Ристо Малчески
Алекса Малчески
Катерина Аневска
Методи Главче
Димитар Треневски

РЕПЕТИТОРИЈ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА – ПРВ ДЕЛ

Скопје, 2019

Рецензенти

Слаѓана Брсаковска
Даниел Велинов
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

510/511(075.3)(076)

РЕПЕТИТОРИЈ по елементарна математика. Д. 1 / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 199 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Катерина Аневска, Методи Главче, Димитар Треневски. - Библиографија: стр. 193-199

ISBN 978-608-4904-68-7
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Аневска, Катерина [автор] 4. Главче, Методи [автор] 5. Треневски, Димитар [автор]
а) Елементарна математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111968010

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава *Репетиториј по елементарна математика – прв дел* е наменета за ученици од средното образование. Идејата на оваа серија од четири збирки задачи е да овозможи повторување на материјалот за кој авторите сметаат дека е неопходен за успешно продолжување на студиите на полето на математиката, физиката, информатиката, електротехничките, машинските и градежните науки. Книгава содржи 508 решени задачи. Повеќето од задачите содржани во оваа книга се на ниво на задачите кои се задаваат на општинските и регионалните натпревари по математика, но во книгава се поместени и задачи кои се значително поголема тежина. Оттука, оваа збирка задачи може да им послужи и на учениците кои се подготвуваат за натпреварите по математика.

Во книгава четири одделни целини се обработени задачи од множествата и логиката, алгебарските изрази, задачи од теоријата на броеви и линеарните равенки и нивната примена Притоа, задачите се распределени по области. Така, на пример, задачите од теоријата на броеви се распределени во седум дела, и тоа: Воведни задачи, Деливост, Прости броеви. Најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател, Конгруенции, Диофантови равенки и Дополнителни задачи.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Даниел Велинов и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје — Авторите

јануари, 2020 г.

I МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

1. МНОЖЕСТВА

1. Најди ја унијата на множествата

а) $A=\{n\,|\,n\in\mathbb{N} \text{ и } n<9\}$ и $B=\{n\,|\,n\in\mathbb{N} \text{ и } n\geq 5\}$

б) $A=\{n\,|\,n=3k+1, k\in\mathbb{N}_0\}$ и $B=\{n\,|\,n=3k+2, k\in\mathbb{N}_0\}$.

Решение. а) За дадените множества имаме

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B=\{5, 6, 7, 8, ..., k, ...\},$$

па затоа $A\cup B=\mathbb{N}$.

б) Очигледно

$$A\cup B=\{n\,|\,n=3k+1 \text{ или } n=3k+2, k\in\mathbb{N}_0\}=\{n\,|\,n\in\mathbb{N} \text{ и } 3\nmid n\}.$$

2. Најди го пресекот на множествата

а) $A=\{n\,|\,n\in\mathbb{N} \text{ и } n<9\}$ и $B=\{n\,|\,n\in\mathbb{N} \text{ и } n\geq 5\}$

б) $A=\{n\,|\,n=3k+1, k\in\mathbb{N}_0\}$ и $B=\{n\,|\,n=4k+1, k\in\mathbb{N}_0\}$.

Решение. а) За дадените множества имаме

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } B=\{5, 6, 7, 8, ..., k, ...\},$$

па затоа $A\cap B=\{5, 6, 7, 8\}$.

б) Очигледно

$$A\cap B=\{n\,|\,n=3k+1 \text{ или } n=4k+1, k\in\mathbb{N}_0\}=\{n\,|\, n=12k+1, k\in\mathbb{N}_0\}.$$

3. а) Најди ја разликата на множествата

$$A=\{n\,|\,n>4, n\in\mathbb{N}\} \text{ и } B=\{n\,|\,n<14, n\in\mathbb{N}\}.$$

б) Најди ја разликата на множествата

$$A=\{n\,|\,-7<n<7, n\in\mathbb{Z}\} \text{ и } B=\{n\,|\,\tfrac{12}{n}\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}\}.$$

Решение. а) Имаме

$$A=\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...\} \text{ и}$$

$$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\},$$

па затоа $A\setminus B=\{14, 15, 16, 17, ...\}=\{n\,|\,n\geq 14, n\in\mathbb{N}\}$.

б) Имаме

$$A=\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ и}$$

$$B=\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

па затоа $A\setminus B=\{-5, 0, 5\}$.

4. а) Најди го комплементот на множеството $A=\{3, 4, 5\}$ во однос на множеството $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

б) Најди го комплементот на множеството $A=\{n\,|\,n=2k, k\in\mathbb{N}\}$ во однос на множеството $\mathbb{N}$.

Решение. а) Имаме ${}^{c}A=U\setminus A=\{1, 2, 6, 7, 8\}$.

б) Имаме

$$^{c}A=\mathbb{N}\setminus A=\mathbb{N}\setminus\{n\,|\,n=2k,\,k\in\mathbb{N}\}=\{n\,|\,n\neq 2k,\,k\in\mathbb{N}\}=\{n\,|\,n=2k-1,\,k\in\mathbb{N}\}\,.$$

5. а) Определи го Декартовиот птоизвод на множествата

$$M=\{1,2,3\} \text{ и } S=\{1,2,3,4\}\,.$$

б) Определи го Декартобиот квадрат на множеството $A=\{x,y,z\}$.

Решение. а) За множествата

$$M=\{1,2,3\} \text{ и } S=\{1,2,3,4\}$$

Декартовиот производ е

$$M\times S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),$$
$$(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}.$$

б) За множеството $A=\{x,y,z\}$ Декартовиот квадрат е

$$A^2=\{(x,x),(x,y),(x,z),(y,x),(y,y),(y,z),(z,x),(z,y),,(z,z)\}\,.$$

7. Определи го множеството B, ако за множествата A,B и C важи $A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,m,n,p,q\}$, $A\cap C=\varnothing$, $A\setminus B=\{e,m\}$ и $C\setminus B=\{c,p\}$.

Решение. Од $A\cap C=\varnothing$, $A\setminus B=\{e,m\}$ и $C\setminus B=\{c,p\}$ следува

$$(A\cup B\cup C)\setminus B=(A\cup C)\setminus B=(A\setminus B)\cup(C\setminus B)=\{c,e,m,p\}\,,$$

и како $B\subseteq A\cup B\cup C$ добиваме $B=\{a,b,d,n,q\}$.

8. Дадени се множествата $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{3,4,5\}$. Определи го множеството X за кое важи $A\cup X=A$ и $B\cap X=A\setminus(A\setminus B)$.

Решение. Имаме $A\cup X=\{1,2,3\}$, па затоа $X\subseteq\{1,2,3\}$. Понатаму, од $B\cap X=\{3\}$ следува $3\in X$. Според тоа, задачата има четири решенија и тоа:

$$X=\{3\},\ X=\{1,3\},\ X=\{2,3\} \text{ и } X=\{1,2,3\}\,.$$

9. Дадени се множествата $A=\{a\,|\,a\in\mathbb{N},\,a\leq 7\}$ и $B=\{b\,|\,b\in\mathbb{N},\,4\leq b<9\}$. Определи го множеството C за кое важи

$$C=\{c\,|\,c\in\mathbb{N},\,c=a-b,\,a\in A,\,b\in B\}\,.$$

Решение. Имаме, $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $B=\{4,5,6,7,8\}$. Според тоа,

$$\{d\,|\,d=a-b,\,a\in A,\,b\in B\}=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}\,,$$

па затоа $C=\{c\,|\,c\in\mathbb{N},\,c=a-b,\,a\in A,\,b\in B\}=\{1,2,3\}$.

10. Определи ги сите множества X за ои важи

$$X\subset\{2,3,4,5,6,7,8\} \text{ и } X\cap\{3,4,5,6\}=\{4,5\}\,.$$

Решение. Од $X\cap\{3,4,5,6\}=\{4,5\}$ следува дека $3\notin X$ и $6\notin X$ и $\{4,5\}\subseteq X$. Сега, бидејќи $X\subset\{2,3,4,5,6,7,8\}$ заклучуваме дека X е било кое од множествата: $\{4,5\};\{2,4,5\};\{4,5,7\};\{4,5,8\};\ \{2,4,5,7\};\ \{2,4,5,8\};\{4,5,7,8\}$ и $\{2,4,5,7,8\}$.

11. Определи ги сите множества X за кои важи $\{1,2,5,8\}\cup X=\{1,2,5,8\}$.

Решение. Од равенството $\{1,2,5,8\} \cup X = \{1,2,5,8\}$ следува дека $X \subseteq \{1,2,5,8\}$. Според тоа, X е било кое од множествата:

$$\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{5\}; \{8\}; \{1,2\}; \{1,5\}; \{1,8\}; \{2,5\}; \{2,8\};$$
$$\{5,8\}; \{1,2,5\}; \{1,2,8\}; \{1,5,8\}; \{2,5,8\}; \{1,2,5,8\}.$$

12. Определи го множеството P, ако за множествата $M.N$ и P важи

$$M \cup N \cup P = \{1,2,3,4,5\},\ M \cap N \cap P = \{1,4\},\ N \setminus P = \{2,5\} \text{ и } P \setminus M \neq \varnothing.$$

Решение. Од $M \cap N \cap P = \{1,4\}$ следува $1,4 \in P$. Понатаму, од $N \setminus P = \{2,5\}$ следува дека $2,5 \notin P$. Заради $P \setminus M \neq \varnothing$ во множеството P мора да биде елементот 3 и $3 \notin M$. Конечно, $P = \{1,3,4\}$.

13. Дадени се множествата $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ и $B = \{2,4,5,6,8\}$. Опедели го множеството X за кое се исполнети равенствата

$$A \cap X = \{3,4\} \text{ и } B \cup X = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Решение. Од равенството $A \cap X = \{3,4\}$ и $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ следува $\{3,4\} \subseteq X$ и $1,2,5,6,8 \notin X$. Понатаму, од

$$B \cup X = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ и } B = \{2,4,5,6,8\}$$

следува дека $5,7 \in X$ (нацртај Венов дијаграм). Според тоа, $X = \{3,4,5,7\}$.

14. Определи го множеството C, ако за множествата A,B и C важи

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\},\ A \cap B \cap C = \{1,4\},$$
$$B \setminus C = \{2,5,6\} \text{ и } C \setminus A \neq \varnothing.$$

Решение. Од $A \cap B \cap C = \{1,4\}$ следува $1,4 \in C$. Понатаму, од $B \setminus C = \{2,5,6\}$ следува дека $2,5,6 \notin C$. Од друга страна имаме $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$, па затоа $C = \{1,4\}$ или $C = \{1,3,4\}$. Но, $1,4 \in A$ и како $C \setminus A \neq \varnothing$, заклучуваме дека $C = \{1,3,4\}$.

15. Дадени се множествата

$$A = \{a,b,c,d,e\},\ B = \{a,d,f\},\ C = \{b,e,f,g\} \text{ и } D = \{a,f,g,h\}.$$

Определи го множеството S за кое важи

$$S \subseteq A,\ S \cap (B \cup D) = \varnothing,\ (A \cap C) \setminus S = \varnothing \text{ и } \{c\} \setminus S = \{c\}.$$

Решение. Имаме

$$B \cup D = \{a,d,f,g,h\} \text{ и } A \cap C = \{b,e\}.$$

Од $S \subseteq A$ и $S \cap (B \cup D) = \varnothing$ следува дека $S \subseteq \{b,c,e\}$. Понатаму, од

$$A \cap C = \{b,e\} \text{ и } (A \cap C) \setminus S = \varnothing$$

следува $b,e \in S$, а од $\{c\} \setminus S = \{c\}$ следува $c \notin S$. Конечно, $S = \{b,e\}$.

16. Определи го множеството N ако:

$$M \cup N \cup P = \{x \mid x \in N,\ x < 10\},\ M \cap P = \varnothing,\ M \setminus N = \{6,8\},\ P \setminus N = \{3,2\}.$$

Решение. Имаме, $M\cup N\cup P=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},\ x<10\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и како $M\cap P=\varnothing$. $M\setminus N=\{6,8\}$ и $P\setminus N=\{3,2\}$, заклучуваме дека $N=\{1,4,5,7,9\}$. Направи Венов дијаграм.

17. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,...,2008,2009\}$. Дали постојат множества A и B такви што $A\cup B=S,\ A\cap B=\varnothing$ и збирот на елементите на A е еднаков на збирот на елементите на B.

Решение. Имаме

$$S=1+2+3+...+2008+2009=\tfrac{2009\cdot(2009+1)}{2}=1005\cdot 2009\,.$$

Значи, збирот на сите елементи на множеството S е непарен и затоа множеството S не може да се подели на две дисјунктни множества со еднаков збир на елементите. Според тоа, не постојат множества A и B со саканите својства.

18. Дадено е множеството $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Определи ги сите множества A,B и C кои ги задоволуваат следниве услови:

$$A\cup B\cup C=S,\ A\cap B=B\cap C=C\cap A=\varnothing\,,$$

множеството A има помалку елементи од множеството B, множеството B има помалку елементи од множеството C и збирот на елементите на множествата A,B и C е еднаков.

Решение. Збирот на елементите на множеството S е 45, па затоа збирот на елементите на секое од множествата A,B и C треба да е $45:3=15$. Понатаму, бидејќи $9<15$ ниту едно множество не може да има еден елемент. Сега ако A има x елементи, тогаш B има $x+1$ и C има $x+2$ елементи. Затоа $x+x+1+x+2=9$, т.е. $x=2$. Според тоа, A има 2, B има 3 и C има 4 елементи. Едно решение на задачата е $A=\{6,9\},\ B=\{2,5,8\},\ C=\{1,3,4,7\}$. Задачата има уште пет решенија. Определи ги.

19. Дадени се множествата

$$A=\{n\,|\,n\in\mathbb{N},\ \tfrac{17}{11}<\tfrac{19+n}{13}\}\ \text{ и }\ B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},\tfrac{11}{17}\le\tfrac{5}{1,72+2x}\}\,.$$

Најди $A\cup B$, $A\cap B$ и $B\setminus A$.

Решение. Од $\frac{17}{11}<\frac{19+n}{13}$ следува $n>\frac{12}{11}=1,(09)$, па $A=\{2,3,4,5,...,n,...\}$. За да го одредиме множеството B, прво го запишуваме бројот $1,(72)$ како дропка. Имаме $a=1,727272...$ и $100a=172,7272...$, па затоа $99a=171$, т.е. $a=\frac{171}{99}=\frac{19}{11}$. Од $\frac{11}{17}\le\frac{5}{\frac{19}{11}+2x}$ добиваме $19+22x\le 85$, $x\le\frac{66}{22}=3$. Значи, $B=\{1,2,3\}$, па затоа $A\cup B=\{1,2,3,...,n,...\}=\mathbb{N}$ и $A\cap B=\{2,3\}$, $B\setminus A=\{1\}$.

20. Определи ги сите подмножества S од множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, такви што:

(1) $m,n\in S \quad\Rightarrow\quad m+n\in S$

(2) $m,n\in S \quad\Rightarrow\quad m\cdot n\in S$

(3) $(\forall m \in \mathbb{Z})$ $m \in S$ или $-m \in S$ или $m = 0$.

Решение. Нека $S \subseteq \mathbb{Z}$ ги задоволува условите од задачата. Бидејќи $1 \in \mathbb{Z}$ и $1 \neq 0$, од условот (3) следува дека $1 \in S$ или $-1 \in S$.

Ако $-1 \in S$, тогаш од (2) следува $1 = (-1)(-1) \in S$, па од (1) следува $0 \in S$. Сега, повторно од (1) следува $S = \mathbb{Z}$.

Ако $-1 \notin S$, тогаш бидејќи $1 \neq 0$ од (3) следува $1 \in S$, па од (1) следува дека $\mathbb{N} \subseteq S$. Сега, ако $0 \in S$, тогаш $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а ако $0 \notin S$, тогаш $S = \mathbb{N}$.

21. Можно ли е множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ да се разбие на две дисјунктни подмножества, така што во секое од нив разликата на кои било два елементи да не припаѓа на тоа множество?

Решение. Да претпоставиме дека такво разбивање постои и нека

$$A = B \cup C,\ B \cap C = \varnothing.$$

Ако $1 \in B$, тогаш од $2-1=1$ следува дека $2 \notin B$, т.е. $2 \in C$. Бидејќи $4-2=2$, добиваме дека $4 \notin C$, т.е. $4 \in B$, па затоа $3 \in C$. Веќе е очигледно дека 5 не може да припаѓа ниту на $B = \{1, 4\}$, ниту на $C = \{2, 3\}$. Имено, ако $5 \in B$, тогаш $5-4=1 \in B$, а ако $5 \in C$, тогаш $5-3=2 \in C$.

Следствено, такво разбивање не постои.

22. Колку најмногу цели броеви може да содржи конечно множество S такво што меѓу секои три елементи на множеството S постојат два различни броја чиј збир припаѓа на S?

Решение. Нека S е коначно множество од цели броеви такво што меѓу секои три елементи на S постојат два различни броја чиј збир припаѓа ма S. Ќе докажеме дека S не може да има повеќе од 7 елементи.

Нека претпоставиме дека S има барем три позитивни елементи. Нека се $a < b < c$ најголемите три елементи на S. Бидејќи $a + c > c$ и $b + c > c$, мора да важи $a + b \in S$. Но, $a + b > b$ и $a + b \in S$, па затоа $a + b = c$. Нека x е најголемиот елемент на множеството S кој е помал од a. Да ги разгледаме елементите x, b, c. Ако $x > 0$, тогаш $x + c > c$ и $b + c > c$, па мора да важи $x + b \in S$. Бидејќи $x + b > b$ мора да важи $x + b = c = a + b$, т.е. $x = a$, што не е можно. Значи, x не може да биде позитивен, т.е. S содржи точно 3 позитивни броја. Аналогно се докажува дека ако S содржи барем т3 негативни броја, тогаш S содржи точно 3 негативни броја. Со други зборови, S може да содржи најмногу 3 броја со ист предзнак. Значи, S може да иам најмногу 7 елементи (три позитивни, три негативни и 0). Пример на множество S со 7 елементи кое го има саканото својство е $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

23. Да се упрости изразот $[B \cap ((B \cup C) \setminus A)] \cup A$.

Решение. Од Венови дијаграми лесно се воочува дека

$$[B \cap ((B \cup C) \setminus A)] \cup A = A \cup B.$$

24. Нека *А*,*Б* и *Ц* се три множества такви што: $(A \cap C) \setminus B = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$ и $(B \cap C) \setminus A = \varnothing$.

Ако $|A\cap B\cap C|=2,\ |A|=2,\ |B|=6$ и $|C|=7,$ да се најде $|A\cap B\cap C|$.

Решение. Со примена на Венов дијаграм наоѓаме дека

$$|A\cap B\cap C|=0+4+5+2=11$$

25. Нека A,B и C се три множества такви што: $|(A\cap C)\setminus B|=1,$

$$|(A\cap B)\setminus C|=1 \text{ и } |(B\cap C)\setminus A|=1.$$

Ако $|A\cap B\cap C|=0,\ |A|=5,\ |B|=7$ и $|C|=8,$ да се најде $|A\cup B\cup C|$.

Одговор. $|A\cup B\cup C|=3+5+6+1+1+1=17$

26. Определи ги композициите на пресликувања $g\circ f$ и $f\circ g$ на пресликувањата $f:A\to B$ и $g:B\to C$, $A=B=C=\mathbb{R}$ определени со $f(x)=2x+5$ и $g(x)=5x+3$. Дали важи $f\circ g=g\circ f$.

Решение. Нека $A=B=C=\mathbb{R}$ и пресликувањата $f:A\to B$ и $g:B\to C$ нека се дадени со $f(x)=2x+5$ и $g(x)=5x+3$. Јасно, композициите $g\circ f$ и $f\circ g$ се дефинирани и притоа имаме

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+5)=5(2x+5)+3=10x+28$$

и

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(5x+3)=2(5x+3)+5=10x+11.$$

Последното покажува дека дури и во случај кога и двете композиции на пресликувања $g\circ f$ и $f\circ g$ се дефинирани, не важи $f\circ g=g\circ f$.

27. Нека се дадени множествата $\mathbb{N}$ и $M=\{2n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ и нека пресликувањето $f:\mathbb{N}\to M$ е определено со $f(k)=2k$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Докажи дека f е инјекција.

Решение. За секои $k,n\in\mathbb{N}$ такви, што $k\neq n$ важи $2k\neq 2n$ што значи $f(k)\neq f(n)$, т.е. f е инјекција.

28. Нека за пресликувањето $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ важи $f(x^2)-[f(x)]^2\geq\frac{1}{4}$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Докажи дека f не е инјекција.

Решение. За $x=0$ од $f(0)-[f(0)]^2\geq\frac{1}{4}$ следува $[f(0)-\frac{1}{2}]^2\leq 0$, па затоа $f(0)=\frac{1}{2}$. Понатаму, за $x=1$ од $f(1)-[f(1)]^2\geq\frac{1}{4}$ следува $[f(1)-\frac{1}{2}]^2\leq 0$, па затоа $f(1)=\frac{1}{2}$.

Според тоа, $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$, што значи дека два различни елементи имаат иста слика, па затоа f не е инјекција.

29. Нека се дадени множествата $\mathbb{N}$ и $M=\{2n-1\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ и нека пресликувањето $f:\mathbb{N}\to M$ е определено со $f(k)=2k-1$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Докажи дека f е сурјекција.

Решение. Нека $k \in \mathbb{N}$. Тогаш $2k-1 \in M$ и притоа важи $f(k)=2k-1$. Според тоа, за произволен k од $\mathbb{N}$ најдовме елемент во M кој е слика на k, што значи дека f е сурјекција.

30. Нека $a,b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Докажи дека пресликувањето $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определено со $f(x)=ax+b$ е биекција

Решение. Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш од $a \neq 0$ следува $ax_1 \neq ax_2$, па затоа

$$f(x_1)=ax_1+b \neq ax_2+b = f(x_2),$$

што значи дека f е инјекција. Понатаму, за секој $y \in \mathbb{R}$ важи $x=\frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ и притоа

$$f(x)=f(\tfrac{y-b}{a})=a\cdot\tfrac{y-b}{a}+b=y-b+b=y,$$

т.е. f е сурјекција.

Конечно, f е сурјекција и инјекција, па значи е биекција.

31. За множествата A и B ќе велиме дека се еквивалентн ако постои биекција $f:A \to B$. Притоа пишуваме $A \sim B$. Докажи дека $[0,1] \sim [a,b]$, за секои $a,b \in \mathbb{R}$, $b>a$.

Решение. Да го разгледаме пресликувањето $f(x)=b+(b-a)(x-1)$.

Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш следствено добиваме

$$x_1-1 \neq x_2-1$$
$$(b-a)(x_1-1) \neq (b-a)(x_2-1)$$
$$b+(b-a)(x_1-1) \neq b+(b-a)(x_2-1),$$

што значи $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. f е инјекција.

Од друга страна, за секој $y \in [a,b]$ имаме $0 \leq y-a \leq b-a$ и ако поделиме со $b-a>0$ добиваме $0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1$, па затоа

$$f(\tfrac{y-a}{b-a})=b+(b-a)(\tfrac{y-a}{b-a}-1)=b+(b-a)\tfrac{y-b}{b-a}=b+(y-b)=y$$

што значи дека f е и сурјекција.

Според тоа, f е инјекција и сурјекција, па е биекција, што значи дека $[0,1] \sim [a,b]$.

32. Кој од броевите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ треба да се отстрани, за да останатите осум броеви може да се разбијат на две групи, такви што збирот на квадратите во секоја од групите се еднакви меѓу себе?

Решение. **Т**реба да опреелиме број a и множества A и B такви што $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{a\}$ и

$$\sum_{x \in A} x^2 = \sum_{y \in B} y^2 .$$

Збирот на квадратите на сите броеви од $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е еднаков на

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2=285,$$

т.е. тоа е непарен број. Ако отстраниме парен број, тогаш збирот на квадратите на преостанатите броеви ќе биде непарен. Јасно, преостанатие броеви не можат да се разбијат на две дисјунктни подмножества кои имаат еднаков збир на квадрати.

Значи, треба да се отстрани непарен број. Задачата има пет решенија, т.е. може да се отстрани било кој непарен број.

а) $A=\{2,5,7,8\}$, $B=\{3,4,6,9\}$; отстранет е бројот 1.

$$2^2+5^2+7^2+8^2=142=3^2+4^2+6^2+9^2$$

б) $A=\{1,2,4,6,9\}$, $B=\{5,7,8\}$; отстранет е бројот 3.

$$1^2+2^2+4^2+6^2+9^2=138=5^2+7^2+8^2$$

в) $A=\{1,4,7,8\}$, $B=\{2,3,6,9\}$; отстранет е бројот 5.

$$1^2+4^2+7^2+8^2=130=2^2+3^2+6^2+9^2$$

г) $A=\{1,6,9\}$, $B=\{2,3,4,5,8\}$; отстранет е бројот 7.

$$1^2+6^2+9^2=118=2^2+3^2+4^2+5^2+8^2$$

д) $A=\{1,4,6,7\}$, $B=\{2,3,5,8\}$; отстранет е бројот 9.

$$1^2+4^2+6^2+7^2=102=2^2+3^2+5^2+8^2$$

33. Нека затворениот интервал $[0,1]$ е разделен на две дисјунктни множества A и B: $A\cup B=[0,1]$, $A\cap B=\varnothing$. Дали постои реален број a таков што $A+a=B$, каде $A+a=\{y\,|\,y=x+a,\, x\in A\}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a>0$ (во спротивен случај намесо со a ќе работиме со $-a$ и ќе ги смениме улогите на A и B). Најмала вредност која може да припаѓа на B е a, бидејќи во спротивен случај, ако $0<x<a, x\in B$, тогаш $x-a<a-a=0$ и $x-a\in A$ што не е можно. Според тоа $[0,a)\subseteq A$. Но, тогаш интервалот $[a,2a)$ е подмножество од B, и според тоа, тој е дисјунктен со A, па затоа $[2a,3a)\subseteq A$.

Ќе претпоставиме дека $3a>1$. Тгаш $[2a,1]\subseteq A$, и специјално $1\in A$, од каде добиваме дека $1+a\in B$. Тоа не е можно, бидејќи $B\subseteq[0,1]$. Значи, $[2a,3a)\subseteq A$.

Повторувајќи ја оваа постапка, добиваме дека

$$[4a,5a),[6a,7a),...,[2ka,(2k+1)a),...\subseteq A.$$

Последното противречи на изборот на множествата A и B. Навистина a е фиксен број, па според тоа постои $k_0\in\mathbb{N}$ таков што $(2k_0+1)a>1$.

Значи, такви множества и таков реален број не постојат.

34. Нека $A=(A_i)_{1\le i\le n}$ и $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ се две разбивања на множеството M, такви што унијата $A_i\cup B_j$, на произволни две дисјунктни множества A_i и B_j не содржи помалку од n елементи. Докажи дека $|M|\ge\frac{n^2}{2}$.

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата имаме

$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ \text{за } i \neq j,\ i, j = 1,2,...,n \text{ и } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = M .$$

Со $|A_i|, |B_j|,\ i, j = 1,2,3,...,n$ ќе го означиме бројот на елементи во множествата A_i и B_j, соодветно.

Множеството $S = \{|A_i|, |B_i| \vdots i = 1,2,...,n\}$ е конечно, па според тоа во него постои најмал елемент, т.е. постои $k \in S$, таков што

$$k \leq |A_i|,\ k \leq |B_i|,\ i = 1,2,...,n .$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $|A_1| = k$ (во спротивен случај, понатаму, наместо да работиме со множеството A_1 ќе работиме со некое множество A_i или B_i кое има k елементи).

Нека претпоставиме дека $k \leq \frac{n}{2}$. Ако претпоставиме спротивно, т.е. $k > \frac{n}{2}$, тогаш заради дисјунктноста на фамилиите множества имаме

$$|M| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| > \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2} = n\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} ,$$

што значи дека е точно тврдењето од задачата.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $B_1, B_2, ..., B_m$ се сите множества од фамилијата $B = (B_i)_{1 \leq i \leq n}$ кои имаат непразен пресек со множеството A_1, а $B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_n$ имаат празен пресек. Јасно, $m \leq k$. Заради $B_i \cap B_j = \varnothing \quad i \neq j,\ \ i, j = 1,2,...,n$, добиваме дека $(A_1 \cap B_i) \cap (A_1 \cap B_j) = \varnothing$, па според тоа

$$\begin{aligned} k &= |A_1| = |A_1 \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_m| \\ &= |(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_3) \cup ... \cup ((A_1 \cap B_m)| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |(A_1 \cap B_i)| \geq \sum_{i=1}^{m} 1 = m . \end{aligned}$$

Секое од множествата $B_1, B_2, ..., B_m$ содржи барем k елементи, и заради нивната дисјунктност, добиваме дека

$$|\bigcup_{i=1}^{m} B_i| = \sum_{i=1}^{m} |B_i| \geq \sum_{i=1}^{m} k = mk .$$

Од условите на задачата и од начинот на избор на $B_{m+1}, B_{m+2}, ..., B_n$, имаме

$$|A_1 \cap B_i| \geq n,\ i = m+1, ..., n .$$

Сега, од принципот за вклучување и исклучување имаме

$$|A_1 \cup B_j| = |A_1| + |B_j| - |A_1 \cap B_j| = k + |B_j| \geq n,\ \ j = m+1, ..., n ,$$

т.е. $|B_j| \geq n - k$. Тогаш

$$|\bigcup_{j=m+1}^{n} B_j| = \sum_{j=m+1}^{n} |B_j| \geq \sum_{j=m+1}^{n} (n-k) = (n-k)(n-m) .$$

Сега

$$|\bigcup_{j=1}^{n} B_j| = |\bigcup_{j=1}^{m} B_j \cup \bigcup_{j=m+1}^{n} B_j| = |\bigcup_{j=1}^{m} B_j| + |\bigcup_{j=m+1}^{n} B_j|$$
$$\geq km + (n-k)(n-m) = 2(k-\tfrac{n}{2})^2 + \tfrac{1}{2}n^2.$$

Изразот $2(k-\frac{n}{2})^2+\frac{1}{2}n^2$ достигнува минимум за $k=\frac{n}{2}$. Не е тешко да се провери дека равенство важи за $A_i = B_i$, $i=1,2,...,n$ и $|A_i|=|B_i|=\frac{n}{2}$, $i=1,2,...,n$.

35. Нека $A=(A_i)_{1\le i\le n}$, $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ и $C=(C_i)_{1\le i\le n}$ се разбивања на конечното множество M. За било кои i,j,k, $1\le i,j,k\le n$ е точно неравенството

$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\geq n.$$

Докажи дека $|M|\geq\frac{n^3}{3}$. Докажи дека за $n\in\mathbb{N}$, $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ важи знак за равенство.

Решение. Бидејќи $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M, за секои $i,k\in\{1,2,...,n\}$, таа е разбивање на A_i и C_k. Според тоа

$$\sum_{j=1}^{n}(|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|)=|A_i|+n|C_k\cap A_i|+|C_k|\geq n^2.$$

Бидејќи $A=(A_i)_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M тоа е разбивање и на множеството C_k, за секој $k=1,2,...,n$, па според тоа

$$\sum_{i=1}^{n}(|A_i|+n|C_k\cap A_i|+|C_k|)=|M|+n|M|+n|C_k|\geq n^3.$$

Конечно, бидејќи $C=(C_i)_{1\le i\le n}$ е разбивање на множеството M, добиваме дека

$$\sum_{k=1}^{n}(|M|+n|M|+n|C_k|)=n|M|+n|M|+n|M|\geq n^4.$$

Од последното неравенство добиваме дека $|M|\geq\frac{n^3}{3}$.

Нека $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ и M е множество со $\frac{n^3}{3}$ елементи. Множеството M ќе го разбиеме на n^2 множества $A_{i,j}$, $i=1,2,...,n; j=1,2,...,n$, такви што

$$A_{i,j}\cap A_{k,l}=\varnothing,\ (i,j)\neq(k,l) \text{ и } |A_{i,j}|=\tfrac{n}{3}.$$

Ќе ги формираме множествата

$$A_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{i,j}, \qquad B_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{j,i}, \qquad C_i=\bigcup_{j=1}^{n}A_{j,i+j-1(\mathrm{mod}\ n)}$$

Не е тешко да се провери дека $A=(A_i)_{1\le i\le n}$, $B=(B_i)_{1\le i\le n}$ и $C=(C_i)_{1\le i\le n}$ се разбивања на множеството M, при што

$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|=|A_{i,j}|+|A_{j+k-1(\mathrm{mod}\,n),j}|+|A_{i,k+i-1(\mathrm{mod}\,n)}|$$
$$=\tfrac{n}{3}+\tfrac{n}{3}+\tfrac{n}{3}=n.$$

2. ЛОГИКА

1. Миле и Златко пишувале домашна работа. Кога кај нив дошол Горан и ги запрашал по кои предмети пишуваат домашна работа тие одговориле:

Миле ,,Ако јас пишувам по математика, тогаш Златко пишува по македонски”

Златко: ,,Јас пишувам по македонски или Миле не пишува по математик”

Горан се подзамислил и рекол: ,,Вие или двајцата ја зборувате вистината или двајцата не ја зборувате вистината”

Дали Горан ја зборува вистината?

Решение. Со p и q да ги означиме следниве искази:

p : ,,Миле пишува домашна работа по математика”

q : ,,Златко пишува домашна работа по македонски”

Тогаш речениците на Миле и Златко се:

Миле: $p \Rightarrow q$

Златко: $q \vee \rceil p$

Бидејќи исказната формула $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \rceil p)$ е тавтологија добиваме дека Миле и Златко или истовремено ја зборуваат вистината или истовремено не ја зборуваат вистината. Значи Горан ја зборува вистината.

2. По натпреварот на кој учествувале Никола, Лазар,Весна и Соња, на прашањето каков бил редоследот одговориле:

Никола: „Весна е прва, а Лазар е втор”

Лазар: „Весна е втора, а Соња е трета”

Весна: „Соња е четврта, а Никола е втор”

Секој од нив дал по еден точен и еден неточен одговор. Каков бил редоследот?

Решение. Ако исказот на Лазар „Весна е втора” е точен, тогаш двата искази на Никола се неточни, што не е можно. Значи, Весна не е втора, а Соња е трета. Тогаш исказот на Весна „Никола е втор” е точен. Бидејќи Никола е втор, исказот на Никола „Весна е прва” е точен. Според тоа, редоследот бил следниот: Весна е прва, Никола е втор, Соња е трета и Лазар е четврт.

3. Игор, Јован, Кире и Лазар ги поканиле своите девојки на игранка. На еден танц Бети играла со Игор, Ана со момчето на Вера, Гордана со момчето на Ана, Јован со девојката на Кире а Кире со девојката на Игор. Определи ги вљубените парови.

Решение. (1) Бети играла со Игор, (2) Ана со момчето на Вера, (3) Гордана со момчето на Ана, (4) Јован со девојката на Киро, (5) Киро со девојката на Игор.

Дали сите играле со туѓ партнер? Евентуално би можело тоа да не е бети и Игор, но од (5) тоа се елиминира, па (6) никој не играл со својата девојка. Од (1), (2) и (3), а земајќи предвид (6) следува дека (7) Гордана е девојка на Игор. Од (2), (3) и (5) следува дека (8) Киро е момчето на Ана, (9) Јован е момчето на Вера. На крајот остана дека (10) Бети е девојка на Лазар.

4. Седум соработници (Марија, Искра, Лиле, Петре, Миле, Тодор и Коста) ручаат заедно во три ресторани (P,Q и R).

Марија оди во ресторан само во среда.

Искра и Миле никогаш не се во можност заедно да одат во ресторан.

Лиле не оди во ресторан ако и Марија не појде

Петре и Коста нема да одат во ист ресторан заедно ако и Искра не оди.

Миле не оди во ресторанот Q .

Ако шест од соработниците ручаат заедно во среда во еден од рестораните, кој од соработниците ќе биде отсутен?

Кој е најголемиот број на соработници што можат да одат заедно на ручек во вторник?

Решение. Јасно е дека ќе биде отсутен или Миле или Искра. Ако Искра е отсутна, тогаш Петре и Коста нема заедно да бидат во ресторан, па во тој случај најмногу 5 соработници ќе ручаат заедно. Според тоа, ако во среда ручаат заедно шест соработници, отсутен ќе биде Миле.

Во вторник и Марија не оди на ручек, што значи дека и Лиле тогаш нема да оди на ручек. Бидејќи Искра и Миле никогаш не ручаат заедно, се добива дека во вторник можат да ручаат најмногу четири соработници.

5. Весна, Борис и Никола се одлични ученици кои никогаш не лажат. На прашањето што добиле на писмената работа по математика, тие одговориле:

Весна: „Ако Никола и јас добивме 5, тогаш и Борис доби 5"

Борис: „ Ако јас добив 5, тогаш и Весна доби 5";

Никола: „ Ако Борис или јас добивме 5, тогаш и Весна доби 5"

Познато е дека еден од нив добил 4 а другите двајца добиле 5. Кои оценки ги добиле Весна, Борис и Никола?

Решение. Нека p, q и r се исказите "Весна добила 5", "Борис добил 5" и "Никола добил 5", соодветно. Знаејќи дека еден од нив не е точен, а другите два се точни ја правиме следната таблица:

p	q	r	$p \wedge r \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$q \vee r \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

Бидејќи исказите на Весна, Борис и Никола (т.е. $p \wedge r \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $q \vee r \Rightarrow p$) се точни, од таблицата се добива дека Весна и Борис добиле 5, а Никола добил 4).

6. Ана, Борче, Весна и Горан ги освоиле првите четири награди на натпреварот по математика. Нивните професори се Илиевски, Јовановски, Костовски и Лазов. Учениците заедно со своите професори дошле од градовите Прилеп, Ресен, Скопје и Тетово.

(1) Ученикот на професорот Костовски не освоил на прва ни втора награда. (2) Весна освоила прва награда. (3) Ученикот од Тетово освоил втора награда. (4) Ана е од Прилеп. (5) Горан, ученикот на профессор Јовановски освоил четврта награда. (6) Професорот Лазов е од Ресен.

Решение. Формираме таблица со четири редици и четири колони. Во првата редица ги ставаме имињата на учениците, во втората наградата што секој од учениците ја освоил, во тре-

ученик	А	Б	В	Г
награда			I	IV
професор				Ј
град	П			

тата нивните професори и во четвртата градовите. (Ќе ги пишуваме само првите букви од имињата).

Според условите (2), (4) и (5) табелата можеме да ја пополниме на начин кој што е прикажан.

ученик	А	Б	В	Г
награда	*III*	*II*	*I*	*IV*
професор	К			Ј
град	П	Т		

Бидејќи само во колоната на Борче непознати се наградата и градот истовремено, според условот (3) добиваме дека Борче е од Тетово и освоил втора награда. Понатаму, според условите (5) и (1) добиваме дека ученикот на професорот Костовски е Ана и таа освоила *III* награда. Сега табелата изгледа:

Бидејќи само во колоната на Весна непознати се професорот и градот истовремено, спортед суловот (6) имаме дека Весна е ученик на професорот Лазов и дека таа е од Ресен.

7. Кога еден новинар прашал кои двојки ги освоиле првите три места на еден натпревар по танцување, ги добил следните одговори:

Светлана:„Секоја девојка е помлада од својот партнер за 3 години."

Игор: „Сите заедно имале 115 години."

Јулија: „Јас и Игор заедно имаме 36 години. "

Антон: „Јас и Јулија заедно имаме 40 години. "

Максим: „Најмлада меѓу нас е Ира. "

Кој со кого играл?

Решение. Ако Игор има x, Антон y, а Максим z години, тогаш од условот на задачата го добиваме равенството $x+y+z+x-3+y-3+z-3=115$, т.е. $x+y+z=62$. Ако Јулија играла со Игор, тогаш од $x+x-3=36$ следува дека $2x=39$, што не е можно бидејќи 39 не е парен број. Слично, ако Јулија играла со Антон, тогаш од $y+y-3=40$ следува дека $2y=43$. Значи, Јулија играла со Максим. Според тоа, $z-3+x=36$, т.е. $z+x=39$ од што следува дека $y=62-39=23$. Од $z-3+y=40$ следува дека $z=20$, па од $x+y+z=115$, следува дека $x=19$. Најмлад е игор и играл со Ира, Максим играл со Јулија, а Анон играл со Светлана.

8. На излет биле 4 момчиња и 4 девојчиња. Познато е дека секое момче е брат на едно девојче, т.е. дека има четири пара браќа и сестри од четири различни семејства, и познати се имињата и презимињата на девојчињата и момчињата соодветно. На излетот изеле 32 колачи и тоа: Марија 1 колач, Јованка 2 колачи, Иванка 3 колачи и Ана 4 колачи. Момчињата изеле: Петрески колку и неговата сестра, Маркоски двапати повеќе од својата сестра, Попоски трипати повеќе од својата сестра и Павлоски четири пати повеќе од својата сестра. Како гласат имињата и презимињата на девојчињата.

Решение. Девојчињата со презимиња Петреска, Маркоска, Попеска и Павлоска нека изеле a,b,c и d колачи соодветно. Тогаш братот и сестрата Петрески изеле $2a$ колачи, Маркоски $3b$ колачи, Попоски $4c$ колачи и Павлоски $5d$ колачи. Притоа, $a,b,c,d \le 4$ и $2a+3b+4c+5d=32$, од каде следува дека b и d се и двата се парни или и двата се непарни броеви. Значи, имаме четири можности:

$b=1, d=3$; $b=3, d=1$; $b=2, d=4$ и $b=4, d=2$. Лесно се проверува дека е можен само случајот $b=4,\ d=2,\ a=3,\ c=1$.

Следователно, девојчињата се: Иванка Петреска, Ана Маркоска, Марија Попоска и Јованка Павлоска.

9. Еден селанец одејќи по пат ги сретнал Итар Пејо и Насрадин Оџа. Еве го нивниот разговор:

Селанецот: -Добар ден

Пејо и Насрадин: -Добар ден.

Селанецот: - Кој ден е денес?

Насрадин: -Утре ќе зборувам вистина.

Селанецот: -А, кој ден е утре?

Насрадин: -Утре не е недела.

Селанецот се врти кон Пејо: -Пејо, дај барем ти кажи кој ден е денес?

Пејо: прозборува нешто и оди.

Селанецот се врти кон Насрадин: -Ете ти сега, не слушнав добро. Што рече Пејо?

Насрадин: -Рече дека не е понеделник.

Селанецот: -Е, сега знам кој ден е денес. Ајде догледање.

Можете ли да утврдите кој ден во неделата е воден разговорот, ако го знаете она што и селанецот го знае, а тоа е дека Пејо лаже во понеделник, вторник и среда, а другите денови зборува вистина, додека Насрадин лаже во четврток, петок и сабота, а другите денови зборува вистина?

Решение. Со оглед на условите од задачата, својата прва изјава Насрадин не може да ја даде во среда, затоа што во среда зборува вистина, а изјавата би била лажна и не може да ја даде во сабота, затоа што во сабота лаже, а изјавата би била вистинита. Во сите други денови оваа изјава е можна.

Втората изјава Насрадин не може да ја даде во четврток и петок, затоа што во тие денови лаже, а изјавата би била вистинита. Во сите други денови изјавата на Насрадин е можна.

Значи, разговорот е воден во недела, понеделник или вторник. Во сите овие денови Насрадин зборува вистина, па значи Пејо навистина рекол дека е понеделник.

Но, Пејо во недела не би рекол дека е понеделник, затоа што во недела не лаже, а во понеделник не би рекол дека е понеделник, затоа што тогаш лаже.

Значи, останува единствената можност разговорот да е воден во вторник. Лесно се проверува дека во вторник ниту една од дадените изјави не е невозможна, па значи вторник е бараниот ден.

10. Петар имал 40 крави од кои првата давала $1l$ млеко, втората $2l$ млеко, третата $3l$ млеко, и т.н. четириесеттата крава давала $40l$ млеко. Петар сакал на неговите 4 синови да им ги подели кравите така што секој да добие десет крави и синовите од добиените крави да добиваат по ист број литри млеко. Дали Петар може да ги подели кравите? Доколку може најди една таква поделба.

Решение. Сите крави заедно ќе даваат

$$2+3+...+39+40=(1+40)+(2+39)+(3+38)+...+(20+21)=20\cdot 41=820$$

литри млеко.

Значи секој син треба да добие десет крави кои ќе даваат по 205 литри млеко. Ќе ги искористиме равенствата $1+40=2+39=3+38=...=20+21$. Заради претходните равенства можеме кравите да ги поделиме по парови. Кравите кои даваат заедно четириесет и еден литар млеко ќе ги сметаме за пар, и ќе ги нарекуваме крави придружнички. Петар може да постапи на следниот начин: ако на некој син му ја додели кравата која дава n литри млеко, ќе му ја додели и кравата придружничка. Значи на секој од синовите нема да му дели по една крава, туку ќе им дели парови крави кои се придружнички. Сега е лесно, На секој од синовите ќе му даде по пет крави кои даваат не повеќе од дваесет литри млеко а потоа на секој од синовите на доделените крави ќе му ги додели и кравите придружнички.

Еден таков начин е:

1 син: $1,2,3,4,5,40,39,38,37,36$ 2 син: $6,7,8,9,10,35,34,33,32,31$

3 син: $11,12,13,14,15,30,29,28,27,26$ 4 син: $16,17,18,19,20,25,24,23,22,21$

Секако дека постојат и многу други поделби.

11. Меѓу 9 златници се наоѓа еден неисправен златник кој има помала тежина од останатите златници. Како со помош на две мерења на вага без тегови ќе го издвоиме неисправниот златник?

Решение. <u>Прво мерење</u>: Прво 9-те златници ги делиме на три групи од по три златници (по случаен избор). Избираме било кои две од трите групи и по една група ставаме на секоја страна на вагата. Ако тежините се исти во овие две групи, тогаш бараниот златник се наоѓа во третата група. Ако пак, едната страна на вагата е полесна од другата, тогаш во полесната група се наоѓа бараниот златник .

<u>Второ мерење</u>: Од групата со три златници во која се наоѓа полесниот златник, избираме по случаен избор два и по еден од нив ставаме на секоја страна од вагата. Ако вагата е во рамнотежа, тогаш бараниот златник е оној што останал. Ако пак, вагата покаже дека едната страна е полесна, тогаш златникот на полесната стана е бараниот златник.

12. Дадени се 80 топчиња, наизглед сите еднакви (по форма, боја и големина) и познато е дека 79 од нив се со иста тежина, а едно е полесно. Располагаме со вага со два таса (без тегови). Како може со четири мерења на вагата да откриеме кое е полесното топче?

Решение. Ги делиме топчињата на три групи: групираме на два пати по 27 топчиња, а преостанатите 26 топчиња формираат трета група. Ги споредуваме на вагата двете групи со по 27 топчиња. Со тоа сме потрошиле едно мерење, и како резултат сме добиле: или вагата не е во рамнотежа, па знаеме меѓу кои 27 топчиња е полесното топче; или пак вагата е во рамнотежа па знаеме дека полесното топче е во групата од 26 топчиња. Во вториов случај кон тие 26 додаваме произволно топче од првите две групи. Така со едно мерење на вагата успеваме да дојдеме до група од 27 топчиња меѓу кои е и полесното. Оваа група ја делиме на три подгрупи со по 9 топчиња, секоја, и споредуваме на вагата две од тие три подгрупи. Така после две мерења успеваме да дојдеме до група од 9 топчиња меѓу кои е и полесното. Оваа група ја делиме на 3 подгрупи со по 3 топчиња, секоја, и споредуваме на вагата две од тие три подгрупи. Така после три мерења успеваме да дојдеме до група од 3 топчиња меѓу кои е и полесното. Во четвртото мерење споредуваме две од тие 3 топчиња: доколку вагата не е во рамнотежа полесното топче е на тасот кој не натежнал, а доколку вагата е во рамнотежа полесното топче е преостанатото трето топче.

13. Од 37 монети наредени во еден ред, 9 се свртени со ,,петка", а 28 со ,,глава" нагоре. Во еден чекор се превртуваат кои било 20 монети. Дали е можно по неколку чекори сите монети да бидат ,,петки"? А ,,глави"? Во колку најмалку чекори е можно тоа?

Решение. Нека со првиот чекор x ,,петки" свртиме во ,,глава". Тогаш $20-x$,,глави" ќе свртиме во ,,петки". По овој чекор имаме $9-x+(20-x)=29-2x$,,петки" и $x+(28-(20-x))=8+2x$,,глави". По првиот чекор ќе имаме непарен број ,,петки" и парен број ,,глави". Очигледно, оваа законитост ќе остане и во секој нареден чекор. Значи, секогаш ќе имаме непарен број ,,петки", т.е. никогаш нема да добиеме сите монети да бидат ,,глави". Бидејќи по првиот чекор бројот на ,,глави" останува парен, тогаш е можно да се избере x таков што $2x+8=20$, односно $x=6$. Па, по првиот чекор ќе имаме 17 ,,петки" и 20 ,,глави". Во вториот чекор 20 ,,глави" ги превртуваме во ,,петки" и сите монети се превртени со ,,петка" нагоре. Значи, сите монети ќе бидат свртени нагоре со ,,петка" во најмалку 2 чекора.

II АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Докажи дека ако $ac-a-c=b^2-2b$, $bd-b-d=c^2-2c$ и $b\neq 1$, $c\neq 1$, тогаш
$$ad+b+c=bc+a+d\ .$$
Решение. Ако додадеме 1 на двете страни од првото равенство, добиваме
$$ac-a-c+1=b^2-2b+1,$$
од каде со разложување се добива
$$(a-1)(c-1)=(b-1)^2\ .$$
Слично, со додавање 1 на двете страни и од второто равенство, а потоа и со разложување се добива
$$(b-1)(d-1)=(c-1)^2\ .$$
Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме
$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=(b-1)^2(c-1)^2,$$
од каде
$$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)\ ,$$
па со множење се добива
$$ad-a-d+1=bc-b-c+1,$$
од каде со средување се добива
$$ad+b+c=bc+a+d\ ,$$
што и требаше да се докаже.

2. Дали постојат реални броеви x и y за кои во исто време се исполнети равенствата
$$x+y=1,\ x^2+y^2=2 \text{ и } x^3+y^3=3?$$
Решение. Да претпоставиме дека такви броеви x и y постојат. Ако го квадрираме изразот $x+y=1$ добиваме $x^2+2xy+y^2=1$ па, имајќи го во предвид изрзот $x^2+y^2=2$ добиваме $xy=-\frac{1}{2}$. Ако го кубираме првото равенство добиваме
$$x^3+y^3+3xy(x+y)=1$$
и бидејќи $x+y=1$, $xy=-\frac{1}{2}$, $x^3+y^3=3$, добиваме
$$3+3\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot 1=1$$
што не е можно. Значи, не постојат реални броеви x и y за кои се исполнети во исто време дадените равенства.

3. Нека збирот на три реалн и броја е еднаков на 0, а збирот на нивните квадрати е ков на едн4. Да се пресмета збирот на четвртите степени на трите броја.

Решение. Да ги означиме трите броја со x, y и z. Според условите на задачата, имаме

$$x+y+z=0\,, \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2=4\,. \tag{2}$$

Ако го квадрираме првото равенство, добиваме:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0\,,$$

од каде добиваме

$$xy+yz+zx=-2 \tag{3}$$

Ако го квадрираме равенството (3), добиваме:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2yz+xy^2z+xyz^2)=4\,,$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)=4\,,$$

од каде заради (1) следува дека:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=4\,, \tag{4}$$

Ако го квадрираме равенството (2), добиваме:

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=16$$

од каде, поради (4), следува дека

$$x^4+y^4+z^4=8\,.$$

4. Докажи дека

$$(\tfrac{x+|x|}{2})^2+(\tfrac{x-|x|}{2})^2=x^2\text{, за секој } x\in\mathbb{R}\,.$$

Решение. По квадрирање и средување на изразот на левата страна од равенката, ако искористиме ека $x^2=|x|^2$ добиваме

$$(\tfrac{x+|x|}{2})^2+(\tfrac{x-|x|}{2})^2=\tfrac{x^2+2x|x|+|x|^2}{4}+\tfrac{x^2-2x|x|+|x|^2}{4}$$

$$=\tfrac{2x^2+2|x|^2}{4}=x^2.$$

5. Ако $x+y=1$ и $x^2+y^2=2$, да се пресмета x^3+y^3.

Решение. Од

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

следува

$$xy=\tfrac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=\tfrac{1}{2}[1^2-2]=-\tfrac{1}{2},$$

па затоа

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=1\cdot(2+\tfrac{1}{2})=\tfrac{5}{2}\,.$$

6. Ако $x+y=2$ и $x^2+y^2=1$, да се пресмета x^3+y^3.

Одговор. $x^3+y^3=-1.$

7. Да се пресмета вредноста на изразот $4x^3-8x^2+2x+3$ за $x=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Решение. Имаме:

$$4(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^3-8(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2+2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})+3=$$
$$=2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})[2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2-4(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})+1]+3$$
$$=2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})[2+2\sqrt{2}+1-4-2\sqrt{2}+1]+3$$
$$=2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\cdot 0+3=3.$$

8. Да се разложи на прости множители изразот
$$T=(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc\ .$$

Решение. Имаме:
$$T=a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2-abc=$$
$$=(a^2b+a^2c)+(abc+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(abc+ac^2)=$$
$$=a^2(b+c)+ab(b+c)+bc(b+c)+ac(b+c)=$$
$$=(b+c)(a^2+ab+bc+ac)=(b+c)[a(a+b)+c(a+b)]=$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a)$$

9. Нека n е природен број. Природните броеви a,b,c,d се помали или еднакви на n, при што d е најголемиот меѓу нив и важи
$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)=(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2\ . \qquad (1)$$
Докажи, дека $d=a+b+c$.

Решение. а) Со непосредна проверка се добива дека за $a+b+c=d$ е исполнет условот (1). Нека претпоставиме дека $a+b+c>d$. Тогаш
$$d(a+b+c)>d^2$$
$$ab+cd>d^2-ad-bd+ab$$
$$ab+cd>(d-a)(d-b).$$
Аналогно добиваме дека $bc+ad>(d-b)(d-c)$ и $ac+bd>(d-a)(d-c)$. Ако ги помножиме последните три неравенства добиваме дека
$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)>(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2,$$
што проптивречи на (1). Аналогно, ако претпоставиме дека $a+b+c<d$, повторно добиваме противречност на (1). Според тоа, $a+b+c=d$.

10. Ако a,b,c и d се позитивни реални броеви и $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ тогаш $a=b=c=d$. Докажи!

Решение. Имаме:
$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd \qquad \Leftrightarrow$$
$$a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4=4abcd-2a^2b^2-2c^2d^2 \qquad \Leftrightarrow$$
$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2=-2(ab-cd)^2 \qquad \Leftrightarrow$$
$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0 \qquad \Leftrightarrow$$

$a^2 = b^2$ и $c^2 = d^2$ и $ab = cd$.
Од последните равенства добиваме $a = b = c = d$.

11. Разложи го на множители изразот $x^3 - 7x + 6$.
Решение. Имаме

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 &= x(x^2 - 1) - 6(x-1) = \\ &= x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = \\ &= (x-1)[x(x+1) - 6] = (x-1)(x^2 + x - 6) = \\ &= (x-1)(x^2 - 4 + x - 2) = \\ &= (x-1)[(x-2)(x+2) + x - 2] = \\ &= (x-1)x-2)(x+2+1) = \\ &= (x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

12. Разложи го на множители полиномот $x^5 + x + 1$.
Решение. За дадениот израз имаме

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

13. Разложи го на прости множители полиномот

$$P(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^4 + 2x^3 - 5x^2) - (x^3 + 2x^2 - 5x) - (x^2 + 2x - 5) \\ &= x^2(x^2 + 2x - 5) - x(x^2 + 2x - 5) - (x^2 + 2x - 5) \\ &= (x^2 + 2x - 5)(x^2 - x - 1) \\ &= ((x+1)^2 - 6)((x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{5}{4}) \\ &= (x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6})(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2})(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}) \end{aligned}$$

14. Разложи го на прости множители изразот

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3.$$

Решение. Дадениот израз го означуваме со P . Тогаш

$$\begin{aligned} P &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 - (a^3 + b^3) - c^3 \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3ac + 3bc + 3c^3 - a^2 + ab - b^2) \\ &= (a+b)(3ab + 3ac + 3bc + 3c^2) \\ &= 3(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = 3(a+b)(b+c)(a+c). \end{aligned}$$

15. Разложи го на прости множители изразот

$$(a-b+c)^3-a^3+b^3-c^3 .$$

Решение. Во претходната задача замени $-b$ наместо b . Се добива

$$(a-b+c)^3-a^3+b^3-c^3=3(a-b)(a+c)(c-b) .$$

16. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=&\\ &=a^3+ab^2+ac^2+b^3+ba^2+ac^2+c^3+ca^2+cb^2-\\ &\quad-a^2b-abc-a^2c-ab^2-b^2c-abc-abc-bc^2-ac^2\\ &=a^3+b^3+c^3-3abc.\end{aligned}$$

17. Ако $a^3+b^3+c^3=3abc$, тогаш $a+b+c=0$ или $a=b=c$. Докажи!

Решение. Според претходната задача важи:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0 \text{ или } a+b+c=0 .$$

Според тоа, $a+b+c=0$ или

$$0=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 ,$$

т.е. $a+b+c=0$ или $a=b=c$ (Зошто?).

18. Докажи дека

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b) .$$

Решение. Воведуваме ознаки

$$A=b-c,\ B=c-a \text{ и } C=a-b .$$

Тогаш $A+B+C=0,$ па според задача 15, имаме $A^3+B^3+C^3=3ABC$, со што е докажано почетното равенство.

19. Да се упрости изразот

$$1-a+a^2-a^3+...+a^{1980}-\frac{a^{1981}}{1+a}$$

и да се најде неговата вредност за $a=-\frac{4}{5}$.

Решение. Користејќи ја формулата

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-yx^{n-2}+...+(-1)^{n-1}y^{n-1}) ,$$

добиваме

$$\begin{aligned}1-a+a^2-a^3+...+a^{1980}-\frac{a^{1981}}{1+a}&=\frac{(1-a+a^2-a^3+...+a^{1980})(1+a)-a^{1981}}{1+a}\\ &=\frac{1+a^{1981}-a^{1981}}{1+a}=\frac{1}{1+a}.\end{aligned}$$

За $a=-\frac{4}{5}$, вредноста на изразот е 5.

20. Ако за позитивните реални броеви a,b и c важи равенството

$$ab(\tfrac{a+b}{2}-c)+bc(\tfrac{b+c}{2}-a)+ac(\tfrac{c+a}{2}-b)=0,$$

тогаш $a=b=c$. Докажи!

Решение. Равенството е еквивалентно со

$$\tfrac{a}{2}(b-c)^2+\tfrac{b}{2}(a-c)^2+\tfrac{c}{2}(a-b)^2=0.$$

Бидејќи a,b,c се позитивни реални броеви, се добива дека $a-b=b-c=c-a=0$, т.е. $a=b=c$.

21. За бројот a, е исполнето равенството $a+\frac{1}{a}=1$. Пресметај ја вредноста на $a^5+\frac{1}{a^5}$.

Решение. *Прв начин.* Ќе воведеме ознака $b=\frac{1}{a}$. Тогаш $a+b=1$ и $ab=1$, па затоа

$$a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab=(a+b)^2-2ab=1^2-2\cdot 1=-1;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2+b^2-ab)=1\cdot(-1-1)=-2;$$
$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)=(-1)(-2)-1^2\cdot 1=1;$$

Значи, $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

Втор начин. Користејќи ја формулата

$$A^5+B^5=(A+B)(A^4=A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4),$$

за $A=a$ и $B=\frac{1}{a}$, имаме

$$a^5+\tfrac{1}{a^5}=(a+\tfrac{1}{a})(a^4-a^3\tfrac{1}{a}+a^2\tfrac{1}{a^2}-a\tfrac{1}{a^3}+\tfrac{1}{a^4})=a^4+\tfrac{1}{a^4}+1-(a^2+\tfrac{1}{a^2})$$
$$=a^4+2+\tfrac{1}{a^4}-(a^2+\tfrac{1}{a^2})-1=(a^2+\tfrac{1}{a^2})^2-(a^2+\tfrac{1}{a^2})-1=(*)$$

Од друга страна,

$$a^2+\tfrac{1}{a^2}=a^2+2+\tfrac{1}{a^2}-2=(a+\tfrac{1}{a})^2-2=1^2-2=-1,$$

па заради тоа

$$(*)=(-1)^2-(-1)-1=1.$$

Значи, $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

22. Докажи дека вредноста на изразот

$$x^5+x^4y-2x^3y^2-x^2y^3-xy^4+2y^5,$$

за $x>0$ и $y>0$ не може да биде негативна.

Решение. Изразот ќе го запишеме во облик

$$x^3(x^2+xy-2y^2)-y^3(x^2+xy-2y^2)=(x^3-y^3)(x^2+xy-2y^2)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2+2xy-xy-2y^2)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x(x+2y)-y(x+2y))$$

$$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)(x+2y).$$

Од условот $x>0$ и $y>0$ секој од множителите во последниот израз е ненегативен, па дадениот израз не може да е негативен.

23. Најди ги сите парови (x,y) реални броеви за кои

$$x^2y^4-16xy^3-4xy+x^2+68y^2=0.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со

$$(x^2y^4-16xy^3+64y^2)+(x^2+4y^2-4xy)=0$$

$$(xy^2-8y)^2+(x+2y)^2=0$$

Според тоа, $xy^2-8y=0$ и $x+2y=0$, па затоа $(0,0),(4,2)$ и $(-4,-2)$.

24. Одреди ја најмалата вредност на изразот

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+10.$$

Решение. Изразот ќе го запишеме во облик

$$\begin{aligned}[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+10 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+10\\ &=[(x^2+5x+5)-1][(x^2+5x+5)+1]+10\\ &=(x^2+5x+5)^2-1^2+10\\ &=(x^2+5x++5)^2+9.\end{aligned}$$

Од последното равенство е јасно дека изразот добива најмала вредност кога $x^2+5x+5=0$ и најмалата вредност е 9. Од $x^2+5x+5=0$ следува

$$(x+\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{5}{4}=0, \text{ т.е. } (x+\tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2})(x+\tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2})=0,$$

што значи дека дадениот израз најмалата вредност ја достигнува за

$$x=-\tfrac{5}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2} \text{ и } x=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

25. Одреди ги паровите (x,y) за кои функцијата

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-2$$

прима најмала вредност. Најди ја таа вредност.

Решение. Изразот $f(x,y)$ ќе го трансформираме во израз од кој ќе се види кога $f(x,y)$ е најмал.

$$f(x,y=(\tfrac{1}{4}x^2+xy+y^2)+\tfrac{3}{4}(x^2+4x+4)-1=(\tfrac{1}{2}x+y)^2+\tfrac{3}{4}(x+2)^2-1.$$

Од последното се гледа дека $f(x,y)$ прима најмала вредност за $x+2=0$ и $\frac{1}{2}x+y=0$, т. е. ако е $x=-2$ и $y=1$. Минималната вредност на функцијата е -1.

26. Броевите a,b и c се такви што

$$a^2(b+c)=b^2(a+c)=2010$$

и $a\neq b$. Пресметај ја вредноста на изразот $c^2(a+b)$.

Решение. Бидејќи

$$a^2(b+c)=2010,$$
$$b^2(a+c)=2010$$

имаме

$$a^2(b+c)-b^2(a+c)=0.$$

Но, од друга страна

$$0=a^2(b+c)-b^2(a+c)=ab(a-b)+c(a^2-b^2)=(a-b)(ab+bc+ca).$$

Бидејќи $a-b\neq 0$, добиваме $ab+bc+ca=0$. Сега, ако го помножиме последното равенство со $a-c$, добиваме

$$0=0(a-c)=(a-c)(ab+bc+ca)=ac(a-c)+b(a+c)(a-c)$$
$$=a^2c-ac^2+ba^2-bc^2=a^2(b+c)-c^2(a+b)$$

Според тоа,

$$c^2(a+b)=a^2(b+c)=2010.$$

27. За реалните броеви a,b и c се исполнети равенствата $a^2+b^2+c^2=1$ и $a^3+b^3+c^3=1$. Определи ја вредноста на изразот $a+b+c$.

Решение. Од условот $a^2+b^2+c^2=1$, добиваме дека a,b и c се реални броеви такви што $-1\leq a,b,c\leq 1$. Но, тогаш $a^2\geq a^3, b^2\leq b^3, c^2\geq c^3$. Според тоа, равенството

$$a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3$$

е исполнето само ако претходните три неравенства се равенства, т.е. $a^2=a^3$, $b^2=b^3, c^2=c^3$. Решенија на последните три равенки се $a=0$ или $a=1$, $b=0$ или $b=1$ и $c=0$ или $c=1$ соодветно. Но, од условот $a^2+b^2+c^2=1$ е јасно дека два од броевите се нула, а едниот е еднаков на 1. Во сите можни случаи е исполнето $a+b+c=1$.

28. Разложи го на прости множители изразот $(ax-by)^2+(bx+ay)^2$.

Решение. Имаме:

$$(ax-by)^2+(bx+ay)^2=a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2$$
$$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)=(a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

29. а) За реални броеви a и b е исполнето равенството

$$(a+b)^2+1=(a+1)(b+1).$$

Дали за a и b е исполнето равенството

$$a^2(a-1)=b^2(b-1).$$

б) За реалните броеви a и b е точно равенството

$$a^2(a-1)=b^2(b-1).$$

Дали за нив е исполнето и равенството

$$(a+b)^2+1=(a+1)(b+1).$$

Решение. а) Равенството $(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$ ќе го запишеме во облик

$$1+a^2+2ab+b^2=ab+a+b+1$$

$$a^2+ab+b^2=a+b \qquad (1)$$

Случај 1. Ако $a=b$, тогаш јасно е дека $a^2(a-1)=b^2(b-1)$.

Случај 2. Ако $a\neq b$, равенството (1) ќе го помножиме со $a-b$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(a+b)$$

од каде по елементарни трансформации се добива равенството

$$a^2(a-1)=b^2(b-1).$$

б) Нека a и b се реални броеви такви што $a^2(a-1)=b^2(b-1)$. Тогаш

$$a^3-a^2=b^3-b^2$$

$$a^3-b^3=a^2-b^2$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(a+b) \qquad (2)$$

Случај 1. Ако $a\neq b$, тогаш $a-b\neq 0$, па според тоа од (2) добиваме

$$a^2+ab+b^2=a+b$$

кое е еквивалентно со

$$(a+b)^2+1=(a+1)(b+1).$$

Случај 2. Ако $a=b$, тогаш $a^2(a-1)=b^2(b-1)$ е точно равенство. Ако a е реален број за кој што е точно и равенството $(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$, тогаш a е решение на равенката $4a^2+1=(a+1)^2$. Решенија на последната равенка се $a=0$ или $a=\frac{2}{3}$. Сега ако на пример $a=b=\frac{5}{2}$ и замениме во $(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$ добиваме $25+1=\frac{49}{4}$. Значи, од точноста на $a^2(a-1)=b^2(b-1)$ во општ случај не следува точноста на $(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$.

30. Реалните броеви x, y, z ги задоволуваат равенствата

$$(x-1)^2+y^2=(y-1)^2+z^2=(z-1)^2+x^2.$$

Ако x, y и z се ненегативни, тогаш $x=y=z$. Докажи!

Решение. Од равенството

$$(x-1)^2+y^2=(y-1)^2+z^2$$

Со алгебраски трансформации добиваме

$$x^2-2x=-2y+z^2,$$

па според тоа

$$2(y-x)=(z-x)(z+x) \qquad (1)$$

Аналогно, од другите две равенства добиваме

$$2(z-y)=(x-y)(x+y) \qquad (2)$$

$$2(x-z)=(y-z)(y+z) \qquad (3)$$

Ако претпоставиме дека $x \neq y$, тогаш од ненегативноста на x, y, z и од равенството (1) добиваме $z \neq x$. Сега пак, од равенството (3) добиваме $y \neq z$.

Според тоа, ако равенстваста (1), (2) и (3) ги помножиме, и во добиеното равенство скратиме, т.е. го поделиме со $(x-y)(y-z)(z-x)$ добиваме

$$(x+y)(y+z)(z+x)=-8.$$

Но, последното равенство е во спротивност со ненегативноста на x, y, z. Значи, $x=y$, и не е тешко, на пример со замена во (2) да се добие дека $y=z$, т.е. $x=y=z$.

31. Докажи дека

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(ax+by+cz)^2&+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=\\ &=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz+b^2x^2+a^2y^2-2bxzy\\ &\quad+c^2y^2+b^2z^2-2bcyz+a^2z^2+c^2x^2-2acxz\\ &=(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2)+(a^2z^2+b^2z^2+c^2z^2),\\ &=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)+z^2(a^2+b^2+c^2)\\ &=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

32. Обопшти ја претходната задача, т.е. докажи го Лагранжовиот идентитет:

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)&=(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+\\ &+(a_1b_3-a_3b_1)^2+...+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2\end{aligned}$$

Упатство. Постапи аналогно како во претходната задача.

33. Докажи го Кошиевото неравенство:

$$|\sum_{k=1}^n a_kb_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Решение. Непосредна последица од Лагранжовиот идентитет и фактот дека

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geq 0,\ (a_1b_3-a_3b_1)^2 \geq 0, ..., (a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2 \geq 0.$$

34. Ако $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 = 1$, докажи дека $-1 \leq \sum_{k=1}^n a_kb_k \leq 1$.

Решение. Тврдењето на задачата непосредно следува од Кошиевото неравенство.

35. Димитар на некој начин цифрите $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ги распоредил на кружница. Секои три последователни цифри, во насока на стрелките на часовникот, формираат трицифрен број. Сите такви броеви тој ги собрал. Кој збир го добил Димитар?

Решение. Секоја запишана цифра ќе се појави во три различни броја, еднаш како цифра на стотки, еднаш како цифра на десетки и еднаш како цифра на единици.Според тоа, цифрата n во вкупниот збир ќе учествува со

$$(1+10+100)n=111n .$$

Бидејќи вкупно има 9 такви броја, добиваме дека вкупниот збир ќе биде

$$111(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=111\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=111\cdot 45=4995 .$$

36. Ако за позитивните реални броеви $a_1,a_2,\ldots,a_{2004},b_1,b_2,\ldots,b_{2004},p,q$ важи

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2004}^2=p^2 ,$$
$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{2004}^2=q^2 ,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{2004}b_{2004}=pq ,$$

тогаш

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_{2004}}{b_{2004}}=\frac{p}{q} .$$

Докажи!

Решение. Ако првото равенство го помножиме со q^2, второто со p^2 и третото со $-2pq$, се добиваат равенствата

$$q^2a_1^2+q^2a_2^2+\ldots+q^2a_{2004}^2=q^2p^2$$
$$p^2b_1^2+p^2b_2^2+\ldots+p^2b_{2004}^2=p^2q^2$$
$$-2pqa_1b_1-2pqa_2b_2-\ldots-2pqa_{2004}b_{2004}=-2p^2q^2$$

Со собирање на последните три равенства добиваме

$$(qa_1-pb_1)^2+(qa_2-pb_2)^2+\ldots+(qa_{2004}-pb_{2004})^2=0 ,$$

од каде заклучуваме дека

$$qa_1-pb_1=qa_2-pb_2=\ldots=qa_{2004}-pb_{2004}=0 ,$$

односно дека

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_{2004}}{b_{2004}}=\frac{p}{q} ,$$

што требаше и да се докаже.

37. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$. Ако

$$S_k=b_1+b_2+...+b_k ,\ k=1,2,3...,n ,$$

докажи дека

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+...+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n .$$

Решение. Од $S_1=b_1$, $S_2=b_1+b_2$, $S_3=b_1+b_2+b_3,\ldots$ следува:

$$b_1=S_1,\ b_2=S_2-S_1,\ b_3=S_3-S_2,\ldots,\ b_n=S_n-S_{n-1}.$$

Понатаму имаме

$$\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n &= a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+a_3(S_3-S_2)+...+a_n(S_n-S_{n-1}) \\ &= a_1S_1+a_2S_2-a_2S_1+a_3S_3-a_3S_2+...+a_nS_n-a_nS_{n-1} \\ &= (a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+...+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n \end{aligned}$$

38. Нека $a_n = 1+2+...+n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Ако за a_m и a_n важи $2a_m = a_n$, тогаш a_{2m-n} е полн квадрат. Докажи!

Решение. Имаме

$$a_n = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Според тоа, равенството $2a_m = a_n$ го добива обликот $2\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, т.е.

$$2m(m+1) = n(n+1).$$

Значи,

$$\begin{aligned} a_{2m-n} &= \tfrac{1}{2}(2m-n)(2m-n+1) = \tfrac{1}{2}(4m^2 - 4mn + n^2 + 2m - n) \\ &= \tfrac{1}{2}(\underbrace{2m^2 + 2m}_{n^2+n} + 2m^2 - 4mn + 2n^2 - n^2 - n) = \\ &= \tfrac{1}{2}(2m^2 - 4mn + 2n^2) = \tfrac{1}{2}2(m^2 - 2mn + n^2) = (m-n)^2. \end{aligned}$$

39. Нека $n \in \mathbb{N}$. Пресметај го збирот $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$. Докажи дека овој збир е непарен број.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 2\cdot 1! + 3\cdot 2! + 4\cdot 3! + ... + n[(n-1)!] + (n+1)n! - (1! + 2! + ... + n!) &= \\ = 2! + 3! + ... + n! + (n+1)! - [1! + 2! + 3! + ... + (n-1)! + n!] & \\ = (n+1)! - 1. & \end{aligned}$$

Овој број е непарен бидејќи за секој природен број n изразот $(n+1)!$ во себе го содржи множителот 2.

40. Пресметај ги збировите:

а) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$ б) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3$ в) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2$

г) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ д) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$

Решение. Ќе ги користиме познатите равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 . .$$

а) Имаме $(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$ па затоа

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + n = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

б) Имаме: $(2k-1)^3 = 8k^3 - 12k^2 + 3k - 1$, па затоа

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 8\sum_{k=1}^{n} k^3 - 12\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k - n = n^2(2n^2 - 1).$$

в) Од $k(k+1)^2 = k^3 + 2k^2 + k$ следува

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}.$$

г) Од $k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$ следува

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

д) Имаме

$$\begin{aligned}-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (2n)^2 &= -[1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2] + [2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2]\\ &= -\frac{n(4n^2-1)}{2} + 4\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= -\frac{n(4n^2-1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= n(2n+1).\end{aligned}$$

41. Докажи го равенството:

$$\sum_{k=1}^{n} k3^{k-1} = \tfrac{1}{4}[(2n-1)3^n + 1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Имаме: $1 = \frac{1}{4}[(2-1)3+1]$, т.е. равенството е точно за $n=1$.

Нека претпоставиме дека равенството е точно за природниот број n. Тогаш за $n+1$ добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k3^k &= \sum_{k=1}^{n} k3^k + (n+1)3^n = \tfrac{1}{4}[(2n-1)3^n + 1] + (n+1)3^n\\ &= \tfrac{1}{4}[(2n-1)3^n + 1 + 4(n+1)3^n] = \frac{1}{4}[(2n+1)3^{n+1} + 1],\end{aligned}$$

што значи дека равенстото е точно и за $n+1$, па од принцпот на математичка индукција следува дека е точно за секој природен број.

42. Докажи го равенството:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2},$$

за секои $n \in \mathbb{N}$ *и* $q \neq 1$

Упатство. Постапи аналогно како во претходната задача.

43. Докажи го равенството:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),\ n \in \mathbb{N}.$$

Обопшти го горното равенство.

Решение. За $n=1$ имаме

$$\tfrac{1}{5}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2)(1+3)(1+4) = 1\cdot(1+1)(1+2)(1+3),$$

т.е. равенството е точно.

Нека претпоставиме дека равенството точно за некој природен број n. Тогаш за $n+1$ добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2)(k+3) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\ &= \tfrac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\\ &= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(\tfrac{1}{5}n+1)\\ &= \tfrac{1}{5}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+6),\end{aligned}$$

Па од принципот на математичка индукција следува дека равенството е точно за секој природен број.

Обопштување на даденото равенство е равенството

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)...(k+m) = \tfrac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)...(n+m+1)\,,$$

Кое исо така може да се докаже со помош на индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

44. Докажи дека за секој природен број n е исполнето равенството

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(n+1-k)$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}L &= \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{n(n+1)^2}{2} - \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \tfrac{n(n+1)(3n+3-2n-1)}{6} = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}D &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(n+1-k) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(n(n+1)-(2n+1)k+k^2)\\ &= \tfrac{n^2(n+1)}{2} - \tfrac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \tfrac{n^2(n+1)}{2} - \tfrac{n(n-1)(2n+1)}{4} + \tfrac{n(n-1)(2n-1)}{12}\\ &= \tfrac{n(6n(n+1)-6n^2+3n+3+2n^2-3n+1)}{12} = \tfrac{n(2n^2+6n+2)}{12} = \tfrac{n(n^2+3n+2}{6} = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

Конечно, $L = D$, што и требаше да се докаже.

45. Нека n е природен број. Ако

$$x+y=u+v \quad \text{и} \quad x^2+y^2=u^2+v^2,$$

докажи дека

$$x^n+y^n=u^n+v^n.$$

Решение. Тврдењето е точно за $n=1$ и $n=2$. Од првите две равенства добиваме $xy=uv$. Нека тврдењето е точно за $n=l-1$. Тогаш:

$$x^{l-1}+y^{l-1}=u^{l-1}+v^{l-1}$$

$$(x^{l-1}+y^{l-1})(x+y)=(u^{l-1}+v^{l-1})(u+v)$$
$$x^l+y^l+xy(x^{l-1}+y^{l-1})=u^{l-1}+v^{l-1}+uv(u^{l-1}+v^{l-1})$$
$$x^l+y^l=u^l+v^l,$$

што значи дека тврдењето важи за $n=l$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

46. Пресметај го збирот $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.

Решение. Имаме

$$S_n = 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$$
$$xS_n = x+2x^2+3x^3+...+nx^n$$
$$S_n - xS_n = 1+x+x^2+...+x^{n-1}-nx^n$$
$$(1-x)S_n = \tfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n,$$
$$S_n = \frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{(1-x)^2}, \text{ за } x\neq 1.$$

47. Ако $S_n = 1+11+111+1111+...+\underset{n}{11...1}$, докажи дека $S_n=\frac{1}{9}(10\cdot\frac{10^n-1}{9}-n)$.

Решение. Имаме:

$$S_n = \tfrac{10-1}{9}+\tfrac{10^2-1}{9}+...+\tfrac{10^n-1}{9}=\tfrac{1}{9}(10+10^2+10^3+...+10^n-n)$$
$$=\tfrac{1}{9}(10\cdot(1+10+10^2+10^3+...+10^{n-1})-n)$$
$$=\tfrac{1}{9}(10\cdot\tfrac{10^n-1}{10-1}-n)=\tfrac{1}{9}(10\cdot\tfrac{10^n-1}{9}-n).$$

48. Дадена е следната правоаголна таблица од броеви:

1	11	111	….	11 … 1
2	22	222	….	22 … 2
3	33	333	….	33 … 3
4	44	444	….	44 … 4
5	55	555	….	55 … 5
6	66	666	….	66 … 6
7	77	777	….	77 … 7
8	88	888	….	88 … 8
9	99	999	….	99 … 9

(Во последната колона броевите имаат по n цифри).

а) Најди го збирот на броевите во секоја редица;

б) Најди го збирот на броевите во секоја колона;

в) Најди го збирот на броевите во таблицата;

г) Спореди го збирот на збировите во колоните со збирот на збировите во редиците;

Решение. а) Збирот на броевите во првата редица е определен во претходната задача. Го означуваме со S_n. Тогаш збировите на броевите во втората, третата, ... , деветата редица се: $2S_n$, $3S_n$, ... , $9S_n$, соодветно.

б) Ако со S_9 ($S_9 = 45$) го означиме збирот на броевите во првата колона, тогаш збирот на броевите во втората, третата, ... , n-тата колона е: $11S_9$, $111S_9$,..., $\underbrace{111...1}_{n}S_9$, соодветно.

в) Збирот на сите броеви во табелата е еднаков на збирот на броевите од сите редици, т. е. еднаков е на $S_n + 2S_n + ... + 9S_n = S_9 S_n$.

г) Збирот на збировите во колоните е $S_9 S_n$. Збирот на збировите на редиците е исто така $S_9 S_n$.

49. Ја разгледуваме низата подредени парцијални низи природни бро-еви (1), $(2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9,10)$, ... Најди го збирот на членовите на n-тата парцијална низа.

Решение. Во првите $n-1$ членови на парцијалните низи има

$$1+2+3+...+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

почетни членови од низата природни броеви. Затоа првиот член на n-тата парцијална низа почнува со $\frac{(n-1)n}{2}+1$, а завршува со $\frac{(n-1)n}{2}+n$. Значи, збирот на сите членови во n-тата парцијална низа е

$$\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right)+\left(\frac{(n-1)n}{2}+2\right)+...+\left(\frac{(n-1)n}{2}+n\right) = \frac{n^3+n}{2}$$

2. ДРОБНОРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот $(x+y)^2$, ако $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$ и $y-x=1$.

Решение. Од $1=\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=2\frac{y-x}{xy}=\frac{2}{xy}$ следува дека $xy=2$. Сега,

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = x^2-2xy+y^2+4xy = (x-y)^2+4xy = 1^2+4\cdot 2 = 9$$

2. Ако $abc=1$, тогаш $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2-4=(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})(c+\frac{1}{c})$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Имаме

$$\begin{aligned} L &= (a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-4 \\ &= a^2+2+\tfrac{1}{a^2}+b^2+2+\tfrac{1}{b^2}+c^2+\tfrac{1}{c^2}-4 \\ &= a^2+\tfrac{1}{a^2}+b^2+\tfrac{1}{b^2}+c^2+\tfrac{1}{c^2}+2 \end{aligned}$$

и ако земеме предвид дека $abc=1$ добиваме

$$D=(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})$$
$$=abc+\tfrac{1}{abc}+\tfrac{ab}{c}+\tfrac{bc}{a}+\tfrac{ca}{b}+\tfrac{a}{bc}+\tfrac{b}{ca}+\tfrac{c}{ab}$$
$$=a^2+\tfrac{1}{a^2}+b^2+\tfrac{1}{b^2}+c^2+\tfrac{1}{c^2}+2$$

т.е. $L=D$.

Втор начин. Имаме:

$$(a+\tfrac{1}{a})^2+(b+\tfrac{1}{b})^2+(c+\tfrac{1}{c})^2-(a+\tfrac{1}{a})(b+\tfrac{1}{b})(c+\tfrac{1}{c})=$$
$$=a^2+2+\tfrac{1}{a^2}+b+2+\tfrac{1}{b^2}+c+2+\tfrac{1}{c^2}-\tfrac{1}{abc}(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$
$$=6+a^2+b^2+c^2+\tfrac{b^2z^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}-(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$
$$=6+a^2+b^2+c^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-(a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2+1)$$
$$=6+a^2+b^2+c^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2-$$
$$-a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2-a^2-b^2c^2-b^2-c^2-1$$
$$=6-a^2b^2c^2-1=6-1-1=4,$$

од каде следува бараниот идентитет.

3. За природните броеви a,b,c,d се исполнети равенствата

$$\tfrac{a}{c}=\tfrac{b}{d}=\tfrac{ab+1}{cd+1}.$$

Докажи дека $a=c$ и $b=d$.

Решение. Бидејќи $a,b,c,d\in\mathbb{N}$, постои рационален број α таков што

$$\tfrac{a}{c}=\tfrac{b}{d}=\tfrac{ab+1}{cd+1}=\alpha .$$

Тогаш $a=\alpha c$, $b=\alpha d$ и $ab+1=\alpha(cd+1)$. Ако во последните равенства замениме $a=\alpha c$ и $b=\alpha d$, добиваме

$$\alpha^2cd-\alpha cd-\alpha+1=0$$
$$\alpha cd(\alpha-1)-(\alpha-1)=0$$
$$(\alpha-1)(\alpha cd-1)=0 .$$

Притоа можни се два случаи.

а) $\alpha-1=0$, т.е. $\alpha=1$. Тогаш $a=c$, $b=d$ (според равенствата $a=\alpha c$, $b=\alpha d$).

б) Ако $\alpha-1\neq 0$, а $\alpha cd-1=0$ имаме

$$(\alpha c)d-1=0$$
$$ad=1 \text{ (бидејќи } \alpha c=a\text{)}$$

Бидејќи $a,d\in\mathbb{N}$, последното равенство е можно ако и само ако $a=d=1$. Но тогаш $\tfrac{1}{c}=\tfrac{d}{1}$, односно $bc=1$. Повторно, бидејќи $b,c\in\mathbb{N}$, добиваме $b=c=1$.

Значи, и во овој случај $a=b=c=d=1$.

4. Ако $xyz=1$, докажи дека $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$.

Решение. Првата дропка ја прошируваме со z, а втората со xz. На тој начин добиваме ист именител во сите три дропки, т. е.

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{z}{z+xz+xyz}+\frac{xz}{xz+xzy+xzyz}+\frac{1}{1+z+zx}$$
$$=\frac{z}{z+xz+1}+\frac{xz}{xz+1+z}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1+z+zx}{1+z+zx}=1.$$

5. Ако a, b и c се различни броеви, докажи дека

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

Решение. Го трансформираме првиот собирок на левата страна:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{b-a+a-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}.$$

Слично постапуваме со останатите два собироци од левата страна и ги собираме добиените равенства, со што едокажан идентитетот.

6. Докажи, дека ако $(a+b)(a+c)(b+c)\neq 0$, тогаш

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)}=0.$$

Решение. Првиот собирок можеме да го трансформираме на следниот начин:

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}=\frac{a^2-bc+ab-ab}{(a+b)(a+c)}=\frac{a(a+b)-b(a+c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{a}{a+c}-\frac{b}{a+b}.$$

Слично постапуваме со останатите два собироци, па добиените равенства ги собираме, со што го добиваме бараниот идентитет

7. Од условот $a^2+a+1=0$ определи ја вредноста на изразот $a^{32}+a^{-32}$.
Решение. Имаме:

$$a^2+a+1=0$$
$$a+a^{-1}=-1$$
$$a^2+2+a^{-2}=1$$
$$a^2+a^{-2}=-1.$$

На ист начин добиваме:

$$a^4+a^{-4}=-1, a^8+a^{-8}=-1, a^{16}+a^{-16}=-1 \text{ и } a^{32}+a^{-32}=-1.$$

8. Скрати ја дропката $\frac{x^4+x^2+1}{x^5+x^3-x^2-1}$.

Решение. Имаме

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^5+x^3-x^2-1}=\frac{(x^2+1)^2-x^2}{(x^3-1)(x^2+1)}=\frac{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}{(x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Заедничкиот множител, со кој ја скративме дропката е позитивен (Провери!). Во последниот именител едниот множител е ненегативен и не е делител на броителот, а другиот е еднаков на нула за $x=1$. Но, за $x=1$ броителот на дропката е различен од нула, па затоа последната дропка не може повеќе да се скрати.

9. Докажи дека дропката $\frac{1+n^2+n^7}{1+n+n^8}$ може да се скрати за секој природен број n.

Решение. Имаме:

$$1+n^2+n^7 = 1+n+n^2-n-n^2-n^3+n^2+n^3+n^4-n^4-n^5-n^6+n^5+n^6+n^7$$
$$= (1+n+n^2)-n(1+n+n^2)+n^2(1+n+n^2)-n^4(1+n+n^2)+n^5(1+n+n^2)$$
$$= (1+n+n^2)(1-n+n^2-n^4+n^5).$$
$$1+n+n^8 = 1+n+n^2-n^2-n^3-n^4+n^5-n^5-n^6-n^7+n^6+n^7+n^8$$
$$= (1+n+n^2)(1-n^2+n^3-n^5+n^6).$$

Значи, броителот и именителот имаат заеднички делител за секој природен број n. Тоа е бројот $1+n+n^2$.

10. Да се упрости изразот

$$\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{a^2-ac+3bc-3ab}.$$

Колкава е неговата вредност за $a=1, b=0, c=2$?

Решение. Ако $a\neq 3b, a\neq c$, тогаш

$$\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{a^2-ac+3bc-3ab}=\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{a(a-3b)-c(a-3b)}$$
$$=\frac{a}{a-3b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-3ab}{(a-3b)(a-c)}=\frac{a^2-ac-ac+3bc+ac-3ab}{(a-3b)(a-c)}=1.$$

Бидејќи за $a=1, b=0, c=2$ важи $a\neq 3b, a\neq c$ добиваме дека вредноста на изразот идентички е еднаква на 1.

11. Да се упрости изразот

$$\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{a^2-ac+2bc-2ab}.$$

Колкава е неговата вредност за $a=b=1$ и $c=2$?

Решение. Ако $a\neq 2b, a\neq c$, тогаш

$$\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{a^2-ac+2bc-2ab}=\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{a(a-2b)-c(a-2b)}$$
$$=\frac{a}{a-2b}-\frac{c}{a-c}+\frac{ac-2ab}{(a-2b)(a-c)}=\frac{a^2-ac-ac+2bc+ac-2ab}{(a-2b)(a-c)}=1.$$

Бидејќи за $a=b=1, c=2$ важи $a\neq 2b, a\neq c$ добиваме дека вредноста на изразот идентички е еднаква на 1.

12. Да се упрости изразот

$$\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}-\frac{a+3}{9a-3a^2}.$$

Решение. Од условот на задачата при $a\neq -3, a\neq 3, a\neq 0$ имаме

$$\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}-\frac{a+3}{9a-3a^2}=\frac{1}{3(a+3)}-\frac{2a}{3(a-3)(a+3)}+\frac{a+3}{3a(a-3)}=\frac{a(a-3)-2a^2+(a+3)^2}{3a(a-3)(a+3)}$$
$$=\frac{a^2-3a-2a^2+a^2+6a+9}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{3a+9}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{3(a+3)}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{1}{a(a-3)}.$$

13. Да се упрости изразот

$$\frac{a+4}{4a^2-16a}-\frac{1}{a^2+4a}+\frac{8}{16a-a^3}.$$

Решение. Од условот на задачата при $a\neq -4, a\neq 4, a\neq 0$ имаме

$$\frac{a+4}{4a^2-16a}-\frac{1}{a^2+4a}+\frac{8}{16a-a^3}=\frac{a+4}{4a(a-4)}-\frac{1}{a(a+4)}-\frac{8}{a(a-4)(a+4)}$$

$$=\frac{a^2+8a+16-4a+16-32}{4a(a-4)(a+4)}=\frac{1}{4(a-4)}.$$

14. Определи го x од пропорцијата

$$[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b]:[(a-b)^2+ab]=[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1]:x.$$

Решение. Јасно, задачата има смисол за $a\neq 0,\ b\neq 0$. Сега последователно добиваме

$$\frac{a^3+3a^2b+b^3+3ab^2-3a^2b-3ab^2}{3ab}:[a^2-ab+b^2]=[\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}+1]:x$$

$$\frac{a^3+b^3}{3ab}:[a^2-ab+b^2]=\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}:x$$

$$x=\frac{3ab}{a^3+b^3}\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}[a^2-ab+b^2]=\frac{3(a^2-ab+b^2)(a+b)^2}{4(a+b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{3(a+b)}{4}.$$

15. Да се упрости изразот:

$$\frac{a^n+a^{-n}-1}{a^n+a^{-2n}}-\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}+2},\quad a\neq 0.$$

Решение. Последователно имаме

$$\frac{a^n+a^{-n}-1}{a^n+a^{-2n}}-\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}+2}=\frac{a^n+\frac{1}{a^n}-1}{a^n+\frac{1}{a^{2n}}}-\frac{a^n-\frac{1}{a^n}}{a^n+\frac{1}{a^n}+2}=\frac{a^{3n}+a^n-a^{2n}}{a^{3n}+1}-\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1+2a^n}$$

$$=\frac{a^n(a^{2n}-a^n+1)}{(a^n+1)(a^{2n}-a^n+1)}-\frac{(a^n-1)(a^n+1)}{(a^n+1)^2}=\frac{a^n}{a^n+1}-\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{1}{a^n+1}.$$

16. а) Да се упрости изразот:

$$A=[\frac{y^2+xy}{2x}:(y^2-x^2)]\cdot[\frac{(x+y)^2}{4xy}-1].$$

б) Која крива во рамнината се добива за $A=1$.

в) Нацртај го нејзиниот график.

Решение. а) Јасно $x\neq 0,\quad y\neq \pm x$ и притоа

$$A=[\frac{y^2+xy}{2x}:(y^2-x^2)]\cdot[\frac{(x+y)^2}{4xy}-1]$$

$$=\frac{y(y+x)}{2x}\cdot\frac{1}{(y-x)(y+x)}\cdot\frac{(x+y)^2-4xy}{4xy}$$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{y-x}\cdot\frac{(y-x)^2}{4x}=\frac{y-x}{8x^2}.$$

б) За $A=1$ добиваме $1=\frac{y-x}{8x^2}$, т.е. $y=8x^2+x$ и тоа е равенка на парабола.

в) Нацртај го самостојно графикот на оваа парабола.

17. а) Да се упрости изразот: $B \equiv \frac{1}{y^2+xy} + \frac{2x}{y^3-x^2y} - \frac{x+y}{y^2x-x^2y}$.

б) Која крива се добива за $B = \frac{1}{x^3}$?

Решение. Дадениот израз има смисла за $x \neq \pm y,\ x \neq 0,\ y \neq 0$ и притоа

$$B \equiv \frac{1}{y^2+xy} + \frac{2x}{y^3-x^2y} - \frac{x+y}{y^2x-x^2y} = \frac{1}{y(y+x)} - \frac{2x}{y(x-y)(x+y)} + \frac{x+y}{yx(x-y)}$$
$$= \frac{x(x-y)-2x^2+(x+y)^2}{xy(x-y)(x+y)} = \frac{x^2-xy-2x^2+x^2+y^2+2xy}{xy(x-y)(x+y)} = \frac{y^2+xy}{xy(x-y)(x+y)}$$
$$= \frac{y(x+y)}{xy(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x(x-y)}.$$

б) Ако $B = \frac{1}{x^3}$, тогаш $\frac{1}{x(x-y)} = \frac{1}{x^3}$ т.е. $y = -x^2 + x$ што значи дека во случајот се добива парабола.

18. Да се упрости изразот:

$$A = [(\frac{1}{a-b} + \frac{3a}{a^3-b^3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}) : \frac{4a+b}{a^2+2ab+b^2}] \cdot \frac{ab^2-a^2b}{a+b}.$$

Решение. Изразот има смисол за $a \neq \pm b$ и во овој случај имаме

$$A = [(\frac{1}{a-b} + \frac{3a}{a^3-b^3} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}) : \frac{4a+b}{a^2+2ab+b^2}] \cdot \frac{ab^2-a^2b}{a+b}$$
$$= [(\frac{1}{a-b} + \frac{3a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}) : \frac{4a+b}{(a+b)^2}] \cdot \frac{ab(b-a)}{a+b}$$
$$= [(\frac{1}{a-b} + \frac{3a}{(a-b)(a+b)}) \cdot \frac{(a+b)^2}{4a+b}] \cdot \frac{ab(b-a)}{a+b} = \frac{4a+b}{(a-b)(a+b)} \frac{(a+b)^2}{4a+b} \cdot \frac{ab(b-a)}{a+b} = -ab.$$

19. а) Да се пресмета: $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} : (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{1}{3a+9} - \frac{2a}{3a^2-27}$, за $a \neq 3,\ a \neq -3$.

Решение. Имаме

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} : (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} : \frac{5-4}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{1} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$.

б) $\frac{1}{3a+9} - \frac{2a}{3a^2-27} = \frac{a-3-2a}{3(a-3)(a+3)} = \frac{-(a+3)}{3(a-3)(a+3)} = \frac{1}{3(3-a)}$.

20. а) Да се пресмета: $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} : (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}$, за $a \neq b$, $a \neq -b$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} : (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} : \frac{3+2}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

б) Имаме

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4} = \frac{a^3-ab^2-ba^2+2ab^2-b^3}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = \frac{a(a^2+b^2)-b(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}.$$

21. а) Да се пресмета: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}$, за $a\neq 3$, $a\neq -3$.

Решение. Имаме

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}:\frac{5-4}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{1}=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$.

б) $\frac{1}{3a+9}-\frac{2a}{3a^2-27}=\frac{a-3-2a}{3(a-3)(a+3)}=\frac{-(a+3)}{3(a-3)(a+3)}=\frac{1}{3(3-a)}$.

22. а) Да се пресмета: $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$

б) Да се упрости изразот: $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}$, за $a\neq b$, $a\neq -b$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}:\frac{3+2}{6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}.$$

б) Имаме

$$\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}=\frac{a^3-ab^2-ba^2+2ab^2-b^3}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\frac{a(a^2+b^2)-b(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}$$
$$=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a+b}.$$

23. а) Да се пресмета: $0,5+0,4:(0,25-0,2)$.

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a(a+1)(a-1)}$ за $a\neq 1, a\neq -1, a\neq 0$.

Решение. а) Имаме

$$0,5+0,4:(0,25-0,2)=0,5+0,4:0,05=0,5+0,40:0,05=0,5+8=8,5$$

б) При $a\neq 1, a\neq -1, a\neq 0$ важи

$$\frac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^4(a-1)-a^2(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2(a-1)(a^2-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2(a-1)(a+1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=a(a-1).$$

24. Да се пресмета: $3,5-0,9:(0,2+0,25)$

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}$ за $a\neq\pm 1$.

Решение. а) Имаме

$$3,5-0,9:(0,2+0,25)=3,5-0,9:0,45=3,5-0,90:0,45=3,5-2=1,5.$$

б) При $a\neq\pm 1$ добиваме

$$\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}=\frac{a^3(a+1)-a(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)}=a(a+1).$$

25. а) Да се пресмета: $0,5+0,4:(0,25-0,2)$.

