

РЕШАВАЊЕ НА НЕКОИ СИСТЕМИ РАВЕНКИ СО КОРИСТЕЊЕ НА ВИЕТОВИТЕ ФОРМУЛИ

Љубомир Протиќ

Републички завод за унапредување
на воспитанието и образованието, Белград, Р. Србија

Примената на Виетовите формули во решавањето на системи равенки е прикажано низ примери.

Пример 1. Да се определат решенијата на системот равенки

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 209. \end{cases}$$

Решение. Непознатите u и s може да се сметаат како решенија на квадратната равенка $t^2 - 30t + 209 = 0$.

Решенијата на оваа квадратна равенка се 19 и 11. Едното од овие решенија е u , а другото s , а како доделувањето на овие вредности на непознатите може да се направи на два начина, почетниот систем има две решенија:

$$x_1 = 19, y_1 = 11 \text{ и } x_2 = 11, y_2 = 19.$$

Пример 2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Решение. Системот равенки може да се запише во облик

$$\begin{cases} (x + y) + xy = 11 \\ (x + y)xy = 30 \end{cases}$$

и со воведување на смената

$$\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases}$$

се добива системот

$$\begin{cases} u + v = 11 \\ uv = 30 \end{cases}$$

кој има решенија $u_1 = 6, v_1 = 5$ и $u_2 = 5, v_2 = 6$. Со овие решенија, за решавање се добиваат два системи равенки

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

чиј решенија се:

$$x_1 = 5, y_1 = 1; \quad x_2 = 1, y_2 = 5; \quad x_3 = 3, y_3 = 2; \quad x_4 = 2, y_4 = 3.$$

Пример 3. Да се реши системот равенки

$$(2) \quad \begin{cases} x + y = a \\ xy = b, \end{cases} \quad a, b \in R.$$

Решение. Слично како во примерот (1), за решавање се добива равенката $t^2 - at + b = 0$, од каде се определуваат решенијата на системот (2):

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}; \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, y_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Пример 4. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 27xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 10xy. \end{cases}$$

Решение. Очигледно е дека $xy \neq 0$. Имајќи го ова во предвид, со делење на двете равенки со us се добива

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{x} + 2)(y + \frac{1}{y} + 2) = 27 \\ (x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) = 10. \end{cases}$$

Понатаму, со воведување на смените $x + \frac{1}{x} = u; y + \frac{1}{y} = v$, за решавање

$$\text{се добива системот } \begin{cases} (u+2)(v+2) = 27 \\ uv = 10, \end{cases}$$

$$\text{односно системот } \begin{cases} u+v = \frac{13}{2} \\ uv = 10 \end{cases}$$

која е од обликот (2). Решенијата на овој систем равенки се

$$u_1 = 4, v_1 = \frac{5}{2}; \quad u_2 = \frac{5}{2}, v_2 = 4,$$

па користејќи ги воведените смени, решенијата на системот равенки се:

$$\begin{aligned} x_{1/2} = 2, y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}; \quad x_{3/4} = \frac{1}{2}, y_{3/4} = 2 \pm \sqrt{3}; \quad x_{5/6} = 2 \pm \sqrt{3}, y_{5/6} = 2; \\ x_{7/8} = 2 \pm \sqrt{3}, y_{7/8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + y^3 = 7(x + y). \end{cases}$$

Решение. Овој систем може да се запише во обликот

$$(1) \quad \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 19) = 0 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

а) Нека $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Тогаш од втората равенка

$$2x(x^2 - x^2 + x^2 - 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0; \quad x_{2/3} = y_{2/3} = \pm\sqrt{7}.$$

б) Нека $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Тогаш од првата равенка

$$2x(x^2 - x^2 + x^2 - 19) = 0$$

се добива (имајќи го во предвид резултатот под а))

$$x_{4/5} = \pm\sqrt{19}, y_{4/5} = \mp\sqrt{19}.$$

в) Нека $y \neq x$ и $y \neq -x$. Тогаш системот (3) е од облик

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7, \end{cases}$$

т.е.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6, \end{cases}$$

од каде се добиваат решенијата

$$x_{6/7} = \pm 3, y_{6/7} = \pm 2; \quad x_{8/9} = \pm 2, y_{8/9} = \pm 3.$$

Пример 6. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = b^4 \\ x + y = a, \quad ab \neq 0. \end{cases}$$

Решение. Нека означиме $t = x - y$. Решавајќи ја оваа равенка заедно со втората равенка од системот се добива

$$x = \frac{a+t}{2}, y = \frac{a-t}{2}.$$

Со замена на овие вредности во првата равенка од системот се добива $(a+t)^4 + (a-t)^4 = 16b^4$, односно биквадратната равенка

$$t^4 + 6a^2t^2 = 8b^4 - a^4.$$

Ако во последната равенка се воведо смената $t^2 = v$, се добива равенката $v^2 + 6a^2v + (a^4 - 8b^4) = 0$ која може да се реши.

