3$, т.е. $H_3 \in K(O_o, \overline{OM}_1)$.

Аналогијо се докажува дека H_1, H_2 лежат на кружницата $K(O_o, \overline{OM}_1)$.

Задача 1. Докажете дека во секој триаголник центарот на Ојлеровата кружница лежи на Ојлеровата права.

Решение. Ако триаголникот е разностран, тогаш при ознаките од прт. 2, точките O, M и H се различни и тие лежат на Ојлеровата права за $\triangle ABC$. Нека Ојлеровата кружница има центар O_o . Правата на Ојлер за $\Delta M_1M_2M_3$ минува низ неговите ортоцентар H_1 и тежиштето M_1 . Меѓутоа $H_1 = O$ и $M_1 = M$. Според тоа правите p и p_1 имаат две заеднички точки, што значи тие се совпаѓаат, т.е. точката O_o лежи на Ојлеровата права за $\triangle ABC$.

Задача 2 (теорема на Хамилтон). Докажете дека ако $\triangle ABC$ не е правоаголен и ако H е неговият ортоцентар, тогаш триаголниците ABC, ABH, BCH и ACH имаат заедничка Ојлерова кружница.

Упатство. Искористи дека подножните точки H_1, H_2, H_3 на $\triangle ABC$ се подножни точки на висини на оставатите триаголници.

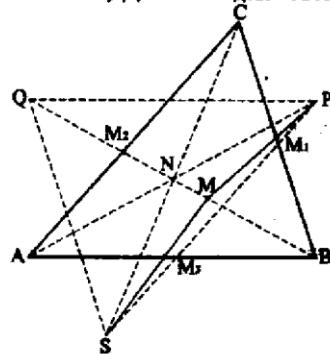
Задача 3. Даден е триаголник ABC и точка M во внатрешноста на триаголникот (прат. 4). Нека M_1, M_2, M_3 се средините на страните BC, CA, AB , соодветно. Точките P, Q и S ги избирааме така што $\overline{MM}_1 = \overline{M}_1P$, $\overline{MM}_2 = \overline{M}_2Q$ и $\overline{MM}_3 = \overline{M}_3S$.

Докажи дека:

a) Правите AP, BQ и CS минуваат низ една точка.

b) Триаголниците ABC и PQS имаат заедничка Ојлерова кружница.

Упатство. a) Докажете дека отсечките



Прт. 4

AP, BQ и CS низ една точка која ги расположува.

b) За двата триаголника разгледи ги кружниците кои минуваат низ средините на нивните страни.