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a(a+1)(a-1)}$ за $a\neq 1, a\neq -1, a\neq 0$.

Решение. а) Имаме

$$0,5+0,4:(0,25-0,2)=0,5+0,4:0,05=0,5+0,40:0,05=0,5+8=8,5$$

б) При $a\neq 1, a\neq -1, a\neq 0$ важи

$$\frac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^4(a-1)-a^2(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2(a-1)(a^2-1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a^2(a-1)(a+1)(a-1)}{a(a+1)(a-1)}=a(a-1)\,.$$

26. а) Да се пресмета: $3,5-0,9:(0,2+0,25)$

б) Да се скрати дропката: $\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}$ за $a\neq\pm1$.

Решение. а) Имаме

$$3,5-0,9:(0,2+0,25)=3,5-0,9:0,45=3,5-0,90:0,45=3,5-2=1,5\,.$$

б) При $a\neq\pm1$ добиваме

$$\frac{a^4+a^3-a^2-a}{(a+1)(a-1)}=\frac{a^3(a+1)-a(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{a(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)}=a(a+1)\,.$$

27. а) Да се упрости изразот

$$A=\frac{a^2-1}{n^2+an}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\Big)\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}\,.$$

б) Дали за некој природен број n, бројот A е природен број?

Решение. а) Имаме

$$A=\frac{a^2-1}{n^2+an}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\Big)\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}=\frac{1}{n(n+a)}\Big(\frac{n}{n-1}-1\Big)\frac{-(n^3-1)(a+n)}{-1}$$

$$=\frac{1}{n}\frac{n-n+1}{n-1}(n-1)(n^2+n+1)=\frac{n^2+n+1}{n}=n+1+\frac{1}{n}.$$

б) Користејќи го резултатот под а), имаме дека A е природен број ако и само ако $\frac{1}{n}$ е природен број, а тоа е можно за $n=1$. Но, изразот A не е дефиниран за $n=1$, па следствено, A не може да биде природен број за ниту една вредност на природниот број n.

28. Да се упрости следниов алгебарски израз:

$$\frac{(m^2-\frac{1}{n^2})^m\cdot(n+\frac{1}{m})^{n-m}}{(n^2-\frac{1}{m^2})^n(m-\frac{1}{n})^{m-n}}\,.$$

Решение. Дадениот израз да го означиме со J.

$$J=\frac{(m^2n^2-1)^m\cdot(mn+1)^{n-m}\cdot m^{2n}\cdot n^{m-n}}{(m^2n^2-1)^n\cdot(mn-1)^{m-n}\cdot n^{2m}\cdot m^{n-m}}=\frac{(m^2n^2-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}}\cdot\frac{(mn+1)^{n-m}\cdot m^{2n-n+m}}{n^{2m-m+n}}$$

$$=\frac{(mn-1)^{m-n}}{(mn-1)^{m-n}}\frac{(mn+1)^{m-n}}{(mn+1)^{m-n}}\frac{m^{m+n}}{n^{m+n}}=\Big(\frac{m}{n}\Big)^{m+n}.$$

29. Да се упрости изразот $\frac{x^{12}+28x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}$.

Решение. Имаме

$$x^{12}-128x^6+4096=(x^6-64)^2=(x^3-8)^2(x^3+8)^2$$

$$=(x-2)^2(x^2+2x+4)^2(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$$

$$x^3-4x^2+8x-8=(x^3-8)-4x(x-2)=(x-2)(x^2+2x++4-4x)$$

$$=(x-2)(x^2-2x+4)\,.$$

Значи,

$$\frac{x^{12}+28x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}=\frac{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2(x+2)^2(x^2-2x+4)^2}{(x-2)^2(x^2-2x+4)^2}=(x+2)^2(x^2+2x+4)^2.$$

30. Нека за броевите a,b и c е точно равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\,.$$

Да се покаже дека е исполнет барем еден од следниве три услови:

$$a=-b\,,\ a=-c\,,\ b=-c\,.$$

Решение. Следната низа од равенства се еквивалентни меѓу себе:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc$$

$$a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2=abc$$

$$b(a^2+ac+ab+bc)+c(a^2+ac+bc+ca)=0$$

$$b[a(a+c)+b(a+c)]+c[a(a+c)+b(a+c)]=0$$

$$(a+c)[b(a+b)+c(a+b)]=0$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0\,.$$

Од последното равенство непосредно се добива тврдењето од задачата.

31. За ненеултите реални броеви a,b,c,d важи

$$a+b+c+d=0 \text{ и } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0\,.$$

Да се определи вредноста на изразот $(ab-cd)(c+d)$.

Решение. Условот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}=0$ можеме да го запишеме во облик

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=-\frac{1}{abcd}$$

односно

$$abc+abd+acd+bcd=-1.$$

Сега, од условот $a+b+c+d=0$ имаме

$$c+d=-(a+b)\text{, т.е. } a+b==-(c+d)\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}-1&=abc+abd+acd+bcd\\&=ab(c+d)+cd(a+b)\\&=ab(c+d)-cd(c+d)\\&=(c+d)(ab-cd).\end{aligned}$$

32. За позитивните броеви x,y,z е исполнето равенството

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}\,.$$

Докажи дека барем два од броевите x,y,z се еднакви меѓу себе.

Решение. Ако даденото равенство го помножиме со xyz добиваме

$$\begin{aligned}0 &= x^3z + y^3x + z^3y - x^3y - z^3x - y^3z \\ &= x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) \\ &= x^3(z-x) + x^3(x-y) - y^3(z-x) - z^3(x-y) \\ &= (z-x)(x^3-y^3) + (x-y)(x^3-z^3) \\ &= (z-x)(x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(x-z)(x^2+xz+z^2) \\ &= (x-y(z-x)(x^2+xy+y^2-x^2-xz-z^2) \\ &= (x-y)(z-x)(+x(y-z)+(y-z)(y+z)) \\ &= (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).\end{aligned}$$

Бидејќи x, y, z се позитивни броеви, важи $x+y+z>0$, па затоа од последното равенство следува $x-y=0$ или $y-z=0$ или $z-x=0$, т.е. $x=y$ или $y=z$ или $z=x$, што и требаше да се докаже.

33. Да се упрости алгебарскиот рационален израз

$$A = \frac{x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3}{2x^3+x^2y-4xy^2-3y^2}.$$

Решение. Да го разложиме броителот на множители:

$$\begin{aligned}x^3+x^2+3x^2y+2xy+3xy^2+y^2+y^3 &= \\ &= x^3+x^2+x^2y++2x^2y+2xy+2xy^2+xy^2+y^2+y^3 \\ &= x^2(x+1+y)+2xy(x+1+y)+y^2(x+1+y) \\ &= (x+y)^2(x+1+y)\end{aligned}$$

Да се обидеме сега да го разложиме именителот на множители од кои што едниот множител е $x+y$:

$$\begin{aligned}2x^3+x^2y-4xy^2-3y^2 &= 2x^3+2x^2y-x^2y-x^2y-3xy^2-3y^2 \\ &= 2x^2(x+y)-xy(x+y)-3y^2(x+y) \\ &= (x+y)(2x^2-xy-3y^2)\end{aligned}$$

Полиномот $2x^2-xy-3y^2$ го разложуваме на множители

$$2x^2-xy-3y^2 = 2x^2+2xy-3xy-3y^2 = 2x(x+y)-3y(x+y) = (x+y)(2x-3y).$$

Конечно, добиваме

$$A = \frac{(x+y)^2(x+y+1)}{(x+y)^2(2x-3y)} = \frac{x+y+1}{2x-3y}.$$

34. За позитивните реални броеви x и y тоно е равенството $x^2+y^2=6xy$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{x+y}{x-y}$.

Решение. Ако на двете страни од равенството m^2-2 додадеме $m=3,4,...$ добиваме

$$x^2+2xy+y^2=8xy \text{ т.е. } (x+y)^2=8xy\,.$$

Ако на двете страни на истото равенство додадеме $-2xy$ добиваме

$$x^2-2xy+y^2=4xy\,, \text{ т.е. } (x-y)^2=4xy\,.$$

Според тоа

$$(\tfrac{x+y}{x-y})^2=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\frac{8xy}{4xy}=2\,.$$

Конечно, $\frac{x+y}{x-y}=\pm\sqrt{2}$.

35. Упрости го изразот

$$\frac{(x^2-\frac{1}{y^2})^x(y+\frac{1}{x})^{y-x}}{(y^2-\frac{1}{x^2})^y(x-\frac{1}{y})^{x-y}}\,.$$

Решение. Ќе направиме трансформација и на броителот и на именителот на зададениот израз. Имаме:

$$\frac{(x^2-\frac{1}{y^2})^x(y+\frac{1}{x})^{y-x}}{(y^2-\frac{1}{x^2})^y(x-\frac{1}{y})^{x-y}}=\frac{(\frac{x^2y^2-1}{y^2})^x(\frac{xy+1}{x})^{y-x}}{(\frac{x^2y^2-1}{x^2})^y(\frac{xy-1}{y})^{x-y}}=\frac{\frac{(x^2y^2-1)^x}{y^{2x}}\cdot\frac{(xy+1)^{y-x}}{x^{y-x}}}{\frac{(x^2y^2-1)^y}{x^{2y}}\cdot\frac{(xy-1)^{x-y}}{y^{x-y}}}$$

$$=\frac{\frac{(xy-1)^x(xy+1)^x(xy+1)^y(xy+1)^{-x}}{y^{2x}x^yx^{-x}}}{\frac{(xy-1)^y(xy+1)^y(xy-1)^x(xy-1)^{-y}}{x^{2y}y^xy^{-y}}}=\frac{x^{x+y}}{y^{x+y}}=(\tfrac{x}{y})^{x+y}.$$

36. Ако за реалните броеви a, b и c важи $a^2+b^2=(a+b-c)^2$, $a+b\neq c$ и $b\neq c$, докажи дека $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a-c)(a+2b-c)\,,$$

$$b^2=(a+b-c)^2-a^2=(b-c)(2a+b-c)\,.$$

Ако последните равенства ги замениме во левата страна на равенството што треба да се добие, имаме

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c+a-c)}{(b-c)(2a+b-c+b-c)}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}\,.$$

37. Нека a,b,c и x,y,z се дадени реални броеви, $abc\neq 0$, $xyz\neq 0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ и $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$. Докажи дека $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Ако воведеме смени $\frac{x}{a}=u$, $\frac{y}{b}=v$, $\frac{z}{c}=w$, тогаш точни се равенствата $u+v+w=1$ и $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$. Од второто равенство $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$, добиваме дека $\frac{vw+uw+uv}{uvw}=0$, од каде имаме $uv+vw+wu=0$.

Ако равенството $u+v+w=1$ го квадрираме, добиваме $(u+v+w)^2=1^2$, т.е. $u^2+v^2+w^2+2uv+2vw+2uw=1$.

Ако го искористиме условот $uv+vw+wu=0$, добиваме

$$u^2+v^2+w^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+uw)=1\,.$$

т.е. $u^2+v^2+w^2=1$. Ако се вратиме на старите променливи, ја добиваме точноста на бараното равенство

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

38. Нека x, y и z се броеви за кои што

$$x+y+z=2\,,\ x^2+y^2+z^2=a \text{ и } xyz=b\,.$$

Збирот

$$S=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

изрази го преку a и b .

Решение. Од равенството $x+y+z=2$ добиваме

$$x=2-y-z$$
$$y=2-z-x$$
$$z=2-x-y$$

Но, тогаш

$$yz+x-1=yz+2-y-z-1=yz-y-z+1=(y-1)(z-1)$$
$$xz+y-1=xz+2-x-z-1=xz-x-z+1=(z-1)(x-1)$$
$$xy+z-1=xy+2-x-y-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$$

Сега,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}\\&=\frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{x+y+z-3}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}\\&=\frac{x+y+z-3}{xyz-\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}+(x+y+z)-1}=\frac{2-3}{b-\frac{4-a}{2}-1}=\frac{-2}{2b+a-2}.\end{aligned}$$

39. Да се определат вредностите на изразот

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}\,,$$

за оние a,b и c за кои тој е определен.

Решение. За $A=a+b+c$ изразот го добива обликот

$$\begin{aligned}M&=\frac{(A-2c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(A-2a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(A-2b)^2}{(c-b)(a-b)}\\&=\frac{(A-2c)^2(b-a)+(A-2a)^2(c-b)+(A-2b)^2(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\&=\frac{4L}{(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

За L имаме

$$L=A^2[(b-a)+(a-c)+(c-b)]-2A[c(b-a)+a(c-b)+b(a-c)]+$$
$$+4[c^2(b-a)+a^2(c-b)+b^2(a-c)]=A^2\cdot 0-2A\cdot 0+4N=4N$$

а за N имаме

$$\begin{aligned}N&=c^2(b-a)+a^2(c-b)+b^2(a-c)\\&=c^2(b-a)+(a^2c-a^2b+b^2a-b^2c)\\&=c^2(b-a)+(a^2c-b^2c)-(a^2b-b^2a)\\&=c^2(b-a)+c(a+b)(a-b)-ab(a-b)\\&=(a-b)(ac+bc-ab-c^2)\\&=(a-b)[c(b-c)-a(b-c)]\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

Според тоа $L=4(a-b)(b-c)(c-a)$, односно

$$M=\frac{4L}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=4\,.$$

40. Ако $a\neq b$, $b\neq c$ и $c\neq a$, тогаш

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

не зависи од x. Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=\\&=\frac{(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\&=\frac{x^2(b-c+c-a+a-b)-x[(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)]+bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\&=\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab[(a-c)+(c-b)]}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(b-c)(bc-ab)+(a-c)(ab-ac)}{(a-b)(b-c)(a-c)}\\&=\frac{(b-c)[b(c-a)+a(a-c)]}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}=1\end{aligned}$$

41. Нека x,y,z се реални броеви такви што $xyz=1$. Ако

$$a=x+\tfrac{1}{x}\,,\; b=y+\tfrac{1}{y}\; \text{ и }\; c=z+\tfrac{1}{z}\,,$$

пресметај ја вредноста на изразит

$$a^2+b^2+c^2-abc\,.$$

Решение. Имаме:

$$a=x+\tfrac{1}{x}=x+\tfrac{xyz}{x}=x+yz\,,$$
$$b=y+\tfrac{1}{y}=y+\tfrac{xyz}{y}=y+zx\,,$$
$$c=z+\tfrac{1}{z}=z+\tfrac{xyz}{z}=z+xy\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}
&a^2 = x^2 + 2xyz + y^2z^2 = x^2 + y^2z^2 + 2,\\
&b^2 = y^2 + 2xyz + x^2z^2 = y^2 + z^2x^2 + 2,\\
&c^2 - z^2 + 2xyz + x^2y^2 = z^2 + x^2y^2 + 2,\\
&zbc = (x + yz)(y + zx)(z + xy)\\
&\quad = xyz + x^2y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + xyz^3xy^3z + x^3yz\\
&\quad = 2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}$$

,

Значи,

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 - abc &= x^2 + y^2z^2 + 2 + y^2 + z^2x^2 + 2 + z^2 + x^2y^2 + 2 -\\
&\quad - (2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2)\\
&= 4.
\end{aligned}$$

42. Докажи дека:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)} = \frac{1}{xyz}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)} &= -\frac{1}{x(x-y)(z-x)} - \frac{1}{y(y-z)(x-y)} - \frac{1}{z(z-x)(y-z)}\\
&= -\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\
&= -\frac{y^2z-yz^2+xz^2-x^2z+x^2y-xy^2}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\
&= -\frac{-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\
&= -\frac{(x-y)(-zx-zy+z^2+xy)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\
&= -\frac{(x-y)(x(y-z)-z(y-z))}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\
&= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)} = \frac{1}{xyz}
\end{aligned}$$

43. За реалниот број x, $x > 1$ е исполнето равенството

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Пресметај го збирот $x + \frac{1}{x}$.

Решение. Ќе воведеме смена $\sqrt{x} = a$. Тогаш $a > 1$ и $x = a^2$, при што равенството го добива обликот

$$a^2 - \frac{1}{a^2} = a + \frac{1}{a}.$$

Според тоа

$$(a - \frac{1}{a})(a + \frac{1}{a}) = a + \frac{1}{a}.$$

Бидејќи $a>1$, имаме $a+\frac{1}{a}>1$, па според тоа $a-\frac{1}{a}=1$. Сега со квадрирање на последното равенство и добиваме

$$a^{2`}-2+\frac{1}{a^2}=1\text{, т.е. } a^{2`}+\frac{1}{a^2}=3$$

Значи, $x+\frac{1}{x}=3$.

44. Нека a,b,c,d,e,f се дадени броеви, при што $ace\neq 0$. Ако вредностите на изразите $|ax+b|+|cx+d|$ и $|ex+f|$ се еднакви за секое x, тогаш $ad=bc$. Докажи!

Решение. Нека $x=-\frac{f}{e}$. Тогаш $|ex+f|=|e(-\frac{f}{e})+f|=0$, па затоа

$$|a(-\frac{f}{e})+b|+|c(-\frac{f}{e})+d|=0\,,$$

од каде следува

$$a(-\frac{f}{e})+b=0 \text{ и } c(-\frac{f}{e})+d=0\,.$$

Според тоа, $\frac{b}{a}=\frac{f}{e}=\frac{d}{c}$, т.е. $ad=bc$.

45. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{n}{3n+1}\,.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{3k+1}{(3k-2)(3k+1)}-\frac{3k-2}{(3k-2)(3k+1)}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right),$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}\,.$$

46. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}-\frac{k}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

47. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}\,.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\frac{2k+3-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right)$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}-...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+1)(2n+3)-3}{3(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}.$$

48. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}=1-\frac{1}{n!}$$

Решение. Ако искористиме дека $\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$ добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}=\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+...+\left(\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=1-\frac{1}{n!}.$$

49. Ако n е непарен природен број, тогаш од равенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ следува равенството $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$. Докажи!

Решение. Равенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ е еквивалентно со равенството $\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz(x+y+z)}=0$, а равенството $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$ е еквивалентно со равенството $\frac{(x^n+y^n)(x^n+z^n)(y^n+z^n)}{x^ny^nz^n(x^n+y^n+z^n)}=0$. Бидејќи n е непарен природен број, броителот на левата страна на последното равенство може да се разложи на множители, при што еден множител е $(x+y)(x+z)(y+z)$, а тој е еднаков на нула, што значи дека од равенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ следува равенството $\frac{(x^n+y^n)(x^n+z^n)(y^n+z^n)}{x^ny^nz^n(x^n+y^n+z^n)}=0$.

50. Докажи дека, за секој природен број n важи

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+...+\frac{1}{2n-3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}\right)$$

Решение. Имаме

$$L=\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n-1)+1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{(2n-3)+3}{3\cdot(2n-3)}+...+\frac{(2n-3)+3}{3\cdot(2n-3)}+\frac{(2n-1)+1}{1\cdot(2n-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+...+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+...+\frac{2}{2n-1}\right)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}\right)=D.$$

51. Ако n е природен број, тогаш $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}$. Докажи!

Решение. Ако искористиме дека
$$(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$$
добиваме
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$
$$=(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n+1})(\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-2)^2-(n-2)+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1})$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}.$$

52. Ако n е природен број и $a\neq\pm1$ докажи дека
$$\frac{1}{1-a}+\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{1+a^{2^k}}=\frac{2\cdot2^n}{1-a^{2^{n+1}}}\quad.$$
Решение. Дадениот идентитет лесно се докажува со помош на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

53. Докажи дека
$$\prod_{k=0}^{2n-1}(1+x^{2^k})\equiv\sum_{k=0}^{2^n-1}x^k$$
Решение. Левата страна ја означуваме со L, а десната страна со D. Тогаш
$$(1-x)L=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{2n-1}})$$
$$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{2n-1}})$$
$$=(1-x^4)(1+x^4)...(1+x^{2^{2n-1}})=1-x^{2^{2n}}$$
т.е.
$$L=\frac{1-x^{2^{2n}}}{1-x},\quad x\neq1$$
За десната страна ако ја искористиме формулата
$$x^k+x^{k-1}+...+x+1=\frac{x^{k+1}-1}{x-1},$$
за $k=2^n-1$ добиваме
$$D=\frac{1-x^{2^{2n}}}{1-x},\quad x\neq1.$$
Забелешка. Задачата може да се реши и со помош на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

54. Докажи дека
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}\text{, за } x\neq1.$$

Решение. Левата страна ја означуваме со L и ја множиме со $(1-x^{2^n})$. Тогаш

$$
\begin{aligned}
L(1-x^{2^n}) &= x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2^n-1})+x^2(1+x^4+x^{2.3}+\ldots+x^{2^{2n-2}})+\ldots+x^{2^{n-1}}\\
&= x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2^n-1}+x+x^5+x^7+\ldots+x^{2^{n-2}+1}+\ldots+x^{2^{n-1}-1})\\
&= x\cdot\frac{1-x^{2^{n-1}}}{1-x}.
\end{aligned}
$$

Забелешка. Задачата може да се реши и со помош на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

55. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n-4k^2+3k}{2k(2k-1)(n+k)}=0,\quad n\in\mathbb{N}$$

.

Решение. Со S_n го означуваме дадениот збир. Лесно се докажува дека

$$\frac{n-4k^2+3k}{2k(2k-1)(n+k)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}-\frac{1}{n+k}.$$

Користејќи го ова равенство докажи дека $S_{n+1}=S_n$. Бидејќи $S_1=0$, примени го принципот на математичка индукција.

56. Докажи дека $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}.\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$ за $x\neq 1$.

Решение. Имаме:

$$
\begin{aligned}
(1-x^{2^n})L &= x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2^n-1})+x^2(1+x^4+x^{2.4}+\ldots+x^{2^{n-2}})+\ldots+x^{2^{n-1}}\\
&= x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2^n-1}+x+x^5+x^7+\ldots+x^{2^{n-2}+1}+\ldots+x^{2^{n-1}-1})\\
&= x(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2^{n-1}-1})\\
&= x\frac{1-x^{2^{n-1}}}{1-x}
\end{aligned}
$$

па затоа $L=D$.

Забелешка. Задачата може да се реши и со помош на математичка индукција. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

57. Докажи дека

$$1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot1998\cdot1999}=\frac{1}{667}+\frac{1}{668}+\ldots+\frac{1}{1999}.$$

Решение. За $n>1$ забележуваме дека важи

$$\frac{2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n}.$$

Тогаш

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot1998\cdot1999}=\\
&\quad=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}-\frac{3}{1998}\right)\\
&\quad=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{666}+\frac{1}{667}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{666}\\
&\quad=\frac{1}{667}+\frac{1}{668}+\ldots+\frac{1}{1999}.
\end{aligned}
$$

58. Пресметај $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2^{2^n}})$.

Решение. Нека

$$a_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})(1+\frac{1}{2^8})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2^{2^n}}),$$

тогаш $(1-\frac{1}{2})a_n=1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$, од каде $a_n=2(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})$.

Забелешка. Решението на задачата всушност следува од решението на задача 46, каде е разгледуван поопшт случај.

59. Да се најде збирот на сите трицифрени броеви што може да се формираат од цифрите 1, 2, 3 и 4.

Решение. Од цифрите 1, 2, 3 и 4 може да се формираат $4^3=64$ трицифрени броеви. Секоја цифра на последното место се јавува ист број пати, т.е. секоја од цифрите 1, 2, 3, 4 како последна се јавува во 14 трицифрени броеви. Затоа, збирот на едниците е:

$$16(1+2+3+4)=160,$$

а збирот на десетките и стотките ќе биде 1600 и 16000 соодветно. Според тоа, збирот на сите трицифрени броеви ќе биде

$$160+1600+16000=17760.$$

60. Природните броеви се групирани на следниов начин:

$$\{(1,2),(3)\},\{(4,5,6),(7,8)\},\{(9,10,11,12),(13,14,15)\},$$
$$\{(16,17,18,19,20),(21,22,23,24)\},\ldots$$

Докажи дека групирањето на броевите во секоја од големите загради е извршено така што збировите на броевите во малите загради се еднакви.

Решение. Да забележиме дека првиот број во првата мала заграда од k-тата голема заграда е k^2, а последниот е k^2+k; значи, во првата мала заграда има $k\neq 1$ број, а во втората k броеви. Според тоа, за збировите S_1 и S_2 на броевите во првата и втората мала заграда соодветно ќе имаме:

$$S_1=k^2+(k^2+1)+...+(k^2+k)=(k+1)k^2+(1+2+3+...+k)$$
$$=(k+1)k^2+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}$$
$$S_2=(k^2+k+1)+(k^2+k+2)+...+(k^2+2k)$$
$$=[\underbrace{(k^2+k)++...+(k^2+k)}_{k}]+(1+2+...+k)$$
$$=k(k^2+k)+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}.$$

Следствено, $S_1=S_2$

61. Нека a,b,c се реални броеви такви што

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3.$$

Дали

$$(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})(a+b+c-2)\,,$$

е цел број.

Решение. Изразот, чија вредност треба да ја пресметаме ќе го запишеме во облик

$$(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})(a+b+c-2)=\tfrac{bc+ac+ab}{abc}(a+b+c-2)\,.$$

Доволно е а ги пресметаме вредностите на $ab+bc+ca$ и abc.

Нека $a+b+c=s$. Тогаш, од условот на задачата

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=s\\ a^3+b^3+c^3&=s \end{aligned}.$$

Бидејќи,

$$s^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=s+2(ab+bc+ca)\,,$$

добиваме,

$$ab+bc+ca=\tfrac{1}{2}s(s-1)\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од равенството

$$\begin{aligned} s^2&=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\\ &=a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+a^3+b^3+c^3\,,\\ &=a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+s \end{aligned}$$

и претходно воведените ознаки имаме

$$a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b=s(s-1)\,.$$

Сега, од равенството

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}s(s-1)s&=(ab+bc+ca)(a+b+c)\\ &=a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+3abc\\ &=s(s-1)+3abc \end{aligned}$$

имаме

$$abc=\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}s(s-1)s-s(s-1))=\tfrac{s(s-1)(s-2)}{6}\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) имаме

$$(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})(a+b+c-2)=\tfrac{bc+ac+ab}{abc}(a+b+c-2)=\frac{\frac{1}{2}s(s-1)}{\frac{1}{6}s(s-1)(s-2)}(s-2)=3\,.$$

3. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. а) Упрости го изразот

$$y=(\tfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\tfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}):(1+\sqrt{\tfrac{a+b}{a-b}})\,.$$

б) За $a=x, b=1$ скицирај го графикот на функцијата $y=y(x)$.

Решение. а) Со рационализација на именителите во дропките од првата заграда имаме:

$$y=\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{a-a+b}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{a-a-b}\right):\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+b}}{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a-b}}{b}$$

б) За $a=x,b=1$ имаме $y=\frac{\sqrt{x-1}}{1}=\sqrt{x-1}$. Графикот на оваа функција е горната половина од параболата $y^2+1=x$.

2. Докажи го Лагранжовиот идентитет
$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\,,$$
за $a>0,b>0$, $a^2>b$, и примени го во изразот
$$\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}\text{, за } a>0.$$

Решение. Нека $D=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Тогаш
$$D^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=a\pm2\sqrt{\frac{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}{2}}$$
Бидејќи $a^2>b$, $(\sqrt{a^2-b})^2=a^2-b$. Според тоа, $D^2=a\pm\sqrt{b}$. Бидејќи $a>0$, $b>0$ и $a^2>b$, следува дека $a\geq\sqrt{b}$, па и $a\pm\sqrt{b}>0$. Според тоа, $D=\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, со што идентитетот е докажан.

За $a>0$, дадениот израз $\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}$, со лагранжовиот идентитет се трансформира во изразот $\sqrt{2a}+\sqrt{a}$, т.е.
$$\sqrt{3a+2a\sqrt{2}}=\sqrt{a}(1+\sqrt{2}).$$

3. Упрости го изразот
$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$$

Решение. Бидејќи
$$n^3-3n-2=n^3-n-2n-2=n(n^2-1)-2(n+1)=(n+1)^2(n-2),$$
броителот лесно го трансформираме во облик
$$(n+1)\sqrt{n-2}((n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}).$$
Слично се докажува дека именителот е еднаков на
$$(n-1)\sqrt{n+2}((n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}).$$
Заради тоа, добиваме
$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}((n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2})}{(n-1)\sqrt{n+2}((n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2})}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

4. Ако $a>0$ и $b>0$, докажи дека:

$$\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a)(\sqrt{a^2+b^2}-b)}=a+b-\sqrt{a^2+b^2}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}2(\sqrt{a^2+b^2}-a)(\sqrt{a^2+b^2}-b)&=2(a^2+b^2)-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+2ab\\&=a^2+b^2-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+(a+b)^2\\&=[\sqrt{a^2+b^2}-(a+b)]^2,\end{aligned}$$

па од неравенството $a+b\geq\sqrt{a^2+b^2}$ и последното равенство со квадрирање го добиваме равенството (1).

5. а) Да се упрости изразот: $y=(\frac{2+a^{\frac{1}{2}}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{2-a^{\frac{1}{2}}}{a-1}):\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}$

б) за $a-1=x$ да се скицира графикот на функцијата $y=y(x)$

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}y&=(\frac{2+a^{\frac{1}{2}}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}+\frac{2-a^{\frac{1}{2}}}{a-1}):\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}=(\frac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}+\frac{2-\sqrt{a}}{a-1}):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\\&=[\frac{2+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2}+\frac{2-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}]\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}=\frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)+(2-\sqrt{a})(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)}\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}\\&=\frac{2\sqrt{a}+a-2-\sqrt{a}+2\sqrt{a}-a+2-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{a-1}.\end{aligned}$$

б) За $a-1=x$ ја добиваме функцијата $y=\frac{2}{x}$ и тоа е хипербола.

6. Докажи дека ако

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1,$$

тогаш $x+y=0$.

Решение. Го множиме равенството

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$$

со $x-\sqrt{x^2+1}\neq 0$ и добиваме

$$(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=x-\sqrt{x^2+1},$$

односно

$$-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1} \tag{1}$$

Слично, ако го помножиме даденото равенство со $y-\sqrt{y^2+1}$ добиваме

$$-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1} \tag{2}$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме

$$-y-x-\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}+y-\sqrt{y^2+1},$$

а оттука следува дека $2(x+y)=0$, односно $x+y=0$.

7. Ако $a>0$ и $b>0$, докажи дека

$$\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{a^3+b^3}-a)(\sqrt[3]{a^3+b^3}-b)}=\sqrt[3]{(a+b)^2}-\sqrt[3]{a^2-ab+b^2}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}3(\sqrt[3]{a^3+b^3}-a)(\sqrt[3]{a^3+b^3}-b)&=3\sqrt[3]{(a^3+b^3)^2}-3(a+b)\sqrt[3]{a^3+b^3}+3ab\\&=3\sqrt[3]{(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2}-3\sqrt[3]{(a+b)^4(a^2-ab+b^2)}+3ab\\&=3\sqrt[3]{(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2}-3\sqrt[3]{(a+b)^4(a^2-ab+b^2)}+\\&\quad+(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)\\&=(\sqrt[3]{(a+b)^2}-\sqrt[3]{a^2-ab+b^2})^3\end{aligned}$$

Равенството го добиваме од точноста на следното равенството:

8. Ако $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}.$$

Решение. Да ставиме $A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$. Имајќи ги предвид дадените равенства, добиваме:

$$A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}=x\sqrt[3]{a}.$$

Аналогно, $A=y\sqrt[3]{b}$ и $A=z\sqrt[3]{c}$. Понатаму, $\sqrt[3]{a}=\frac{A}{x}$, $\sqrt[3]{b}=\frac{A}{y}$, $\sqrt[3]{c}=\frac{A}{z}$, а оттука следува

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z}=A(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}.$$

9. Ако $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, тогаш $(a+b+c)^3=27abc$. Докажи!

Решение. Од даденото равенство, последователно добиваме

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}\\&(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^3=(-\sqrt[3]{c})^3\\&a+b+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{b^2a}=-c\\&a+b+c=-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})=3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}\\&(a+b+c)^3=(3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c})^3\\&(a+b+c)^3=27abc\end{aligned}$$

10. За $x\neq 1$ и $x\geq 0$, докажи дека вредноста на изразот

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}$$

не зависи од x.

Решение. Изразот е дефиниран за $x\geq 0,\ x\neq 1$. За $x\geq 0,\ x\neq 1$ важи

$$\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}=\sqrt[3]{(\sqrt{x})^3-3(\sqrt{x})^2 2+3(\sqrt{x})2^2-2^3}=\sqrt{x}-2 \quad \text{и}$$

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}\ .$$

Користејќи и дека $3\pm 2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm 1)^2$ имаме:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x}-6x-8}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=1.$$

11. Ако m, n, p, a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи

$$m:a=n:b=p:c\ ,$$

тогаш

$$(ma)^{1/2}+(nb)^{1/2}+(pc)^{1/2}=[(m+n+p)(a+b+c)]^{1/2}\ .$$

Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sqrt{ma}+\sqrt{nb}+\sqrt{pc}&=\sqrt{\tfrac{m}{a}}\cdot a+\sqrt{\tfrac{n}{b}}\cdot b+\sqrt{\tfrac{p}{c}}\cdot c=\sqrt{\tfrac{m}{a}}\cdot(a+b+c)\\&=\sqrt{\tfrac{m}{a}}\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b+c}==\sqrt{m+\tfrac{m}{a}b+\tfrac{m}{a}c}\cdot\sqrt{a+b+c}\\&=\sqrt{m+\tfrac{n}{b}b+\tfrac{p}{c}c}\cdot\sqrt{a+b+c}=\sqrt{m+n+p}\cdot\sqrt{a+b+c}\\&=\sqrt{(m+n+p)(a+b+c)}\end{aligned}$$

12. Дадени се реалните броеви $a,b,c\geq 0$ за кои важи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$ и $a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$. Докажи дека

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ .$$

Решение. Имаме :

$$a=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

и

$$b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-a=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-(\sqrt{a})^2=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\ .$$

Ако ги искористиме овие две трансформации, добиваме:

$$\begin{aligned}a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}).\end{aligned}\ .$$

Од последните две равенства, бидејќи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$, имаме

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ .$$

13. Дадени се реалните броеви $a,b,c,d\geq 0$ за кои важи
$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}\ .$$
Докажи дека $ad=bc$.

Решение. Ако $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}$ со квадрирање, добиваме
$$2\sqrt{ac}\sqrt{bd}=ad+bc\ .$$
Со негово квадрирање добиваме
$$4acbd=(ad)^2+2adbc+(bc)^2\ ,$$
односно
$$(ad)^2-2adbc+(bc)^2=0\ .$$
Тогаш, од $(ad-bc)^2=0$ следува $ad=bc$, што требаше да се докаже.

14. Определи го множеството вредности на изразот $(x-y)(y-z)(z-x)$ ако $x,\ y$ и z се реални броеви за кои
$$\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\ .$$

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во облик
$$\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}\ .$$
Ако квадрираме, добиваме
$$(\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{z})^2$$
$$2\sqrt{y}\sqrt{x-y+z}=2\sqrt{x}\sqrt{z}\ .$$
Ако повторно квадрираме добиваме
$$y(x-y+z)=xz$$
$$xy-y^2-(xz-yz)=0$$
$$y(x-y)-z(x-y)=0$$
$$(x-y)(y-z)=0\ .$$
Сега е јасно дека вредноста на изразот е еднаков на
$$(x-y)(y-z)(z-x)=0(z-x)=0\ .$$

15. Нека $a\in\mathbb{N}$ е фиксен природен број. Да се определат сите природни броеви за кои
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{a-n}+a}{\sqrt{a-n}+a+1}\ .$$

Решение. Равенството $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ е точно за било кој природен број k . Според тоа, левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}==1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$
Според тоа, равенството го добива обликот
$$\frac{n}{n+1}=\frac{\sqrt{a-n}+a}{\sqrt{a-n}+a+1}\ ,$$
која може да се трансформира во облик

$$a-n=\sqrt{a-n}\,.$$

Бидејќи $n\le a$, добиваме дека единствено решение на последната равенка е $n=a$.

16. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1))^2}=1$$

17. Докажи дека бројот

$$(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1})\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$$

е цел број и пресметај го.

Решение. Бидејќи, $\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}=\sqrt[6]{(\sqrt{5}+1)^3}=\sqrt{\sqrt{5}+1}$, тоа значи дека бараниот број е

$$2\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}=4\,.$$

18. Ако A и B се ненегативни изрази и $A\ge\sqrt{B}$, покажи дека

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \text{ и } \sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Решение. Во точноста на дадените идентитети можеме да се увериме со квадрирање на двете страни на идентитетите. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

19. Докажи дека

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{8+\sqrt{55}}=\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}.$$

Решение. Даденото равенство следува непосредно од задача 18. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

20. Ако $a\ge 2$, докажи дека

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}\,.$$

Решение. Исполнети се условите од задача 45. Значи, треба директно да ги примениме формулите од таа задача. (Стави $A=\sqrt{a}$ и $B=\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}$).

21. Докажи:

а) Ако $1\le x\le 2$, тогаш $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

б) Ако $x>2$, тогаш $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{x-1}$.

Решение. Дадените равенства следуваат непосредно од задача 18, за $A=x$ и $B=4x-4$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

22. Нека $a\geq 0, b\geq 0$ и $c\geq 0$. Докажи дека:

а) Ако $a+b>c$, тогаш

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}=2\sqrt{a+b}.$$

б) Ако $a+b\leq c$, тогаш

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}=2\sqrt{c}.$$

Решение. Дадените равенства следуваат непосредно од задача 18, за

$$A=a+b+c \text{ и } B=4(ac+bc).$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

23. Докажи дека $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)$.

Решение. Даденото равенство следува непосредно од задача 18. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

24. Докажи дека

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

Решение. Даденото равенство следува непосредно од задача 18., применета за $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

25. Упрости го изразот

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$$

Упатство. Со последователна примена на равенствата од задача 18 се добива $\sqrt{2}+\sqrt{6}$. Деталите ги оставаме начитателот за вежба.

26. Да се докаже дека

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Решение. Имаме

$$20+14\sqrt{2}=8+12+12\sqrt{2}+2\sqrt{2}=2^3+3\cdot 2\cdot(\sqrt{2})^2+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^3=(2+\sqrt{2})^3$$

Слично,

$$20-14\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^3.$$

На крајот,

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$$

27. Докажи дека

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

Решение. *Прв начин.* Нека $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Ако ги степенуваме двете страни на ова равенство на трети степен добиваме:

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

односно $x^3 = 4-3x$, а од тука добиваме $(x-1)(x^2+x+4)=0$. Бидејќи равенката $x^2+x+4=0$ нема реални решенија, следува дека $x=1$.

Втор начин. Имаме

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2})^3}+\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2})^3}=(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2})=1.$$

28. Пресметај ја вредноста на изразот $(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}+\frac{\sqrt{1-x^3}}{x\sqrt{x}})^{-1}$, ако $x^3=\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}}$.

Решение. Имаме

$$(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}+\frac{\sqrt{1-x^3}}{x\sqrt{x}})^{-1}=(\frac{(x\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x^3})^2}{x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3}})^{-1}=(\frac{x^3+1-x^3}{x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3}})^{-1}$$
$$=x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3}=\sqrt{x^3(1-x^3)}.$$

Според тоа, бараната вредност на изразот е еднаква на

$$\sqrt{x^3(1-x^3)}=\sqrt{\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}}(1-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}})}=\frac{b}{2a}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

29. Рационализирај го именителот во дропката $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

Решение. Нека $\sqrt[4]{2}=x.$ Тогаш дропката го добива видот

$$\frac{1}{x+x^2+x^3+x^4}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{x^3}{x^4}\cdot\frac{x-1}{(x-1)(1+x+x^2+x^3)}=\frac{x^3}{x^4}\cdot\frac{x-1}{x^4-1}=\frac{x^4-x^3}{x^4(x^4-1)}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{2}^4-\sqrt[4]{2}^3}{\sqrt[4]{2}^4(\sqrt[4]{2}^4-1)}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2(2-1)}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}.$$

30. Докажи дека

$$\frac{2x}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}\equiv\frac{x}{|x|}(1+x^2).$$

Решение. Имаме

$$\frac{2x}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}=\frac{2x}{\sqrt{1-\frac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}}=\frac{2x}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{1+2x^2+x^4}}}=\frac{2x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}=\frac{2x(1+x^2)}{2\sqrt{x^2}}\equiv\frac{x}{|x|}(1+x^2),$$

што и требашеда се докаже.

31. Рационализирај ја допката:

а) $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$ б) $\frac{1}{a+\sqrt{b}+a\sqrt{a}+\sqrt{ab}}$.

Решение. а) Имаме:

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}=\frac{1}{2+\sqrt{5}+\sqrt{2}(2+\sqrt{5})}=\frac{1}{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{5}^2-2^2)(\sqrt{2}^2-1^2)}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)}{(5-4)(2-1)}=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1).$$

б) Имаме:

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}+a\sqrt{a}+\sqrt{ab}}=\frac{1}{a+\sqrt{b}+\sqrt{a}(a+\sqrt{b})}=\frac{1}{(a+\sqrt{b})(1+\sqrt{a})}=\frac{(a-\sqrt{b})(1-\sqrt{a})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}$$
$$=\frac{(a-\sqrt{b})(1-\sqrt{a})}{(a^2-\sqrt{b}^2)(1^2-\sqrt{a}^2)}=\frac{(a-\sqrt{b})(1-\sqrt{a})}{(a^2-b)(1-a)}.$$

32. Рационализирај ја дропката $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}.$$

33. Дкажи дека

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}.$$

Решение. Ако воведеме ознака $\sqrt{3}=a$, доволно е да го докажеме равенството

$$(\frac{a-1}{a+1})^3=\frac{a^3-5}{a^3+5}.$$

Ако искористиме дека $a^2=3$, тогаш последователно добиваме

$$(\frac{a-1}{a+1})^3=\frac{(a-1)^3}{(a+1)^3}=\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^3+3a^2+3a+1}=\frac{a^3-9+a^3-1}{a^3+9+a^3+1}=\frac{2a^3-10}{2a^3+10}=\frac{a^3-5}{a^3+5}.$$

34. Докажи дека $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Решение. Слично како и во претходната задача, ако воведеме ознака $\sqrt[3]{2}=a$, треба да го докажеме равенството $\sqrt[3]{a-1}=\frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}}$, односно равенството

$$(1-a+a^2)^3=9(a-1).$$

Ако тргнеме од левата страна на ова равенството и искористиме дека $a^3=2$ и $a^4=2a$, добиваме:

$$\begin{aligned}(1-a+a^2)^3&=(1-a+a^2)^2(1-a+a^2)\\&=(1+a^2+a^4-2a+2a^2-2a^3)(1-a+a^2)\\&=(1-2a+3a^2-4+2a)(1-a+a^2)\\&=3(a^2-1)(1-a+a^2)=9(a-1).\end{aligned}$$

35. Докажи дека

$$(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1})^4=\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-\sqrt[4]{5}}$$

Упатство. Стави $a=\sqrt[4]{5}$ и потоа користејќи дека $a^4=5$ аналогно како во претходните две задачи докажи го равенството

$$\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4=\frac{3+2a}{3-a}.$$

36. Докажи го равенството

$$(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{9})^3=5(2-\sqrt[5]{27}).$$

Упатство. Стави $a=\sqrt[5]{3}$ и потоа користејќи дека $a^5=3$ аналогно како во претходните две задачи докажи го равенството

$$(1+a-a^2)^3=5(2-a^3).$$

37. Рационализирај го именителот во дропката $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ (n е природен број).

Решение. Ако воведеме ознаки $\sqrt[n]{a}=x$ и $\sqrt[n]{b}=y$, добиваме $a=x^n$ и $b=y^n$. Според тоа:

$$x^n-y^n=a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}}).$$

Конечно

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a-b}.$$

38. Нека $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(40).$$

Решение. Нека $2n-1=a$ и $2n+1=b$. Тогаш $4n=a+b$ и $4n^2-1=ab$.

$$\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\quad}{a-b}\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a-b}.$$

Оттука,

$$\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a-b}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+1}-(2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}.$$

Тогаш:

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(40)=\tfrac{1}{2}((3\sqrt{3}-1)+(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})+\ldots+(81\sqrt{81}-79\sqrt{79}))$$
$$=\tfrac{1}{2}(81\sqrt{81}-1)=364.$$

39. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a+k-1}+\sqrt{a+k}}.$$

Решение. Имаме:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a+k-1}+\sqrt{a+k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a+k}-\sqrt{a+k-1}}{(\sqrt{a+k}-\sqrt{a+k-1})(\sqrt{a+k-1}+\sqrt{a+k})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a+k}-\sqrt{a+k-1}}{\sqrt{a+k}^2-\sqrt{a+k-1}^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a+k}-\sqrt{a+k-1}}{a+k-(a+k-1)}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a+k}-\sqrt{a+k-1}=\sqrt{a+n}-\sqrt{a}.$$

40. Пресметај го збирот
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}.$$

Решение. За секој природен број n важи
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$
Тогаш збирот е еднаков на:
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{1999\sqrt{1998}+1998\sqrt{1999}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1998}}-\frac{1}{\sqrt{1999}}=1-\frac{1}{\sqrt{1999}}.$$

41. Докажи го равенството
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$
Обопшти ја задачата.

Решение. Имаме:
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}^2}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1$$
Точно е обопштувањето: За природниот број n точно е следното равенство:
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}=1$$
(во последните два множители има по n двојки).

42. Докажи дека
$$x=\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}.(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$$
е природен број, и најди го.

Решение. Имаме:
$$x=\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}.(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)\cdot(5\sqrt{2}-7)}}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{50-49}}{1}=1.$$

43. Дали

$$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$$

е природен број?

Во случај на потврден одговор најди го.

Решение. Ако степенуваме на трет степен добиваме

$$x^3=6+\sqrt{\frac{847}{27}}+6-\sqrt{\frac{847}{27}}+3\cdot\sqrt[3]{(6+\sqrt{\frac{847}{27}})^2(6-\sqrt{\frac{847}{27}})}+3\cdot\sqrt[3]{(6+\sqrt{\frac{847}{27}})(6-\sqrt{\frac{847}{27}})}$$

$$=12+3\cdot\sqrt[3]{(6+\sqrt{\frac{847}{27}})(6-\sqrt{\frac{847}{27}})}\cdot(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}})=12+3\cdot\sqrt[3]{36-\frac{847}{27}}\cdot x$$

Ако го средиме последниот израз добиваме

$$x^3-5x-12=0.$$

Единствено реално решение на оваа равенка е $x=3$, што значи дека

$$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3\,.$$

III ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И ПРИМЕНА

1. ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАЕНКИ

1. Дали се еквивалентни следните равенки

а) $x^2-9=0$ и $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ б) $x^2-9=0$ и $(x^2-9)^2=0$,

в) $x^2-9=0$ и $(x^2-9)\sqrt{x}=0$, г) $x^2-9=0$ и $(x^2-9)2^x=0$?

Решение. а) Не. Решението $x=3$ на првата равенка не е решение на втората равенка.

б) Не. Втората равенка има двократни корени, а првата нема.

в) Не. За втората равенка $x=-3$ не е решение, а е решение на првата равенка.

г) Да.

2. Дали се еквивалентни следните равенки

а) $x^2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$ и $x^2=0$ б) $x^3+\sqrt{x}=x+\sqrt{x}$ и $x^3=x$

в) $x^3+\sqrt{x}=\sqrt{x}+x$ и $x^3+\sqrt{x}-\sqrt{x}=x$?

Решение. а) Не. Левата страна на првата равенка не е дефинирана за $x=0$.

б) Не. Првата равенка не е дефинирана во -1, кој е решение на втората равенка.

в) Да.

3. Дали се еквивалентни следните равенки

а) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-1}$ и $x-1=x^2-1$ б) $\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2+1}$ и $x+1=x^2+1$

в) $\sqrt{x}=-2$ и $x=(-2)^2$ г) $\sqrt{x^2+x+1}=x$ и $x^2+x+1=x^2$?

Решение. а) Не, $x=0$ е решение на втората равека, но првата равенка не е дефинирана во $x=0$.

б) Да.

в) Не. Првата равенка нема решение во множеството реални броеви, а втората равенка има решение $x=4$.

г) Не. Решение на втората равенка е бројот -1, кој не е решение на првата равенка.

4. Реши ги равенките:

$$\tfrac{1}{3}[x-\tfrac{2}{7}(4x-\tfrac{1-x}{4})+7]=2,$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во нормален облик и добиваме:

$$\tfrac{1}{3}(x-\tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{17x-1}{4}+7)=2$$

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{-3x+99}{14}=2$$

$$-3x+99=84$$

$$3x=15.$$

Од последната равенка која е еквивалентна со дадената наоѓаме $x=5$.

Значи, $x=5$ е решение и на дадената равенка.