Ако $v_1 = -3a^2 + \sqrt{8(a^4 + b^4)}$ е еден позитивен корен на претходната равенка, тогаш $t_1 = \sqrt{v_1}, t_2 = -\sqrt{v_1}$.

Враќајќи се на старите променливи, се добиваат решенијата:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{v_1}}{2}, y_1 = \frac{a - \sqrt{v_1}}{2}; \quad x_2 = \frac{a - \sqrt{v_1}}{2}, y_2 = \frac{a + \sqrt{v_1}}{2}.$$

Пример 7. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решение. $x_1 = 2, y_1 = 1; \quad x_2 = 1, y_2 = 2.$

Пример 8. Да се реши системот

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = a^5 \\ x + y = b, \quad ab \neq 0. \end{cases}$$

Решение. Прв начин:

Се воведува смената $t = x - y$ и се постапува како во примерот 6.

Втор начин:

Првата равенка од системот може да се трансформира на следиот начин

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = \\ &= (x+y)[x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 - xy(x^2 + y^2)] = \\ &= (x+y)\{(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 - xy[(x+y)^2 - 2xy]\} = \\ &= (x+y)\{[(x+y)^2 - 2xy]^2 - x^2y^2 - xy[(x+y)^2 - 2xy]\}. \end{aligned}$$

Бидејќи $x + y = b$ и означувајќи со $xy = t$, се добива

$$b[(b^2 - 2t)^2 - t^2 - t(b^2 - 2t)] = a^5$$

што претставува квадратна равенка по t . Рекавајќи ја оваа равенка се добиваат две вредности за t , т.е. за производот xy . На овој начин

задачата се сведува на решавање на две системи равенки од обликот (2).

Пример 9. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78, \end{cases} \quad x > 0, y > 0.$$

Решение. Системот може да се трансформира во обликот

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ (x + y)\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$$

и со воведување на смената $x + y = u, \sqrt{xy} = v$ се сведува на обликот

$$\begin{cases} u - v = 7 \\ uv = 78 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^2 - 2uv + v^2 = 49 \\ 2uv = 156. \end{cases}$$

Овој систем може да се запише како $\begin{cases} u^2 + v^2 = 205 \\ 2uv = 156 \end{cases}$

т.е. $\begin{cases} (u+v)^2 = 361 \\ (u-v)^2 = 49. \end{cases}$ За решавање на овој систем се разгледуваат следниве случаи:

а) $\begin{cases} u+v=19 \\ u-v=7 \end{cases}$ од каде $u = 13, v = 6$, т.е. $\begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases}$

и решенијата на почетниот систем се:

$$x_1 = 9, y_1 = 4; \quad x_2 = 4, y_2 = 9.$$

б) $\begin{cases} u+v=-19 \\ u-v=7 \end{cases}$

од каде $u = -6, v = -13$. Бидејќи $\sqrt{xy} = v$, почетниот систем нема реални решенија.

в) $\begin{cases} u+v=19 \\ u-v=-7 \end{cases}$

од каде $u = 6, v = 13$ Системот $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=169 \end{cases}$

нема реални решенија.

г) $\begin{cases} u+v=-19 \\ u-v=-7 \end{cases}$

дава $v < 0$, па системот (како во случајот б)) нема реални решенија.

Пример 10. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Решение. Ако се воведи смената $\sqrt[6]{xy} = t$, од првата равенка се добива $3t^3 - 7t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t^2 - 4t - 4) = 0$ од каде

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = -\frac{2}{3}.$$

Понатамошното решавање се сведува на решавање на три системи равенки од обликот (2) и решенијата на почетниата система се:

$$\begin{aligned}x_{1/2} &= 10 \pm 3\sqrt{11}, y_{1/2} = 10 \mp 3\sqrt{11}; \\x_3^2 &= 16, y_3 = 4; \\x_4 &= 4, y_4 = 16; \\x_{5/6} &= 10 \pm \frac{2\sqrt{18209}}{27}, y_{5/6} = 10 \mp \frac{2\sqrt{18209}}{27}.\end{aligned}$$

Пример 11. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27. \end{cases}$$

Решение. Ако првата равенка се степенува на трета степен се добива $x + y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 4^3 \Leftrightarrow x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 4^3$,

па системот равенки ќе го има обликот $\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$

чији решенија се: $x_1 = 27, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 27$.