5. Реши ја равенката:

$$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}.$$

Решение. Дадената равенка има смисол за оние вредности на непознатата x, за кои заедничкиот именител на членовите на равенката е различен од нула, т.е. за вредности на x за кои $(2x-1)(2x+1)\neq 0$. Оттука наоѓаме $x\neq\frac{1}{2}$ и $x\neq-\frac{1}{2}$. Ако помножиме со $4x^2-1\neq 0$ добиваме

$$(2x-1)^2=(2x+1)^2-8,$$
$$4x^2-4x+1=4x^2+4x+1-8,$$
$$8x=8,$$
$$x=1.$$

Решението $x=1$ го задоволува условот $x\neq\pm\frac{1}{2}$ за кој дадената равенка има смисол.

6. Реши ја равенката:

$$2+\frac{2x-5}{2-x}=\frac{2}{x(x-2)},$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во обликот:

$$2-\frac{2x-5}{x-2}=\frac{2}{x(x-2)}. \tag{2}$$

Последната равенка има смисол за $x(x-2)\neq 0$ т.е. $x\neq 0$ и $x\neq 2$. Ако (2) ја помножиме со $x(x-2)$ ја добиваме равенката

$$2x(x-2)-x(2x-5)=2 \tag{3}$$

чие решение е $x=2$. Равенката (1) нема смисол за $x=2$, па затоа $x=2$ е решение на равенката (3), но не е решение на (1). Значи, дадената равенка нема решение.

7. Реши ја равенката:

$$(6x+1)^2-(3x-4)(3x+4)-1{,}5(18x^2+4)+25=72.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$36x^2+12x+1-(9x^2-16)-27x^2-6+25=72,$$

т.е. на равенката $12x=36$. Значи, $x=\frac{36}{12}=3$.

8. Реши ја равенката $a|x-1|=1998x-1$, каде a е параметар.

Решение. Ако $x-1<0$, тогаш $|x-1|=1-x$ и равенката го добива видот $a(1-x)=1998x-1$, па решението е $x=\frac{a+1}{1998+a}$. Бидејќи $\frac{a+1}{1998+a}<1$ за $a>-1998$, следува дека за секој $a>-1998$ решение на дадената равенка е $x=\frac{a+1}{1998+a}$. Слично, ако $x-1\geq 0$, тогаш $|x-1|=x-1$,па решението на равенката е $x=\frac{a-1}{a-1998}$ за $a>1998$. Конечно, за $-1998<a\leq 1998$ равенката има едно решение $x=\frac{a+1}{1998+a}$, а за $a>1998$ таа има две решенија $x=\frac{a+1}{1998+a}$ или $x=\frac{a-1}{a-1998}$.

9. Реши ја равенката
$$\frac{3ax-5}{ax-3-x+3a}+\frac{3a-1}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3} \qquad (1)$$
каде a е параметар.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-1}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}.$$
Последната равенка има смисол ако $a-1\neq 0$ и $x+3\neq 0$, т.е $a\neq 1$ и $x\neq -3$. Оваа равенка ја множиме со $(a-1)(x+3)$ и добиваме:
$$(4a+1)x=-2a+1. \qquad (2)$$
Ако $4a+1\neq 0$, тогаш $x=\frac{-2a+1}{4a+1}$ е решение на равенката (2). За да биде решение и на почетната равенка потребно е да $x\neq -3$, т.е. $\frac{-2a+1}{4a+1}\neq -3$ од каде добиваме $a\neq -\frac{2}{5}$. Значи, при $a\neq -\frac{1}{4}$, $a\neq -\frac{2}{5}$ и $a\neq 1$ дадената равенка има решение $x=\frac{-2a+1}{4a+1}$.

Ако $4a+1=0$, тогаш равенката (2) нема решение, па затоа и равенката (1) нема решение.

10. Реши ја равенката
$$\frac{2}{a(x-3)}+\frac{3}{(a-1)(x+1)}=\frac{x-5}{a(x-3)(x+1)},$$
каде a е параметар.

Решение. Равенката има смисол ако $a\neq 0$, $a\neq 1$, $x\neq 3$ и $x\neq -1$. Ако помножиме со $a(a-1)(x-3)(x+1)$ ја добиваме равенката
$$(4a-1)x=2a+7. \qquad (1)$$
Ќе разгледаме два случаи:

i) За $4a-1=0$, т.е. $a=\frac{1}{4}$ равенката (1) го добива обликот $0\cdot x=\frac{15}{2}$, што не е можно. Значи во овој случај равенката (1) па затоа и дадената равенка немаат решение.

ii) За $4a-1\neq 0$, т.е. $a\neq \frac{1}{4}$ равенката (1) има решение $x=\frac{2a+7}{4a-1}$. За да најденото решение е решение и на дадената равенка потребно е $x\neq 3$ и $x\neq -1$, бидејќи во овие случаи дадената равенка нема смисол.

За $x\neq 3$ добиваме $\frac{2a+7}{4a-1}\neq 3$, т.е. $a\neq 1$. Од $x\neq -1$ следува $\frac{2a+7}{4a-1}\neq -1$ па е $a\neq -1$. Значи, за $a\neq 0$, $a\neq \frac{1}{4}$, $a\neq 1$ и $a\neq -1$ дадената равенка има решение $x=\frac{2a+7}{4a-1}$.

Конечно
- за $a=0$ или $a=1$ равенката нема смисол,
- за $a\neq 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{4}$ равенката има единствено решение $x=\frac{2a+7}{4a-1}$ и
- за $a=\frac{1}{4}$ и $a=-1$ равенката нема решение.

11. Реши ја равенката

$\frac{1}{x} = \frac{b}{a-x}$, каде a и b се параметри.

Решение. Равенката има смисол за $x \neq 0$ и $x \neq a$. Ако помножиме со $x(a-x)$ добиваме $a - x = bx$, т.е.

$$(1+b)x = a\,. \qquad (1)$$

Ако $b+1 \neq 0$ т.е. $b \neq -1$, тогаш решение на (1) е $x = \frac{a}{1+b}$. За да биде решение и на дадената равенка треба истовремено да се исполнети условите:

$$\frac{a}{1+b} \neq 0 \text{ т.е. } a \neq 0 \text{ и } \frac{a}{1+b} \neq a \text{ т.е. } b \neq 0\,.$$

Значи ако $b \neq -1$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, тогаш $x = \frac{a}{1+b}$ е решение на дадената равенка.

Ако $b+1 = 0$ т.е. $b = -1$ равенката добива облик $0 \cdot x = a$. Од овде следува:

- ако $a \neq 0$, тогаш $0 \cdot x = a \neq 0$ што не е можно т.е. равенката (1), а со тоа и почетната равенка нема решение.
- ако $a = 0$, тогаш $0 \cdot x = 0$ т.е. секој реален број x е решение на (1). За да x биде решение и на дадената равенка треба да е $x \neq 0$ и $x \neq a$. Значи секој $x \neq 0$ е решение на дадената равенка.

Конечно

- ако $b \neq -1$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, тогаш равенката има едно решение $x = \frac{a}{1+b}$,
- ако $b = -1$ и $a \neq 0$, тогаш равенката нема решение,
- ако $b = -1$ и $a = 0$, тогаш решение на равенката е секој $x \neq 0$.

12. Дадена е равенката $|x-a| + 15 = 6|x+2|$, каде a е параметар.

а) Докажи дека за секоја вредност на параметарот a равенката има точно два различни корени x_1 и x_2.

б) Докажи дека $|x_1 - x_2| \geq 6$ и определи ги вредностите за a, за кои што $|x_1 - x_2| = 6$.

Решение. а) За $x < -2$ дадената равенка е еквивалентна на равенката $|x-a| = -6x - 27$, која има решение само ако $-6x - 27 \geq 0$, т.е. $x \leq -\frac{9}{2}$. Ги разгледуваме случаите кога $x \geq a$ и $x < a$ и добиваме дека кога $x < -2$ дадената равенка има единствен корен

$$x_1 = \begin{cases} \frac{a-27}{7}, & a < -\frac{9}{2} \\ -\frac{a+27}{5}, & a \geq -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Аналогно кога $x \geq -2$ равенката има единствен корен

$$x_2 = \begin{cases} \frac{3-a}{5}, & a \leq \frac{1}{2} \\ \frac{a+3}{7}, & a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

б) Од а) следува дека

$$|x_1-x_2|=\begin{cases}\frac{156-12a}{35}, & a<-\frac{9}{2}\\ 6, & -\frac{9}{2}\le a\le\frac{1}{2}\\ \frac{204+12a}{35}, & a>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Останува да забележиме дека

$$\frac{156-12a}{35}>6 \text{, за } a<-\frac{9}{2}$$

и

$$\frac{204+12a}{35}>6 \text{, за } a>\frac{1}{2}.$$

Значи $|x_1-x_2|\ge 6$ и равенството $|x_1-x_2|=6$ е исполнето кога $a\in[-\frac{9}{2},\frac{1}{2}]$.

13. Определи ги решенијата на равенката

$$2|x|+|x-1|=a,$$

во зависност од параметарот a.

Решение. Бидејќи

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0,\end{cases} \quad \text{и} \quad |x-1|=\begin{cases}x-1, & x\ge 1,\\ -(x-1), & x<1,\end{cases},$$

добиваме

$$2|x|+|x-1|=\begin{cases}-2x-(x-1), & x<0\\ 2x-(x-1), & 0\le x<1,\\ 2x+(x-1), & 1\le x,\end{cases}=\begin{cases}1-3x, & x<0\\ x+1, & 0\le x<1,\\ 3x-1, & 1\le x.\end{cases}$$

Почетната равенка е еквивалентна со севкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{ll}1-3x=a, & x<0,\\ x+1=a, & 0\le x<1,\\ 3x-1=a, & 1\le x,\end{array}\right. .$$

Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $a<1$ тогаш ниту една од делумните равенки нема решение, па според тоа и почетната равенка нема решение (на своите дефинициони области $1-3x$, $x+1, 3x-1$ примаат вредности не помали од 1).

б) Ако $1\le a<2$, тогаш решенија на почетната равенка се $x=\frac{1-a}{3}$ кое е решение на делумната равенка $1-3x=a$, и $x=a-1$ кое е решение на делумната равенка $x+1=a$. Во овој случај делумната равенка $3x-1=a$ определена на $(1,+\infty)$ нема решение.

в) Ако $a\ge 2$, тогаш решенија на почетната равенка се $x=\frac{1-a}{3}$ кое е решение на делумната равенка $1-3x=a$ и $x=\frac{a+1}{3}$ кое е решение на делумната равенка $3x-1=a$. Делумната равенка $x+1=a$ определена за $0\le x<1$ нема решение.

14. Определи ги решенијата на равенката

$$|x+3|-a|x-1|=4,$$

во зависност од параметарот a.

Решение. Од дефинцијата на апсолутна вредност имаме

$$|x+3|=\begin{cases} x+3, & x\geq -3 \\ -(x+3), & x<-3 \end{cases} \quad \text{и} \quad |x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -(x-1), & x<1 \end{cases}$$

Според тоа,

$$|x+3|-a|x-1|=\begin{cases} x(a-1)-3-a, & x<-3, \\ x(1+a)+3-a, & -3\leq x<1, \\ x(1-a)+3+a, & 1\leq x. \end{cases}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со севкупноста на равенките:

$$\left[\begin{array}{ll} x(a-1)=7+a, & x<-3, \\ x(a+1)=a+1, & -3\leq x<1,. \\ x(1-a)=1-a, & 1\leq x. \end{array}\right.$$

Ќе разгледаме неколку случаи:

а) $a=1$. Решение на почетната равенка е $x\in[1,+\infty)$.

б) $a=-1$. Решение на почетната равенка е $x\in[-3,1]$.

в) $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.Решение на почетната равенка е $x=1$, т.е. решението на равенката $x(1-a)=1-a$. Останатите две делумни равенки немаат решенија.

г) $a\in(-1,1)$. Решение на почетната равенка е $x=1$, што е решение на равенката $x(1-a)=1-a$ и $x=\frac{7+a}{a-1}$, што е решение на равенката $x(a-1)=7+a$.

15. Реши ја равенката $|(\sqrt{x-2})^2+1|=7$

Решение. За да е дефиниран квадратниот корен треба да е $x-2\geq 0$, $x\geq 2$, па затоа $(\sqrt{x-2})^2=x-2$ и равенката го добива обликот

$$|x-2+1|=|x-1|=7$$

Од последната равенка следува $x-1=7$ или $x-1=-7$. Решенијата на последните равенки се $x=8$ и $x=-6<2$. Значи единствено решение на почетната равенка е $x=8$.

16. Равенката $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{1}{x}=\frac{3x-20}{4}$, реши ја во множеството природни броеви.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{1}{x}(1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1))=\frac{3x-20}{4}.$$

Бидејќи решение бараме во множеството природни броеви, збирот

$$1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1),$$

можеме да го запишеме во облик

$$1+2+3+...+(x-3)+(x-2)+(x-1)=\frac{(x-1)x}{2},$$

па според тоа равенката ќе ја запишеме во облик

$$\frac{1}{x}\frac{(x-1)x}{2}=\frac{3x-20}{4}.$$

Значи, $4x-4=6x-40$, од каде добиваме $x=18$.

17. Реши ја равенката

$$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(5-x)^2}=3.$$

Решение. Од својствата на апсолутната вредност следува

$$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(5-x)^2}=\begin{cases}10-x, & x<-3,\\ 4-3x, & -3\le x<2,\\ -x, & 2\le x<5,\\ x-10, & x\ge 5.\end{cases}$$

Според тоа решенија на равенката се $x=\frac{1}{3}$ и $x=13$.

18. Во множеството природни броеви реши ја равенката:

$$\frac{1+3+...+(2x-1)}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{x(x+1)}}=110\,.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{1+3+...+(2x-1)}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{x(x+1)}}=110$$

$$\frac{x^2}{1-\frac{1}{x+1}}=110$$

$$\frac{x^2}{\frac{x+1-1}{x+1}}=110$$

$$x(x+1)=110$$

од каде наоѓаме $x=10$.

19. Реши ја равенката $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$

Решение. Со смената $t=x+a+1$ равенката се сведува на

$$\sqrt[3]{t-1}+\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t+1}=0\Leftrightarrow -\sqrt[3]{t}=\sqrt[3]{t-1}+\sqrt[3]{t+1}.$$

Ако двете страни ги кубираме и новодобиената равенка со средување повторно ја кубираме добиваме $t=\sqrt[3]{t^3-t}\Leftrightarrow t^3=t^3-t.$ Од последната равенка $t=0$, т.е. $x=-a-1$.

20. Да се реши равенката

$$\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}}=x\,.$$

Решение. Бидејќи $x\ge 0$, добиваме

$$\sqrt{1+(x+3)(x+5)}=\sqrt{1+x^2+8x+15}=\sqrt{x^2+8x+16}=\sqrt{(x+4)^2}=|x+4|=x+4$$

равенката го добива обликот

$$\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)(x+4)}}}=x\,.$$

Слично,

$$\sqrt{1+(x+2)(x+4)}=\sqrt{1+x^2+6x+8}=\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=|x+3|=x+3\,,$$

а равенката го добива обликот

$$\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}}=x\,.$$

Но,

$$\sqrt{1+(x+1)(x+3)}=\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=x+2\,,$$

па равенката го добива обликот

$$\sqrt{1+x(x+2)}=x$$

$$\sqrt{1+x^2+2x}=x$$

$$\sqrt{(x+1)^2}=x$$

$$|x+1|=x\,,$$

а бидејќи $x\geq 0$, последната равенка го добива обликот

$$x+1=x\,,$$

која нема решение во $\mathbb{R}$. Според тоа, и почетната равенка нема решение во $\mathbb{R}$

21. За позитивните реалните броеви x,y,z се исполнети равенствата

$$x+y+xy=8\,,\ y+z+zy=15\,,\ x+z+xz=35\,.$$

Пресметај ја вредноста на изразот $x+y+z+xyz$.

Решение. Ако на секое од равенствата додадеме 1, добиваме

$$\begin{aligned}xy+x+y+1&=9\\ yz+y+z+1&=16\,.\\ zx+x+z+1&=36\end{aligned}$$

Значи, за x,y,z се исполнети равенствата

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)&=9\\ (y+1)(z+1)&=16\,,\\ (z+1)(x+1)&=36\end{aligned}\qquad(1)$$

од каде добиваме

$$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2=72^2\,.$$

Сега,

$$(x+1)(y+1)(z+1)=72$$

па од (1) имаме

$$9(z+1)=72\,,\ 16(x+1)=72\,,\ 36(y+1)=72\,,$$

т.е.

$$z+1=8, x+1=\tfrac{9}{2}, y+1=2\,.$$

Според тоа $x=\frac{7}{2}, y=1, z=7$ од каде добиваме

$$x+y+z+xyz=\tfrac{7}{2}+1+7+1\cdot 7\cdot\tfrac{7}{2}=8+\tfrac{56}{2}=8+28=36\,.$$

22. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{1}{5}\\ \frac{7}{10}x-\frac{9}{10}y=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Решение. Со еквивалентни трансформации на дадениот систем добиваме

$$\begin{cases}\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{1}{5}\\ \frac{7}{10}x-\frac{9}{10}y=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{10}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}\\ \frac{7}{10}x-\frac{9}{10}y=\frac{5}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\frac{16}{10}x=\frac{8}{10} \Rightarrow \ x=\frac{1}{2};\\ \frac{3}{5}y=\frac{1}{5}-\frac{3}{10}=-\frac{1}{10}\Rightarrow y=-\frac{1}{6}\end{array}$$

23. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases}\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1\\ \frac{3}{5}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}.\end{cases}$$

Решение. Со последователни еквивалелнтни трансформации добиваме

$$\begin{cases}\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=1\\ \frac{3}{5}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{12}{10}x-\frac{9}{10}y=\frac{3}{2}\\ \frac{6}{10}x+\frac{9}{10}y=\frac{3}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\frac{18}{10}x=\frac{3}{2}+\frac{3}{10}=\frac{15}{10}+\frac{3}{10}=\frac{18}{10}\Rightarrow \ x=1;\\ \frac{3}{5}y=\frac{4}{5}-1=-\frac{5}{5}\Rightarrow y=-\frac{1}{3}\end{array}$$

24. Реши го системот:

$$\begin{cases}\begin{array}{cccccccc} & x_2+ & x_3+ & \dots & x_{n-1}+ & x_n & = & 1\\ x_1+ & & x_3+ & \dots & x_{n-1}+ & x_n & = & 2\\ x_1+ & x_2+ & & \dots & x_{n-1}+ & x_n & = & 3\\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & & \dots\\ \\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & \dots & + & x_n & = & n-1\\ x_1+ & x_2+ & x_3+ & \dots & x_{n-1} & & = & n\end{array}\end{cases}$$

каде $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ако ги собереме сите равенки од системот добиваме

$$(n-1)(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n)=1+2+\dots.+n,$$

т.е.

$$x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Ако од последната равенка ја одземеме i -тата равенка на системот се добива

$$x_i=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-i\,;\ i=1,2,\dots,n.$$

25. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}|x|+|y-1|=1\\ x+2y=3\end{cases}$$

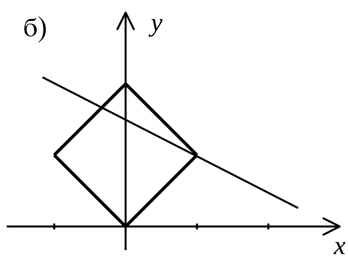
а) аналитички, б) графички

Решение. а) Ако $x\ge 0,\ y\ge 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases}x+y-1=1\\ x+2y=3\end{cases}$$

чие решение е (1,1). Ако $x\ge 0,\ y<1$, го добиваме системот

б)



$$\begin{cases} x-y+1=1 \\ x+2y=3 \end{cases},$$

а овој систем нема решение во оваа област. Ако $x<0,\ y\geq 1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} -x+y-1=1 \\ \ \ x+2y=3 \end{cases},$$

чие решение е $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. Ако $x<0,\ y<1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} -x-y+1=1 \\ \ \ x+2y=3 \end{cases},$$

а овој систем нема решение во оваа област.

26. За кои вредности на a, системот равенки

$$\begin{cases} (a+1)x+2y=5 \\ x+ay=-1 \end{cases}$$

има единствено решение?

Решение. За да дадениот систем има единствено решение потребно и доволно е детерминантата на системот да е различна од нула, т.е.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

односно $a^2+a-2\neq 0,$ од каде што $a\neq -2$ и $a\neq 1$. Значи, $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

27. За кои вредности на a, системот равенки

$$\begin{cases} ax+y=5 \\ 2x+(a-1)y=2 \end{cases}$$

има единствено решение.

Одговор. $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ **.**

28. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот m, така што решенијата на системот

$$\begin{cases} mx-2y=3 \\ 3x+my=4 \end{cases},$$

да ги задоволуваат условите $x>0,\ y<0$.

Решение. Можеме да искористиме било кој од методите за определување на решенија на систем од две равенки со две непознати. На пример, ако ги определиме детерминантите на системот и на променливите, добиваме:

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & -2 \\ 3 & m \end{vmatrix}=m^2+6,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & m \end{vmatrix}=3m+8,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4m-9.$$

Бидејќи $m^2+6\neq 0$, решенија на системот се

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3m+8}{m^2+6},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{4m-9}{m^2+6}.$$

Од условите $x>0, y<0$, го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} \frac{3m+8}{m^2+6} > 0 \\ \frac{4m-9}{m^2+6} < 0 \end{cases}$$

Бидејќи $m^2 + 6 > 0$, последниот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} 3m+8 > 0 \\ 4m-9 < 0 \end{cases}$$

Од првата равенка на системот добиваме $m > -\frac{8}{3}$, а од втората равенка на системот добиваме $m < \frac{9}{4}$. Целобројни вредности на m кои ги задоволуваат неравенките $-\frac{8}{3} < m < \frac{9}{4}$ се $m = 0, \pm1, \pm2$.

29. Најди ги сите цели позитивни решенија на неравенката

$$\frac{9x+7}{2} - (x - \frac{x-2}{7}) < 36 . \qquad (1)$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $51x < 459$ од каде наоѓаме $x < \frac{459}{51} = 9$. Според тоа, решение на (1) е секој реален број од интервалот $(-\infty, \ 9)$. Значи цели позитивни решенија на (1) се : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

30. Реши ја неравенката

$$|x+3| + |x-1| + |x-3| > 16 + x . \qquad (1)$$

Решение. Ги одредуваме вредностите за кои се анулираат изразите под знакот на апсолутна вредност. Имаме $x = -3$, $x = 1$ и $x = 3$ и овие вредности ја делат бројната оска на интервалите $(-\infty, -3)$, $[-3,1)$, $[1,3)$ и $[3, \infty)$. Дадената неравенка ќе ја решиме на секој од интервалите.

i) Ако $x \in (-\infty, -3)$, тогаш (1) преминува во следната неравенка

$$-x-3-x+1-x+3 > 16+x$$

чие решение е $x < -\frac{15}{4}$. Но $x \in (-\infty, -3)$, па затоа

$$x \in (-\infty, -3) \cap (-\infty, -\frac{15}{4}) = (-\infty, -\frac{15}{4}) .$$

ii) Ако $x \in [-3,1)$, тогаш (1) го добива обликот

$$x+3-x+1-x+3 > 16+x$$

чие решение е $x < -\frac{9}{2}$. Но, $x \in [-3,1)$, па $x \in [-3,1) \cap (-\infty, -\frac{9}{2}) = \varnothing$, т.е. во овој случај дадената неравенка нема решение.

iii) Ако $x \in [1,3)$, тогаш (1) го прима обликот $0 \cdot x > 11$ која нема решение во множеството реални броеви, па и во интервалот [1,3).

iv) Ако $x \in [3, \infty)$ тогаш (1) го добива обликот

$$x+3+x-1+x-3 > 16+x$$

чие решение е $x > \frac{17}{2}$. Значи во овој случај решение на дадената неравенка е

$$x \in [3, \infty) \cap (\frac{17}{2}, \infty) = (\frac{17}{2}, \infty) .$$

Конечно, решение на дадената неравенка е е секој реален број од множеството

$$(-\infty,-\tfrac{15}{4})\cup(\tfrac{17}{2},\infty).$$

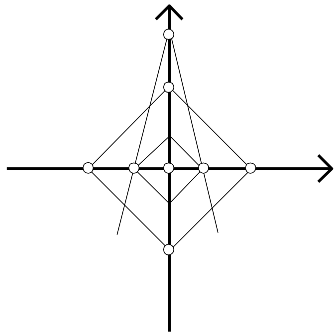
31. Да се определи вредноста на параметарот a за кој системот

$$\begin{cases} y=ax+5 \\ (|x|+|y|-2)^2=1 \end{cases}$$

има точно три решенија.

Решение. Втората равенка е еквивалентна со севкупноста на равенките

$$\left[\begin{array}{l} |x|+|y|=1 \\ |x|+|y|=3 \end{array}\right.$$



Графикот на првата од последните две равенки е симетричен во однос на координатните оски. Нејзиниот график во првиот квадрант е дел од правата $x+y=1$, што се наоѓа меѓу координатните оски. Тоа е отсечката со крајни точки $(0,1)$ и $(1,0)$.

Заради симетријата нејзиниот график е квадрат со темиња $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$.

Аналогно графикот на втората равенка од севкупноста равенки е квадрат со темиња $(0,3)$, $(3,0)$, $(0,-3)$, $(-3,0)$.

Графикот на втората равенка е права која минува низ точката $(0,5)$. Сега е очигледно (види цртеж) дека системот има точно три решенија, ако правата минува низ една од точките $(1,0)$ или $(-1,0)$. Во тој случај за a добиваме $a=-5$ или $a=5$.

Нејзината равенка е $y=-5x+5$ или $y=5x+5$.

Во сите останати случаи системот има ниедно, едно, две или четири решенија.

32. Реши ја неравенката $\frac{2-x}{x-1}>\frac{2}{3}$.

Решение. Имаме

$$\frac{2-x}{x-1}-\frac{2}{3}>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6-3x-2x+2}{3(x-1)}>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8-5x}{x-1}>0$$

Количник на два броја е позитивен ако и двата се со ист знак, па затоа од последната неравенка добиваме

$$\begin{cases} 8-5x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 8-5x<0 \\ x-1<0 \end{cases}$$

т.е.

$$\tfrac{8}{5}>x>1 \text{ или } \begin{cases} x<1 \\ x>\tfrac{8}{5} \end{cases}$$

Но, бидејќи не постои x кој е помал од 1 и поголем од $\frac{8}{5}$ добиваме дека решение на дадената неравенка е интервалот $(1,\frac{8}{5})$.

33. Да се реши системот неравенки:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

Решение. Од втората неравенка имаме $y \geq x - 1$ и како $x \geq 2$ добиваме дека $y \geq x - 1 \geq 2 - 1 = 1$. Од досега изнесеното и од третата неравенка имаме $3 = 1 + 2 \leq x + y \leq 3$, па затоа $x + y = 3$ т.е. $y = 3 - x$ и ако замениме во втората неравенка наоѓаме $4 - 2x \geq 0$ т.е. $x \leq 2$, па затоа $x = 2$ и сега $y = 1$. Конечно, единствено решение на дадениот систем неравенки е точката $M(2,1)$.

34. Да се реши системот неравенки:

$$\begin{cases} y \geq x \\ x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Решение. Од првата и втората неравенка следува $y \geq x \geq 2$. Сега, од претходно изнесеното и од третата неравенка имаме $4 = 2 + 2 \leq x + y \leq 4$, што значи $x + y = 4$ т.е. $y = 4 - x$. Ако замениме во првата неравенка наоѓаме $4 - x \geq x$ па затоа $2 \geq x$, што заедно со втората неравенка дава $x = 2$. Конечно, $y = 4 - x = 2$ т.е. единствено решение на системот неравенки е точката $M(2, 2)$.

35. Реши ја равенката

$$x\,|\,x\,| + 1 = \tfrac{|x|}{x}.$$

Решение. За $x = 0$ десната страна не е дефинирана, па заради тоа $x = 0$ не е решение на равенката. За $x > 0$ равенката се сведува на $x^2 + 1 = 1$, која нема решение. За $x < 0$ добиваме $-x^2 + 1 = -1$, па значи единствено решение на равенката е $x = -\sqrt{2}$.

2. ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Ученик ги отчукува по ред природните броеви од 1 до 1000. Која цифра стои на 1992-то место?

Решение. Со отчукување на едноцифрените и двоцифрените броеви, учникот отчукал $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ цифри. Значи, остануваат уште $1992 - 189 = 1803$ цифри, а $1803 : 3 = 601$, т.е. учникот ги отчукал првите 601 трицифрени броеви. Според тоа, 1992-та цифра е третата цифра на 601-от трицифрен број, т.е. 700. Следствено, бараната цифра е 0.

2. Збирот на цифрите на еден трицифрен број е 10. Цифрата на десетките е еднаква на збирот од цифрата на стотките и цифрата на единиците. Ако цифрата на единиците и цифрата на десетките си ги разменат местата се добива трицифрен број, којшто е за 9 помал од првобитниот број. Најди го тој број.

Решение. Ако x е цифрата на единиците, y цифрата на десетките и z - цифрата на стотките на бараниот трицифрен број, тогаш тој може да се запише во облик $x+10y+100z$. Бидејќи збирот на цифрите на бараниот број е 10 , имаме:

$$x+y+z=10\,. \tag{1}$$

Од друга страна, цифрата на десетките е еднаква со збирот од цифрата на единиците и цифрата на стотките, т.е.

$$y=x+z\,. \tag{2}$$

Кога цифрата на единиците и цифрата на десетките во дадениот трицифрен број ќе си ги променат своите места, се добива трицифрен број $y+10x+100z$, којшто е за 9 помал од првобитниот $x+10y+100z$, па имаме

$$y+10x+100z+9=x+10y+100z\,. \tag{3}$$

Решавајќи го системот составен од равенките (1), (2) и (3) добивме $x=4, y=5$ и $z=1$, па бараниот број е 154 .

3. Четирицифрен број е полн квадрат, при што ако од неговите цифри се одземе иста цифра, се добива број кој е пак полн квадрат. Определи ги сите такви природни броеви.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcd}=A^2$, па од условот имаме

$$\overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)}=B^2\,.$$

Ако ги одземеме последните две равенства, добиваме

$$1000a+100b+10c+d-1000a+1000k-100b+100k-10c+10k-d+k=A^2-B^2\,,$$

односно $1111k=A^2-B^2$, ако разложиме, имаме

$$11\cdot 101\cdot k=(A-B)(A+B)\,.$$

Бидејќи, A^2 и B^2 се четирицифрени броеви, заклучуваме дека $32\le A\le 99$ и $32\le B\le 99$, од каде $64\le A+B\le 198$ и $0\le A-B\le 67$. Како $A+B$ и $A-B$ се со иста парност, заклучуваме дека $A+B=101$ и $A-B=11\cdot k$, при што $k=1,3,5$. За $k=1$, $\overline{abcd}=3136=56^2$ и за $k=3$, $\overline{abcd}=4489=67^2$.

4. Да се најде двоцифрен број таков што: цифрата на единиците е за два поголема од цифрата на десетките, а производот на бараниот број и збирот на неговите цифри е 144.

Решение. Ако со y ја означиме цифрата на единиците, а со x цифрата на десетките, тогаш бараниот број е $10x+y$. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} y=x+2 \\ (10x+y)(x+y)=144 \end{cases}$$

Од првата равенка заменуваме во втората и ја добиваме равенката

$$(11x+2)(2x+2)=144$$

која е еквивалентна на равенката

$$11x^2+13x-70=0\,.$$

Решенијата на последната равенка се $x_1 = -\frac{35}{11}$ и $x_2 = 2$. Но, x е цифра, па затоа $x = 2$ и $y = 4$, што значи дека бараниот број е 24.

5. Најди ги сите трицифрени броеви A, за кои аритметичката средина на броевите добиени со пермутација на цифрите на бројот A, е еднаква на бројот A.

Решение. Нека $A = \overline{abc}$ е дадениот број кој ги исполнува условите од задачата. Броеви добиени со пермутација на цифрите на бројот A се $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Тогаш

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 6\overline{abc}$$

од каде што добиваме

$$222(a+b+c) = 6(100a + 10b + c),$$

или $7a = 3b + 4c$. Последната равенка може да се решава во множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, заменувајќи последователно $a = 1$, $a = 2$,..., $a = 9$ и решавајќи ги добиените равенки.

Постапката може да се скрати ако равенката $7a = 3b + 4c$ ја запишеме во обликот

$$7(a-b) = 4(c-b).$$

Тогаш според признаците за деливост имаме

$$a = b = c \text{ или } \begin{cases} a-b=4 \\ c-b=7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b-a=4 \\ b-c=7 \end{cases}.$$

Во вториот систем

$$\begin{cases} a-b=4 \\ c-b=7 \end{cases}$$

е исполнето неравенството $0 \le b \le 2$, а во третиот систем

$$\begin{cases} b-a=4 \\ b-c=7 \end{cases}$$

е исполнето е неравенството $7 \le b \le 9$. Сите решенија на задачата се

$$111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592.$$

6. Најди трицифрен број со различни цифри, којшто е пет пати помал од збирот на другите трицифрени броеви запишани со истите цифри. Одредете ги сите решенија!

Решение. Од

$$5\overline{xyz} = \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx},$$

т.е.

$$6\overline{xyz} = \overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx},$$

добиваме

$$6(100x + 10y + z) = 222(x + y + z)$$
$$7x = 3y + 4z$$
$$7(x-z) = 3(y-x).$$

Според тоа $7 \mid (y-z)$ и бидејќи z и y се едноцифрени броеви, добиваме

$$(y,z)\in\{(8,1),(1,8),(9,2),(2,9)\}.$$

Со замена во последната равенка ги добиваме броевите $481, 518, 592$ и 629.

7. Еден двоцифрен број го има следното својство: ако го собереме со бројот што ги има истите цифри но во обратен редослед се добива полн квадрат.

Да се најдат сите такви двоцифрени броеви.

Решение. Ако x е цифрата на единиците, а y цифрата на десетките на бараниот двоцифрен број, тогаш според условот на задачата ќе имаме

$$(10y+x)+(10x+y)=m^2,$$

т.е.

$$11(x+y)=m^2. \quad (1)$$

Според тоа, 11 е делител на m; ако $m=11k$, добиваме

$$x+y=11k^2. \quad (2)$$

Од $1\le x\le 9$ и $1\le y\le 9$, следува дека $2\le x+y\le 18$, што значи дека

$$x+y=11. \quad (3)$$

Од (3) следува дека бараните броеви се: $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ и 92.

8. Во еден трицифрен број средната цифра е трипати помала од збирот на другите две, а збирот на последните две цифри е двапати помал од првата цифра. Ако си ги заменат местата цифрите на десетките и единиците, се добива број за 18 помал од дадениот. Кој е тој број?

Решение. Со x, y и z да ги означиме цифрите на единиците, десетките и стотките, соодветно на бараниот трицифрен број. Според условите на задачата

$$\begin{cases} 3y=x+z \\ x=2(y+z) \\ 100x+10y+z=100x+10z+y+18 \end{cases}$$

Од каде што добиваме $x=8, y=3$ и $z=1$. Значи, бараниот број е 831.

9. Ако од една страница на една книга се отфрлат по три букви од секој ред и потоа се извадат два такви реда, бројот на сите букви ќе се намали за 145. Ако пак додадеме на секој ред по четири букви и допишеме три такви реда, тогаш бројот на сите букви ќе се зголеми за 224. Колку редови има на таа страница и по колку букви има во секој ред?

Решение. Нека на таа страница има x редови, а во секој ред по y букви. Од првиот услов на задачата ја наоѓаме равенката

$$3x+2(y-3)=145 \quad (1)$$

а од вториот, равенката

$$4x+3(y+4)=224. \quad (2)$$

Решавајќи го системот равенки, составен од равенките (1) и (2), добиваме $x=29$, $y=32$. Значи, на споменатата страница од книгата има 29 реда, а во секој ред по 32 букви.

10. Таткото сега има 35 години, а синот има 7 години. По колку години таткото ќе биде двапати постар од синот?

Решение. Да го означиме со x бројот на годините што треба да поминат за таткото да биде двапати постар од синот. По изминувањето на x години, бројот на годините на таткото, $35+x$, ќе биде двапати поголем од бројот на годините на синот, $7+x$, па имаме

$$35+x=2(7+x),$$

од каде што добиваме $x=21$.

Значи, таткото ќе биде двапати постар од синот по 21 година.

11. Возраста на едно лице во 1984 година била еднаква на збирот на цифрите од годината на неговото раѓање. Колку години има лицето?

Решение. Лицето има најмногу $9+9+9+9=36$ години, што значи дека е родено во XX -от век, т.е. првите две цифри на годината на неговото раѓање се 1 и 9. Нека x е цифрата на десетките, а y цифрата на единиците од годината на раѓањето; Според условот од задачата имаме

$$1+9+x+y=1984-(1000+900+10x+y),$$

т.е.

$$11x+2y=74.$$

Бидејќи $0\le x,y\le 9$, од равенката добиваме $x=6$, $y=4$, односно лицето е родено 1964 година и сега има $1+9+6+4=20$ години.

12. Возраста на едно лице во 1991 година е еднаква на збирот на цифрите од годината на неговото раѓање. Колку години има лицето?

Решение. Лицето има најмногу $9+9+9+9=36$ години, што значи дека е родено во XX -от век, т.е. во $\overline{19xy}$ година. Според условот на задачата, имаме

$$1+9+x+y=1991-(1000+900+10x+y),$$

т.е.

$$11x+2y=81,$$

од каде што добиваме $x=7, y=2$. Следствено, лицето е родено во 1972 година и сега има $1+9+7+2=19$ година.

13. Двајца пријатели Душан и Никола се сретнале после многу години. Душан изјавил дека има три сина. Никола запрашал по колку години имаат. “Производот од нивните години е 36, а збирот е еднаков на бројот на автобусот што моментално поминува покрај нас”-одговорил Душан. Врз основа на овие податоци Никола не можел да ја одреди нивната старост. “Само најстариот од нив е смеѓ како мене” додал Душан. Додавајќи ја ова информација Никола ги пресметал годините на децата? (Годините се изразени со природни броеви).

Решение. Производот на три природни броја може да биде еднаков на 36 само во следните случаи: $1\cdot 1\cdot 36$, $1\cdot 2\cdot 18$, $1\cdot 3\cdot 12$, $1\cdot 4\cdot 9$, $1\cdot 6\cdot 6$, $2\cdot 2\cdot 9$, $2\cdot 3\cdot 6$, $3\cdot 3\cdot 6$. За секој од овие случаи збирот е еднаков на: $38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10$ соодветно. Бидејќи Никола не можел врз основа на бројот на автобусот да ги одреди годините, следува дека бројот на автобусот е 13. Кога Душан додал дека најстариот син е смеѓ, Никола од комбинациите $1,6,6$ и $2,2,9$ ја одбрал втората, зашто тука се знае кој син е најстар.

14. Неколку луѓе треба да ископаат еден канал. Ако започнат со работа истовремено, тогаш ќе го ископаат каналот за 24 часа. Меѓутоа тие на работа доаѓале еден по друг во еднакви временски интервали, а потоа секој работел до завршувањето на работата. Колку време работел работникот кој прв дошол на работа ако тој работел 5 пати подолго од работникот кој последен дошол на работа?

Решение. Со z да го означиме бројот на сите работници, x бројот на часови што ги поминал на работа работникот што последен дошол на работа и со y бројот на часовите на временскиот интервал на доаѓање на двата работника кои еден по друг дошле на работа. Тогаш за копање на каналот се потрошени вкупно

$$x+(x+y)+(x+2y)+...+(x+(z-1)y)$$

работни часа, што по услов на задачата се еднакви на $24z$, т.е.

$$x+(x+y)+(x+2y)+...+[x+(z-1)y]=24z$$

Со оглед на тоа дека сумата на низа од првите $z-1$ природни броја е $\frac{(z-1)z}{2}$ се добива

$$xz+\frac{(z-1)zy}{2}=24z$$

т.е.

$$2x+y(z-1)=48. \qquad (1)$$

Знаејќи дека првиот работник поминал на работа пет пати подолго време од последниот, мора да важи и равенството

$$x+y(z-1)=5x. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива дека $6x=48$, т.е. $x=8$.

Според тоа, првиот работник работел 40 часа.

15. Базен се полни со две цевки за 6 часа. Првата цевка може да го наполни базенот за 5 часа помалку од другата. За колку часа може да го наполни базенот втората цевка?

Решение. Нека a и b се времињата за кои ќе се наполни базенот со првата, односно со втората цевка, одделно. Од условот на задачата имаме $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$ и $b=a+5$. Со решавање на овој систем добиваме $b=2$ или $b=15$, а бидејќи $b=a+5>5$, мора $b=15$.

16. Во 20 часот биле запалени две еднакво долги свеќи. По извесно време свеќите биле изгаснати и притоа е констатирано дека остатокот од првата свеќа е 4 пати поголем од остатокот на втората свеќа. Пресметај во колку часот се изгаснати свеќите, ако се знае дека првата свеќа изгорува за 5 часа, а втората за 4 часа.

Решение. Нека со a ја означиме должината на свеќите.. Тогаш, за x часови од првата свеќа ќе изгори $\frac{a}{5}x$, а од втората $\frac{a}{4}x$. Значи останало од првата свеќа $a-\frac{a}{5}x$, а од втората $a-\frac{a}{4}x$. Според условот на задачата следува дека остатокот од првата свеќа е 4 пати поголем од остатокот на втората свеќа, имаме:

$$a-\frac{a}{5}x=4(a-\frac{a}{4}x)\ .$$

По решавањето на равенката се гледа дека должината на свеќата не влијае на решението. Се добива $x=3h\,45\min$, што значи дека свеќите се изгаснати во 23 часот и 45 минути.

17. Два работника со постојано темпо на работа можат да завршат една работа за 30 дена. По 6 дена заедничка работа, првиот работник се откажува, а вториот ја завршува работата за 40 дена од денот на откажувањето на првиот работник. За колку дена би ја завршил првиот работник истата работа ако тој остане сам по 6 дена заедничка работа?

Решение. Нека првиот работник сам ја завршува целата работа за a дена, а вториот за b дена. Тогаш $x=\frac{1}{a}$ е делот од работата што првиот работник ја завршува за еден ден, а $y=\frac{1}{b}$ е делот од работата што вториот работник ја завршува за еден ден. Бидејќи целата работа двајцата работници ја завршуваат за 30 дена, добиваме дека

$$30x+30y=1. \tag{1}$$

Од друга страна, бидејќи по 6 дена заедничка работа, вториот работник работи уште 40 дена за да ја доврши работата, добиваме дека

$$6x+6y+40y=1. \tag{2}$$

Решавајќи го системот линеарни равенки (1) и (2), се добива дека

$$x=\frac{1}{75},\qquad y=\frac{1}{50}, \tag{3}$$

т.е. првиот работник сам целата работа ја завршува за 75 дена, а вториот за 50.

Со z да го означиме бројот на денови потребни првиот работник да ја доврши работата по 6 дена заедничка работа. Тогаш

$$6x+6y+zx=1, \tag{4}$$

Заменувајќи ги вредностите на x и y од (3) во (4) се добива $z=60$. Значи, на првиот работник би му биле потребни 60 дена додатна работа за да ја заврши работата по 6 дена заедничка работа.

18. Една работа, работниците A и B заедно ја сработуваат за c часови, истата работа работниците B и C ја сработуваат за a часови а A и C ја сработуваат за b часови. За колку часови секој од нив ја сработува работата сам?

Решение. Нека работникот A работата ја сработува сам за x часови, работникот B работата сам ја сработува за y часови а работникот C за z часови. Од условот на задачата добиваме

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}\end{cases}.$$

Трите равенки од системот ќе ги собереме, при што добиваме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ . \tag{1}$$

Од првата равенка на системот и (1) имаме

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

од каде добиваме

$$z=\frac{2abc}{ac+bc-ab}.$$

Аналогно добиваме $x=\frac{2abc}{ac+ab-bc}$ и $y=\frac{2abc}{bc+ab-ac}$. Според тоа, работниците A, B и C секој сам ќе ја сработат работата за $\frac{2abc}{ac+ab-bc}$, $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ и $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ часови, соодветно.

19. Некој човек, секој ден, прво трошел по 100 денари, а потоа заработувал по $\frac{1}{3}$ од парите кои му останале. По три дена тој утврдил дека почетната сума пари се зголемила за два пати.

Колку пари имал човекот на почетокот?

Решение. Нека човекот на почетокот имал x денари. На крајот од првиот ден имал

$$x-100+\frac{x-100}{3}=\frac{4}{3}(x-100) \text{ денари.}$$

На крајот од вториот ден имал

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x-100)-100\right) \text{ денари.}$$

На крајот од третиот ден имал

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x-100)-100\right)-100\right) \text{ денари.}$$

Според тоа:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x-100)-100\right)-100\right)=2x.$$

Решението на ова равенка е $x=1480$ денари.

20. Некоја стока, која чини 455 денари, е платена со монети од 5 денари и банкноти од 10 и 50 денари, при што вкупно се дадени 23 монети и банкноти. Бројот на монетите од 5 денари е помал од бројот на банкнотите од 10 денари. Со колку монети од 5 денари и банкноти од 10 и 50 денари е платена стоката?

Решение. Го означуваме бројот на монети од 5 денари со x , а броевите на банкноте со 10 и 50 денари со y и z соодветно.

За избрано z, најмала можна сума што може да се плати со расположивите банкноти и монети е $50z+(23-z)\cdot 5=45z+115$. Ако $z\geq 8$ оваа сума ќе ја надмине сумата од 455 денари, па значи, $z\leq 7$. Слично, за избрано z, најголема сума што може да се плати е $50z+10(23-z)$ односно $40z+230$. Ако $z\leq 5$ оваа сума ќе биде помала од 455 денари, па, значи, $z\geq 6$.

Нека $z=7$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases} 5x+10y=105 \\ x+y=16 \end{cases}$$

чие што решение $x=11$, $y=5$ не ги задоволува условите од задачата, бидејќи е познато дека $x<y$.

Нека $z=6$. Од условите на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases} 5x+10y=155 \\ x+y=17 \end{cases}$$

чиешто мрешение е $x=3, y=14$. Ова решение ги задволува сите услови на задачата.

Значи, стоката е платена со 3 монети од 5 денари, 14 банкноте од 10 денари и 6 банкноте од 50 денари.

21. Морска вода содржи 5% сол (тежински). Колку килограми обична вода треба да се дотури на 40 килограми морска вода, за да во новодобиената вода да има 2% сол?

Решение. Морската вода содржи 5% сол; значи, во 100 килограми вода има 5 килограми сол. Ако со x го означиме количеството сол (во килограми) што се наоѓа во 40 килограми морска вода, ќе имаме

$$\begin{array}{ll} 100\,\text{кгр. м.в.} & 5\,\text{кгр. сол} \\ 40\,\text{кгр. м.в.} & \text{x кгр. сол} \\ \hline \end{array}$$

$$100x=200$$

$$x=2$$

Значи, во 40 килограми морска вода има 2 килограми сол.

Да го означиме со y количеството обична вода (во килограми), што треба да се додаде на 40 килограми морска вода, за новодобиената вода да содржи 2% сол. Како и во претходната дискусија, имаме

$$\begin{array}{ll} 100\quad \text{кгр. м.в.} & 2\ \text{кгр. сол} \\ 40+\text{y}\ \text{кгр. м.в.} & 2\ \text{кгр. сол} \\ \hline \end{array}$$

$$2(40+y)=200$$

$$y=60$$

килограми морска вода.

22. Во 8 kg смеса има 65 % алкохол и 35 % вода. Колку вода треба да се додаде за да има во разредената смеса 45 % вода?

Решение. Бидејќи 1% од смешата е 80 gr, во смешата има 2800 грама вода и 5200 грама алкохол. Нека x е количеството вода, во грамови, што треба да се додаде. Тогаш $2800+x$ треба да е 45% од $8000+x$, т.е. $2800+x=0,45(8000+x)$, од каде што се добива $x=1454,(54)$.

Значи, за да се добие смеса со 45 % вода треба да се додадат 1454,54 грама вода.

23. Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелие во вториот, потоа една третина од водата во вториот сад се прелие во третиот сад и најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелие во првиот, тогаш во секој сад ке има по 6 литри вода. По колку литри вода имало во секој сад на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во првиот сад имало x литри вода, во вториот y литри, а во третиот z литри.

По првото преливање, во првиот сад останале $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ литри, во вториот $y+\frac{x}{2}$ литри, а во третиот z литри. По второто прелевање, во првиот сад има $\frac{x}{2}$ литри, во вториот

$$y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{3}(2y+x) \text{ литри,}$$

а во третиот

$$z+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{6}(6z+2y+x) \text{ литри.}$$

По третото прелевање, во првиот сад има

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x) \text{ литри,}$$

во вториот $\frac{1}{3}(2y+x)$ литри, а во третиот

$$\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x) \text{ литри.}$$

Од условот на задачата, го добиваме системот

$$\frac{1}{24}(6z+2y+13x)=6,\ \frac{1}{3}(2y+x)=6,\ \frac{1}{8}(6z+2y+x)=6.$$

Решение на системот е $x=8$, $y=5$, $z=5$.

24. Во златарска работилница треба да се направи 9 кг смеса во која златото и среброто ќе бидат во однос 7:11. На залиха има две смеси. Во првата количествата злато и сребро се наоѓаат во однос 4 : 5, а во втората во однос 2 : 5. По колку треба да се земе од секоја смеса, за да се добие новата смеса во зададениот однос?

Решение. Нека во новата смеса има a kg злато и b kg сребро. Од системот

$$\begin{cases} a:b=7:11 \\ a+b=9 \end{cases}$$

се добива дека $a=3,5$ и $b=5,5$. Нека од првата смеса се земени x kg, а до втората y kg. Тогаш во новата смеса ќе има $(\frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y)kg$ злато и $(\frac{5}{9}x+\frac{5}{7}y)$kg сребро, т.е.

$$\begin{cases} \frac{4}{9}x+\frac{2}{7}y=3,5 \\ \frac{5}{9}x+\frac{5}{7}y=5,5 \end{cases},$$

од каде се добива дека $x=5,85$ и $y=3,15$.

25. Во златарската работилница треба да се направи 5 kg смеса во која односот на количествата на злато и сребро е $22:41$. Во залиха има две смеси. Во едната количествата злато и сребро се наоѓаат во однос $4:5$, а во втората $2:5$. Колку треба да се земе од секоја смеса за да се добие бараната смеса?

Решение. Во новата смеса од 5 kg треба да има $5\cdot\frac{22}{63}$ kg злато. Да земеме x kg од првата и y kg од втората смеса. Количеството злато што треба да се добие на овој начин е $x\cdot\frac{4}{9}+y\cdot\frac{2}{7}$.

Според условите на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} x\cdot\frac{4}{9}+y\cdot\frac{2}{7}=5\cdot\frac{22}{63} \\ x+y=5 \end{cases}$$

чиешто решение е $x=2$ и $y=3$.

Според тоа, треба да земеме 2 kg од првата и 3 kg од втората смеса.

26. Легура на цинк и сребро со маса $3,5$ килограми содржи 75% сребро. Кога оваа легура ќе се стопи и ќе се измеша со друга легура од истите елементи, се добива трета легура со маса $10,5$ килограми, која има 84% сребро. Колкав е процентот на сребро во втората легура?

Решение. Во првата легура имало $3,5\cdot 0,75$ kg=2,625 kg сребро. Во третата легура имало $10,5\cdot 0,84\text{ kg}=8,82\text{ kg}$ сребро. На првата легура и се додадени $(10,5-3,5)\text{kg}=7\text{kg}$ легура, која имала $(8,82-2,66)\text{kg}=6,16\text{ kg}$ сребро. Значи, во втората легура имало $\frac{6,195\cdot 100}{7}=88\%$ сребро.

27. На располагање ни се смеса AB составена од супстанциите A и B во однос $2:3$, смеса BC, составена од супстанциите B и C во однос $1:2$ и смеса CA, составена во однос $1:1$. По колку грама од секоја од смесите треба да се земат за да се добие 24 g смеса во која односот на супстанциите A,B и C е $1:1:1$?

Решение. Да земеме x грама од првата смеса, y грама од втората смеса и $24-x-y$ грама од третата смеса.Во добиената смеса треба да има по 8 грама од секоја од супстанциите. Од друга страна, во добиената смеса има $\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}(24-x-y)$ грама од супстанцијата A и $\frac{3}{5}x+\frac{1}{3}y$ грама од супстанцата B. Решавајќи го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{1}{2}(24-x-y)=8 \\ \frac{3}{5}x+\frac{1}{3}y=8 \end{cases},$$

добиваме $x=10, y=6$, а оттаму и $z=8$.

Значи, потребни се 10 g од првата, 6 g од втората и 8 g од третата смеса.

28. Од две парчиња легура со тежина 6 kg и 3 kg со различни проценти на бакар, отсечено е по едно парче со иста тежина. Секое од отсечените парчиња е слеано со остатокот на другото парче. По тоа спојување, процентот на бакар во двете легури се изедначува. Колку тежат отсечените парчиња?

Решение. Да ја означиме со A легурата чија тежина е 6 kg, а со B легурата чија тежина е 3 kg. Нека во 1 kg од легурата A има u kg бакар, а во 1 kg од легурата B има v kg бакар. Од условите на задачата имаме $u\neq v$. Нека тежината на отсечените парчиња од легурите A и B е x kg. По спојувањето на отсечените парчиња со остатоците на другите парчиња, во 1 kg од легурата A ќе има

$\frac{(6-x)u+xv}{6}$ kg бакар, а во 1 kg од легурата B ќе има $\frac{(3-x)v+xu}{3}$ kg бакар. Бидејќи процентот на бакар во двете легури по спојувањето е ист, имаме

$$\frac{(6-x)u+xv}{6}=\frac{(3-x)v+xu}{3}.$$

Од последната равенка се добива $(u-v)(9x-18)=0$, од каде имаме $x=2$, бидејќи $u\neq v$.

29. Предната гума на еден велосипед се излижува по изминати 250 km, а задната по изминати 150 km. По колку изминати километри треба да ги замениме местата на гумите за да се излижат истовремено?

Решение. Ако по x km треба да ги промениме местата на гумите, тогаш според условот на задачата ќе имаме

$$\frac{x}{250}+\frac{x}{150}=1,$$

од каде што се добива $x=93,75$ km.

30. Два автомобили тргнале од едно исто место но во спротивна насока. Во моментот кога нивното растојание било 18 km, едниот автомобил поминал 3 km помалку од двојниот пат на другиот. Да се одреди патот на двата автомобили што го поминале до тој момент.

Решение. Нека x и y се патиштата што ги поминале автомобилите. Од условот на задачата: $x+y=9$ и $x=2y-3$. Решение на овој cсстем равенки е $x=11$, $y=7$. Значи, едниот автомобил поминал 11 km, а другиот 7 km.

31. Еден возач патувал од местото A до местото B, оддалечено 800 km едно од друго. Наместо да вози со планираната брзина од 80 km/h, на првата половина од својот пат, возачот бил принуден да вози со брзина $(80-m)$ km/h. Ако на втората половина од својот пат возачот вози со брзина $(80+m)$ km/h, дали ќе стигне на време во B?

Решение. Нека t_1 е времето со кое возачот ја поминал првата половина, а t_2 времето со кое ја поминал втората половина на патот. Тогаш

$$400=(80-m)t_1 \qquad \text{и} \qquad 400=(80+m)t_2.$$

Бидејќи $80-m<80+m$, следува дека $t_1>t_2$.

Собирајќи ги горните равенства, се добива

$$800=(80-m)t_1+(80+m)t_2=80(t_1+t_2)-m(t_1-t_2),$$

Од што следува дека $80(t_1+t_2)>800$, т.е. $t_1+t_2>10\,\text{h}$.

Кога возачот би возел со планираната брзина, би стигнал во B за $\frac{800}{80}=10\ h$. Значи, возачот ќе задоцни.

32. Пресметај ги брзината и должината на возот кој за 8 секунди поминува покрај неподвижен набљудувач, а за 12 секунди го поминува перонот долг 480 метри.

Решение. Нека v е брзината на возот изразена во m/s, а s е неговата должина во метри. Тогаш од условот на задачата имаме:

$$v=\frac{s}{8} \quad \text{и} \quad v=\frac{s+480}{32}.$$

Од тука добиваме $s=160$ m и $v=20m/s$ ($=72$ km/h).

33. Речен брод за 11 часа, без прекин поминал 168 km по течението, а 48 km спротивно од течението на реката. Друг пат, за истото време поминал 144 km по, а 60 km спротивно од течението на реката. Колкава е брзината на бродот, а колкава на реката?

Решение. Нека x е брзината на бродот а y брзината на реката. Од условите на задачата се добива следниот систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} \frac{168}{x+y}+\frac{48}{x-y}=11 \\ \frac{144}{x+y}+\frac{60}{x-y}=11 \end{cases}$$

Овој систем се трансформира во системот

$$\begin{cases} 168(x-y)+48(x+y)=11(x^2-y^2) \\ 144(x-y)+60(x+y)=11(x^2-y^2) \end{cases},$$

од каде што со одземање на втората равенка од првата се добива дека

$$24(x-y)-12(x+y)=0, \text{ т.е. } x=3y.$$

Со замена во една од равенките, добиваме $\frac{168}{4y}+\frac{48}{2y}=11$, а со решавање на таа равенка имаме $y=6$. Според тоа, брзината на бродот е 18 km/h , а на реката е 6 km/h .

34. Возот влегол во тунел за 15 секунди. До излегувањето од тунелот на последниот вагон поминале уште 30 секунди. Колку е долг возот и со која брзина се движел, ако тунелот е долг 300 m .

Решение. Брзината на возот е 10 m/s , а неговата должина е 150 m .

35. По патеката покрај стрмна пруга се движи пешак (по надолнина) со брзина од 6 km/h . Тој забележал дека возот што доаѓа од спротивен правец минува крај него за 12,6 секунди. Со истиот воз, со кој по угорнина се движел со брзина од 3,6 km/h се разминувал 15 секунди. Колку е долг возот и колкава му е брзината?

Решение. Нека брзината на возот е x m/sec, а неговата должина е y m. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} 12,6x+6\cdot 12,6=y \\ 15x-3,6\cdot 15=y \end{cases}$$

од каде добиваме $x=15$, $y=210$. Значи, брзината на возот е 15 m/sec $=54$ km/h , а неговата должина е 210 m .

36. Автомобил се движел од градот A кон градот B со брзина 60 km/h на нагорнините, 72 km/h на рамните делови и 90 km/h на надолнините и целиот пат го изминал за 5 часа. За да се врати назад, движејќи се со истите брзини на автомобилот му биле потребни 4 часа.

Колкаво е растојанието од A до B.

Решение. Нека g km од патот A до B се состои од нагорнини, r km се состои од рамни делови и d km се состои од надолнини. Тогаш, според условите на задачата, добиваме:

$$\frac{g}{60}+\frac{r}{72}+\frac{d}{90}=5 \qquad (1)$$

Движејќи се наназад, оние делови кои биле нагорнини стануваат надолнини и обратно, па затоа имаме:

$$\frac{g}{90}+\frac{r}{72}+\frac{d}{60}=4\,. \qquad (2)$$

Од сумирањето на (1) и (2) добиваме $\frac{g+r+d}{36}=9$, односно $g+r+d=324$.

Значи, растојанието од A до B е 324 km.

37. Од местото A кон местото B тргнал патнички воз, а од местото B кон местото A, во исто време, тргнал брз воз. По извесно време тие се сретнале. Ако двата воза би биле патнички би се сретнале по y часа, а ако двата би биле брзи би се сретнале по 3 часа. Да се определат брзините на возовите, ако тие се движат со константни брзини, а растојанието помеѓу местата A и B е 2400 km.

Решение. Нека $v_p$km/h е брзината на патничкиот воз, а $v_b$km/h е брзината на брзиот воз. Ако двата воза би се движеле со сопствената брзина, тогаш тие би се сретнале по $\frac{2400}{v_p+v_b}$ часа. Ако двата воза се движат со брзината на патничкиот воз тие би се сретнале за $\frac{2400}{2v_p}$, а ако би се движеле со брзината на брзиот воз би се сретнале за $\frac{2400}{2v_b}$.

Според тоа,

$$\begin{cases}\frac{2400}{v_p+v_b}-\frac{2400}{2v_b}=3\\ \frac{2400}{2v_p}-\frac{2400}{v_p+v_b}=5\end{cases}. \qquad (1)$$

Со елементарни трансформации состемот може да се запише во облик

$$\begin{cases}\frac{v_b-v_p}{(v_b+v_p)v_b}=\frac{1}{400}\\ \frac{v_b-v_p}{(v_b+v_p)v_p}=\frac{1}{240}\end{cases}.$$

Ако втората равенка ја поделиме со првата равенка ќе добиеме $\frac{v_b}{v_p}=\frac{5}{3}$, односно $v_b=\frac{5}{3}v_p$. Ако замениме во првата равенка на системот (1), имаме

$$\frac{2400}{\frac{8}{3}v_p}-\frac{2400}{\frac{10}{3}v_p}=3,$$

од каде сега лесно се добива $v_p=60\text{km/h}$, а потоа од (2) и $v_b=100\text{km/h}$.

38. Две илјади домина се исправени во редица на еднакво (и мало) растојание едно од друго. Потоа, домината се нумерираат од 1 до 2000. Пред доминото со реден број 1 се редат на ист начин уште неколку домина, а на другиот крај k пати повеќе ($k>8$). Едновремено и со еднаква сила крајните домина се поттурнуваат кон средината.

Колку домина се наредени, ако на крајот останало доминото со реден број 1984?

Решение. Нека x е бројот на домината поставени пред доминото со реден број 1, тогаш

$$16+kx=1983+x$$

од каде што добиваме

$$(k-1)x=1967.$$

Бидејќи $1967=7\cdot 281$, а броевите 7 и 281 се прости, добиваме $k-1=281$, $x=7$, зошто по услов $k>8$. Според тоа, наредени се вкупно

$$(k+1)x+2000=283\cdot 7+2000=3981$$

домино.

39. Три уморни патници пристигнале во еден ан и побарале да јадат. Анџијата немал ништо друго да им понуди освен печени компири. Додека компирите се печеле патниците заспале. После некое време, откако компирите биле готови, првиот патник се разбудил, изел $\frac{1}{3}$ од компирите и продолжил да спие, без да ги разбуди останатите патници. Потоа вториот патник се разбудил, изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите компири и легнал да спие. На крајот и третиот патник се разбудил и изел $\frac{1}{3}$ од преостанатите компири и се вратил да спие. Анџијата сето ова внимателно го набљудувал и кога ги преброил преостанатите компири видел дека се 8.

Колку компири испекол анџијата?

Решение. *Прв начин.* Ако со x го означиме бројот на компирите што им ги испекол анџијата, тогаш после постапката на првиот патник останале $x-\frac{1}{3}x$ компири. Вториот патник изел $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x)$ компири, после што останале $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x)$ компири, од кои третиот патник изел $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x))$. Според тоа, анџијата изброил $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x)-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x))$ компири. Од досега изнесеното ја добиваме равенката

$$x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x)-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3}x))=8,$$

чие решение е $x=27$ што не е тешко да се добие.

Значи, анџијата испекол 27 компири.

Втор начин. Очигледно третиот патник затекнал 12 компири, бидејќи земал $\frac{1}{3}$ од нив, а останале $\frac{2}{3}$, т.е 8. На сличен начин заклучуваме дека вториот патник затекнал 18 компири, бидејќи зел $\frac{1}{3}$ од нив, а останале $\frac{2}{3}$, т.е. 12. Првиот патник оставил 18 компири што е $\frac{2}{3}$ од компирите што ги затекнал. Значи, тој затекнал 27 компири.

40. Тројца патници седнале да јадат. Првиот извадил 3 сомуни, а вториот 4 сомуни. Ги поделиле седумте сомуни на три еднакви делови и ги изеле. Третиот патник извадил 7 гроша и им рекол: „Јас немав сомуни, но еве ви давам 7 гроша, а вие поделете си ги правилно“.

Колку гроша му припаѓаат на првиот, а колку на вториот патник?

Решение. Секој патник изел $\frac{7}{3}$ од сомуните. Третиот патник ги платил своите $\frac{7}{3}$ со 7 гроша-значи секоја третина сомун ја платил по 1 грош.

Првиот патник донел 3 сомуни, т.е. $\frac{9}{3}$, а изел $\frac{7}{3}$, што значи на третиот патник му дал $\frac{2}{3}$. Слично, вториот патник донел $\frac{12}{3}$, а изел $\frac{7}{3}$, што значи на третиот патник му дал $\frac{5}{3}$ од сомуните. Конечно, првиот патник треба да добие 2 гроша, а вториот патник 5 гроша.

41. Една продавница треба да добие 1100 бомбониери. Во складот за снабдување постојат пакети од по 70, 40 и 25 бомбониери. Цената на превозот за еден пакет е еднаква на 20, 10 и 7 денари соодветно. Какви пакети и во колкави количества продавницата треба да порача, за да превозните трошоци бидат најмали? (Пакетите не смеат да се отвараат во складот.)

Решение. *Прв начин.* Цената на превозот на една бомбониера од првиот вид пакети е $\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$ ден., од вториот вид е $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ ден., а од третиот вид е $\frac{7}{25}$ ден. Најефтин е превозот на бомбониерите од вториот вид, потоа од третиот, а најскап е од првиот. Бидејќи, $1100:40=27,5$ следи дека може да се порачаат најмногу 27 пакети од по 40 бонбониери. Но, тогаш остануваат $1100-27\cdot 40=20$ бомбониери, што не прават цел пакет од ниеден вид. Значи, треба да се порачаат помалку од 27 пакети од вториот вид. Ако се порачаат 26 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште $1100-26\cdot 40=60$ бомбониери, што пак не прави цел пакет или цел број пакети од ниеден вид. Ако се порачаат 25 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште $1100-25\cdot 40=100$ бомбониери кои прават 4 пакети од по 25 бомбониери. Значи, за да биде најефтин превозот треба да се порачаат 25 пакети од вториот вид и 4 пакети од третиот вид.

Втор начин. Нека x е бројот на пакети што треба да се порачаат од првиот вид, y бројот на пакети од вториот вид и z бројот на пакети од третиот вид. Тогаш,

$$70x+40y+25z=1100$$

и вредноста на изразот $A=20x+10y+7z$ треба да е најмала. При тоа x, y и z се цели броеви такви што $0\le x\le 15$, $0\le y\le 27$ и $0\le z\le 44$. Со замена на

$$z=\frac{1100-70x-40y}{25}$$

во изразот A, се добива $A=308+\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}y$. Бидејќи, вредноста на изразот A е цел број, следи дека треба $5\,|\,x$ и $5\,|\,y$. Значи, вредноста на A е најмала, ако за x се земе најмалата дозволена вредност делива со 5, а за y се земе најголемата дозволена вредност делива со 5, односно вредноста на A е најмала ако $x=0$ и $y=25$. Тогаш,

$$z=\frac{1100-70\cdot 0-40\cdot 25}{25}=4\,.$$

Значи, за да биде најефтин превозот треба да се порачаат 25 пакети од вториот вид и 4 пакети од третиот вид.

42. Во една кошница се наоѓаат црвени, бели и жолти цветови. Бројот на жолтите цветови не е помал од бројот на белите цветови и не е поголем од третината на црвените цветови. Вкупниот број на бели и жолти цветови не е помал од 55. Најди го најмалиот број на црвени цветови.

Решение. Нека во кошницата има a-жолти, b-бели и c-црвени цветови. Од условот на задачата следува дека

$$a\geq b\,, \tag{1}$$

$$a\leq \frac{1}{3}c \tag{2}$$

и

$$a+b\geq 55\,. \tag{3}$$

Од (1) и (3) добиваме дека $2a\geq 55$, од каде $a\geq 28$, затоа што $a\in\mathbb{N}$. Тогаш, од (2) се добива $c\geq 3a\geq 3\cdot 28=84$. Значи, најмалиот број на црвени цветови е 84.

43. Марија правела тест по математика, кој содржел задачи по алгебра, геометрија и логика. По проверката на резултатите, Марија точно решила 50% од задачите по алгебра, 70% од задачите по гометрија, и 80% од задачите по логика. Исто така, точно решила 62% од задачите по алгебра и логика , и 74% од задачите по геометрија и логика.

Кој е процентот на задачи кои точно ги решила Марија од целиот тест?

Решение. Нека a,g,l се броевите на задачи кои Марија точно ги решила, а A,G,L е вкупниот број на задачи по алгебра, геометрија и логика соодветно.

Од условите на задачата имаме

$$a=0,5A,\ g=0,7G,\ l=0,8L,\ a+l=0,62(A+L) \text{ и } g+l=0,74(G+L)\,.$$

Со замена во четвртата равенка, добиваме $0,5A+0,8L=0,62A+0,62L$, односно $A=1,5L$. Со замена во петтата равенка добиваме $0,7G+0,8L=0,74G+0,74L$, односно $G=1,5L$. Сега,

$$a+g+l=0,5A+0,7G+0,8L=0,75L+1,05L+0,8L=2,6L$$

и

$$A+G+L=1,5L+1,5L+l=4L\ .$$

Според тоа, процентот на точно решени задачи е

$$\frac{a+g+l}{A+G+L}=\frac{2,6L}{4L}=0,65\ ,$$

т.е. 65%.

IV ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Од првите 10000 природни броеви колку се такви што завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот $5^m + 8^n$?

Решение. Бидејќи 5^m завршува на 5, треба 8^n да завршува на 6. Имаме

$$8^1 = 8, \quad 8^2 = 64, \quad 8^3 = 512, \quad 8^4 = 4096, \quad 8^5 > 10000 .$$

Значи $n = 4$ па од

$$5^m + 8^n \le 10000 \Rightarrow 5^m \le 5904 .$$

Бидејќи

$$5^1 = 5, \quad 5^2 = 25, \quad 5^3 = 125, \quad 5^4 = 625,$$

$$5^5 = 3125, \quad 5^6 = 15625 > 5904 \Rightarrow m \in \{1,2,3,4,5\} .$$

Според тоа, постојат 5 броја помали од 10 000, кои завршуваат на 1 и можат да се запишат во видот $5^m + 8^n$. Тоа се:

$$4101 = 5^1 + 8^4, \quad 4121 = 5^2 + 8^4, \quad 4221 = 5^3 + 8^4, \quad 4721 = 5^4 + 8^4 \quad \text{и} \quad 7211 = 5^5 + 8^4 .$$

2. За кои цифри a и b ($a \ne 0$) бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ е полн квадрат.

Решение. За било кои цифри a и b ($a \ne 0$) бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ можеме да го запишеме во облик

$$9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4 = 9(10 \cdot \overline{ab} + 5 - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4 = 9(9 \cdot \overline{ab} + 5)(\overline{ab} + 1) + 4$$

$$= 81 \cdot \overline{ab}^2 + 126 \cdot \overline{ab} + 49 = (9 \cdot \overline{ab} + 7)^2$$

Значи, за било кои цифри a и b ($a \ne 0$), бројот $9(\overline{ab5} - \overline{ab})(\overline{ab} + 1) + 4$ е полн квадрат.

3. Нека a, b, c се цели броеви за кои што $ab + bc + ca = 1$. Докажи дека $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ е полн квадрат.

Решение. На равенството $ab + bc + ca = 1$ ќе додадеме a^2 , при што добиваме

$$a^2 + ab + bc + ca = 1 + a^2$$

$$(a + b)(a + c) = 1 + a^2$$

На потполно аналоген начин се добива

$$(b + c)(b + a) = 1 + b^2$$

$$(c + a)(c + b) = 1 + c^2 .$$

Сега јасно е дека

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = [(a + b)(b + c)(c + a)]^2$$

4. Определи ги сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$, такви што $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ и $\overline{de}$ се полни квадрати.

Решение. Единствени двоцифрени броеви што се полни квадрати се $16, 25, 36, 49, 64$ и 81. Тие почнуваат со цифрите 1, 2, 3, 4, 6 и 8, а завршуваат со цифрите 1, 4, 5 и 6. Значи цифрите b, c, d може да бидат само цифрите 1, 4 и 6. Броевите $\overline{bc}$ и $\overline{cd}$ се полни квадрати, а тоа е можно само ако $\overline{bc} = 16$ и $\overline{cd} = 64$. Според тоа $\overline{ab} = \overline{a1}$ од каде добиваме $a = 8$, и $\overline{de} = \overline{4e}$ од каде пак добиваме $e = 9$. Конечно, бараниот број е 81649, и тој е единствен со бараното својство.

5. Нека a, b, c се цели броеви за кои
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 .$$
Докажи дека $a^2 + b^2 + c^2$ е полн квадрат на цел број.

Решение. Од условот на задачата $a, b, c \neq 0$, па според тоа
$$\frac{bc+ac+ab}{abc} = 0 .$$
Според тоа, a, b, c се цели броеви за кои $ab + bc + ca = 0$. Сега,
$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 0 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 .$$

6. За броевите a, b и c, броевите $a + b + c$ и $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ се цели броеви. Дали $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ е цел број.

Решение. Рационалниот израз ќе го запишеме во облик
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \frac{a^2+b^2+c^2+1ab+2bc+2ca-2ab-2bc-2ca}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$
$$= \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} - 2\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} = a + b + c - 2\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$
Сега е јасно дека $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ исто така цел број.

7. Дали може бројот 1 да се претстави во вид на збир:

а) $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6}$,

б) $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} + \frac{1}{n_7} + \frac{1}{n_8} + \frac{1}{n_9}$,

каде $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9$ се различни непарни природни броеви?

Решение. а) Вредноста на изразот $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6}$ е најголема за најмалите можни допуштени вредности на $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$. Најмали допуштени вредности на $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ се: $n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 7, n_4 = 9, n_5 = 11, n_6 = 13$.

При тоа имаме
$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$$
$$< 0,34 + 0,20 + 0,15 + 0,12 + 0,10 + 0,08 = 0,99 < 1.$$

Ако $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ се било кои други вредности различни од избраните, тогаш збирот на реципрочните вредности е помал од збирот $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$, па според тоа и е помал од 1.

Значи, не постојат вредности за $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ за кои

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1.$$

б) Такво претставување е можно. Едно такво претставување, т.е. разложување е

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1.$$

2. ДЕЛИВОСТ

1. Еден природен број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 9. Докажи!

Решение. Знаеме дека секој природен број n може да се запише во облик

$$n=10^k a_k+10^{k-1}a_{k-1}+...+10^2 a_2+10a_1+a_0,$$

каде што a_0 е цифрата на единиците, a_1 е цифрата на десетките, a_2 е цифрата на стотките итн. Имаме

$$\begin{aligned} n &= a_0+a_1+...+a_k+9a_1+99a_2+...+\underbrace{99...9}_{k}a_k \\ &= (a_0+a_1+...+a_k)+9(a_1+11a_1+...+\underbrace{11...1}_{k}a_k) \end{aligned}$$

Бидејќи вториот собирок е секогаш делив со 9, добиваме дека природниот број n е делив со 9 ако и само ако првиот собирок, т.е. збирот на неговите цифри е делив со 9. Со тоа е докажано тврдењето на задачата.

2. Во равенството $25!=15\ 511\ x10\ 043\ 330\ y85\ 984\ z00\ 000$ определи ги цифрите x, y и z за да тоа е точно.

Решение. По дефиниција $25!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 25$. Ако овој број го разложиме на прости множители (направиме негова канонична факторизација), се добива:

$$25!=2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 23=10^6\cdot 2^{16}\cdot 3^{10}\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 23$$

значи 25! завршува на 6 нули, па следува дека $z=0$.

Бројот 25! е делив со 9, следува дека $61+x+y$ е делив со 9. Значи

$$x+y=2 \quad \text{или} \quad x+y=11 \tag{1}$$

(бидејќи x и y се едноцифрени броеви).

Бројот 25! е делив со 11. Критериумот за деливост со 11 гласи: бројот $a_n\ldots a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ е делив со 11 ако бројот $(a_0+a_2+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+a_5+\ldots)$ е делив со 11. Следува дека $(34+x)-(27+y)=7+x-y$ е делив со 11. Значи

$$x+y=7 \quad \text{или} \quad x-y=4 \tag{2}$$

(бидејќи x и y се едноцифрени броеви).

Од (1) и (2) ги формираме следниве системи равенки:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=11 \\ -x+y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=11 \\ x-y=4 \end{cases}$$

Целобројни решенија се добиваат само кај вториот и третиот систем, а само во третиот систем тие се ненегативни. Притоа $x=2$, $y=9$.

3. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека a^2+ab+b^2 е делител на бројот $(a+b)^6-a^6$.

Решение. Ќе ги искористиме идентитетите

$$A^6-B^6=(A^3-B^3)(A^3+B^3) \text{ и } A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

Навистина, добиваме

$$\begin{aligned}(a+b)^6-a^6 &= [(a+b)^3-a^3][(a+b)^3+a^3] \\ &= [(a+b)-a][(a+b)^2+a(a+b)+a^2][(a+b)+a] \\ &= [(a+b)^2-(a+b)a+a^2] \\ &= b(2a+b)(a^2+ab+b^2)(3a^2+3ab+b^2).\end{aligned}$$

Според тоа, $(a^2+ab+b^2)\,|\,(a+b)^6-a^6$.

4. За кои вредности на $n\in\mathbb{N}$, бројот $(n-2)^3+n^3+(n+2)^3$ не е делив со 18.

Решение. Користејќи ги идентитетите

$$(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3,$$

бројот $(n-2)^3+n^3+(n+2)^3$ можеме да го претставиме во облик

$$\begin{aligned}(n-2)^3+n^3+(n+2)^3 &= n^3-6n^2+12n-8+n^3+n^3+6n^2+12n+8 \\ &= 3n^3+24n=3n(n^2+8).\end{aligned}$$

Значи, за било кој $n\in\mathbb{N}$, $3\,|\,3n(n^2+8)$. Според тоа, доволно е да се определат природните броеви n такви што $6\,|\,n(n^2+8)$.

Ако n е непарен, тогаш тој е од облик $n=2k+1$ за некој природен број k. Но тогаш

$$n(n^2+8)=(2k+1)(4k^2+4k+9)=(2k+1)[2(2k^2+2k+4)+1],$$

односно $n(n^2+8)$ е непарен. Според тоа, тој не е делив со 2 па според тоа ниту со 6.

Значи, за да $(n-2)^3+n^3+(n+2)^3$ е делив со 18 потребно е n да е парен број.

Ако $3\,|\,n$, тогаш $3\,|\,n(n^2+8)$. Ако n не е делив со 3, тогаш тој е од облик $n=3m\pm1$. Во двата последни случаи

$$n^2+8=9m^2\pm 6m+9=3(3m^2\pm 2m+3),$$

односно $3\,|\,n(n^2+8)$.

Од претходната дискусија е јасно дека за да $(n-2)^3+n^3+(n+2)^3$ е делив со 18 доволно е n да е парен број, а не е делив со 18 кога n е непарен број.

5. Докажи дека квадратот на секој непарен природен број може да се запише во обликот $8p+1$ каде што p е ненегативен цел број.

Решение. Пред се, секој непарен природен број може да се запише во облик $2n+1$, каде што n е ненегативен цел број. Имаме

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1, \tag{1}$$

Понатаму, производ на два последователни цели броеви е парен број. Според тоа, производот $n(n+1)$ во (1) може да се напише во обликот $2p$, каде што p е ненегативен цел број, па имаме

$$(2n+1)^2=4\cdot 2p+1=8p+1,$$

што и требаше да се докаже.

6. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот n^7-n е делив со 7.

Решение. Доволно е да докажеме дека ако $n=1,2,3,4,5,6,7$, тогаш бројот n^7-n е делив со 7 (Зошто?). Имаме:

$1^7-1=0$, $\quad 2^7-2=126=7\cdot 18$, $\quad 3^7-3=2184=7\cdot 312$

$4^7-4=16380=7\cdot 2340$ $\quad 5^7-5=78120=7\cdot 11160$ $\quad 6^7-6=279930=7\cdot 39990$

$7^7-7=7(7^6-1)$.

7. Докажи дека производот на сите природни броеви од 101 до 200 е делив со 2^{100}, но не е делив со 2^{101}.

Решение. Имаме:

$$101\cdot 102\cdot 103\cdot\ldots\cdot 200=\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100)\cdot(101\cdot 102\cdot\ldots\cdot 200)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100}=\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 199)\cdot 2^{100}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 100}$$

$$=2^{100}\cdot(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 199)$$

Значи, производот $101\cdot 102\cdot 103\cdot\ldots\cdot 200$ е делив со 2^{100} но не е делив со 2^{101}, зашто сите множители во заградата се непарни броеви.

8. Дали може бројот 1986 да се претстави како разлика од квадрати на два цели броја?

Решение. Одговорот е не. Образложението е како што следува:

1) $m=2k$, $n=2t$. Тогаш $m^2-n^2=4(k^2-t^2)$, т.е. 4 е делител на m^2-n^2, а 4 не е делител на 1986.

2) $m=2k+1$, $n=2t+1$. Тогаш $m^2-n^2=4(k^2-t^2+k-t)$, т.е. 4 е делител на m^2-n^2, а 4 не е делител на 1986.

3) $m=2k$, $n=2t+1$ или $m=2k+1$, $n=2t$. Тогаш m^2-n^2 е непарен број, а 1986 е парен број.

9. Нека x, y и z се природни броеви такви што $x^3+y^3+z^3$ е делив со 7. Докажи дека производот xyz е делив со 7.

Решение. Нека n е произволен природен број. Тогаш n може да се запише во облик $n=7k+r$, каде што $r\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Бројот $n^3=(7k+r)^3$ при делење со 7 дава ист остаток како и бројот r^3 при делење со 7. Броевите $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$, 6^3 при делење со 7 даваат остатоци $0, 1, 1, 6, 1, 6, 6$ соодветно. Оттука добиваме дека бројот $x^3+y^3+z^3$ при делење со 7 дава остаток кој е остаток при делење на збирот на три броја кои припаѓаат на множеството $\{0,1,6\}$ со 7. Но, за да биде збирот на три броеви од множеството $\{0,1,6\}$ делив со 7, мора барем еден од нив да е 0, а тоа значи дека барем еден од броевите x, y, z да биде делив со 7. Следствено, производот xyz е делив со 7.

10. Докажи дека за секој цел број m и $A=\frac{m^4}{24}+\frac{m^3}{4}+\frac{11m^2}{24}+\frac{m}{4}$ е цел број.

Решение. Дадениот израз да го запишеме на следниот начин:

$$A=\frac{m}{24}(m^3+6m^2+11m+6)=\frac{m}{24}(m^3+3m^2+2m+3m^2+9m+6)=$$
$$=\frac{m}{24}[m(m^2+3m+2)+3(m^2+3m+2)]=\frac{m}{24}(m^2+3m+2)(m+3)=$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}$$

Значи, за да докажеме дека A е цел број, треба да докажеме дека производот $n=m(m+1)(m+2)(m+3)$ е делив со 24. Производ од два последователни броја е делив со 2; од четири последователни броеви еден е делив со 4; значи, бројот n е делив со 8. Производ од три последователни броја е делив со 3, па, значи, n е делив со 3. Броевите 3 и 8 се заемно прости, што значи дека n е делив и со бројот $3\cdot 8=24$.

11. Броевите $2+a$ и $35-b$ се деливи со 11. Докажи дека бројот $a+b$ е делив со 11.

Решение. Бројот $a+b$ можеме да го запишеме во облик

$$a+b=a+2-2+b=a+2-(35-b)+33.$$

Бидејќи $11\,|\,a+2, 11\,|\,35-b$ и $11\,|\,33$, добиваме дека 11 е делител на бројот

$$a+2-(35-b)+33=a+b.$$

12. За кои вредности на природниот број n збирот

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$$

е делив со 10.

Решение. Дадениот збир е еднаков на $4n^2+12n+14=(2n+3)^2+5$ и очигледно е дека е делив со 2 за секој природен број n. Овој збир е делив со 5 ако и само ако $n=5k+1$, $k\in\{0,1,2,3,...\}$.

13. Да се докаже дека производот на четири последователни природни броеви е:

а) делив со 24,

б) не квадрат на природен број.

Решение. а) Нека $n, n+1, n+2, n+3$ се четири последователни природни броеви. Тогаш нивниот производ е $n(n+1)(n+2)(n+3)$, во кој два од броевите се парни, при што еден од е делив со четири, а најмалку еден е делив со 3. Според тоа, производот $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со производот $2\cdot 3\cdot 4$ т.е. со 24.

б) Производот $n(n+1)(n+2)(n+3)$ го запишуваме во видот

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = [n(n+3)][(n+2)(n+1)] = (n^2+3n)(n^2+3n+2)$$
$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 - 1 = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

од каде заклучуваме дека не е квадрат на природен број за секој природен број n.

14. Да се определат сите природни броеви n за кои вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ е исто така природен број.

Решение. Дропката $\frac{24}{3n-4}$ е природен број ако и само ако $(3n-4)\,|\,24$, т.е. ако и само ако

$$3n-4 \in \{1,2,3,4,6,8,12,24\}.$$

Но, тогаш

$$3n \in \{5,6,7,8,10,12,16,28\}$$

и од тоа што n е природен број добиваме дека $3n$ може да биде само 6 или 12, па затоа $n=2$ или $n=4$.

15. Најди ги сите целобројни вредности на бројот a, за кои изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број.

Решение. Имаме

$$\frac{2a-5}{a+2} = \frac{2a+4-9}{a+2} = \frac{2(a+2)-9}{a+2} = 2 - \frac{9}{a+2},$$

па затоа изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број ако и само ако $(a+2)\,|\,9$, од што следува дека $a+2 \in \{\pm1, \pm3, \pm9\}$, т.е. $a \in \{-11,-5,-3,-1,1,7\}$.

16. Ако x е природен број, тогаш еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека за x природен број, $m = \frac{2x-5}{9}$ и $n = \frac{x-2}{15}$ се цели броеви. Тогаш, од првото равенство имаме дека $2x = 9m+5$, а од второто равенство $x = 15n+2$, односно $2x = 30n+4$. Со изедначување на десните страни се добива

$$9m+5 = 30n+4 \;\Rightarrow\; 1 = 30n-9m \;\Rightarrow\; 1 = 3\cdot(10n-3m).$$

Последното равенство не е можно за ниту цели броеви m и n, затоа што десната страна е делива со 3, а левата не.

Значи, барем еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број.

17. Дадена е низата броеви $1,1,2,3,7,22,155,...$ во која секој член, почнувајќи од третиот, е еднаков на производот од претходните два члена зголемен за 1. Докажи дека ниту член на низата не е делив со 4.

Решение. Лесно се воочува дека по секои два непарни членови на низата, следува парен член, по него два непарни, па пак парен итн. Доволно е да докажеме дека ниту еден од парните членови не е делив со 4. За таа цел избираме пет последователни членови на низата: a, b, c, d, e од кои b, e се парни; a, c, d се непарни. Тогаш:

$$c = ab+1, \quad d = bc+1, \quad e = cd+1 = (ab+1)(bc+1)+1 = ab^2c + b(a+c)+2\,.$$

Бидејќи b е парен број, следува $4\,|\,ab^2c$. Производот $b(a+c)$ е исто така делив со 4, бидејќи b е парен и збирот $a+c$ е парен број. Значи, првите два собироци се деливи со 4, а третиот не, па оттука заклучуваме дека e не е делив со 4.

18. Најди ги сите цели броеви n за кои бројот n^3-8n^2+2n е делив со n^2+1.

Решение. Од равенството $n^3-8n^2+2n=(n^2+1)(n-8)+(n+8)$ следува дека $(n^2+1)\,|\,(n+8)$. Очигледно $n=-8$ е едно решение. Нека $n+8\neq 0$. Од $(n^2+1)\,|\,(n+8)$ следува дека $n^2+1\leq|n+8|$, т.е. $n^2+1\leq -n-8$ или $n^2+1\leq n+8$. Првиот случај не е можен бидејќи $n^2+n+9>0$, за секој $n\in\mathbf{Z}$, а од вториот следува дека $n^2-n-7\leq 0$, од што добиваме дека n е некој од броевите $-2,-1,0,1,2,3$. Со непосредна проверка се добива дека само броевите 0 и 2 го имаат бараното својство. Конечно решенија на задачата се $-8,0,2$.

19. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 27. Докажи дека збирот на дадениот број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 27.

Решение. Нека $\overline{abcd}$ е четирицифрен број со бараното својство, т.е. таков да $a+b+c+d=27$. Имаме

$$\begin{aligned} S &= \overline{abcd}+\overline{dcba} = 1001(a+d)+110(b+c)\\ &= 110(a+d)+110(b+c)+891(a+d)\\ &= 110(a+b+c+d)+891(a+d)\\ &= 110\cdot 27+27\cdot 33(a+d) = 27[110+33(a+d)], \end{aligned}$$

што значи дека $27\,|\,S$, што и требаше да се докаже.

20. Ако n е непарен природен број тогаш 48 е делител на бројот n^3+3n^2-n-3. Докажи!

Доказ. *Прв начин.* Имаме:

$$n^3+3n^2-n-3 = n^2(n+3)-(n+3) = (n+3)(n^2-1) = (n-1)(n+1)(n+3)$$

Бидејќи броевите $n-1, n+1, n+3$ се парни (според условот n е непарен) и еден од броевите $n-1, n+1$ е делив со 4, заклучуваме дека дадениот број е делив со 16. Ако n е делив со 3, тогаш и $n+3$ е делив со 3. Ако n не е делив со 3, тогаш при делење со 3 дава остаток 1 или -1 па еден од броевите $n-1$ и $n+1$ е делив со 3. Оттука, заклучуваме дека дадениот број се дели со $3\cdot 16=48$.

Втор начин. Бројот n е непарен, па може да се запише во облик $n=2k-1,$ за некој природен број k. Ако го вметнеме ова во дадениот израз добиваме:

$$(2k-1)^3+3(2k-1)^2-(2k-1)-3=8k^3-8k=8k(k^2-1)=8k(k-1)(k+1(.$$

Еден од факторите $k-1,k,k+1$ е делив со 3 и барем еден од $k-1,k,k+1$ е парен. Затоа производот $8k(k-1)(k+1).$ е делив со $8\cdot 3\cdot 2=48$.

21. Докажи дека за секој природен број n изразот $n^{19}-n^7$ е делив со 30.

Решение. Да означиме $A=n^{19}-n^7$. Со разложување добиваме

$$\begin{aligned} A=n^{19}-n^7 &= n^7(n^{12}-1)=n^7(n^6-1)(n^6+1)\\ &=n^7(n-1)(n+1)(n^4+n^2+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)\\ &=(n-1)n(n+1)(n^2+1)\cdot B,\quad B\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

При тоа имаме:

а) Бидејќи n и $n+1$ се последователни природни броеви, еден од нив е парен, па $n^{19}-n^7$ е делив со 2 за секој $n\in\mathbb{N}$.

б) Еден од трите броја $n-1, n$ и $n+1$ е делив со 3, па $n^{19}-n^7$ е делив со 3 за секој $n\in\mathbb{N}$.

в) Ако $n=5k, k\in\mathbb{N}$, n е делив со 5, ако $n=5k\pm 1, k\in\mathbb{N},\quad n^2-1$ е делив со 5, ако $n=5k\pm 2, k\in\mathbb{N},\quad n^2+1$ е делив со 5. Според тоа $n^{19}-n^7$ е делив со 5 за секој $n\in\mathbb{N}$.

Бидејќи 2, 3 и 5 се попарно заемно прости, добиваме дека $30\,|\,n^{19}-n^7$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

22. Докажи дека бројот $A=2^1+2^2+...+2^{1985}$ е делив со 31.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} A&=(2+2^2+2^3+2^4+2^5)+(2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10})+...+\\ &\quad+(2^{1981}+2^{1982}+2^{1983}+2^{1984}+2^{1985})\\ &=2(1+2+2^2+2^3+2^4)+2^6(1+2+2^2+2^3+2^4)+...+\\ &\quad+2^{1981}(1+2+2^2+2^3+2^4)\\ &=31(2+2^6+2^{11}+...+2^{1981}) \end{aligned}$$

од каде што следува дека бројот A е делив со 31.

23. Докажи дека $37\,|\,(333^{2003}+555^{2003})$.

Решение. Од тоа што $37\,|\,333$ и $37\,|\,555$ следува $37\,|\,333^{2003}$ и $37\,|\,555^{2003}$, па затоа $37\,|\,(333^{2003}+555^{2003})$.

24. Докажи дека бројот $2222^{5555}+5555^{2222}$ е делив со 7.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}2222^{5555}+5555^{2222} &= (2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222})\\ &=(2222+4)(2222^{5554}-2222^{5553}\cdot 4+...-2222\cdot 4^{5553}+4^{5554})+\\ &\quad+(5555-4)(5555^{2221}+5555^{2220}\cdot 4+...+5555\cdot 4^{2220}+4^{2221})+\\ &\quad+4^{2222}(4^{3333}-1)=7A+7B+4^{2222}(64^{1111}-1)=\\ &=7A+7B+4^{2222}(64-1)(64^{1110}+64^{1109}+...+64+1)\\ &=7A+7B+7C=7(A+B+C)\end{aligned}$$

25. Да се докаже дека 19 е делител на бројот

$$A_k=5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}$$

Решение. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k. За $k=1$ имаме

$$A_1=5^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^3=8\cdot(125+27)=8\cdot 19\cdot 8,$$

што значи дека A_1 е делив со 19. Нека тврдењето е точно за k, т.е. $A_k=19m$. Тогаш

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=5^{2(k+1)+1}\cdot 2^{(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}\cdot 2^{2(k+1)+1}\\ &=25\cdot 2\cdot 5^{2k+1}\cdot 2^{k+2}+3\cdot 4\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}\\ &=50(19m-3^{k+2}2^{2k+1})+12\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}\\ &=50\cdot 19m-38\cdot 3^{k+2}\cdot 2^{2k+1}\\ &=19(50m-2\cdot 3^{k+1}\cdot 2^{2k+1})\end{aligned}$$

Следствено, бројот A_k е делив со 19 за секој природен број k.

26. Докажи дека $584|(8^n+8^{n+1}+8^{n+2})$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Имаме

$$8^n+8^{n+1}+8^{n+2}=8^n(1+8+8^2)=73\cdot 8^n=584\cdot 8^{n-1}$$

и бидејќи $8^{n-1}\geq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$ следува дека $584|(8^n+8^{n+1}+8^{n+2})$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

27. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ бројот $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ е делив со 10.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n&=3^n3^2+3^n-(2^n2^2+2^n)\\ &=10\cdot 3^n-5\cdot 2^n=10(3^n-2^{n-1}),\end{aligned}$$

и бидејќи $3^n-2^{n-1}\in\mathbb{N}$ од последното равенство следува дека 10 е делител на $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$.

28. Дадена е низата броеви 49, 4489, 444889, ... (секој нареден член на низата се добива од претходниот со допишување на бројот 48 во неговата средина).

Докажи дека секој член на низата е полн квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот $A = 444...488...89$, има n-четворки и $(n-1)$-на осумки, т.е. $A = \underbrace{444...4}_{n}\underbrace{88...89}_{n-1}$. Според тоа, бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A = 4\cdot\underbrace{111...1}_{n}\cdot 10^n + 8\cdot\underbrace{111...1}_{n} + 1. \qquad (1)$$

Бројот $\underbrace{111...1}_{n}$ можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{111...1}_{n} = 10^{n-1} + 10^{n-1} + ... + 10^2 + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

па според тоа, бројот A можеме да го запишеме во облик

$$A = \tfrac{4}{9}(10^n - 1)10^n + \tfrac{8}{9}(10^n - 1) + 1 = \tfrac{4}{9}10^{2n} + \tfrac{4}{9}10^n + \tfrac{1}{9} = \left(\tfrac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Јасно е дека бројот $2\cdot 10^n + 1$ е делив со 3, бидејќи збирот на неговите цифри е еднаков на 3.

29. Докажи дека разликата на броевите $\underbrace{111...111}_{2000\,\text{пати}\,1}$ и $\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}\ 2}$ е полн квадрат.

Решение. Бројот $\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}\ 2}$ можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}\ 2} = \underbrace{1...111}_{1000-\text{пати}\ 1} + \underbrace{1...111}_{1000-\text{пати}\ 1},$$

а бројот $\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати}\ 1}$ можеме да го запишеме во облик

$$\underbrace{111...111}_{2000-\text{пати}\ 1} = \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}\underbrace{000...000}_{1000-\text{пати}\ 0} + \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}.$$

Сега разликата ќе го добие обликот

$$\begin{aligned}
-\underbrace{222...222}_{1000-\text{пати}\ 2} + \underbrace{111...111}_{2000-\text{пати}\ 1} &= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}\underbrace{000...000}_{1000-\text{пати}\ 0} - \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}\\
&= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}\cdot 10^{1000} - \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}\\
&= \underbrace{111...111}_{1000-\text{пати}\ 1}\cdot(10^{1000} - 1) = \tfrac{1}{9}\underbrace{999...999}_{1000-\text{пати}\ 9}\cdot(10^{1000} - 1)\\
&= \tfrac{1}{9}(10^{1000} - 1)(10^{1000} - 1) = \left(\tfrac{10^{1000} - 1}{3}\right)^2\\
&= (\underbrace{333...333}_{1000-\text{пати}\ 3})^2
\end{aligned}$$

30. Докажи дека за секој природен број n важи $7\,|\,(8^n - 14n - 1)$.

Решение. Ако го искористиме равенството

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

во чија точност можеме да се убедиме со непосредна проверка, добиваме

$$8^n-1=(8-1)(8^{n-1}+8^{n-2}+...+8+1)=7(8^{n-1}+8^{n-2}+...+8+1),$$

па затоа за секој природен број n важи $7|(8^n-1)$ и уште $7|14n$. Од последните две тврдења следува дека $7|(8^n-14n-1)$.