Пример 12. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (x^2 + z^2)^2 = 294 \\ \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = \frac{50}{13}. \end{cases}$$

Решение Со воведување на ознаките $\begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ x^2 + z^2 = v \\ y^2 + z^2 = t \end{cases}$

почетниот систем се трансформира во $\begin{cases} u + v + t = 28 \\ u^2 + v^2 + t^2 = 294 \\ \frac{uv}{t} = \frac{50}{13} \end{cases}$

односно $\begin{cases} u + v = 28 - t \\ (u + v)^2 - 2uv + t^2 = 294 \\ uv = \frac{50}{13}t. \end{cases}$

Понатаму, очигледно е дека се добива квадратната равенка

$$(28 - t)^2 - 2 \cdot \frac{50}{13}t + t^2 = 294$$

чији решенија се $t_1 = 13$ и $t_2 = \frac{245}{13}$. Со замена на овие вредности на t , се определуваат вредностите за u и v , а потоа и за x, y, z . Решенијата се:

$$\begin{aligned}x_{1/2} &= \pm 1, y_{1/2} = \pm 3, z_{1/2} = \pm 2; \\x_{3/4}^2 &= \pm 1, y_{3/4}^2 = \pm 2, z_{3/4}^2 = \pm 3.\end{aligned}$$

Пример 13. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

Решение.

Прв начин на решавање:

Со воведување на ознаките

$$\lambda_1 = x+y+z; \quad \lambda_2 = xy+xz+yz; \quad \lambda_3 = xyz,$$

се добива дека

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_1^2 - 2\lambda_2 = 1, \quad \lambda_1^3 - 3\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 (= x^3 + y^3 + z^3),$$

односно $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$, па почетниот систем ќе гласи

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=0 \\ xyz=0. \end{cases}$$

Од третата равенка се добива дека или $x=0$, или $y=0$ или $z=0$, па лесно се добива дека

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 1;$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 0;$$

$$x_3 = 1, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = 0.$$

Втор начин на решавање:

Од

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \Rightarrow \\ 1 - 3xyz &= 1 - xy - xz - yz \Leftrightarrow 3xyz = xy + xz + yz = \\ &= \frac{1}{2}[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)] = \frac{1}{2}(1-1) = 0. \end{aligned}$$

Значи $xyz=0$, од каде следи дека или $x=0$, или $y=0$ или $z=0$.

а) Нека $x=0$, тогаш почетниот систем е $\begin{cases} y+z=1 \\ y^2+z^2=1 \\ y^3+z^3=1. \end{cases}$

Од првите две равенки на системот (првата равенка е квадрирана)

$$\begin{cases} y^2+z^2+2yz=1 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \text{ следи дека } yz=0, \text{ и.т.н. Аналогна постапка се}$$

спроведува и за случајот б) кога $y=0$, или за случајот в) кога $z=0$.

Пример 14. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+xz+yz=26 \\ xyz=24. \end{cases}$$

Решение. Користејќи ги особините на кубната равенка

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0$$

чиј решенија се $t_1=2, \quad t_2=3, \quad t_3=4$, за тројката променливи (x, y, z)

се добиваат следните решенија:

$$(2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2).$$

Пример 15. Да се реши системот
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=18 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4. \end{cases}$$

Решение. Ако првата равенка се квадрира и од неа се одземе втората равенка, се добива

$$(4) \quad xy+xz+yz=9.$$

Ако пак се квадрира третата равенка и од неа се одземе првата равенка се добива

$$(5) \quad \sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}=5.$$

Ако пак се квадрира равенката (5) и од неа се одземе равенката (4), се добива $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\sqrt{xyz}=8$.

Земајќи ја во предвид третата равенка од системот, последната равенка ќе гласи $\sqrt{xyz}=2$, т.е.

$$(6) \quad xyz=4.$$

Сега, разгледувајќи ги заедно сите равенки (4), (5) и (6), се добива

$$\text{системот равенки } \begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=9 \\ xyz=4, \end{cases}$$

која е аналогна со системот од примерот 14. Решенијата на системот равенки се:

$$x_1=1, \quad y_1=1, \quad z_1=4; \quad x_2=1, \quad y_2=4, \quad z_2=1; \quad x_3=4, \quad y_3=1, \quad z_3=1.$$