31. Ако a,b,c се природни броеви такви да $a^2+b^2=c^2$, тогаш еден од броевите a,b,c е делив со 5. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите a,b не е делив со 5, т.е. дека тоа се броеви од облик $5m\pm1$ или $5n\pm2$. Тогаш a^2 и b^2 се од облик $5k+1$ или $5k+4$. Ако a^2 е од облик $5k+1$, а b^2 е од облик $5n+4$, тогаш $c^2=a^2+b^2=5(k+n+1)$, што значи $5|c^2$, па затоа $5|c$. Ако a^2 и b^2 се од облик $5k+1$, тогаш a^2+b^2 е од облик $5p+2$, што не е можно, бидејќи c^2 мора да е од облик $5p+1$ или $5p+4$. Слично, ако a^2 и b^2 се од облик $5k+4$, тогаш a^2+b^2 е од облик $5p+3$, што повторно не е можно. Значи, не е можно сите три броја a,b,c да не се деливи со 5.

32. Нека m,n и p се непарни броеви. Докажи дека $\sum\limits_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$ е делив со n.

Решение. Да забележиме дека за било кој непарен број s и било кои броеви a и b важи

$$a^s+b^s=(a+b)(a^{s-1}-a^{s-2}b+a^{s-3}b^2-....-ab^{s-2}+b^{s-1}). \qquad (1)$$

Бројот на собироци на во $\sum\limits_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$ е парен број. Тогаш збирот можеме да го запишеме на следниот начин

$$\sum_{k=1}^{(n-1)^p} k^m=\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p}(k^m+((n-1)^p-k+1)^m).$$

Бидејќи m е непарен број, $k^m+((n-1)^p-k+1)^m$ е делив со $(n-1)^p+1$, за $k=1,2,...,\frac{1}{2}(n-1)^p$. Од друга страна, од непарноста на p, според (1) добиваме дека $n-1+1=n$ е делител на $(n-1)^p+1$. Од произволноста на k, добиваме дека $n|\sum\limits_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)^p}(k^m+((n-1)^p-k+1)^m)=\sum\limits_{k=1}^{(n-1)^p} k^m$, што требаше и да се докаже.

33. Нека n е природен број. Докажи дека може да избереме најмалку $2^{n-1}+n$ броеви од множеството $\{1,2,3,...,2^n\}$ така да за секои два избрани броеви x и y, бројот $x+y$ не е делител на xy.

Решение. Ќе ги избереме непарните броеви $1,3,5,...,2^n-1$ од даденото множество,и сите степени на на бројот $2,4,8,...,2^n$ од истото множество. Можни се три случаи.

Случај 1. Ако $x=2a-1$ и $y=2b-1$, тогаш $x+y=(2a-1)+(2b-1)=2(a+b-1)$ е парен број а $xy=(2a-1)(2b-1)=2(2ab-a-b)-1$ е непарен број. Според тоа, $x+y \nmid xy$.

Случај 2. Ако $x=2^k$ и $y=2^m$, $k<m$, тогаш $x+y=2^k+2^m=2^k(2^{m-k}+1)$, а $xy=2^{k+m}$. Бројот $x+y$ има непарен делител, а xy нема непарен делител. Според тоа $x+y \nmid xy$.

Случај 3. Ако $x=2^k$ и $y=2b-1$, тогаш $x+y=2^k+2b-1>2b-1$ е непарен број. Бројот $x+y=2(2^{k-1}+b)-1$ е непарен број, а најголемиот непарен делител на $xy=2^k(2b-1)$ е $2b-1$. Според тоа $x+y \nmid xy$.

Значи, од множеството $\{1,2,3,...,2^n\}$ може да се изберат $2^{n-1}+n$ елементи $1,3,5,...,2^n-1$, $2,4,8,...,2^n$ за кои е исполнет условот од задачата.

34. Најди ги сите цели броеви m за кои дропката $\frac{m^3+1}{m-1}$ е исто така цел број.

Решение. Имаме $\frac{m^3+1}{m-1}=m^2+m+1+\frac{2}{m-1}$, па $(m-1)\,|\,2$. Од овде се добива дека $m-1\in\{-2,-1,1,2\}$, односно $m\in\{-1,0,2,3\}$.

35. Нека се $1=d_1<d_2<...<d_k=n$ сите делитедли на природниот број $n>1$. Докажи дека $d_1+d_2+...+d_k>k\sqrt{n}$.

Решение. Ако d е делител на природниот број n, тогаш и $\frac{n}{d}$ е исто така делител на n. Воведуваме ознака $S=d_1+d_2+...+d_k$. Бидејќи $n>1$ јасно е дека постои делител d_i, таков што $d_i\neq\frac{n}{d_i}$. Од друга страна

$$d_i+\frac{n}{d_i}\geq 2\sqrt{d_i\cdot\frac{n}{d_i}}=2\sqrt{n}\ .$$

Сега,

$$2S=2(d_1+d_2+...+d_k)=\sum_{i=1}^{k}(d_i+\frac{n}{d_i})\geq\sum_{i=1}^{k}2\sqrt{n}=2k\sqrt{n}\ .$$

Според тоа $S\geq k\sqrt{n}$ односно $d_1+d_2+...+d_k\geq k\sqrt{n}$ што и требаше да се докаже.

36. Да се определат сите природни броеви кои не може да се претставаат во облик

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}, \qquad (1)$$

каде a и b се природни броеви.

Решение. Нека N е природен број за кој постојат природни броеви a и b такви што $N=\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$. Тогаш

$$N-2=\frac{a}{b}-1+\frac{a+1}{b+1}-1=\frac{a-b}{b}+\frac{a-b}{b+1}=(a-b)(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1})=\frac{(a-b)(2b+1)}{b(b+1)}.$$

Бидејќи $N-2$ е природен број и $b\nmid(2b+1)$ и $(b+1)\nmid(2b+1)$, добиваме дека $(2b+1)\,|\,(N-2)$. Броеви $N-2$ кои немаат непарни делител поголеми од 1 се $N-2=-1$ и $N-2=2^k$, каде $k\geq 0, k\in\mathbb{N}$, т.е. $N=1$ и $N=2^k+2$, каде $k\geq 0$, $k\in\mathbb{N}$. Според тоа природните броеви од прегтходниот облик не може да се претставаат во обликот (1). Од друга страна ако N не е од облик $N=1$ или $N=2^k+2$, за некој $k\in\mathbb{N}$, и $2b+1$ е делител на $N-2$ за некој $b\in\mathbb{N}$, тогаш за $m=\frac{N-2}{2b+1}$ и $a=b+mb(b+1)$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}&=\frac{b+mb(b+1)}{b}+\frac{b+mb(b+1)+1}{b+1}\\&=1+m(b+1)+1+mb=2+m(2b+1).\\&=2+\frac{N-2}{2b+1}(2b+1)=2+N-2=N.\end{aligned}$$

37. Да се определат сите природни броеви n, такви што $5^{n-1}+3^{n-1}$ е делител на 5^n+3^n.

Решение. За било кој природен број $n\in\mathbb{N}$, имаме

$$5(5^{n-1}+3^{n-1})=5^n+(3+2)3^{n-1}=5^n+3^n+2\cdot 3^{n-1}>5^n+3^n.$$

Според тоа $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}<5$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Од друга страна, на сличен начин имаме $3(5^{n-1}+3^{n-1})=3\cdot 5^{n-1}+3^n<5^n+3^n$, па според тоа $3<\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}$.

Бидејќи $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}\in\mathbb{N}$ и $3<\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}<5$ се добива $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}=4$. Последната равенка е еквивалентна со $5^{n-1}=3^{n-1}$, од каде добиваме $n=1$.

38. Докажи дека за секој природен број n, барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ќе разгледаме два случаи, кога n е парен и кога n е непарен број.

Нека n е непарен број. Тогаш

$$\begin{aligned}3^{3n}+2^{3n}&=(3^3)^n+(2^3)^n=27^n+8^n\\&=(27+8)(27^{n-1}-27^{n-2}\cdot 8+27^{n-3}\cdot 8^2-27^{n-4}\cdot 8^3-...-27\cdot 8^{n-2}+8^{n-1}),\end{aligned}$$

од каде добиваме

$$35=27+8\,|\,27^n+8^n=3^{3n}+2^{3n}.$$

Нека n е парен број. Тогаш тој е од облик $n=2k$, па според тоа

$$3^{3n}-2^{3n}=3^{6k}-2^{6k}=(3^6)^k-(2^6)^k=729^k-64^k=(726-64)\sum_{i=0}^{k-1}729^{k-1-i}64^i.$$

Сега тврдењето следува од фактот дека $729-64=19\cdot 35$.

39. Определи го најмалиот природен број x, за кој

$$x=a+b+c=d+e+f\ ,$$

каде a,b,c,d,e,f се попарно различни природни броеви.

Решение. Нека a,b,c,d,e,f се по парови различни природни броеви за кои

$$a+b+c=d+e+f=x\ .$$

Тогаш

$$2x=x+x=a+b+c+d+e+f\geq 1+2+3+4+5+6=21,$$

од каде обиваме дека $x\geq 1$. За броевите $a=2,b=4,c=5,=1,e=3,f=7$ имаме

$$11=2+4+5=1+3+7\ .$$

Значи, бараниот број е $x=11$.

40. Нека a и b се природни броеви такви што $3\,|\,a-b$. Докажи дека a^3-b^3 е делив со 9.

Решение. Ако a и b се природни броеви, тогаш разликата a^3-b^3 можеме да ја запишеме во облик

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)=(a-b)[(a-b)^2+3ab]\ .$$

Бидејќи $3\,|\,a-b$ и $3\,|\,3ab$, добиваме $3\,|\,(a-b)^2+3ab$, па според тоа

$$9=3\cdot 3\,|\,(a-b)[(a-b)^2+3ab]=a^3-b^3\ .$$

41. Докажи дека a^3+b^3+4 не е куб на цел број за било кои природни броеви a и b.

Решение. Ќе ги разгледаме остатоците кои ги дава a^3+b^3+4 при делење со 9.

Куб на природен број при делење со 9 дава остатоци (провери сам). Заради тоа, наместо a^3 и b^3 во збирот a^3+b^3+4 доволно е да ги разгледаме нивните остатоци при делење со 9. При тоа можни се следните случаи:

1° $0+0+4=4$; при делење со 9 дава остаток 4

2° $0+1+4=5$; при делење со 9 дава остаток 5

3° $0+8+4=12$; при делење со 9 дава остаток 3

4° $1+1+4=6$; при делење со 9 дава остаток 6

5° $1+8+4=13$; при делење со 9 дава остаток 4

6° $8+8+4=22$; при делење со 9 дава остаток 2.

Бидејќи $2,3,4,5,6$ не може да се добијата како остатоци на точен куб при делење со 9, a^3+b^3+4 не е точен куб на цел број. Да забележиме дека заради симетрија на a^3+b^3+4 во однос на a и b доволно е што се разгледани претходните шест случаи.

42. За целите броеви a,b и c е точно равенството
$$a^2+b=c^2\,. \qquad (1)$$
Докажи дека 6 е делител на abc .

Решение. Нека за целите броеви a,b и c е исполнето равенството (1). Според тоа, тоа еден од нив е парен, или сите три се парни. Во останатите случаи од двете страни на равенството се добиваат броеви со различна парност, па равенството (1) не би било точно.

Бидејќи барем еден од броевите a,b и c е парен, нивниот производ abc е парен број, односно делив со 2. Сега ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Ако еден од броевите a или c е делив со 3, тогаш и производот abc е делив со 3.

Случај 2. Ако броевите a и c не се деливи со 3, тогаш нивните квадрати a^2 и c^2 при делење со 3 имаат еднакви остатоци. Според тоа
$$b=c^2-a^2$$
е број делив со 3. Во овој случај abc е делив со 3.

Значи, во секој случај abc е број делив со 3.

Конечно, abc е број делив со 2 и 3 па тој е делив со 6.

43. Нека a е цел број. Докажи дека $\frac{a^5}{5}+\frac{a^3}{3}+\frac{7a}{15}$ е цел број.

Решение. Јасно е дека
$$\frac{a^5}{5}+\frac{a^3}{3}+\frac{7a}{15}=\frac{3a^5+5a^3+7a}{15}\,.$$
Сега, доволно е да докажеме дека $3\,|\,3a^5+5a^3+7a$ и $5\,|\,3a^5+5a^3+7a$, за било кој цел број a .

Деливост со 3. Ако $3\,|\,a$, тогаш јасно е дека $3\,|\,a(3a^2+5a^2+7)=3a^5+5a^3+7a$. Ако $3\nmid a$, тогаш остатокот од делењето на a со 3 е 1 или -1 . Но тогаш остатокот од делењето на a^4 и a^2 со 3 е еднаков на 1. Во тој случај остатокот од делењето на $3a^4+5a^2+7$ со 3 е еднаков на остатокот од делењето на $3+5+7$ со 3. Бидејќи $3\,|\,15=3+5+7$, добиваме дека $3\,|\,3a^4+5a^2+7$ односно
$$3\,|\,a(3a^4+5a^2+7)=3a^5+5a^3+7a\,.$$
Значи, за секој цел број a , $3\,|\,3a^5+5a^3+7a$.

*Деливост со 5.*Ако $5\,|\,a$, тогаш јасно е дека $5\,|\,a(3a^4+5a^2+7)=3a^5+5a^3+7a$. Ако $5\nmid a$, тогаш остатокот од делењето на a со 5 е еден од броевите од множеството $\{-2,-1,1,2\}$.

Случаите кога остатокот е 2 и -2 ќе ги разгледаме заедно, како и случаите кога остатоци се 1 и -1 .

Ако остаток е ± 2, тогаш при делење со a^4 со 5 се добива остаток 1, а при делење на a^2 со 5 се добива остаток 4. Сега остатокот при делење на

$3a^4+5a^2+7$ со 5 е еднаков на остатокот од делењето на $3\cdot 1+5\cdot 4+7$ со 5. Бидејќи $3\cdot 1+5\cdot 4+7=30=6\cdot 5$, добиваме дека во овие случаи

$$5\,|\,a(3a^4+5a^2+7)=3a^5+5a^3+7a\,.$$

Ако остатокот е ± 1, тогаш при делење на a^4 со 5 остатокот е 1, а исто така остатокот од делењето на a^2 со 5 е еднаков на 1. Остатокот од делењето на $3a^4+5a^2+7$ со 5 е еднаков на остатокот од делењето на $3+5+7$ со 5. Бидејќи $3+5+7=15=3\cdot 5$, т.е. $5\,|\,3+5+7$, добиваме дека во овој случај

$$5\,|\,a(3a^4+5a^2+7)=3a^5+5a^3+7a\,.$$

Значи, за секој цел број a, $5\,|\,3a^5+5a^3+7a$.

44. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$,

$$49\,|\,2^{3n+3}-7n-8\,.$$

Решение. Да забележиме дека за секој природен број n е исполнето

$$\begin{aligned}[2^{3(n+1)+3}-7(n+1)-8]-[2^{3n+3}-7n-8]&=7\cdot 2^{3n+3}-7=7\cdot(2^{3n+3}-1)\\&=7[(2^3)^{n+1}-1]=7\cdot(2^3-1)\cdot A=49A.\end{aligned}\qquad(*)$$

каде $A=(2^3)^n+(2^3)^{n-1}+...+2^3+1$.

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

Тврдењето е точно за $n=1$. Навистина

$$2^{3\cdot 1+3}-7-8=2^6-15=64-15=49\,,$$

т.е. $49\,|\,2^{3\cdot 1+3}-7-8$.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $n=k$, т.е. $49\,|\,2^{3k+3}-7k-8$.

Од равенството (*) имаме $49\,|\,[2^{3(k+1)+3}-7(k+1)-8]-[2^{3k+3}-7k-8]$, па затоа

$$\begin{aligned}49\,|\,&[2^{3(k+1)+3}-7(k+1)-8]-[2^{3k+3}-7k-8]+[2^{3k+3}-7k-8]=\\&=2^{3(k+1)+3}-7(k+1)-8\end{aligned}.$$

Значи, тврдењето е точно и за $n=k+1$.

Сега, од принципот за математичка индукција следува дека $49\,|\,2^{3n+3}-7n-8$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

45. Целите броеви x,y и z се такви што

$$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z\,.\qquad(*)$$

Докажи дека 3 е делител на $x+y+z$.

Решение. Ќе покажеме дека броевите x,y и z имаат еднакви остатоци при делење со 3. Тогаш според условот од задачата $x+y+z$ ќе биде делив со 3.

Нека претпоставиме дека x,y и z даваат различни остатоци при делење со 3. Тогаш $(x-y)(y-z)(z-x)$ не е делив со 3 а $x+y+z$ е делив со 3, што противречи на (*).

Од добиената противречност следува дека два од броевите x, y и z имаат ист остаток при делење со 3. Сега, производот $(x-y)(y-z)(z-x)$ е број делив со 3, а заради (*) и $x+y+z$ е делив со 3.

3. ПРОСТИ БРОЕВИ

1. Нека a е произволен природен број. Докажи дека $ax+1$ е сложен број за барем еден природен број x.

Решение. За произволен природен број a земаме $x=a+2$ и добиваме $ax+1=a(a+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2$, што е сложен број.

2. Нека n е природен број. Докажи дека бројот $8n^3-12n^2+6n+63$ е сложен.

Решение. Со средување на изразот добиваме

$$\begin{aligned}8n^3-12n^2+6n+63 &= (8n^3-12n^2+6n-1)+(63+1)=(2n-1)^3+4^3\\ &=(2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+16)\\ &=(2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+4+12)\\ &=(2n+3)((2n-3)^2+12),\end{aligned}$$

па дадениот број е производ на два природни броја поголеми од 1, односно тој е сложен број.

3. Докажи дека бројот 2003^2+2^{2003} сложен.

Решение. Од равенството $(3k+1)(3m+1)=3(3km+k+m)+1$ следува дека производ на два броја од облик $3k+1$ е од истиот облик. Затоа

$$2^{2003}=(2^2)^{1001}\cdot 2=2\cdot(3\cdot 1+1)^{1001}=2(3p+1)=6p+2\,,\ \ p\in\mathbf{N}.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}2003^2 &= (2001+2)^2=(3\cdot 667+2)^2=9\cdot 667^2+12\cdot 667+4\\ &=3(3\cdot 667^2+4\cdot 667+1)+1=3m+1, \qquad m\in\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$2003^2+2^{2003}=6p+2+3m+1=3(2p+m+1)$$

и бидејќи $2003^2+2^{2003}>3$, заклучуваме дека 2003^2+2^{2003} е сложен број.

4. Определи го најмалиот природен број, на кој производот на цифрите е еднаков на 75600.

Решение. Го разложуваме бројот 75600 на прости множители и добиваме $75600=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$. Сите прости делители на 75600 се едноцифрени броеви, па значи постои број таков што производот на неговите цифри е еднаков на 75600.

Бараниот број ги содржи цифрите 5,6, и 7, бидејќи со множење на кој било од броевите 2, 3, 5, 7 со 5 или 7 се добива број поголем од 9. Производот $2^4 3^3$ можеме да го запишеме со најмногу 7 цифри ($2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$), а со најмалку 3 цифри ($6\cdot 8\cdot 9$). Бидеји се бара најмалиот природен број, заклучуваме дека тој се запишува со цифрите $6,8,9,5,5,7$, а тоа е бројот 556789.

5. Определи го најголемиот делител на 1001001001 кој што е помал од 10000.

Решение. Да забележеме дека:

$$1001001001 = 1001\cdot 10^6 + 1001 = 1001\cdot(10^6+1) = 1001\cdot(10^2+1)\cdot(10^4-10^2+1)$$
$$= 1001\cdot 101\cdot 9901 = 7\cdot 11\cdot 13\cdot 101\cdot 9901$$

Бројот 9901 е прост. Лесно се проверува дека тој е најголемиот делител на 1001001001 помал од 10000.

6. Определи ги сите пирдни броеви n за кои броевите

$$3n-4, 4n-5, 5n-3$$

се прости.

Решение. Да забележиме $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ е парен број. Затоа мора барем еден од броевите $3n-4, 4n-5, 5n-3$ да е парен. Бидејќи единствен прост парен број е 2, мора барем еден од броевите да е 2. Јасно $4n-5$ не може да е 2, па затоа тоа мора еден од броевите $3n-4$ или $5n-3$. Ако $3n-4=2$ тогаш $n=2$, па броевите се 2, 3 и 7 кои се прости броеви. Ако $5n-3=2$ тогаш $n=1$ и тогаш бревите се $-1,-1$ и 2. Но, тие не се сите прости рбоеви.

Конечно, само за $n=2$ броевите $3n-4,\ 4n-5,\ 5n-3$ се прости.

7. Нека m и n се природни броеви такви што $\frac{m^2+n^2}{mn}\in\mathbb{N}$. Докажи дека $m=n$.

Решение. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ се такви што $\frac{m^2+n^2}{mn}=k$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$m^2+n^2=kmn. \qquad (*)$$

За секој прост делител p на n имаме $p\,|\,n^2$ и $p\,|\,kmn$. Значи, $p\,|\,kmn-n^2=m^2$. Ако p е прост број делител на m^2, тој е делител и на m. Значи, секој прост делител на n е прост делител и на m .

Заради симетрија на m и n, заклучуваме дека секој прост делител q на m е прост делител и на n .

Бидејќи m и n имаат исти прости делители и за нив е исполнето (*), заклучуваме дека $m=n$.

8. Нека a,b,c се природни броеви такви што $a^2+b^2+c^2$ е делив со 6 и $ab+bc+ca$ е делив со 3. Докажи дека $a^3+b^3+c^3$ е делив со 6.

Решение. Од тоа што $3\,|\,(ab+bc+ca)$ следува $6\,|\,(2ab+2bc+2ca)$ и бидејќи $6\,|\,(a^2+b^2+c^2)$ добиваме дека $6\,|\,(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$, односно $6\,|\,(a+b+c)^2$. Квадрат на природен број е делив со простите броеви 2 и 3 ако и само ако самиот број е делив со 2 и 3, па затоа $6\,|\,(a+b+c)$. Според тоа, меѓу броевите a,b,c еден е парен или сите три се парни, што значи дека $6\,|\,3abc$. Конечно, од досега изнесеното следува дека 6 е делител на бројот

$$3abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3,$$

што и требаше да се докаже.

9. Нека p е прост број различен од 3 и нека a и b се цели броеви такви да $p\,|\,(a+b)$ и $p^2\,|\,(a^3+b^3)$. Докажи дека $p^2\,|\,(a+b)$ или $p^3\,|\,(a^3+b^3)$

Решение. Да претпоставиме дека $p^2 \nmid (a+b)$. Тогаш доволно е да се докаже дека $p^3\,|\,(a^3+b^3)$. Од $p\,|\,(a+b)$ следува $p^2\,|\,(a+b)^3$ и како

$$p^2\,|\,(a^3+b^3)=(a+b)^3-3ab(a+b),$$

добиваме $p^2\,|\,3ab(a+b)$. Понатаму, бидејќи $p^2 \nmid (a+b)$, следува дека $p\,|\,3ab$ и како p е прост број различен од 3 следува дека $p\,|\,a$ или $p\,|\,b$. Но, $p\,|\,(a+b)$, па затоа $p\,|\,a$ и $p\,|\,b$, од што следува дека $p^3\,|\,a^3$ и $p^3\,|\,b^3$, односно $p^3\,|\,(a^3+b^3)$.

10. Дали може бројот $a+b+c+d$ да биде прост, ако $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ и важи $ab=cd$?

Решение. Од $ab=cd$ имаме

$$d=\tfrac{ab}{c}\Rightarrow c=m\cdot n,\ a=ma_1,\ b=nb_1,\ m,n,a_1,b_1\in\mathbb{N}.$$

Сега:

$$d=\tfrac{ab}{c}=\tfrac{ma_1nb_1}{mn}=a_1b_1,$$

па затоа

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= ma_1+mb_1+mn+a_1b_1\\ &=(ma_1+mn)+(nb_1+ab_1)\\ &=m(a_1+n)+b_1(a_1+n)\\ &=(a_1+n)(m+b_1). \end{aligned}$$

Бидејќи $a_1,b_1,m,n\ge 1$ следува $a_1+n\ge 2$, $m+b_1\ge 2$, па затоа $(a_1+n)(m+b_1)$ е сложен број т.е. $a+b+c+d$ не може да биде прост број.

11. Определи трицифрен број кој помножен со 7 дава куб од природен број.

Решение. Нека бараниот број е a. Од условот на задачата следува дека $7a=n^3$, $n\in\mathbb{N}$. Значи, 7 е делител на n^3. Бидејќи 7 е прост број, следува дека 7 е делител на n. Нека $n=7k$. Тогаш $a=7^2k^3=49k^3$. Ако $k\ge 3$, тогаш a има повеќе од 3 цифри. Ако $k=1$, тогаш a има две цифри. Значи $k=2$ и $a=392$.

12. Производот на бројот 21 со некој четицифрен број x е куб на некој цел број y. Определи го бројот x.

Решение. Од условот на задачата имаме $21x=y^3$, од каде што следува дека 21 е делител на y, т.е. $y=21z$. Заменувајќи во $21x=y^3$, добиваме $x=441z^3$. Бројот

x е четирицифрен, па z може да биде или 1 или 2, зашто за $z \geq 3$ имаме $x \geq 441 \cdot 27 = 11907$. За $z = 1$ имаме $x = 441$, а за $z = 2$ имаме $x = 3528$. Значи, $x = 3528$, и притоа $21x = 168^3$.

13. Половината од еден природен број е полн квадрат, третината е полн куб, а петтината е полн петти степен. Определи го најмалиот таков приорден број.

Решение. Бараниот природен број n е делив со 2, 3 и 5 и заради минималноста нема други прости делители. Значи, q. Од условот на задачата, постојат природни броеви a, b, c такви што

$$\frac{n}{2} = 2^{\alpha-1}3^{\beta}5^{\gamma} = a^2 \qquad \frac{n}{3} = 2^{\alpha}3^{\beta-1}5^{\gamma} = b^3 \qquad \frac{n}{5} = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma-1} = c^5 .$$

Сега, јасно е дека α е најмал непарен број делив со p и 5, β е најмал природен број делив со 2 и 5 кој при делење со 5 има остаток 1 и γ е најмал природен број кој е делив со 2 и 3 и при делење со 5 има остаток 1. Според тоа $\alpha = 15, \beta = 10$ и $\gamma = 6$ и $n = 2^{15}3^{10}5^{6} = 30233088000000$.

14. Најди ги сите природни броеви n такви да бројот $a = n^2 + n + 1$ е делив со 13.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned} a = n^2 + n + 1 &= n^2 + n - 12 + 13 = n^2 + 4n - 3n - 12 + 13 \\ &= n(n+4) - 3(n+4) + 13 = (n+4)(n-3) + 13, \end{aligned}$$

добиваме дека бројот a се дели со 13 ако и само ако $(n+4)(n-3)$ се дели со 13. Но, 13 е прост број, па затоа $(n+4)(n-3)$ се дели со 13 ако и само ако $n+4$ или $n-3$ се дели со 13. Конечно, решението на задачата се броевите од облик $n = 9 + 13k, k \in \mathbb{N}$ и $n = 3 + 13m, m \in \mathbb{N}$.

15. Докажи дека за секој сложен број n, $n > 4$, бројот $2n$ е делител на производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)$.

Решение. Бидејќи $n > 4$ е сложен број, тој може да се запише во облик $n = ab$, каде $2 \leq a \leq b$ и притоа $b > 2$. Од $n = ab$ следува

$$n - 1 - (a+b) = ab - 1 - (a+b) = (a-1)(b-1) - 2 \geq 0,$$

па затоа $n - 1 \geq a + b$. Ќе разгледаме два случаја:

1) $a = b > 2$ и тогаш $2b = a + b \leq n - 1$. Според тоа, $2n = 2 \cdot b \cdot b$ е делител на $1 \cdot ... \cdot b \cdot ... \cdot 2b$, кој е делител на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)$.

2) $a < b$, при што се можни два случаја:

а) $a > 2$ и тогаш $2ab$ е делител на $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot a \cdot ... \cdot b \cdot ... \cdot (a+b)$, кој е делител на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)$.

б) $a = 2$. Ако $b > 4$, тогаш $2n = 2 \cdot 2b$ е делител на бројот

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot b(b+1)(b+2),$$

кој е делител на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)$. Ако $b = 4$, тогаш $2n = 16$ е делител на $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$. Ако $b = 3$, тогаш $2n = 12$ е делител на $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

16. Ако a и b се прости броеви поголеми од 3, докажи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

Решение. Броевите a и b се прости и се поголеми од 3, па затоа тие се непарни, од што следува дека нивниот збир и нивната разлика се броеви деливи со 2, па затоа

$$4\,|\,(a+b)(a-b)\,. \tag{1}$$

Бидејќи a и b се прости броеви, тие се од облик $6k\pm1$. Можни се следниве случаи:

- ако $a=6k+1$ и $b=6m+1$, тогаш $a-b=6(k-m)$,
- ако $a=6k+1$ и $b=6m-1$, тогаш $a+b=6(k+m)$,
- ако $a=6k-1$ и $b=6m+1$, тогаш $a+b=6(k+m)$, и
- ако $a=6k-1$ и $b=6m-1$, тогаш $a-b=6(k-m)$.

Значи, во секој случај $6\,|\,(a+b)(a-b)$, што значи

$$3\,|\,(a+b)(a-b)\,. \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме дека $12\,|\,(a+b)(a-b)$, што значи дека вредноста на изразот $\frac{(a+b)(a-b)}{12}$ е цел број.

17. Нека a,b и c се природни броеви такви што $b-a$ е прост број и $3c^2=c(a+b)+ab$. Докажи дека $8c+1$ е полн квадрат.

Решение. Ќе воведеме ознаки $b-a=p$ и $b+a=q$. За производот ab важи равенството

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{q^2-p^2}{4}\,,$$

и ако замениме во

$$3c^2=c(a+b)+ab$$

добиваме

$$3c^2=cq+\frac{q^2-p^2}{4}\,,$$
$$12c^2=4cq+q^2-p^2\,,$$
$$p^2=q^2+4cq-12c^2\,,$$
$$p^2=(q-2c)(q+6c)\,.$$

Од неравенството $q-2c<q+6c$, бидејќи p е прост број, добиваме дека $q-2c=1, q+6c=p^2$. Ако од второто равенство го одземеме првото равенство, добиваме $8c=p^2-1$. Значи, $8c+1=p^2$, што и требаше да се докаже.

18. Дали постојат прости броеви p и q такви што $3p+5q=67$.

Решение. Бидејќи броевите 3 и 5 се непарни броеви такви што $\text{NZD}(3,5)=1$, и 67 е непарен број, добиваме дека еден од броевите p и q мора да е парен. Во спротивно бројот од левата страна би бил парен а од десната непарен. Единствен парен прост број е 2. Заради тоа, имаме два можни случаи.

Случај 1. $p=2$. Тогаш равенката го добива обликот $5q=61$ која нема решение во множеството прости броеви.

Случај 2. $q=2$. Тогаш равенката го добива обликот $3p=57$, од каде добиваме $p=19$. Значи единствено решение на равенката е $p=19,\ q=2$.

19. Најди три прости броја такви да нивниот производ е петпати поголем од нивниот збир.

Решение. Нека a,b,c се бараните прости броеви. Тогаш точно е равенството $abc=5(a+b+c)$. Десната страна на последното равенство е делива со 5, па затоа и левата мора да е делива со 5. Од условот на задачата следува дека еден од броевите е еднаков на 5. Нека $c=5$. Тогаш $5abc=5(a+b+5)$, од каде наоѓаме $ab-a=b+5$, т.е. $a(b-1)=b+5$, па затоа $a=\frac{b+5}{b-1}$. Сега последователно имаме

$$a=\frac{b-1+6}{b-1}=1+\frac{6}{b-1}.$$

Бројот a ќе биде природен број ако и само ако $\frac{6}{b-1}$ е природен број, т.е. $b-1\,|\,6$, од каде следува $b\in\{2,3,4,7\}$. Но, b е прост број, па затоа случајот $b=4$ отпаѓа, а исто така при $b=3$ се добива $a=4$, што не е можно бидејќи a е прост број. За $b=2$ добиваме $a=7$, а за $b=7$ добиваме $a=2$.

Конечно, бараните броеви се 2, 5 и 7.

20. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви n за кои важи $\frac{1}{p}=\frac{n}{2010}$?

Решение. Од условот на задачата имаме дека $n\cdot p=2010$, односно $n\cdot p=2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$. Од овде вредноста на бројот p може да биде 2, 3, 5, 67**.** Па, конечно за $p=2$, $n=1005$, за $p=3, n=670$, за $p=5$, $n=402$, за $p=67$, $n=30$.

21. Докажи дека за секој прост број p бројот $p^{2014}+1$ е сложен.

Решение. *Прв начин.* За $p=2$ имаме

$$p^{2014}+1=2^{2014}+1=(2^4)^{503}\cdot 2^2+1=16^{503}\cdot 4+1,$$

и тоа е сложен број, бидејќи цифрата на единиците на бројот 16^{503} е 6, па затоа цифрата на единиците на бројот $16^{503}\cdot 4$ е 4, т.е. цифрата на единиците на бројот $16^{503}\cdot 4+1$ е 5, што значи дека тој се дели со 5.

Ако $p>2$, тогаш тој е непарен број, па затоа p^{2014} е непарен број, т.е. $p^{2014}+1$ е парен број поголем од 2, што значи дека е сложен.

Втор начин. За $p=2$ имаме

$$2^{2014}+1=(2^2)^{1007}+1^{1007}=(2^2+1)((2^2)^{1006}-(2^2)^{1005}+(2^2)^{1004}+...-2^2+1),$$

т.е. $(2^2+1)\,|\,(2^{2014}+1)$.

Доказот за $p>2$ е аналоген како и во првиот начин.

22. Најди ги сите парови прости броеви p и q, такви што $p^3-q^5=(p+q)^2$.

Решение. Нека ниту еден од броевите p,q не е делив со 3. Ако остатоците од делењето на p и q со 3 се совпаѓаат, тогаш левата страна на

$$p^3-q^5=(p+q)^2 \tag{1}$$

е делива со 3, а десната страна не е делива со 3. Ако остатоците од делењето на p и q не се совпаѓаат, тогаш десната страна на (1) е делива со 3, а левата не е делива со 3.

Нека сега p е делив со 3. Тогаш $p=3$. Од равенството

$$p^3-q^5=(p+q)^2>0$$

следува $p^3>q^5$ и $q^5<27$, што не е можно. Нека q е делив со 3. Тогаш, $q=3$ и $p^3-243=(p+3)^2$, па затоа $p(p^2-p-6)=252$. Според тоа, $p\,|\,252$, од што следува $p=2,3$ или 7. Со непосредна проверка наоѓаме $p=7$, т.е. $(p,q)=(7,3)$.

23. Најди ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека $7p+1=n^2$, $n\in\mathbf{N}$, заради што $7p=(n-1)(n+1)$. Бидејќи сите природни делители на бројот $7p$ се 1, 7, p и $7p$, тоа значи $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$, односно $n\in\{2,8,0,6\}$.

Со непосредна проверка се добива дека единствено решение е $n=6$, односно $p=5$.

24. Најди прости броеви p,q,r такви да $p=q^3-r^3$.

Решение. Со примена на формулите за скратено множење наоѓаме

$$p=q^3-r^3=(q-r)(q^2+qr+r^2)$$

и условот дека p е прост број следува дека е можен еден од следниве два случаи:

1) $q-r=1$ и $q^2+qr+r^2=p$ и притоа бидејќи 2 и 3 се единствените два последователни прости броеви добиваме
$$r=2,\quad q=3 \text{ и } p=q^3-r^3=3^3-2^3=27-8=19\,.$$
2) $q-r=p$ и $q^2+qr+r^2=1$, што не е можно бидејќи за секои прости броеви q и r важи $q^2+qr+r^2>1$.

25. За кои природни броеви p броевите p, $p+2$ и p^2+2 се прости.

Решение. Јасно, $p\neq 2$. Ако $p=3$, тогаш $p+2=5$ и $p^2+2=11$ се исто така прости броеви. Нека $p>3$. Тогаш p е од облик $6k-1$ или $6k+1$.

1) Ако $p=6k-1$, тогаш $p+2=6k+1$ може да е прост број, но
$$p^2+2=3(12k^2-4k+1)$$
е сложен број.

2) Ако $p=6k+1$, тогаш $p^2+2=3(12k^2+4k+1)$ и $p+2=3(2k+1)$ се сложени броеви.

Конечно, $p=3$ е единствениот прост број за кој и броевите $p+2=5$ и $p^2+2=11$ се исто така прости броеви.

26. Најди ги сите прости броеви p, q и r такви да $p(264q+4r)=2008$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на $4p(66q+r)=2008$, т.е. на равенката $p(66q+r)=2\cdot 251$. Бројот 251 е прост, а $66q+r>2$, па затоа $p=2$ и $66q+r=251$. Ако $q=2$, тодаш бројот $r=251-66\cdot 2 \ =119=7\cdot 17$ не е прост. За $q=3$ имаме $r=251-198=53$ и тоа е прост број, а ако $q\geq 4$, тогаш $66q\geq 66\cdot 4=264>251$. Конечно, решението на задачата е $p=2, q=3, r=53$.

27. Најди ги сите броеви p, q и r, такви што p и r се прости, q е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:

$$(p+q+r)^2=2p^2+2q^2+r^2\ .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2r(p+q)=(p-q)^2\ .$$

Бидејќи r е прост, следува дека r е делител на $p-q$, па r^2 е делител на десната страна од последното равенство, од каде следува дека r е делител на $2(p+q)$. Ако $r>2$, тогаш r е делител на $p+q$, па мора r да е делител и на p и на q, но бидејќи p е прост, тоа е можно само ако $p=r$ и $q=sr$. По средување добиваме

$$2(1+s)=(s-1)^2\ ,$$

од каде

$$s^2-4s-1=0\ .$$

Последното равенство нема целобројни решенија, па во овој случај равенката нема решение. Ако $r=2$, тогаш p и q се со иста парност, случајот кога $p=2$ е невозможен исто како случајот $p=r$ од претходно, па мора да бидат непарни. Нека $a\neq 2$ е прост делител на $p+q$, тогаш мора a да е делител и на $p-q$, па мора да е делител и на p и на q, што е можно само ако $p=a$ и $q=sa$, во овој случај добиваме

$$4(1+s)=a(s-1)^2\ ,$$

од каде

$$as^2-\left(2a+4\right)s+\left(a-4\right)=0\ .$$

Решенија на последната равенка се

$$\frac{a+2\pm\sqrt{a^2+4a+4-a^2+4a}}{a}=\frac{a+2\pm 2\sqrt{2a+1}}{a}\ .$$

Ако бројот $\sqrt{2a+1}$ е цел, тогаш е непарен, па $2a+1=4b^2+4b+1$, од каде $a=2b(b+1)$, па не може да е прост. Од досега изнесеното следува дека $p+q$ и $p-q$ мора да се степени на 2, т.е. $p-q=2^k$ и $p+q=2^{2k-2}$, од каде

$2p = 2^k + 2^{2k-2}$ и $2q = 2^{2k-2} - 2^k$ и бидејќи p и q се непарни, мора $k=1$, но тогаш $p+q=1$, што не е можно. Следува дека равенката нема решенија кои се прости броеви.

28. Природните броеви a и b се такви што $a > b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ и $b^2 + a - 1$ е делител на $a^2 + b - 1$. Докажи дека $b^2 + a - 1$ има барем два различни прости делители.

Решение. Нека претпоставиме дека a и b се броеви кои го исполнуваат условот на задачата. Од равенството

$$(b^2-1)^2 - a^2 = [(b^2-1)-a][(b^2-1)+a] = (b^2-a-1)(b^2+a-1)\ ,$$

добиваме

$$(b^2+a-1) \mid [(b^2-1)^2 - a^2]\ . \tag{1}$$

Заради равенството

$$(b^2-1)^2 + (b-1) = [(b^2-1)^2 - a^2] + [a^2 + (b-1)]\ ,$$

од (1) и условот на задачата $(b^2+a-1) \mid (a^2+b-1)$, добиваме

$$(b^2+a-1) \mid [(b^2-1)^2 + (b-1)] = b(b-1)(b^2+b-1)\ . \tag{2}$$

За секој природен број b се точни равенствата

$$\mathrm{NZD}(b, b-1) = 1,\ \mathrm{NZD}(b, b^2+b-1) = 1,\ \mathrm{NZD}(b-1, b^2+b-1) = 1\ . \tag{3}$$

Јасно е дека се точни неравенствата

$$\begin{aligned} &b < b^2 + a - 1 \\ &b - 1 < b^2 + a - 1 \\ &b^2 + b - 1 < b^2 + a - 1 \end{aligned} \tag{4}$$

при што точноста на третото неравенство е последица од неравенството $b < a$.

Нека претпоставиме дека $p = b^2 + a - 1$ е прост број. Заради (3) добиваме $p \mid b$ или $p \mid (b-1)$ или $p \mid (b^2+b-1)$, кое не е можно заради (4). Според тоа b^2+a-1 не е прост број.

29. Определи ги сите природни броеви n, за кои постои природен број k таков што

а) k има барем n различни прости делители;

б) постојат n различни позитивни делители на k, $x_1 = 1, x_2, x_3, ..., x_n$ чиј збир е еднаков на k.

Решение. Ако n е решение на задачата, ќе покажеме дека и $n+1$ е решение на задачата.

Нека претпоставиме дека n е решение на задачата. Значи постои природен број k кој има барем n различни прости делители и постојат n различни делители на k, $x_1 = 1, x_2, x_3, ..., x_n$ такви што

$$1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k\ .$$

За природниот број $n+1$ ќе го разгледаме природниот број $k(k+1)$. Бидејќи k има n различни прости делители и $\mathrm{NZD}(k,k+1)=1$, добиваме дека $k(k+1)$ има барем $n+1$ прост делител. Тоа се n-те делители на k и еден делител на $k+1$ ако тој е сложен број или $k+1$ ако е прост број.

Од друга страна ќе ги разгледаме броевите
$$y_1=1, y_2=(k+1)x_2, y_3=(k+1)x_3, ..., y_n=(k+1)x_n, y_{n+1}=k,$$
за кои е јасно дека се делители на $k(k+1)$ кои не се еднакви меѓу себе, и уште повеќе
$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3+...+y_n+y_{n+1} &= 1+(k+1)x_2+(k+1)x_3+...+(k+1)x_n+k \\ &= (k+1)(1+x_2+x_3+...+x_n)=k(k+1). \end{aligned}$$
Не е тешко да се провери дека $n=6$ е најмалиот таков број. Доволно е да се земе $k=1806\cdot 1807$. Негови делители се
$$p_1=2, p_2=3, p_3=7, p_4=43, p_5=13, p_6=139,$$
а збирот неговите делители
$$1,\ 14\cdot 13\cdot 1807,\ 21\cdot 43\cdot 1807,\ 6\cdot 43\cdot 1807,\ 42\cdot 1807, 1806$$
е еднаков на $1806\cdot 1807$.

30. Нека a е природен број поголем од 1. Докажи дека бројот
$$n(2n+1)(3n+1)...(an+1)$$
е делив со секој прост број помал од бројот a, за секој природен број n.

Решение. Нека p е прост број таков што $p<a$. Ќе разгледаме два случаи.

а) Ако $p\,|\,n$, тогаш $p\,|\,[n(2n+1)(3n+1)...(an+1)]$.

б) Нека $p\nmid n$. Тогаш броевите $2n+1, 3n+1, ..., (p+1)n+1$ при делење со p имаат остатоци $r_1, r_2, ..., r_p$ соодветно. Нека претпоставиме дека $\exists i, j\in\{1,2,...,p\}$ такви што $i\neq j$ и $r_i=r_j$. Според тоа постојат природни броеви b_i и b_j такви што $in+1=pb_i+r_i$ и 1, од каде добиваме $(i-j)n=p(b_i-b_j)$.

Заради $p\nmid n$, добиваме $p\,|\,(i-j)$. Од друга страна $i\leq p+1$, $j\leq p+1$, па од $i\neq j$ имаме $1\leq |i-j|<p$. Од последното неравенство добиваме $p\nmid(i-j)$. Заради добиената противречност имаме $r_i\neq r_j$ за $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,...,p\}$. Според принципот на Дирихле постои природен број k, $1\leq k\leq p$, така $r_k=0$. Според тоа $p\,|\,[(k+1)n+1]$, т.е. $p\,|\,n(2n+1)(3n+1)...(kn+1)[(k+1)n+1]...[(p+1)n+1]$, односно
$$p\,|\,n(2n+1)(3n+1)...(kn+1)[(k+1)n+1]...[(p+1)n+1]...[(a-1)n+1](an+1).$$

31. Природните броеви a,b,c,d,e и f се такви што нивниот збир S е делител на броевите $abc+def$ и $ab+bc+ca-de-ef-fd$. Докажи дека S е сложен број.

Решение. Ќе го разгледаме полиномот
$$f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-d)(x-e)(x-f),$$
кој е полином со целобројни коефициенти. Јасно е дека f може да се запише во вид
$$f(x)=Sx^2+(ab+bc+ca-de-ef-fd)x+abc+def,$$

каде $S=a+b+c+d+e+f$. Но, $S\,|\,(abc+def)$ и $S\,|\,(ab+bc+ca-de-ef-fd)$, па добиваме дека $S\,|\,f(k)$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$S\,|\,f(d)=(d+a)(d+b)(d+c)\,.$$

Јасно, S не може да е прост број, тогаш тој е делител на некој од броевите $d+a,d+b,d+c$, па според тоа $S\le d+a$ или $S\le d+b$ или $S\le d+c$. Но тоа не е можно, бидејќи $S>d+a,S>d+b,S>d+c$. Според тоа, S е сложен број.

32. Најди го најмалиот природен број x кој ги задоволува равенствата

$$x=ab+a-b=cd+c-d\,, \tag{*}$$

каде a,b,c,d се природни заемно прости броеви.

Решение. Бидејќи a,b,c,d се природни заемно прости броеви, добиваме дека и бараниот број x е природен број. Ако во (*) одземеме 1, добиваме

$$x-1=ab+a-b-1=cd+c-d-1$$

$$x-1=(a-1)(b+1)=(c-1)(d+1)$$

Од тоа што b и d се природни броеви, имаме $d+1\ge 2$ и $b+1\ge 2$.

Ако претпоставиме дека $x-1=p$ е прост број, тогаш $a-1=c-1=1$, т.е. $a=c=2$. Но тоа не е можно заради претпоставката дека $a\ne c$. Значи, $x-1$ е сложен број. Најмал сложен број е 4. Ако $x-1=4$, тогаш од тоа што a,b,c,d се различни имаме

$$a-1=2,b+1=2,c-1=1,d+1=4\,.$$

Но тогаш $a=3=d$ што повторно е во противречност со условот на задачата. Затоа, $x-1$ не е помал од следниот сложен број, т.е. не е помал од бројот 6. За бројот 6 имаме

$$6=1\cdot 6=2\cdot 3=(2-1)(5+1)=(4-1)(1+1)\,,$$

т.е. $a=2,b=5,c=4,d=1$.

Бараниот број е $x=6+1=7$.

33. Природните броеви a,b и c се решение на равенката

$$a^2+b^2+2bc=8c^2\,.$$

Докажи дека a е сложен број!

Решение. Равенството од задачата ќе го запишеме во еквивалентен облик

$$a^2=8c^2-b^2-2bc\,.$$

Изразот од десната страна на последното равенство ќе го запишеме во облик

$$8c^2-b^2-2bc=8c^2-4bc-b^2+2bc=4c(2c-b)+b(2c-b)=(4c+b)(2c-b)\,.$$

Значи, добивме $a^2=(4c+b)(2c-b)$. За било кои природни броеви b и c, имаме $2c+2b>0$, од каде непосредно се добива

$$4c+b>2c-b\text{, т.е. } 4c+b\ne 2c-b\,. \tag{*}$$

Ќе претпоставиме дека бројот a е прост. Тогаш a^2 како производ на два множители може да се претстави на еден од следните три начини

$$1\cdot a^2,\ a^2\cdot 1,\ a\cdot a\,.$$

Заради (*), бидејќи a е прост број имаме $4c+b=a^2$, $2c-b=1$. Ако последните две равенки ги собереме, добиваме

$$6c=a^2+1.$$

Од последната равенка имаме $3\,|\,a^2+1$.

Од друга страна, ако $a=3k$, тогаш

$$a^2+1=9k^2+1=3(3k^2)+1,$$

а ако $a=3k\pm1$, тогаш

$$a^2+1=3(3k^2\pm2k)+2.$$

Значи, за било кој природен број a, $3\nmid a^2+1$. Од добиената контрадикција, добиваме дека a не е прост број.

Природни броеви кои се решение на равенката постојат. Такви се $a=9$, $b=7$ и $c=5$.

34. За природните броеви a,b,c и d е исполнето равенството

$$a^2+b^2=c^2+d^2.$$

Докажи дека $a+b+c+d$ е сложен број.

Решение. Ако го искористиме равенството $a^2+b^2=c^2+d^2$, добиваме

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&=a^2+b^2+a^2+b^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&=2(a^2+b^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd).\end{aligned}$$

Значи $(a+b+c+d)^2$ е парен број, па според тоа и $a+b+c+d$ е парен, односно тој е сложен.

35. Да се определат сите вредности n, $n\in\mathbb{N}$, такви што n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ се истовремено прости.

Решение. Ако $n=1$, тогаш $n^n+1=2$ и $(2n)^{2n}+1=5$. Значи, за $n=1$ и двата броја се прости.

Секој природен број $n>1$ може да се запише во облик $n=2^k p$, каде p е непарен број.

Нека n е природен број таков што n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ се прости броеви. Ќе докажеме дека тој е од облик $n=2^k$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека $n=2^k p$ каде p е непарен број поголем од 1. Тогаш

$$n^n+1=(2^k p)^{2^k p}+1=[(2^k p)^{2^k}]^p+1=((2^k p)^{2^k}+1)((2^k p)^{2^k(p-1)}+\ldots+1),$$

при што $(2^k p)^{2^k}+1>1$ и $(2^k p)^{2^k(p-1)}+\ldots+1>1$. Значи, n^n+1 не е прост број.

Значи, бараните броеви n се од облик $n=2^m$ за $m\in\mathbb{N}$. За броевите од овој облик имаме

$$n^n+1=(2^m)^{2^m}+1=(2^{2^m})^m+1$$
$$(2n)^{2n}+1=(2\cdot 2^m)^{2\cdot 2^m}+1=(2^{2^{m+1}})^{m+1}+1\,.$$

Еден од броевите m и $m+1$ е непарен, односно тој има непарен делител. Значи n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ ќе бидат прости само ако $m=0$ или $m=1$. Случајот $m=0$ е разгледан на почеток на решението на задачата, а за случајот $m=1$ имаме $n^n+1=5$ и $(2n)^{2n}+1=257$ кои се прости броеви, односно постојат два такви природни броеви $n=1$ и $n=2$.

36. Определи ги сите по парпви различни прости броеви p,q,r и s такви што нивниот збир е прост број, а p^2+qs и p^2+qr се квадрати на природни броеви.

Решение. Збир на четири непарни прости броеви е парен број. Заради условот на задачата, добиваме дека еден од броевите p,q,r и s мора да е еднаков на 2.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $p\neq 2$. Тогаш еден од броевите q,r,s е еднаков на 2. Сега, еден од броевите p^2+qs и p^2+qr е од облик

$$(2k+1)^2+2(2l+1)=4k^2+4k+1+4l+2=4A+3\,.$$

Квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 1. Во овој случај такви прости броеви не постојат.

Случај 2. $p=2$. Нека $p^2+qs=a^2$, од каде добиваме $qs=(a-2)(a+2)$. Ако $a-2=1$, $a+2=qs$, тогаш $a=3$ и $qs=5$ што не е можно бидејќи q и s се прости броеви. Значи, $a-2=q$, $a+2=s$ или обратно, односно q и s се разликуваат за 4. Потполно аналогно q и r се разликуваат за 4, односно $s=q-4, r=q+4$ или $s=q+4, r=q-4$.

Но од броевите $q-4,q,q+4$ еден е делив со 3 од каде добиваме $q-4=3$ т.е. $q=7$. Другите два прости броја се 3 и 11.

Конечно, решенија на задачата се

$$p=2,q=7,r=3,s=11 \text{ и } p=2,q=7,s=3,r=11\,.$$

37. Да се определат сите прости броеви p,q и r за кои е исполнето равенството

$$p+q=(p-q)^r\,.$$

Решение. Од условот на задачата имаме $p+q\mid p-q$. Според тоа

$$p+q\mid p+q-(p-q)=2q\,.$$

Бидејќи q е прост број, делители на бројот $2q$ се $1,2,q,2q$. Според тоа, можни се четири случаи.

Случај 1. Ако $p-q=1$, тогаш

$$p+q>p-q=1$$

и за секој прост број r важи $p+q>1^r=(p-q)^r$.

Случај 2. Ако $p-q=q$, тогаш $p=2q$, па p има две прости делители, т.е. не е прост број.

Случај 3. Аналогно како и во вториот случај, ако $p-q=2q$, тогаш $p=3q$, т.е. p не е прост број.

Случај 4. Ако $p-q=2$, тогаш равенството го добива обликот $q+2+q=2^r$, т.е. $q=2^{r-1}-1$. Ќе ги определиме сите прости броеви r за кои $2^{r-1}-1$ е прост број.

Ако r е непарен број поголем од 3, тогаш тој е од облик $r=2k+1$ за $k>1$. Но тогаш

$$q=2^{r-1}-1=2^{2k}-1=(2^k)^2-1=(2^k-1)(2^k+1),$$

т.е. q не е прост број.

Ако $r=2$, тогаш $q=1$, т.е. q не е прост број.

Ако $r=3$, тогаш $q=3$ и $p=5$.

Според тоа, единствено решение на равенката е $r=3$, $q=3$ и $p=5$.

4. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

1. Производот на два природни броја 34560, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Определи ги сите парови природни броеви кои го задоволуваат тоа својство.

Решение. Со a и b да ги означиме бараните броеви. Од условот следува $\text{NZD}(a,b)=24$, па затоа $a=24m$ и $b=24n$, каде m и n се заемно прости броеви. Понатаму, $ab=34560$, па затоа $34560=24m\cdot 24n$, т.е. $mn=60$. Значи, бројот 60 треба да го запишеме како производ на два заемно прости броеви. Сега имаме

$$60=1\cdot 60=3\cdot 20=4\cdot 15=5\cdot 12.$$

Бараните броеви се: 24 и 1440, 72 и 480, 96 и 360, 120 и 288.

2. За кои природни броеви m и n важи

$$\text{NZD}(m,n)=8 \text{ и } \text{NZS}(m,n)=168\,?$$

Решение. Нека $m=8a, n=8b$, при што $a,b\in\mathbf{N}$ и $\text{NZD}(a,b)=1$. Но,

$$mn=\text{NZD}(m,n)\,\text{NZS}(m,n)$$

и ако замениме во последното равенство добиваме $8a\cdot 8b=8\cdot 168$, т.е. $ab=21$, од каде наоѓаме дека $(a,b)\in\{(1,21),(3,7)\}$. Конечно, за m и n ги имаме следниве решенија:

$$m=8a=8\cdot 1=8, n=8b=8\cdot 21=168, \text{ т.е. } (m,n)\in\{(8,168),(168,8)\} \text{ и}$$

$$m=8a=8\cdot 3=24, n=8b=8\cdot 7=56, \text{ т.е. } (m,n)\in\{(24,56),(56,24)\}.$$

3. Докажи, ако $\text{NZD}(x,z)=1$ и $\text{NZD}(y,z)=1$, тогаш $\text{NZD}(xy,z)=1$.

Решение. Од $\text{NZD}(x,z)=1$ следува дека постојат броеви a и c_1 такви што $xa+zc_1=1$. Слично, од $\text{NZD}(y,z)=1$ следува дека постојат броеви b и c_2 такви што $by+zc_2=1$. Понатаму, од равенствата $xa+zc_1=1$ и $by+zc_2=1$ добиваме

$$1=(by+zc_2)(xa+zc_1)=xy\cdot ab+z(xac_2+byc_1+zc_1c_2).$$

Според тоа, за броевите xy и z постојат броеви

$$\alpha=ab \text{ и } \beta=xac_2+byc_1+zc_1c_2,$$

такви што $xy\alpha+z\beta=1$, па затоа $\text{NZD}(xy,z)=1$.

4. Нека x,y и z се природни броеви такви што $\text{NZD}(x,y,z)=1$ и $z=\frac{xy}{x-y}$. Докажи дека $x-y$ е точен квадрат.

Решение. Нека $\text{NZD}(x,y)=\text{NZD}(x,x-y)=k$. Значи, постојат цели броеви a и b такви што $x=ka, x-y=kb$ и $\text{NZD}(a,b)=1$. Сега

$$y=x-kb=ka-kb=k(a-b) \text{ и } xy=k^2a(a-b).$$

Заменувајќи за z:

$$z=\frac{xy}{x-y}=\frac{k^2a(a-b)}{kb}=\frac{ka(a-b)}{b}.$$

Бидејќи $\text{NZD}(a,b)=1$ и z е природен број добиваме $b\,|\,k$. Но, од тоа што $\text{NZD}(x,y,z)=1$ следува $k=b$, бидејќи за $k=bm$ важи $m\,|\,x,\ \ m\,|\,y,\ \ m\,|\,z$, т.е. $m=1$. Според тоа, $x-y=k^2$, што и требаше да се докаже.

5. Докажи дека не постојат два позитивни природни броеви такви што нивниот збир е 1995, а производот е делив со 1995.

Решение. Да претпоставиме дека постојат два такви броја и нека тоа се x и y. Според условите од задачата, имаме:

$$x+y=1995 \text{ и } xy=1995k,$$

каде k е позитивен природен број. Ако го изразиме од првото равенство и го замениме во второто, добиваме:

$$x^2=1995(x-k),$$

односно

$$x^2=3\cdot5\cdot7\cdot19(x-k).$$

Значи, x^2 е делив со 3, од каде добиваме дека и x е делив со 3. Аналогно заклучуваме дека x е делив со 5, 7 и 19. Значи, x е делив со 3, 5, 7 и 19, што значи, дека е делив и со нивниот заеднички содржател, односно со 1995. Од последното, бидејќи x е природен број, добиваме дека $x\geq1995$, од каде што добиваме дека $y\leq0$. Последниот заклучок противречи на претпоставката, па значи не постојат природни броеви со бараните својства.

6. Броевите m и n се заемно прости. Определи го бројот со кој дропката $\frac{3n-m}{5n+2m}$ може да се скрати.

Решение. Нека претпоставиме дека k, $k>1$ е бројот со кој може да се скрати дропката . Според тоа, постојат природни броеви p и s, такви што $\mathrm{NZD}(p,s)=1$ и $3n-m=kp$, $5n+2m=ks$. Ако го решиме системот

$$\begin{cases} 3n-m=kp \\ 5n+2m=ks \end{cases},$$

по n и m ќе добиеме $n=\frac{k(2p+s)}{11}$ и $m=\frac{k(3s-5p)}{11}$. Броевите m и n се заемно прости, па според тоа $k=11$. Навистина, ако претпоставиме дека $k\neq 11$, тогаш за било кој делител d на k поголем од 1 и различен од 11 имаме

$$\mathrm{NZD}(m,n)\geq d>1.$$

Но, тоа е во спротивност со претпоставката $\mathrm{NZD}(m,n)=1$.

Значи, $k=11$.

7. Збирот на 20 природни броеви е 2002. Најди ја најголемата вредност што може да ја прими нивниот најголем заеднички делител.

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_{20}$ се природни броеви за кои

$$a_1+a_2+...+a_{20}=2002.$$

Ако $d=\mathrm{NZD}(a_1,a_2,...,a_{20})$, тогаш $a_i=dk_i$, $i=1,2,...,20$ каде $k_i\in\mathbb{N}, i=1,2,...,20$. Значи

$$d(k_1+k_2+...+k_{20})=2002.$$

Бидејќи $s=k_1+k_2+\ldots+k_{20}$ (збир на дваесет природни броеви) и d се природни броеви за кои $s\cdot d=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ и $s\geq 20$, најмала вредност која може да ја прими бројот $s=k_1+k_2+\ldots+k_{20}$ е $2\cdot 11=20.$ Според тоа најголема вредност на d е 91

Низата броеви

$$a_1=91, a_2=91, a_3=91, ..., a_{19}=91, a_{20}=273$$

ги има бараните својства.

8. Определи го најмалиот природен број, кој поделен со секој од броевите 2, 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 1.

Решение. Ако n е бараниот број, тогаш $n-1$ е најмалиот број кој се дели со 2, 3, 4, 5, 6 и 7, т.е. $n-1$ е најмалиот заеднички содржател на 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Според тоа, $n=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1=421$

9. Определи го најмалиот природен број кој поделен со 2 дава остаток 1, поделен со 3 дава остаток 2, поделен со 4 дава остаток 3 и поделен со 5 дава остаток 4.

Решение. Нека бараниот број е x. Тогаш имаме

$$x=2x_1+1=3x_2+2=4x_3+3=5x_4+4.$$

За бројот $x+1$ ќе имаме

$$x+1=2(x_1+1)=3(x_2+1)=4(x_3+1)=5(x_4+1),$$

што значи дека $x+1$ е делив со 2, 3, 4 и 5. Значи, бројот $x+1$ е најмалиот заеднички содржател на броевите 2, 3, 4 и 5, т.е. $x+1=60$, од каде добиваме $x=59$.

10. Одреди ги сите парови природни броеви за кои разликата меѓу нивниот најмал заеднички содрѓател и најголем заеднички делител е 15.

Решение. Нека x и y е парот природни броеви за кои бараната разликае 15. Нека $d = \mathrm{NZD}(x, y)$ и $s = \mathrm{NZS}(x, y)$. Тогаш, постојат природни броеви a и b така што $x = da$, $y = db$, $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$ и $s = dab$. Од условот на задачата имаме дека $s - d = 15$, каде ако замениме $s = dab$ се добива

$$dab - d = 15 \Rightarrow d(ab-1) = 15 \Rightarrow d \in \{1,3,5,15\}.$$

1) За $d = 1$, имаме

$$ab - 1 = 15 \Rightarrow ab = 16 \Rightarrow a = 1, b = 16 \Rightarrow x = 1, y = 16,$$

2) За $d = 3$, имаме

$$ab - 1 = 5 \Rightarrow ab = 6 \Rightarrow a = 1, b = 6 \text{ или } a = 2, b = 3 \Rightarrow x = 3, y = 18 \text{ или } x = 6, y = 9,$$

3) За $d = 5$, имаме $ab - 1 = 3 \Rightarrow ab = 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow x = 5, y = 20$,

4) За $d = 15$, имаме $ab - 1 = 1 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow x = 15, y = 30$.

Значи, бараните парови природни броеви се: 1 и 16, 3 и 18, 6 и 9, 5 и 20, 15 и 30.

11. Нека a и b се позитивни цели броеви. Докажи дека $a^2 + b^2$ е делив со ab ако и само ако $a = b$.

Решение. Ако $a = b$, тогаш $ab = a^2 \mid 2a^2 = a^2 + a^2 = a^2 + b^2$.

Обратно, нека претпоставиме дека $ab \mid a^2 + b^2$. Ако $\mathrm{NZD}(a,b) = d > 1$, тогаш постојат единствени природни броеви a_1, b_1 такви што $\mathrm{NZD}(a_1, b_1) = 1$ и $a = a_1 d$, $b = b_1 d$. Релацијата $ab \mid a^2 + b^2$ се редуцира во релацијата $a_1 b_1 \mid a_1^2 + b_1^2$. Заради тоа, ќе претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$. Од $ab \mid a^2 + b^2$ и од претходната претпоставка имаме $a \mid a^2 + b^2$ и $b \mid a^2 + b^2$. Значи, $a \mid b^2$, т.е. $a \mid b$, и $b \mid a^2$, т.е. $b \mid a$.

Од $a \mid b$ и $b \mid a$ добиваме $a = b$.

12. Нека a и b се природни броеви. Докажи дека

$$a^n + b^n \le (a,b)^n + [a,b]^n$$

(со (a,b) е означен $\mathrm{NZD}(a,b)$, а со $[a,b]$ е означен $\mathrm{NZS}(a,b)$).

Решение. Ќе воведеме ознаки $d = (a,b)$ и $s = [a,b]$. Имаме: $s \ge a$ и $s \ge b$ и $ab = ds$. Притоа

$$\begin{aligned}
d^n + s^n - a^n - b^n &= \frac{s^n(d^n + s^n - a^n - b^n)}{s^n} = \frac{s^n d^n + s^{2n} - s^n a^n - s^n b^n}{s^n} \\
&= \frac{(sd)^n + s^{2n} - s^n a^n - s^n b^n}{s^n} = \frac{(ab)^n + s^{2n} - s^n a^n - s^n b^n}{s^n} \\
&= \frac{a^n b^n + s^{2n} - s^n a^n - s^n b^n}{s^n} = \frac{-b^n(s^n - a^n) + s^n(s^n - a^n)}{s^n} \\
&= \frac{(s^n - a^n)(s^n - b^n)}{s^n} \ge 0
\end{aligned}$$

Неравенството $d^n + s^n - a^n - b^n \geq 0$ можеме да го запишеме во облик

$$a^n + b^n \leq (a,b)^n + [a,b]^n,$$

што и требаше да се докаже.

13. За најголемиот заеднички делител d и најмалиот заеднички содржател v на природните броеви m и n е исполнето равенството $3m+n=3v+d$. Докажи дека m е делител на n.

Решение. Постојат единствени m' и n', такви што $\mathrm{NZD}(m',n')=1$ и $m=m'd$, $n=n'd$, каде $d=\mathrm{NZD}(m,n)$. Тогаш $v=m'n'd$, при што равенството $3m+n=3v+d$ го добива обликот

$$3m'd+n'd=3m'n'd+d, \text{ т.е. } (3m'+n')d=(3m'n'+1)d.$$

Но $d \geq 1$, па според тоа $3m'+n'=3m'n'+1$, а последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$(3m'-1)(n'-1)=0.$$

Бидејќи $3m'-1 \neq 0$, последното равенство е исполнето ако и само ако $n'-1=0$, т.е. $n'=1$. Тогаш $n=n'd=1\cdot d=d \mid m'd=m$, што требаше да се докаже.

14. Ако од два последователни природни броја поголемиот е полн квадрат, тогаш нивниот производ се дели со 12. Докажи!

Решение. Нека p и $p+1$ се последователни природни броеви такви да $p+1=n^2$. Тогаш $p=n^2-1=(n-1)(n+1)$, па затоа

$$p(p+1)=(n-1)n^2(n+1)=n(n^3-1).$$

Броевите $n-1, n, n+1$ се последователни природни броеви, па затоа еден од нив е делив со 3. Ако n е парен број, тогаш n^2 се дели со 4, а ако n е непарен број, тогаш $(n-1)(n+1)$ се дели со 4. Но, броевите 3 и 4 се заемно прости, па затоа $p(p+1)$ се дели со $3\cdot 4=12$, што и требаше да се докаже.

15. Најди го најмалиот природен број кој има својство да се намали 57 пати ако му ја избришеме првата цифра од лево.

Решение. Со a да ја означиме првата цифра на бараниот број, а со b бројот кој го формираат останатите цифри. Тогаш $10^k a+b=57b$, $k \in \mathbf{N}$, односно $10^k a=56b$, т.е. $10^k a=8\cdot 7b$. Левата страна на последната равенка е делива со 7 и бидејќи $\mathrm{NZD}(7,10^k)=1$ добиваме $a=7$. За да бројот 10^k биде делив со 8, но притоа да е истовремено и најмал потребно е $k=3$. Тогаш $b=125$, па затоа бараниот број е $7125=57\cdot 125$.

16. Претстави го $\mathrm{NZD}(252,180)$ во облик $252x+180y$, каде x и y се цели броеви.

Решение. Од Евклидовиот алгоритам добиваме

$$252=1\cdot 180+72, \qquad 180=2\cdot 72+36, \qquad 72=2\cdot 36$$

па затоа $\mathrm{NZD}(252,180)=36$. Сега

$$36=180+(-2)\cdot 72=180+(-2)(252+(-1)\cdot 180)=(-2)\cdot 252+3\cdot 180\,.$$

17. Ако $\text{NZD}(a,b)=1$, тогаш $\text{NZD}(a+b,a-b)=1$ или 2. Докажи!

Решение. Ако $\text{NZD}(a+b,a-b)=d$. Тогаш $a+b=dx$ и $a-b=dy$. Според тоа, $2a=d(x+y)$ и $2b=d(x-y)$, па затоа d е заеднички делител на броевите $2a$ и $2b$. Но, $\text{NZD}(2a,2b)=2\,\text{NZD}(a,b)=2$, па затоа $d\,|\,2$, што и требаше да се докаже.

18. Определи $\text{NZD}(2n+3,n+7)$, каде n е природен број.

Решение. Нека $\text{NZD}(2n+3,n+7)=d$. Од тоа што

$$d\,|\,[2(n+7)-(2n+3)]=11$$

следува $d=1$ или $d=11$. Нека

$$n=11q+r\,,\ 0\le r<10\,.$$

Ако $d=11$, тогаш од $11\,|\,(11q+r+7)$ следува $r=4$. Но, тогаш

$$2n+3=2(11q+4)+3=11(2q+1)\,,$$

и следствено се дели со 11. Според тоа, ако n е од видот $11q+4$, тогаш $d=11$, а ако $n=11q+r$, $r\neq 4$, тогаш $d=1$.

19. Најди го најголемиот заеднички делител на броевите

$$1+2+2^2+...+2^{5n-1},\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}a_n&=1+2+2^2+...+2^{5n-1}=(2-1)(1+2+2^2+...+2^{5n-1})\\&=2^{5n}-1=(2^5)^n-1=(2^5-1)[(2^5)^{n-1}+(2^5)^{n-2}+...+2^5+1]\\&=31\cdot[(2^5)^{n-1}+(2^5)^{n-2}+...+2^5+1]\end{aligned}$$

и бидејќи

$$a_1=1+2+2^2+2^3+2^4=31\,,$$

заклучуваме дека најголемиот заеднички делител на броевите $a_n,\,n\in\mathbb{N}$ е 31.

20. Природните броеви x,y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2+y^2=z^2$. Докажи дека $5|x$, $5|y$ или $5|z$.

Решение. Бидејќи секој природен број n може да се запише во облик $5k$, $5k\pm1$ или $5k\pm2$ добиваме дека бројот n^2 може да се запише во облик $5k$ или $5k\pm1$. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите x и y не е делив со 5. Тогаш бројот $z^2=x^2+y^2$ може да се запише во облик $5q\pm2$, кога и двата x^2 и y^2 се од облик $5k+1$ или и двата се од облик $5k-1$, што не е можно, или бројот $z^2=x^2+y^2$ може да се запише во облик $5q$ кога еден од броевите x^2 и y^2 е од облик $5k+1$, а другиот е од облик $5k-1$, што значи дека бројот z е делив со 5.

21. Докажи дека за било кој $n\in\mathbb{N}$, дропката $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може да се скрати.

Решение. Од својствата на најголемиот заеднички делител на два природни броеви, $\mathrm{NZD}(a,b)=\mathrm{NZD}(a,b-a)=\mathrm{NZD}(a+b,b)$, имаме

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(21n+4,14n+3) &= \mathrm{NZD}(21n+4-(14n+3),14n+3)=\mathrm{NZD}(7n+1,14n+3)\\ &= \mathrm{NZD}(14n+3,7n+1)=\mathrm{NZD}(14n+3-2(7n+1),7n+1)\\ &= \mathrm{NZD}(1,7n+1)=1\,.\end{aligned}$$

Бидејќи $21n+4$ и $14n+3$ се заемно прости, дропката не може да скрати.

22. Нека $a_1=1$, $a_2=1$ и $a_{n+1}=a_{n+1}+a_n$, за $n\in\mathbb{N}$. Докажи дека за секои $n,k\in\mathbb{N}$ броевите $ka_{n+2}+a_n$ и $ka_{n+3}+a_{n+1}$ се заемно прости.

Решение. Воведуваме ознака $b_n=ka_{n+2}+a_n$, $n\in\mathbb{N}$. Од дефиницијата на a_n и b_n имаме

$$\begin{aligned}b_n+b_{n-1} &= (ka_{n+2}+a_n)+(ka_{n+1}+a_{n-1})\\ &= k(a_{n+2}+a_{n+1})+a_n+a_{n-1}\\ &= ka_{n+3}+a_{n+1}=b_{n+1}.\end{aligned}$$

Од последното равенство имаме

$$b_{n+1}-b_n=b_{n-1}\,. \tag{1}$$

Ако $d=\mathrm{NZD}(b_{n+1},b_n)$, тогаш од последното равенство добиваме $d\,|\,b_{n+1}$ и $d\,|\,b_n$, па според тоа од (1) имаме $d\,|\,b_{n-1}$. Од $d\,|\,b_n$ и $d\,|\,b_{n-1}$ добиваме дека $d\,|\,(b_n-b_{n-1})=b_{n-2}$. Повторувајќи ја оваа постапка конечен број пати, добиваме дека $d\,|\,b_i$, $i=1,2,...,n$. Од друга страна имаме

$$b_2=ka_4+a_2=3k+1 \text{ и } b_1=ka_3+a_1=2k+1\,.$$

Бидејќи $d\,|\,b_2$, $d\,|\,b_1$ добиваме

$$\begin{aligned}0<d\le \mathrm{NZD}(b_2,b_1) &= \mathrm{NZD}(3k+1,2k+1)=\mathrm{NZD}(3k+1-2k-1,2k+1)\\ &= \mathrm{NZD}(k,2k+1)=\mathrm{NZD}(k,2k+1-2k)=\mathrm{NZD}(k,1)=1.\end{aligned}$$

Според тоа, $d=1$ и b_n и b_{n+1} се заемно прости, што и требаше да се докаже.

23. Определи го најмалиот природен број кој при делење со 4, 6, 8, 10 и 12 дава остатоци 2, 3, 6, 8 и 10 соодветно.

Решение. Нека n е бараниот природен број. Постојат природни броеви q_1,q_2,q_3,q_4,q_5, такви што

$$n=4q_1+2,\qquad n=6q_2+4,\qquad n=8q_1+6,\qquad n=10q_1+8,\qquad n=12q_1+10$$

Но, тогаш

$$\begin{aligned}n+2&=4q_1+4=4(q_1+1)\\ n+2&=6q_2+6=6(q_2+1)\\ n+2&=8q_3+8=8(q_3+1)\\ n+2&=10q_4+10=10(q_4+1)\\ n+2&=12q_5+12=12(q_5+1)\end{aligned}$$

Значи, броевите 4, 6, 8, 10 и 12 се делители на бројот $n+2$, од каде добиваме $\mathrm{NZS}(4,6,8,10,12)\,|\,n+2$, т.е. $120\,|\,n+2$.

Најмалиот природен број n за кој $120\,|\,n+2$ ја задоволува равенката $n+2=120$.

Не е тешко да се провери дека бараниот број е $n=118$.

24. Определи го најмалиот природен број кој при делење со

$$n, n+1, n+2, ..., n+m$$

дава остатоци

$$r, r+1, r+2, ..., r+m$$

соодветно.

Решение. Нека a е бараниот природен број. Од условот на задачата постојат природни броеви $q_0, q_1, q_2, ..., q_m$ такви што

$$a = nq_0 + r$$
$$a = (n+1)q_1 + r + 1$$
$$a = (n+2)q_1 + r + 2$$
$$.............................$$
$$a = (n+m)q_1 + r + m$$

Од последните равенства, имаме

$$a+n-r = nq_\circ + r + n - r = n(q_0 + 1)$$
$$a+n-r = (n+1)q_1 + r + 1 + n - r = (n+1)(q_1 + 1)$$
$$a+n-r = (n+2)q_2 + r + 2 + n - r = (n+2)(q_2 + 1)$$
$$...$$
$$a+n-r = (n+m)q_m + r + m + n - r = (n+m)(q_m + 1)$$

Значи, $a+n-r$ е број кој е делив со $n, n+1, n+2, ..., n+m$. Најмалиот таков број е

$$\text{NZS}(n, n+1, n+2, ..., n+m) = [n,, n+1, n+2, ..., n+m].$$

Бројот a ќе го определиме од равенката

$$a+n-r = [n,, n+1, n+2, ..., n+m]$$

Значи, бараниот број е

$$a = [n,, n+1, n+2, ..., n+m] - n + r.$$

25. Нека a и b се решенија на равенката $x^2 + px - 1 = 0$, каде p е непарен број. Тогаш за секој ненегативен цел број n броевите $a^n + b^n$ и $a^{n+1} + b^{n+1}$ се цели и заемно прости.

Решение. Според Виетовите врски имаме $a+b=-p$ и $ab=-1$. Тврдењето на задачата ќе го докажеме со помош на математичка индукција. За $n=0$ имаме $a^0 + b^0 = 2$ и $a^1 + b^1 = -p$, и бидејќи p непарен број $\text{NZD}(-p, 2) = 1$, т.е. $a^0 + b^0$ и $a^1 + b^1$ се цели и заемно прости.

Нека претпоставиме дека n е природен број таков што $a^n + b^n$ и $a^{n+1} + b^{n+1}$ се цели и се заемно прости. Не е тешко да се провери точноста на равенството

$$a^{n+2} + b^{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n).$$

Тогаш

$$a^{n+2}+b^{n+2}=-p(a^{n+1}+b^{n+1})+(a^n+b^n)\,,$$

и зараи индуктивната претпоставка, добиваме дека $a^{n+2}+b^{n+2}$ е цел број. Нека претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(a^{n+2}+b^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1})=d>1$. Тогаш од равенството

$$a^n+b^n=a^{n+2}+b^{n+2}+p(a^{n+1}+b^{n+1})$$

добиваме $m=\mathrm{NZD}(a^n+b^n,a^{n+1}+b^{n+1})\geq d>1$, што е во спротивност со индуктивната претпоставка. Значи, $\mathrm{NZD}(a^{n+2}+b^{n+2},a^{n+1}+b^{n+1})=1$ што и требаше да се докаже.

Според принципот на математичка индукција, a^n+b^n и $a^{n+1}+b^{n+1}$ се цели заемно прости.

26. Нека a и b се природни броеви такви што $a<b$. Докажи дека меѓу b последователни природни броеви постојат два чиј производ е делив со ab.

Решение. Нека $\{x_1,x_2,x_3,...,x_b\}$ е множество од било кои b последователни природни броеви. Барем еден од нив е делив со b. Бидејќи $a<b$ барем еден од нив е делив со a. Нека претпоставиме дека x_i е елив со b, а x_j е делив со a.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $i\neq j$. Во овој случај јасно е дека $ab\,|\,x_jx_i$.

Случај 2. $i=j$. Нека $d=\mathrm{NZD}(a,b)$ и $s=\mathrm{NZS}(a,b)$. Јасно, $ds=ab$ и $s\,|\,x_i$. Ќе покажеме дека барем еден од броевите x_i-d или x_i+d припаѓа на множеството $\{x_1,x_2,x_3,...,x_b\}$. Нека претпоставиме дека $x_i-d,x_i+d\notin\{x_1,x_2,x_3,...,x_b\}$. Тогаш $x_i-d<x_1$ и $x_i+d>x_b$, од каде добиваме

$$2d=-x_i+d+x_i+d\geq x_b-x_1+2>x_b-x_1+1=b\,. \tag{1}$$

Ако $d<b$, тогаш од дефиницијата на бројот d, постои природен број $k,k\geq 2$, така што $b=kd$. Но тогаш од (1) имаме

$$2d>b=kd\geq 2d\,,$$

т.е. $2>k\geq 2$. Заради добиената контрадикција $d=b$. Бидејќи $a<b=d$ и $d\,|\,a$, конечно добиваме контрадикција со почетната претпоставка.

Ако $x_i-d\in\{x_1,x_2,x_3,...,x_b\}$, тогаш $ab=ds\,|\,x_i(x_i-d)$.

Ако $x_i+d\in\{x_1,x_2,x_3,...,x_b\}$, тогаш $ab=ds\,|\,x_i(x_i+d)$. m

27. Докажи дека за природните броеви k,m и n е точно неравенството

$$(k,m)(m,n)(n,k)\geq(k,m,n)^2 \tag{*}$$

(со (a,b) е означен најголемиот заеднички делител на природните броеви a и b, а со (a,b,c) е означен најголемиот заеднички делител на природните броеви a,b и c).

Решение. Ќе ги споредиме степените на секој прост број p кој се јавува на десната и левата страна на неравенството.

Нека p е прост број, а неговите степени во k,m,n се α,β и γ соодветно. Заради потполна симетрија можеме да сметаме дека $\alpha \le \alpha \le \gamma$. Тогаш на десната страна на неравенството, степенот на p е 2α. Од друга страна, на левата страна p има степен $2\alpha+\beta \ge 3\alpha > 2\alpha$, па од произволноста на p се добива точноста на (*).

28. Низата природни броеви $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е таква што $\mathrm{NZD}(a_i, a_j) = \mathrm{NZD}(i, j)$ за $i \ne j$. Докажи дека $a_i = i$ за секој $i \in \mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата, бидејќи $i \ne 2i$ добиваме

$$\mathrm{NZD}(a_i, a_{2i}) = \mathrm{NZD}(i, 2i) = i.$$

Од произволноста на $i \in \mathbb{N}$ добиваме дека $i \mid a_i$, за секој $i \in \mathbb{N}$. Ќе претпоставиме дека $a_i > i$ за некој $i \in \mathbb{N}$. Повторно од условот на задачата и од тоа што $i \mid a_i$ добиваме

$$\mathrm{NZD}(a_i, a_{a_i}) = \mathrm{NZD}(a_i, i) = i.$$

Но, бидејќи $a_i \mid a_{a_i}$, имаме $\mathrm{NZD}(a_i, a_{a_i}) = a_i > i$, што не е можно. Заради добиената контрадикција важи $a_i \le i$. Од $i \mid a_i$ следува $a_i = i$ за секој $i \in \mathbb{N}$.

29. Нека a и b се заемно прости броеви, при што $\frac{a+b}{a-b}$ е природен број. Докажи дека барем еден од броевите $ab+1$ и $4ab+1$ е полн квадрат.

Решение. *Прв начин.* Нека $\frac{a+b}{a-b} = m$. Тогаш

$$\frac{a}{b} = \frac{m+1}{m-1}.$$

Бидејќи a и b се заемно прости, постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $m+1 = ka$ и $m-1 = kb$. Ако последните две равенства ги помножиме, добиваме $m^2 - 1 = k^2 ab$, односно $m^2 = k^2 ab + 1$.

Бидејќи k е заеднички делител на $m+1$ и $m-1$, важи $k \mid (m+1)-(m-1) = 2$. Според тоа, $k=1$ или $k=2$. Ако $k=1$, тогаш $m^2 = ab+1$, а ако $k=2$, тогаш $m^2 = 4ab+1$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Бидејќи $\frac{a+b}{a-b} = 1 + \frac{2b}{a-b}$ добиваме дека $\frac{a+b}{a-b}$ е природен број ако и само ако $a-b \mid 2b$. Но, $\mathrm{NZD}(b, a-b) = \mathrm{NZD}(a,b)$, па затоа $\frac{a+b}{a-b}$ ако и само ако $a-b \mid 2$. Сега имаме две можности.

а) $a-b=1$. Тогаш $4ab+1 = 4(b+1)b+1 = (2b+1)^2$.

б) $a-b=2$. Тогаш $ab+1 = (b+2)b+1 = (b+1)^2$.

30. Да се најдат сите природни броеви m,n и l такви што $m+n = (m,n)^2$, $n+l = (n,l)^2$ и $l+m = (l,m)^2$ (со (a,b) е означен најголемиот заеднички делител на природните броеви a и b).

Упатство. Нека $d = \mathrm{NZD}(m,n,l)$. Постојат единствени природни броеви a,b,c такви што $m = da, n = db, l = dc$. Нека $d_{mn} = (a,b), d_{nl} = (b,c), d_{lm} = (c,a)$. Од условот на задачата имаме

$$a + b = dd_{mn}^2$$
$$b + c = dd_{nl}^2$$
$$c + a = dd_{lm}^2.$$

Собирајќи ги овие равенства добиваме

$$2(a+b+c) = d(d_{mn}^2 + d_{nl}^2 + d_{lm}^2) \qquad (*)$$

Ќе докажеме дека $\mathrm{NZD}(d, a+b+c) = 1$. Навистина, ако претпоставиме дека $\mathrm{NZD}(d, a+b+c) = k > 1$, тогаш тој е заеднички делител на d, на $a+b+c$ и на a,b,c. Бидејќи $d \mid a+b, b+c, c+a$, добиваме дека $k \mid a+b, b+c, c+a$. Тоа значи

$$k \mid (a+b+c) - (a+b) = c$$
$$k \mid (a+b+c) - (b+c) = a$$
$$k \mid (a+b\_c) - (c+a) = b$$

Тогаш $d < dk \mid m,n,l$ што противречи на изборот на d.

Сега, од равенството (*) добиваме дека $d \mid 2$. Според тоа $d = 1$ или $d = 2$.

На читателот за вежба му оставаме да ја дореши задачата.

5. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Најди го најмалиот петцифрен природен број кој при делење со 17 дава остаток 5, а при делење со 24 дава остаток 3.

Решение. Нека n е бараниот број. Тогаш $n = 17x + 5$, односно $n = 24y + 3$, каде $x, y \in \mathbb{N}$. Значи $17x + 5 = 24y + 3$, т.е. $17x = 24y - 2$. Ќе ја решиме последната Диофантова равенка. Користејќи го Ојлеровиот метод наоѓаме

$$x = \tfrac{24y-2}{17} = \tfrac{17y+7y-2}{17} = y + \tfrac{7y-2}{17}$$

и бидејќи $x \in \mathbb{N}$ добиваме $\tfrac{7y-2}{17} = a \in \mathbb{N}$, т.е. $7y - 2 = 17a$, па затоа

$$y = \tfrac{17a+2}{7} = 2a + \tfrac{3a+2}{7}.$$

Понатаму, $y \in \mathbb{N}$, па затоа $\tfrac{3a+2}{7} = b \in \mathbb{N}$, т.е. $3a + 2 = 7b$, што значи

$$a = \tfrac{7b-2}{3} = 2b + \tfrac{b-2}{3}$$

и бидејќи $a \in \mathbb{N}$ добиваме $\tfrac{b-2}{3} = c \in \mathbb{N}$, т.е. $b = 3c + 2$, $c \in \mathbb{N}$, па затоа

$$a = 7c + 4 \Rightarrow y = 17c + 10 \Rightarrow x = 24c + 14 \Rightarrow n = 408c + 243.$$

Конечно, од $10000 = 408 \cdot 24 + 208$, добиваме $c = 24$ и

$$n = 408 \cdot 24 + 243 = 10035.$$

2. Реши ја Диофантовата равенка

а) $3x+7y=1988$, б) $3x+15y=1235$.

Решение. а) Едно од можните решенија е $x_0=0, y_0=284$. Сите решенија на дадената равенка се дадени со: $x=7t, y=284-3t, t\in\mathbb{Z}$.

б) Равенката нема решение бидејќи $\mathrm{NZD}(3,15)=3$ и $3\nmid 1235$.

3. Најди ги сите трицифрени броеви кои го имаат следново својство: ако пред дадениот број се запише цифрата на единиците на бројот, се добива четирицифрен број кој е за 246 поголем од производот на дадениот број и бројот 23.

Решение. Нека $x=\overline{abc}$ е бараниот број. Од условот на задачата имаме $\overline{cabc}=246+23\cdot\overline{abc}$. Но, $\overline{cabc}=\overline{c000}+\overline{abc}=1000c+x$, па затоа

$$1000c+x=246+23x,$$

од каде добиваме $x=\frac{1000c-246}{22}=45c-11+\frac{5c-2}{11}$ Бидејќи $5c-2$ се дели со 11 само за $c=7$ од последната равенка следува $x=307$.

4. Најди ги сите целобројни решенија на равенката

$$x^2-2xy+2x-y+1=0.$$

Решение. Ќе ја трансформираме равенката изразувајќи ја непознатата y преку непознатата x:

$$x^2-2xy+2x-y+1=0,$$

$$y(2x+1)=x^2+2x+1,$$

$$y=\frac{x^2+2x+1}{2x+1}=\frac{x^2}{2x+1}+1.$$

Последната равенка има смисла, бидејќи $2x+1\neq 0$ за секој $x\in\mathbb{Z}$. Според тоа, доволно е да ги определиме сите целобројни вредности на $\frac{x^2}{2x+1}$, кога $x\in\mathbb{Z}$. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(2x+1,x)=\mathrm{NZD}(x+1,x)=1$, од каде што добиваме дека $\mathrm{NZD}(x^2,2x+1)=1$. Според тоа, $\frac{x^2}{2x+1}$ е цел број ако и само ако $2x+1=\pm1$. Од последната равенка имаме $x=0$ при што $y=1$, и $x=-1$ при што $y=0$. Значи, решенија на равенката се $(x,y)\in\{(0,1),(-1,0)\}$.

5. Нека a и b се заемно прости броеви. Докажи дека равенката

$$ax+by=ab$$

нема решение во множеството природни броеви.

Решение. Нека (x,y) е решение на равенката во множеството природни броеви. Од равенството $a(b-x)=by$ добиваме $a\,|\,by$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, добиваме $a\,|\,y$. Значи, постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $y=na$. Слично, од равенството $b(a-y)=ax$ добиваме $b\,|\,ax$. Повторно, од $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ добиваме $b\,|\,x$. Според тоа, постои $m\in\mathbb{N}$ таков што $x=bm$.

Но тогаш $abm+abn=ab$ и затоа $m+n=1$. Значи, m и n се природни броеви кои се решенија на равенката $u+v=1$ во множеството $\mathbb{N}$, што не е можно.

Заради добиената противречност, дадената равенка нема решенија во $\mathbb{N}$.

6. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x(x+1)=(y^2+1)(y^2+y).$$

За $y=0$, добиваме $x=0$. За $y=1$, равенката $x(x+1)=4$ нема цели корени. За $y=2$, равенката $x(x+1)=5\cdot 6$ има позитивен корен $x=5$. За $y\geq 3$, важат неравенствата

$$(y^2+\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+\tfrac{1}{2})<(y^2+1)(y^2+y)<(y^2+\tfrac{y}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+1),$$

па од

$$(y^2+\tfrac{y}{2}-\tfrac{1}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+\tfrac{1}{2})<x(x+1)<(y^2+\tfrac{y}{2})(y^2+\tfrac{y}{2}+1),$$

следи дека $y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}<x<y^2+\frac{y}{2}$. Бидејќи, од броевите $y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}$ и $y^2+\frac{y}{2}$, еден е природен, а другиот е од обликот $(n-\frac{1}{2})$, $n\in\mathbb{N}$, последната неравенка нема решение во множеството на ненегативни цели броеви. Значи, единствени решенија се $(0, 0)$ и $(5, 2)$.

7. Најди ги сите прости броеви p за кои бројот $7p+1$ е квадрат на природен број.

Решение. Нека $7p+1=n^2$, $n\in N$. Следи дека, $7p=(n-1)(n+1)$, па бидејќи сите природни делители на бројот $7p$ се 1, 7, p и $7p$, тоа значи $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$. Следи дека, $n\in\{2, 8, 0, 6\}$, па со проверка се добива дека единствено решение е $n=6$, односно $p=5$.

8. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$3(x^2+y^2)+2xy=88.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$2(x+y)^2+(x-y)^2=88.$$

Бидејќи првиот собирок и збирот се парни броеви следува дека и вториот собирок е парен бро, па затоа x и y се со иста парност.

Ако $x=2a$, $y=2b$, тогаш равенката го добива обликот

$$2(a+b)^2+(a-b)^2=22.$$

Од $2(a+b)^2\leq 22$ следува $a+b\leq 3$, па затоа можни се следниве случаи $a=1$, $b=1$; $a=1, b=2$ или $a=2, b=1$. Лесно се гледа дека тоа не се решенија на последната равенка.

Ако $x=2a-1, y=2b-1$, тогаш равенката го добива обликот

$$2(a+b-1)^2+(a-b)^2=22,$$

при што $a+b\le 4$. Сега, можни се следниве случаи:

$$a=1,b=1;\ a=1,\ b=2; a=1,b=3; a=2,b=1; a=2,b=2; a=3,b=1.$$

Решенија на последната равенка се $a=1,b=3$ и $a=3,b=1$, па затоа решенија на почетната равенка се $x=1,y=5$ и $x=5,y=1$.

9. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$a^2+2ab+2b^2=13.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $(a+b)^2+b^2=13$. Бидејќи $a+b$ и b се цели броеви, добиваме дека $-3\le a+b\le 3$. Навистина, ако $a+b\ge 4$ или $a+b\le -4$, тогаш $(a+b)^2+b^2\ge 16+b^2\ge 16>13$. Значи, треба да ги разгледаме седумте случаи:

$$a+b=\pm 3,\ a+b=\pm 2,\ a+b=\pm 1 \text{ и } a+b=0.$$

Ако $a+b=\pm 1$ или $a+b=0$, тогаш равенката го добива обликот $b^2=12$ или $b^2=13$. Последните две равенки немаат решение во множеството на цели броеви .

Ќе ги разгледаме четирите преостанати случаи.

а) $a+b=-3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$. За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=-5,b=2$. За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=-1,b=-2$.

б) $a+b=3$. Тогаш $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$. За $b=2$ решение на почетната равенка е $a=1,b=2$. За $b=-2$ решение на почетната равенка е $a=5,b=-2$.

в) $a+b=-2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$. За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=1$, $b=-3$. За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-5$, $b=3$.

г) $a+b=2$. Тогаш $b^2=9$, односно $b=-3$ или $b=3$. За $b=-3$ решение на почетната равенка е $a=5$, $b=-3$. За $b=3$, решение на почетната равенка е $a=-1$, $b=3$.

Конечно, решенија на равенката се

$$(a,b)\in\{(-5,2),(-1,-2),(1,2),(5,-2),(1,-3),(-5,3),(5,-3),(-1,3)\}.$$

10. Равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, каде $p>1$ е даден прост број, да се реши во множеството природни броеви.

Решение. Равенката може да ја запишеме во облик

$$px+py=xy \qquad \Rightarrow\ xy-px-py+p^2=p^2\ \Rightarrow$$

$$x(y-p)-p(y-p)=p^2 \qquad \Rightarrow\ (x-p)(y-p)=p^2.$$

Бидејќи p е прост број, од последната равенка можни се следните случаи:

1) $x-p=1, y-p=p^2$, 2) $x-p=p, y-p=p$ и 3) $x-p=p^2, y-p=1$.

Од 1) $x=p+1, y=p^2+p$, од 2) $x=2p, y=2p$, и од 3) $x=p^2+p, y=p+1$. Не е тешко да се провери дека добиените решенија се решенија и на почетната равенка.

11. Нека p,q,r се природни броеви помали од 100 за кои $p^2+q^2=r^2$. Со допишување на една иста цифра ($\neq 0$) од левата страна на p,q,r се добиени броевите a,b,c соодветно. Да се најдат p,q,r ако $a^2+b^2=c^2$.

Решение. Ако броевите p,q,r се едноцифрени, тогаш $a=10k+p$, $b=10k+q$, $c=10k+r$, каде што $1\leq k\leq 9$. Од $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$, следува дека $5k+p+q=r$. Со квадрирање на ова равенка добиваме

$$25k^2+p^2+q^2+10kp+10kq+2pq=r^2 \text{, т.е. } 25k^2+10kp+10kq+2pq=0,$$

што не е можно. Значи, p,q,r не можат да бидат едноцифрени. До иста контрадикција доаѓаме и ако претпоставиме дека p,q,r се двоцифрени.

Ако p и q се едноцифрени а r е двоцифрен, тогаш

$$a=10k+p,\ b=10k+q,\ c=100k+r, \text{ за } 1\leq k\leq 9.$$

Од $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$, следува

$$9800k^2+200rk=20pk+20qk \text{, т.е. } 4900k+100r=p+q,$$

што не е можно, бидејќи p и q се едноцифрени броеви.

Ако p е едноцифрен а q и r се двоцифрени, тогаш $a=10k+p$, $b=100k+q$, $c=100k+r$. Од $a^2+b^2=c^2$ и $p^2+q^2=r^2$, следува дека $5k+p+10q=10r$. Значи p мора да е делив со 5, т.е. $p=5$, бидејќи p е едноцифрен. Според тоа

$$p^2=25=r^2-q^2=(r-q)(r+q).$$

Бидејќи $q,r\geq 10$, не може $q+r=5$ или $q+r=1$, што значи $q+r=25$ и $r-q=1$, т.е. $r=13, q=12$.

Ако q е едноцифрен, а p и r двоцифрени, тогаш, исто како погоре, се добива дека $q=5, r=13, p=12$.

Значи, бараните броеви се:

$$p=5, q=12, r=13 \text{ или } p=12, q=5, r=13.$$

12. Да се определат сите парови цели броеви x и y кои што се решенија на равенката

$$(x+y+1993)^2=x^2+y^2+1993^2.$$

Решение. Имаме

$$(x+y+1993)^2=x^2+y^2+1993^2,$$
$$xy+1993x+1993x=0$$
$$(x+1993)(y+1993)=1993^2$$

Имајќи во предвид дека 1993 е прост број, а x и y се цели броеви од последната равенка се добиваат следните шест системи линеарни равенки:

$\begin{cases} x+1993=1 \\ y+1993=1993^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1993=1993^2 \\ y+1993=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1993=1993 \\ y+1993=1993 \end{cases}$

$\begin{cases} x+1993=-1 \\ y+1993=-1993^2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1993=-1993^2 \\ y+1993=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1993=-1993 \\ y+1993=-1993 \end{cases}$.

чии што решенија се паровите:

$(-1992, 3970056)$, $(3970056, -1992)$, $(0,0)$,

$(1994, -3974042)$, $(-3974042, -1994)$, $(-3986, 3986)$.

13. Најди природен број n кој кога ќе се зголеми за 5 или ќе се намали за 11 е квадрат на некој број.

Решение. Нека n е бараниот број. Имаме $n+5=a^2$ и $n-11=b^2$, од каде добиваме

$$a^2-b^2=16 \text{, т.е. } (a-b)(a+b)=16 .$$

Од последната равенка ги добиваме системите равенки:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=4 \end{cases}.$$

Од првиот систем имаме $a=5, b=3$, па е $n=20$. Вториот систем нема решенија во множеството природни броеви, а од третиот систем добиваме $a=4, b=0$, па е $n=11$.

14. Дали постојат цели броеви x и y такви да $x^2+2012=y^2$? Одговорот да се образложи и ако постојат да се најдат сите парови такви броеви.

Решение. Дадената равенка можеме да ја запишеме во видот $2012=y^2-x^2$, т.е.

$$(y-x)(y+x)=2012 .$$

Понатаму, $(y-x)(y+x)=2\cdot 2\cdot 503$, од каде ги добиваме системите равенки:

$\begin{cases} y-x=1006 \\ y+x=2 \end{cases}$, чие решение е парот $(-502, 504)$,

$\begin{cases} y-x=-1006 \\ y+x=-2 \end{cases}$, чие решение е парот $(502, -504)$,

$\begin{cases} y-x=-2 \\ y+x=-1006 \end{cases}$, чие решение е парот $(-502, -504)$,

$\begin{cases} y-x=2 \\ y+x=1006 \end{cases}$, чие решение е парот $(502, 504)$,

$\begin{cases} y-x=503 \\ y+x=4 \end{cases}$ и сличните комбинации немаат решение во $\mathbb{Z}$

$\begin{cases} y-x=2012 \\ y+x=1 \end{cases}$ и сличните комбинации немаат решение во $\mathbb{Z}$.

15. Во множеството на целите броеви реши ја равенката

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}_{1997-\text{корени}} = y. \qquad (1)$$

Решение. Од (1) имаме $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ако дадената равенка ја квадрираме, па од десната страна го префрлиме x и постапката ја повториме 1995 пати, тогаш добиваме равенка во облик

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = m, \quad m \in \mathbb{N}_0. \qquad (2)$$

Со квадрирање на последната равенка наоѓаме

$$x+\sqrt{x} = m^2.$$

Од $x, m \in \mathbb{N}_\circ$ од (2) ќе следува дека $x = k^2, k \in \mathbb{N}_0$.

Ќе разгледаме два случаи.

Ако $k = 0$, тогаш од $x = 0$ и од (1) добиваме $y = 0$.

Нека $k > 0$. Тогаш од (2) добиваме $k^2 + k = m^2$. Но, за $k > 0$ важи

$$k^2 < k^2 + k < (k+1)^2,$$

од што следува $k^2 < m^2 < (k+1)^2$, т.е. квадрат на природен број се наоѓа меѓу квадратите на два последователни природни броја што е противречност.

Значи, единствено решение на дадената равенка е $x = 0, y = 0$.

16. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

Решение. Четворката $(0,0,0,0)$ е едно решение на равенката. Ако постои уште едно решение, тогаш би постоело и решение за кое збирот $x^2 + y^2$ е најмал. Бидејќи, квадратите на целите броеви при делење со 3 даваат остатоци 0 и 1, следи дека збирот $x^2 + y^2$ може да е делив со 3 само ако x и y се деливи со 3, па тогаш $x = 3x_1$, $y = 3y_1$, односно

$$u^2 + v^2 = 3(x_1^2 + y_1^2),$$

па од

$$u^2 + v^2 = \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2) < x^2 + y^2,$$

следи дека добивме решение со помал збир на квадратите на првите две координати. Значи, е динствено решение на дадената равенка е $(0, 0, 0, 0)$.

17. Определи ги сите вредности на природниот број n за кои системот

$$\begin{cases} x + y = n^2 \\ 10x + y = n^3 \end{cases}$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме

$$9x = n^2(n-1).$$

Бидејќи бараме решенија во множеството природни броеви имаме $9\,|\,n^2(n-1)$. Според тоа, можни се два случаи.

Случај 1. $3\,|\,n$. Тогаш

$$x=k^2(3k-1) \text{ и } y=9k^2-k^2(3k-1)=k^2(10-3k) .$$

Бидејќи y е природен број, можни вредности за k се 1, 2 и 3. Во тој случај $n=3,6,9$.

Случај 2. Нека $3\nmid n$ и $9\,|\,(n-1)$. Тогаш постои природен број m така што $n=9m+1$, па

$$x=m(9m+1)^2 \text{ и } y=(9m+1)^2-m(9m+1)^2=(9m+1)^2(1-m) ,$$

односно за ниту природен број m, y не може да биде природен број.

Значи, единствени вредности за n за кои системот има решенија во множеството природни броеви се 3, 6 и 9.

18. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} ab+c=13 \\ a+bc=23 \end{cases}.$$

Решение. Ако двете равенки ги собереме, добиваме

$$(ab+c)+(a+bc)=36$$
$$a(b+1)+c(b+1)=36$$
$$(a+c)(b+1)=36$$

Ако, пак, двете равенки ги одземеме, добиваме

$$(ab+c)-(a+bc)=10$$
$$(bc-c)+(a-ab)=10$$
$$c(b-1)-a(b-1)=10$$
$$(b-1)(c-a)=10 .$$

Според тоа, $b+1$ и $b-1$ се делители на 36 и 10 соодветно. Но

$$36=2\cdot18=3\cdot12=4\cdot9=6\cdot6 ,$$

а $10=1\cdot10=2\cdot5$. Не е тешко да се види дека можни вредности за b се $2,\ 3,\ 11$, и други нема.

Ако $b=2$, тогаш го добиваме системот

$$\begin{cases} 2a+c=13 \\ a+2c=23 \end{cases}$$

кој има решение $a=1$, $c=11$.

Ако $b=3$, тогаш го добиваме системот

$$\begin{cases} 3a+c=13 \\ a+3c=23 \end{cases}$$

кој има решение $a=2$, $c=7$.

Ако $b=11$, тогаш го добиваме системот

Тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} 11a + c = 13 \\ a + 11c = 23 \end{cases}$$

Решение на овој систем е $a = 1,\ c = 2$.

Значи, бараните решенија (a,b,c) се $(1,2,11),(2,3,7)$ и $(1,11,2)$.

19. Нека a и b се различни цели броеви за кои равенката $(x-a)(x-b) = -1$ има целеброен корен r. Докажи дека $a+b = 2r$.

Решение. Нека a,b,r се цели броевитакви што r е корен на дадената равенка. Имаме $(r-a)(r-b) = -1$. Сега, $r-a,\ r-b$ се цели броеви чиј производ е -1. Ова е можно само во случај кога едниот множител е 1, а вториот множител -1. Значи можни се два случаи и тоа:

$$\begin{cases} r-a = 1 \\ r-b = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} r-a = -1 \\ r-b = 1 \end{cases}.$$

Собирајќи ги равенките во двата системи, се добива $2r-a-b = 0$, односно $a+b = 2r$, што и требаше да се докаже.

20. Определи ги сите цели броеви a и b такви што

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

Решение. Равенката можеме да ја запишеме како квадратна равенка по b, при што

$$5b^2 + (5a-14)b + 5a^2 - 7a = 0.$$

Нејзини решенија се

$$b_{1/2} = \frac{14-5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2-7a)}}{10} = \frac{14-5a \pm \sqrt{196-75a^2}}{10}.$$

За да решенијата се реални доволно е $196 - 75a^2 \geq 0$, т.е. $a^2 \leq \frac{196}{75}$. Значи

$$-\frac{14}{5\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}.$$

Но, a е цел број, па можни вредности за a се $a \in \{-1, 0, 1\}$. Со замена на a во $b_{1/2}$, добиваме

1) $a = -1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 3,\ b_2 \notin \mathbb{Z}$
2) $a = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \notin \mathbb{Z},\ b_2 = 0$
3) $a = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 2,\ b_2 \notin \mathbb{Z}$.

Значи, бараните решенија се $(a,b) \in \{(-1,-3),(0,0),(1,2)\}$.

21. Дали постојат прости броеви p и q, такви што равенката

$$x^2 - qx + 20 = pq \tag{1}$$

има барем еден целоброен корен?

Решение. Броевите p и q не може и двата да се непарни. Во спротивен случај, бројот од левата страна е парен а бројот од десната страна на равенството е непарен, за било кој цел број x. Значи, еден од броевите p и q е парен. Значи $p = 2$ или $q = 2$. Двата случаи ќе ги разгледаме одвоено.

а) $q=2$. Равенката го добива обликот $x^2-2x+20=2p$. Јасно, x треба да е парен број. Нека $x=2k$ за некој $k\in Z$ е корен на равенката (1). Тогаш таа го добива обликот $2k^2-2k+10=p$, од каде гледаме дека и p е парен. Според тоа, (1) го добива обликот

$$x^2-2x+16=0$$

за која е очигледно дека нема реални корени, па нема ниту целобројни корени.

б) $p=2$. Равенката го добива обликот $x^2-qx+24-2q=0$. Таа има целобројни решенија ако и само ако нејзината дискриминанта е полн квадрат

$$q^2-8q+96=m^2.$$

Последната равенка може да се запише во облик

$$(q+m+4)(q-m+4)=112$$

Бидејќи $q-m+4$ и $q+m+4$ се со иста парност и $112=7\cdot 16$, доволно е да се разгледаат следните можности:

$$\begin{cases} q+m+4=56 \\ q-m+4=2 \end{cases}, \begin{cases} q+m+4=28 \\ q-m+4=4 \end{cases}, \begin{cases} q+m+4=14 \\ q-m+4=8 \end{cases}.$$

Не е тешко да се види, бидејќи q е прост број, дека само третиот систем има решение $q=7$ кој е прост број.

Значи, единствено решение е $p=2$, $q=7$.

22. Дали постојат природни броеви a,b,c кои го задоволуваат условот

$$(a+b)(b+c)(c+a)=340.$$

Решение. Бидејќи a,b,c се природни броеви имаме $a+b\geq 2, b+c\geq 2$ и $c+a\geq 2$. Понатаму, од дадената равенка имаме

$$(a+b)(b+c)(c+a)=2\cdot 2\cdot 5\cdot 17.$$

Ќе докажеме дека не може $a+b$ и $b+c$ да бидат парни, а $c+a$ непарен. Имено, ако $a+b=2m$ и $b+c=2n$ добиваме $a+c=2m+2n-2b$. Во овој случај $(a+b)(b+c)(c+a)$ се дели со 8, а 340 не е делив со 8. Значи, само еден множител може да биде парен, што значи дека на пример $a+b=4,\ \ b+c=5$ и $c+a=17$. Меѓутоа, овој систем равенки дава решение $a=8,\ \ b=-4,\ \ c=9$, што не е можно бидејќи b треба да е природен број.

23. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $a-b$ е прост број и ab е квадрат на природен број.

Решение. Нека p е прост број таков што $a-b=p$ и нека $ab=k^2$, каде $a, b, k\in\mathbb{N}$. Ако во $ab=k^2$ замениме $a=b+p$ добиваме $(b+p)b=k^2$. Последната равенка ќе ја помножиме со 4 и истата можеме да ја запишеме во облик

$$(2b+p)^2-4k^2=p^2$$

$$(2b+p-2k)(2b)+p+2k)=p^2.$$

Но,

$$2b+p+2k>2b+p-2k$$

и од тоа што p е прост број, добиваме дека

$$2b+p+2k=p^2 \text{ и } 2b+p-2k=1.$$

Собирајќи ги последните две равенки добиваме $4b+2p=p^2+1$, т.е. $b=(\frac{p-1}{2})^2$, па според тоа

$$a=b+p=(\frac{p+1}{2})^2.$$

Конечно, ако P е множеството непарни прости броеви, тогаш бараните парови природни броеви се

$$(a,b)=((\frac{p+1}{2})^2,(\frac{p-1}{2})^2),\ p\in P.$$

24. Определи ги целите броеви x и y такви што $x^2y=y^3+10$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $x^2=y^2+\frac{10}{y}$, бидејќи не постои решение од облик $(x,0)$. Ако (x,y) е решение на равенката, тогаш $y\,|\,10$. Делители на 10 во множеството на целите броеви се $\{-1,1,-2,2,-5,5,-10,10\}$.

- Ако $y=1$ равенката го добива обликот $x^2=11$, која нема решение во множеството на целите броеви.
- Ако $y=-1$ равенката го добива обликот $x^2=-9$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=-2$ равенката го добива обликот $x^2=-1$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=2$ равенката го добива обликот $x^2=9$. Нејзини решенија во $\mathbf{Z}$ се $x=3$ и $x=-3$.
- Ако $y=-5$ равенката го добива обликот $x^2=23$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=5$ равенката го добива обликот $x^2=27$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=10$ равенката го добива обликот $x^2=101$, која нема решение во множеството цели броеви.
- Ако $y=-10$ равенката го добива обликот $x^2=99$, која нема решение во множеството цели броеви.

Значи, единствени решенија во множеството на целите броеви на дадената равенка се $(3,2)$ и $(-3,2)$.

25. Во множеството природни броеви реши ја равенката $5a-ab=9b^2$.

Решение. Десната страна на равенката е секогаш позитивна, а левата може да се запише во облик $a(5-b)$. Според тоа $b<5$, односно $b\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Секоја од овие можности ќе ја разгледаме одделно.

- Ако $b=1$, тогаш равенката го добива обликот $4a=9$, која нема решение во $\mathbb{N}$.

- Ако $b=2$, тогаш равенката го добива обликот $3a=36$, чие решение е $a=12$, а решението на почетната равенка е $a=12,\ \ b=2$.
- Ако $b=3$, тогаш равенката го добива обликот $2a=81$, која нема решение во $\mathbb{N}$. Во овој случај почетната равенка нема решение во $\mathbb{N}$.
- Ако $b=4$, тогаш равенката го добива обликот $a=144$. Решението на почетната равенка е $a=144\,,b=4$.

Значи, равенката има две решенија и тоа $a=12,b=2$ и $a=144\,,b=4$.

26. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$4n(n+1)=m(m+1)\ .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2n+1)^2=m^2+m+1. \tag{1}$$

Но, бидејќи за секој $m\in\mathbf{N}$ важи

$$m^2<m^2+m+1<m^2+2m+1=(m+1)^2\,,$$

добиваме дека бројот m^2+m+1 не може да биде полн квадрат, што значи дека равенката (1), а со тоа и дадената равенка нема решенија.

27. Докажи дека не постојат цели броеви a,b,c такви да $a^2+b^2-8c=6$.

Решение. Дадениот услов ќе го запишеме во обликот $a^2+b^2=8c+6$. Според тоа, збирот a^2+b^2 е парен број, па затоа или броевите a и b се и двата парни или се и двата непарни. Ако a и b се и двата парни, тогаш a^2+b^2 се дели со 4, но $8c+6$ не се дели со 4. Значи, a и b може да бидат само непарни броеви. Но, тогаш броевите

$$a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1) \text{ и } b^2-1=(2p+1)^2-1=4p(p+1)$$

се деливи со 8, па затоа левата страна на $a^2+b^2-2=8c+4$ се дели со 8, а десната не се дели со 8. Конечно, a и b се со иста парност, но не се ниту парни ниту непарни, што е противречност. Оттука следува дека не постојат цели броеви a и b такви да $a^2+b^2-8c=6$.

28. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{xy}\,.$$

Решение. Нека земеме дека $y\le x$. Тогаш

$$\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{xy}\le\tfrac{2}{y}-\tfrac{1}{xy}=\tfrac{2x-1}{xy}<\tfrac{2x}{xy}=\tfrac{2}{y}\,,$$

па затоа $y<6$. Со непосредна проверка добиваме дека за $y=1$, $y=2$ и $y=3$ равенката нема решение. За $y=4$ добиваме $x=9$, а за $y=5$ добиваме $x=6$. Конечно, заради симетрија добиваме дека решенија на дадената равенка се: $(x,y)\in\{(4,9),(5,6),(6,5),(9,4)\}$.

29. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^y=y^{x-y}$.

Решение. Според условот x^y и y^{x-y} се природни броеви, па затоа $x-y\geq 0$, т.е. $x\geq y$. Ако $x=y$, тогаш $x^x=x^0=1$, т.е. $x=y=1$.

Ако е $x>y$, тогаш од дадената равенка следува

$$x^y : y = y^{x-y-1}.$$

Но, $x-y-1\geq 0$, па затоа y^{x-y-1} е природен број, што значи дека x^y е делив со y, односно $y\,|\,x$, т.е. $x=ky$. Понатаму,

$$(ky)^y = y^{ky-y} = y^{y(k-1)} = (y^{k-1})^y$$

од каде наоѓаме $ky=y^{k-1}$, т.е. $k=y^{k-2}$. Левата страна од последната равенка е поголема од 1, па затоа за степеновиот показател на дсната страна важи $k-2>0$. Можни се следниве случаи:

- $k=3$ и тогаш $3=y^{3-2}=y, x=ky=3^2=9$;
- $k=4$ и тогаш $4=y^{4-2}=y^2$, па затоа $y=2$ и , $x=ky=8$; и
- $k>5$ и тогаш ако $y\geq 2$ добиваме $y^{k-2}\geq 2^{k-2}>k$, а ако $y<2$ добиваме $y^{k-2}\leq 1<k$, што значи дека во овој случај равенката нема решение.

Конечно, решенија на дадената равенка се $(1,1);(8,2);(9,3)$.

30. Мерните броеви на страните на правоаголен триаголник се природни броеви и притоа $2P=3L$, каде P е плоштината и L е периметарот на триаголникот. Најди ги сите такви триаголници.

Решение. Нека c е хипотенузата и a и b, $a\leq b$, се катетите на триаголникот. Од условот $2P=3L$ следува

$$ab=3(a+b+c),$$

односно

$$3c=ab-3a-3b,$$

а од Питагоровата теорема добиваме

$$9a^2+9b^2=(ab-3a-3b)^2=a^2b^2+9a^2+9b^2-6a^2b-6ab^2+18ab,$$

односно

$$ab(ab-6a-6b+18)=0.$$

Но, $ab>0$, па затоа од последната равенка следува $ab-6a-6b+18=0$, односно $b(a-6)=6a-18$, од каде добиваме

$$b=\tfrac{6a-18}{a-6}=6+\tfrac{18}{a-6}.$$

Бидејќи a и b се природни броеви, заклучуваме дека $a-6$ може да биде $-3,-2,-1,1,2,3,6,9$ или 18, односно a може да биде 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 15 или 24. Но, тогаш b може да биде $0,-3,-12,24,15,12,9,8$ или 7. Од $0<a\leq b$ и c е природен број добиваме дека задачата има три решенија:

31. Реши ја равенката $x!+y!=z!$.

Решение. Јасно е дека $x<z$ и $y<z$. Нека $x!<y!$, тогаш во равенката $x!=z!-y!$ десната страна е делива со $y!$ но левата не е, што не е можно.

Аналогно се покажува дека не е можно $y!<x!$. Единствена можност е $x!=y!$, па равенката се сведува на $2x!=z!$. Од овде добиваме $2=(x+1)(x+2)...z$. Бидејќи x и y се ненегативни цели броеви, исполнет е условот $x\le 1$. Земајќи $x=0$ или 1, лесно заклучуваме дека решенија на равенката се: $(0,0,2)$, $(0,1,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$.

32. Најди ги целобројните решенија на системот равенки

$$x^3+y^3+z^3=3,\ x+y+z=3.$$

Решение. Од дадените равенки добиваме

$$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3^3-3=24.$$

Ако степенуваме на трети степен и ја средиме левата страна добиваме

$$(x+y)(x+z)(y+z)=8.$$

Бидејќи $x+y, x+z, y+z$ се цели броеви, тие се делители на бројот 8. Значи, $x+y=3-z$ мора да биде еден од броевите $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Со директна проверка добиваме дека целобројни решенија на дадениот систем се следните подредени тројки цели броеви $(1,1,1)$, $(-5,4,4)$, $(4,-5,4)$, $(4,4,-5)$.

33. Дали постојат природни броеви a и b такви што

$$a^2-3b^2=8.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$a^2=8+3b^2.$$

Јасно е дека $3\,|\,3b^2$ и остатокот од делењето на 8 со 3 е еднаков на 2. Значи, остатокот од делењето на $8+3b^2$ со 3 е еднаков на 2.

Остатокот од делењето на a^2 со 3 може да е еднаков на 0 или 1. Бидејќи $0\ne 2$ и $1\ne 2$, равенката нема решение.

34. Определи ги сите цели броеви n, за кои постојат природни броеви x и y кои се решенија на равенката

$$x^2+nxy=y^2.$$

Решение. Нека претпоставиме дека x_0 и y_0 се решенија на равенката и нека $\text{NZD}(x_0,y_0)=d$. Тогаш постојат x_1 и y_1 такви што $\text{NZD}(x_1,y_1)=1$ и $x_0=dx_1$, $y_0=dy_1$, при што равенката го добива обликот

$$x_1^2+nx_1y_1=y_1^2. \tag{1}$$

Од (1) имаме

$$x_1^2=y_1(y_1-nx_1),\ y_1^2=x_1(x_1+ny_1).$$

и бидејќи $\text{NZD}(x_1,y_1)=1$, добиваме $x_1=y_1=1$. Сега ако замениме во (1), добиваме

$$1^2+n\cdot 1\cdot 1=1^2,$$

односно $n=0$.

Значи, ако $x_\circ$ и $y_\circ$ се решенија на равенката, тогаш $n=0$.

Обратно, за $n=0$ равенката го добива обликот

$$x^2=y^2,$$

и нејзини решенија во множеството природни броеви се $x=y=k$, $k\in\mathbb{N}$.

35. Определи го збирот на природните броеви x,y,z,u, ако тие се решение на системот

$$\begin{cases} x+y=zv \\ z+v=xy \end{cases}.$$

Решение. Нека x,y,z,u се природни броеви кои што се решение на системот. Ако ги собереме двете равенки, добиваме

$$x+y+z+u=xy+zu$$

$$xy-x-y+1+zu-z-u+1=2$$

$$(x-1)(y-1)+(z-1)(u-1)=2 \tag{1}$$

Значи, x,y,z,u се решение на равенката (1). Сега, јасно е дека се можни два случаи.

Случај 1. Секој собирок од десната страна на (1) да е еднаков на 1, т.е. $(x-1)(y-1)=1$ и $(z-1)(u-1)=1$. Бидејќи x,y,z,u се природни броеви, тоа е можно само ако

$$x-1=y-1=z-1=u-1=1.$$

Тогаш $x=y=z=u=2$, од каде добиваме $x+y+z+u=8$.

Случај 2. Еден од собироците на десната страна на (1) да е 0 а другиот 2. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $(z-1)(u-1)=0$ и $(x-1)(y-1)=2$. Во тој случај $z-1=0$ или $u-1=0$. Повторно, без ограничување на општоста (доволно е да се разгледа едниот случај) ќе претпоставиме дека $z-1=0$, т.е. $z=1$.

Понатаму, $x-1=1$, $y-1=2$ или обратно. Исто, без ограничување на општоста, ќе претпоставиме дека $x-1=1, y-1=2$, т.е. $x=2, y=3$.

Ако замениме во почетниот csстем, обиваме $u=5$. Конечно,

$$x+y+z+u=1+2+3+5=11.$$

36. Определи ја најголемата вредност на природниот број k, за која равенката

$$x^2+nxy=y^k$$

има барем едно решение во множеството природни броеви.

Решение. Нека $t\in\mathbb{N}$ е произволно зададен природен број. Ако избереме $x=y=t$, равенката го добива обликот

$$t^2+nt^2=t^k.$$

Лесно се добива дека $n=t^{k-2}-1$.

Обратно, ако за $t\in\mathbb{N}$ избереме $n=t^{k-2}-1$, равенката го добива обликот *а*

$$x^2+xyt^{k-2}-xy=y^k.$$

Очигледно е дека едно нејзино решение е $x = y = t$.

Значи, за секој природен број k, равенката има решение

$$x = y = t\,,\ n = t^{k-2} - 1\,,\ t \in \mathbb{N}\,.$$

Ако $k \geq 3$, решенијата се во множеството природни броеви. Според тоа, не постои најголем природен број k за кој равенката има решение во множеството природни броеви.

37. Да се опреелат сите решенија на равенката

$$x + y^2 + z^3 = xyz$$

во множеството природни броеви, ако z е најголемиот заеднички делител на x и y.

Решение. Бидејќи $z = \text{НЗД}(x, y)$, постојат природни броеви a и b кои што се взаемно прости и $x = az$, $y = bz$. Дадената диофантова равенка го добива обликот

$$a + b^2 z + z^2 = abz^2\,.$$

Од последната равенка очигледно е дека $z \mid a$, па затоа постои $c \in \mathbb{N}$ таков што $a = cz$. Послената равенка го добива обликот

$$cz + b^2 z + z^2 + bcz^3,$$

Од каде добиваме $c = \frac{b^2 + z}{bz^2 - 1}$. Ќе разгледаме три случаи.

i) Ако $z = 1$, тогаш $c = \frac{b^2+1}{b-1} = b + 1 + \frac{2}{b-1}$, од каде добиваме $b - 1 \mid 2$. Еинствени вредности за b се $b = 2$ и $b = 3$. Сега, $c = 5$ па во овој случај

$$x = az = cz^2 = 5\,,\ y = bz = 2$$

$$x = az = cz^2 = 5\,,\ y = bz = 3\,.$$

Значи, решенија на равенката во овој случај се $(x, y) = (5, 2)$ и $(x, y) = (5, 3)$.

ii) Ако $z = 2$, тогаш добиваме $c = \frac{b^2+2}{4b-1}$. Ако последното равенство го помножиме со 16, добиваме

$$16c = \frac{16b^2 + 32}{4b-1} = 4b + 1 + \frac{33}{4b-1}\,.$$

Бидејќи $\frac{33}{4b-1}$ е природен број, добиваме $4b - 1 \mid 33$. Постојат само два такви броеви и тоа $b = 1$ и $b = 3$. Во двата случаи $c = 1$. Сега

$$x = az = cz^2 = 4\,, \qquad y = bz = 2$$

$$x = az = cz^2 = 4\,, \qquad y = bz = 6\,,$$

па во овој случај решенија на последната равенка се $(x, y) = (4, 2)$ и $(x, y) = (4, 6)$.

iii) Нека $z \geq 3$. Ако равенството $c = \frac{b^2 + z}{bz^2 - 1}$ го помножиме со z^2, добиваме

$$z^2 c = \frac{z^2 b^2 + z^3}{bz^2 - 1} = b + \frac{b + z^3}{bz^2 - 1}\,.$$

Бидејќи $\frac{b + z^3}{bz^2 - 1}$ е природен број, добиваме дека $b + z^3 \geq bz^2 - 1$. Но тогаш имаме

$$b \le \frac{z^2-z+1}{z-1} = z + \frac{1}{z-1},$$

па според тоа $b \le z$. Од последното неравенство лесно се добива точноста на следните неравенства

$$b^2 + z \le z^2 + b < zb^2 - 1, \text{ т.е. } \frac{z^2+b}{zb^2-1} < 1.$$

Заради добиената контрадикција, во овој случај равенката нема решение.

Конечно, решенија на последната равенка се подредените парови (x, y) кои се еднакви на $(5,2)$, $(5,3)$ $(4,2)$ и $(4,6)$.

38. Даден е системот

$$\begin{cases} x + y = z + u \\ 2xy = zu \end{cases}.$$

Определи ја најголемата вредност на m таков што $m \le \frac{x}{y}$, за секое позитивно целобројно решение (x, y, z, u) на системот за кое $x \ge y$.

Решение. Во множеството на природни броеви ќе ги најдеме решенијата на дадениот систем.

Ако првата равенка ја квадрираме и од неа ја одземеме двојната вредност на втората равенка, добиваме

$$x^2 - 2xy + y^2 = z^2 + u^2, \text{ т.е. } (x-y)^2 = z^2 + u^2.$$

Според тоа, $(z, u, x-y)$ е Питагорова тројка. Познато е дека секоја Питагорова тројка има облик

$$z = y(a^2 - b^2), \qquad u = 2tab, \qquad x - y = t(a^2 + b^2), \; t, a, b \in \mathbb{N}.$$

Но, од равенката на системот $x + y = z + u$, добиваме

$$x = t(a^2 + ab), \qquad y = t(ab - b^2), \qquad z = t(a^2 - b^2), \qquad u = 2tab.$$

Ставајќи $k = \frac{a}{b}$, имаме

$$\frac{x}{y} = \frac{t(a^2+ab)}{t(ab-b^2)} = \frac{b^2((\frac{a}{b})^2 + \frac{a}{b})}{b^2(\frac{a}{b}-1)} = \frac{k^2+k}{k-1} = k + 2 + \frac{2}{k-1}$$

$$= 3 + k - 1 + \frac{2}{k-1} \ge 3 + 2\sqrt{(k-1)\frac{2}{k-1}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Равенство важи за $k - 1 = \sqrt{2}$, односно $k = 1 + \sqrt{2}$. Бидејќи $k \in [1+\sqrt{2}, +\infty)$ добиваме $m = \frac{x}{y} \in (-\infty, 3+\sqrt{2}]$, т.е. $m = 3 + \sqrt{2}$.

39.Четирицифрениот број a не ја содржи цифрата 9 и е квадрат на природен број. Ако секоја негова цифра ја наголемиме за 1 се добива природен број кој повторно е полн квадрат.

Најди ги сите четирицифрени броеви кои го имаат тоа својство.

Решение. Нека a е четирицифрен број таков што $a = x^2$, за некој природен број $x \in \mathbb{N}$. Бројот што се добива со наголемување на неговите цифри за 1 е $a + 1111$. Според условот на задачата, постои $y \in \mathbb{N}$ така што

$$a+1111=y^2 .$$

Јасно, $y>x$ и не е тешко да се добие равенката $y^2-x^2=1111$, т.е.

$$(y-x)(y+x)=11\cdot 101 .$$

Случај 1. Имаме

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=1111 \end{cases}.$$

Ако двете равенки ги собереме добиваме $2y=1112$, т.е. $y=556$. Но тогаш со замена во една од равенките добиваме $x=555$. Квадратите на $y=556$ и $x=555$ не се четирицифрени броеви, па според тоа во овој случај немаме решение.

Случај 2. Имаме

$$\begin{cases} y-x=11 \\ y+x=101 \end{cases}.$$

Повторно, ако двете равенки од системот ги собереме, добиваме $2y=112$, т.е. $y=56$. Исто, со замена во една од равенките на системот добиваме $x=45$. Бројот $a=45^2=2025$ го исполнува условот од задачата.

Значи, постои само еден четирицифрен број кој го исполнува условот од задачата, и тоа е 2025.

40. Нека a,b,c се природни броеви такви што $(a+1)(b+1)(c+1)=3abc$, a е прост број помал од 5 и $b+c>6$. Пресметај ја вредноста на a^2+b+c.

Решение. Бидејќи a е прост број помал од 5, за a има две можни вредности и тоа $a=2$ или $a=3$.

Равенството $(a+1)(b+1)(c+1)=3abc$ ќе го запишеме во облик

$$(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})=3 . \tag{1}$$

Двата случаи за a ќе ги разгледаме одвоено.

Случај 1. $a=2$. Во овој случај равенството (1) го добива обликот

$$(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})=2 . \tag{2}$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $b\geq c$. Но тогаш

$$2=(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})\leq(1+\tfrac{1}{c})^2 .$$

Бидејќи c е природен број, можни вредности за c се $c=1$ или $c=2$.

а) Ако $c=1$, тогаш со замена во (2) добиваме $1+\frac{1}{b}=1$, т.е. $\frac{1}{b}=0$, што не е можно.

б) Ако $c=2$, тогаш равенката го добива обликот $1+\frac{1}{b}=\frac{4}{3}$, од каде добиваме $b=3$. Но за $c=2$ и $b=3$ не е исполнет условот $b+c>6$.

Случај 2. $a=3$. Во овој случај со замена во (1) добиваме

$$(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})=\tfrac{9}{4} . \tag{3}$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $b\geq c$. Но тогаш

$$\tfrac{9}{4}=(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})\leq(1+\tfrac{1}{c})^2 .$$

Од последното неравенство добиваме $c=1$ или $c=2$.

а) За $c=2$ со замена во (3) се добива $b=2$ и $b+c=4<6$.
б) За $c=1$, со замена во (3) се добива $b=8$. Сега за $a=4, b=8, c=1$ имаме

$$a^2+b+c=18.$$

41. Да се најдат сите парови (x,y) природни броеви такви што $x+y=a^n$ и $x^2+y^2=a^m$, за некои природни броеви a,m и n.

Решение. Нека x,y,z,m,n се природни броеви такви што важи $x+y=a^n$ и $x^2+y^2=a^m$. Со квадрирање на првата равенка добиваме

$$a^{2n}=x^2+y^2+2xy=a^m+2xy>a^m.$$

Значи, a^m е делител на a^{2n}. Заради равенството $a^m(a^{2n-m}-1)=2xy$ добиваме дека $a^m\,|\,2xy$.

Од друга страна $x^2+y^2=a^m$, па затоа $x^2+y^2\,|\,2xy$ и $2xy\ge x^2+y^2$. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$2xy\ge x^2+y^2\ge 2xy,$$

па добиваме $2xy=x^2+y^2$, т.е. $x=y$. Значи, $2x=a^n$ и $2x^2=a^m$,

$$4x^2=a^{2n}$$

$$2\cdot 2x^2=a^{2n}$$

$$2a^m=a^{2n}$$

$$2=a^{2n-m}.$$

Сега е јасно дека $x=2$ и $x=2^{n-1}$.

Значи, бараните решенија се $x=y=2^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$.

6. КОНГРУЕНЦИИ

1. Докажи дека квадрат на цел број е конгруентен со 0 или 1 по модул 4.
Решение. Нека m е цел број. Тогаш $m\equiv i\pmod 4$, за $i=0,1,2,3$, па затоа $m^2\equiv i^2\pmod 4$, за $i=0,1,2,3$. Но,

$$0^2\equiv 0\pmod 4,\ 1^2\equiv 1\pmod 4,\ 2^2\equiv 0\pmod 4 \text{ и } 3^2\equiv 1\pmod 4,$$

па затоа за секој цел број m важи $m^2\equiv 0$ или $1\pmod 4$.

2. Најди го остатокот при делењето на бројот:
а) $(5^{100}+55)^{100}$ со 24, б) $(3^{10}+2)^{77}$ со 9,
в) $(17^{17}+116)^{21}$ со 8.

Решение. а) Од $5^2 \equiv 1(\bmod 24)$ добиваме дека $5^{100} \equiv 1(\bmod 24)$. Според тоа, $5^{100} + 55 \equiv 56 \equiv 8(\bmod 24)$. Понатаму $8^2 \equiv 16(\bmod 24)$, па затоа за секој природен број k важи $8^{2k} \equiv 16^k \equiv 16(\bmod 24)$. Конечно,

$$(5^{100} + 55)^{100} \equiv 8^{100} = 8^{2\cdot 50} \equiv 16(\bmod 24),$$

што значи дека остатокот од делењето на бројот $(5^{100} + 55)^{100}$ со 24 е 16.

б) Од $3^2 \equiv 0(\bmod 9)$, следува дека $3^{10} + 2 \equiv 2(\bmod 9)$. Понатаму, од $2^7 \equiv 2(\bmod 9)$ следува $(3^{10} + 2)^{77} \equiv 2^{11} \equiv 5(\bmod 9)$.

в) Од $17 \equiv 1(\bmod 8)$ следува $17^{17} \equiv 1(\bmod 8)$. Од друга страна $116 \equiv 4(\bmod 8)$, па затоа

$$17^{17} + 116 \equiv 5(\bmod 8).$$

Понатаму, $5^2 \equiv 1(\bmod 8)$, па затоа

$$(17^{17} + 116)^{21} \equiv 5^{21} \equiv 5^{20} \cdot 5 \equiv 1 \cdot 5 \equiv 5(\bmod 8).$$

3. Да се докаже дека $3^{2001} + 4^{2001}$ е делив со 13.

Решение. Од $3^3 \equiv 1(\bmod 13)$ и $4^3 \equiv -1(\bmod 13)$ следува дека

$$3^{2001} + 4^{2001} = (3^3)^{667} + (4^3)^{667} \equiv 1^{667} + (-1)^{667} = 0(\bmod 13).$$

4. Докажи дека бројот $13^{101} - 13^{95}$ се дели со 7.

Решение. Имаме $13 \equiv -1(\bmod 7)$, па затоа

$$13^{101} \equiv -1(\bmod 7) \text{ и } 13^{95} \equiv -1(\bmod 7),$$

од што следува дека $13^{101} - 13^{95} \equiv -1 - (-1) \equiv 0(\bmod 7)$.

5. Нека d е природен број различен од 2, 5 и 13. Докажи дека во множеството $\{2, 5, 13, d\}$ може да се изберат два различни броја a и b така да $ab - 1$ не е квадрат на цел број.

Решение. Нека претпоставиме дека за секои $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, $a \neq b$, бројот $ab - 1$ е потполн квадрат. Специјално, нека

$$2d - 1 = x^2, 5d - 1 = y^2, 13d - 1 = z^2,$$

за некои цели броеви x, y, z. Тогаш бројот x мора да биде непарен и

$$2d = x^2 + 1 \equiv 2(\bmod 8),$$

па затоа и бројот d е непарен. Но, тоа значи дека y и z се парни броеви: $y = 2a, z = 2b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Сега од $z^2 - y^2 = 8d$ следува

$$(a - b)(a + b) = (b - a)(b + a) = 2d,$$

што значи дека броевите a и b се со иста парност, што е противречност, бидејќи d е непарен.

6. Дадени се броевите $5, 52, 525, 5252, 52525, \ldots$. Одреди го најмалиот меѓу нив кој е делив со 99.

Решение. Нека S_1 е збирот на цифрите на непарните места, а S_2 е збирот на цифрите на парните места во произволен број a_N од дадената низа. Број е делив со11 ако $11 \mid S_1 - S_2$. Број е делив со 9 ако $9 \mid S_1 + S_2$.

1) Нека бројот на цифри N е парен. Тогаш збирот на цифрите на бројот a_N е еднаков на $\frac{7N}{2}$, а $S_1 - S_2 = \frac{3N}{2}$. За да бројот a_N биде делив со 99 мора $9 \mid S_1 + S_2$ и $11 \mid S_1 - S_2$. Овој услов го исполнуваат сите броеви N за кои $99 \mid N$, т.е. $N = 99k$. Најмалиот k за кој ова е исполнето е $k = 2$. Најмал ваков a_N ќе има $2 \cdot 99 = 198$ цифри. ($N = 198$).

2) Нека N е непарен. Тогаш

$$S_1 + S_2 = \tfrac{7(N-1)}{2} + 5 = \tfrac{7N+3}{2} \text{ и } S_1 - S_2 = \tfrac{3(N-1)}{2} + 5 = \tfrac{3N+7}{2}.$$

Притоа

$$9 \mid S_1 + S_2 \iff 9 \mid \tfrac{7N+3}{2} \iff 9 \mid (7N+3) \iff N \equiv 5 (\text{mod}\, 9).$$

Освен тоа,

$$11 \mid S_1 - S_2 \; 11 \mid \tfrac{3N+7}{2} \iff 11 \mid (3N+7) \iff 11 \mid 4(3N+7)$$
$$\iff 11 \mid (N+6) \iff N \equiv 5 (\text{mod } 11)$$

Најмалиот непарен број N таков што $N \equiv 6(\text{mod } 9)$ и $N \equiv 5(\text{mod } 11)$ е 159 .

7. Докажи дека бројот 2001 не може да биде збир на кубови на два природни броја.

Решение. Лесно се докажува дека за секој природен број n точни се конгруенциите $n^3 \equiv 0 \,(\text{mod } 7)$ или $n^3 \equiv \pm 1 \,(\text{mod } 7)$. Затоа збирот $m^3 + n^3$ при делење со 7 дава остатоци $0, \pm 1, \pm 2$. Но, $2001 \equiv -1 (\text{mod } 7)$, па затоа еден од кубовите во збирот мора да е делив со 7. Нека тоа е $m = 7k$ и како треба $(7k)^3 \leq 2001$ добиваме дека $k = 1$, па затоа $m = 7$. Меѓутоа, од $7^3 + n^3 = 2001$ следува $n^3 = 1658$, што не е можно бидејќи 1658 не е куб. Тоа го докажува тврдењето на задачата.

8. Најди го најмалиот збир на цифрите на број од облик $3n^2 + n + 1, \; n \in \mathbb{N}$.

Решение. За $n = 1$ бројот е 5. За $n = 8$ го добиваме бројот 201, кој има збир на цифри 3. Ќе докажеме дека ова е бараниот минимален збир на цифрите. Имаме

$$3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1 \equiv 1 (\text{mod } 2)$$

што значи дека сите броеви од дадениот вид се непарни. Затоа не е можно броевите да имаат збир на цифри 1, како и да бидат од облик $2 \cdot 10^m$. Според тоа, треба да се испита дали равенката

$$3n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

има решение во множеството природни броеви. Со идентична трансформација добиваме

$$n(3n+1)=10^m=1\cdot 10^m=2^m5^m.$$

Бидејќи броевите n и $3n+1$ се заемно прости и $n<3n+1$ можни се два случаи: $n=1,\ 3n+1=10^m$ или $n=2^m, 3n+1=5^m$. Првиот случај не е можен, додека за вториот добиваме $3\cdot 2^m+1=5^m$. За $m=1$ и $m=2$ не добиваме равенство ($3\cdot 2+1\neq 5,\ 3\cdot 4+1\neq 25$), па затоа ја имаме следва оценка

$$5^m=5^2\cdot 5^{m-2}>24\cdot 5^{m-2}>3\cdot 2^3\cdot 2^{m-2}=3\cdot 2^{m+1}>3\cdot 2^m+1,$$

па дадената равенка нема решенија во множеството природни броеви. Бидејќи ги исклучивме 1 и 2, заклучуваме дека најмалиот збир на цифрите е еднаков на 3.

9. Нека $b,n>1$ се природни броеви и за секој $k\in\mathbb{N}$, $k>1$ постои природен број a_k таков што $b-a_k^n$ е делив со k. Докажи дека $b=A^n$ за некој природен број A.

Решение. Нека каноничното претставување на бројот b е $b=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_s^{\alpha_s}$ каде што $p_1,p_2,...,p_s$ се различни прости броеви. Доволно е да докажеме дека сите степени $\alpha_i, i=1,2,...,s$ се деливи со n. Во тој случај $A=p_1^{\frac{\alpha_1}{n}}p_2^{\frac{\alpha_2}{n}}...p_s^{\frac{\alpha_s}{n}}$.

Бидејќи за секој k постои $a_k\in\mathbb{N}$ така што $k\,|\,(b-a_k^n)$ таков природен број постои и за $k=b^2$. Значи, постои природен број a_k таков што $b^2\,|\,(b-a_k^n)$. Бидејќи $b^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}...p_s^{2\alpha_s}$, за секој $i=1,2,...,s$ имаме $p_i^{2\alpha_i}\,|\,(b-a_k^n)$ и $p_i^{2\alpha_i}>p_i^{\alpha_i}$.

Според тоа,

$$a_k^n\equiv b\equiv 0(\text{mod } p_i^{\alpha_i}) \text{ и } a_k^n\equiv b\not\equiv 0(\text{mod } p_i^{\alpha_i+1}).$$

Значи, највисок степен на p_i кој го дели a_k^n е α_i. Значи, $p_i\,|\,a_k$ и $p_i^{s_i}$ е најголем степен на p_i кој го дели a_k. Според тоа $p_i^{ns_i}=p_i^{\alpha_i}$, од каде добиваме дека $ns_i=\alpha_i$. Значи, $n\,|\,\alpha_i$, $i=1,2,...,s$, па заради тоа избираме $A=p_1^{\frac{\alpha_1}{n}}p_2^{\frac{\alpha_2}{n}}...p_s^{\frac{\alpha_s}{n}}$.

10. Да се определат сите парови на природни броеви (m,n) такви што

$$\text{NZD}((n+1)^m-n,(n+1)^{m+3}-n)>1.$$

Решение. Нека n и m се природни броеви такви што

$$\text{NZD}((n+1)^m-n,(n+1)^{m+3}-n)=d>1.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} d\,&|\,(n+1)^m-n,\\ d\,&|\,(n+1)^{m+3}-n. \end{aligned} \tag{1}$$

Бидејќи $\text{NZD}(n,n+1)=1$, добиваме дека $d\nmid n+1$. Уште повеќе $\text{NZD}(d,n+1)=1$. Навистина, ако $p>1$ е таков што $p\,|\,d$ и $p\,|\,n+1$, тогаш $p\,|\,(n+1)^m$ и $p\,|\,(n+1)^m-n$, од каде добиваме дека $p\,|\,(n+1)^m-n-(n+1)^m=-n$. Според тоа

$$1 < p < \mathrm{NZD}(-n, n+1) = \mathrm{NZD}(n, n+1) = 1.$$

Од (1) добиваме дека

$$d \mid (n+1)^{m+3} - n - (n+1)^m + n = (n+1)^{m+3} - (n+1)^m = (n+1)^m[(n+1)^3 - 1]. \quad (2)$$

Бидејќи $\mathrm{NZD}(d, (n+1)^m) = 1$ од (2) добиваме $d \mid (n+1)^3 - 1$, односно

$$(n+1)^3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ d). \quad (3)$$

Од дефинцијата на d имаме

$$(n+1)^m \equiv n \ (\mathrm{mod}\ d). \quad (4)$$

Ќе разгледаме три случаи.

Случај 1. $m = 3k$. Тогаш

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k} = [(n+1)^3]^k \equiv 1^k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ d).$$
$$n+1 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ d),$$
$$2^3 \equiv (n+1)^3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ d).$$

Бидејќи $7 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d)$ имаме $d = 7$.

Случај 2. $m = 3k+1$. Од (3) и (4) добиваме

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k}(n+1) = [(n+1)^3]^k(n+1) \equiv 1^k(n+1) \equiv (n+1) \ (\mathrm{mod}\ d).$$

Но, тогаш $1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)$, што значи $d \mid 1$. Последното противречи на претпоставката за d.

Случај 3. $m = 3k+2$. Повторно од (3) и (4) имаме

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)^{3k}(n+1)^2 = [(n+1)^3]^k(n+1)^2 \equiv 1^k(n+1)^2 \equiv (n+1)^2 \ (\mathrm{mod}\ d),$$

т.е. $n \equiv n^2 + 2n + 1 (\mathrm{mod}\ d)$, односно

$$n^2 + n \equiv -1 (\mathrm{mod}\ d). \quad (5)$$

Од друга страна од $n \equiv (n+1)^2 \ (\mathrm{mod}\ d)$ и добиваме

$$n(n+1) \equiv (n+1)^3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ d). \quad (6)$$

Тогаш од (5) и (6) имаме $2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ d)$, односно $d = 2$. Но тоа не е можно, бидејќи $d \mid n$ или $d \mid n+1$ и би добиле контрадикција со (1).

Не е тешко да се провери дека за $n = 7l+1$ и $m = 3k$ се добива $d > 1$. Конечно, решенија на задачата се $(m, n) = (3k, 7l+1)$.

11. Нека $\mathbb{Z}$ е множеството цели броеви. Докажи дека за било кои цели броеви A и B, постои цел број C таков што

$$M_1 = \{x^2 + Ax + B \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ и } M_2 = \{2x^2 + 2x + C \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

се дисјунктни множества.

Решение. Целиот број A може да биде парен или непарен. Двата случаи ќе ги разгледаме посебно.

а) Ако A е непарен, тогаш $x(x+A)$ е секогаш парен број. Тогаш

$$x(x+A) + B \equiv B \ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Заради тоа, доволно е да се избере $C = B+1$. Во тој случај

$$2x^2+2x+C=2x(x+1)+B+1\equiv B+1 \text{ (mod 2)}.$$

Од претходното, множествата

$$M_1=\{x^2+Ax+B\,|\,x\in\mathbb{Z}\} \text{ и } M_2=\{2x^2+2x+C\,|\,x\in\mathbb{Z}\}$$

се заемно дисјунктни.

б) Ако A е парен број, тогаш x^2+Ax+B можеме да го запишеме во облик

$$x^2+Ax+B=(x+\tfrac{A}{2})^2+B-\tfrac{A^2}{4}.$$

За било кој цел број x, $(x+\frac{A}{2})^2\equiv 0 \text{ (mod 4)}$ или $(x+\frac{A}{2})^2\equiv 1 \text{ (mod 4)}$, од каде добиваме

$$(x+\tfrac{A}{2})^2+B-\tfrac{A^2}{4}\equiv B-\tfrac{A^2}{4} \text{ (mod 4)},$$

или

$$(x+\tfrac{A}{2})^2+B-\tfrac{A^2}{4}\equiv B-\tfrac{A^2}{4}+1 \text{ (mod 4)}$$

За броевите од M_2, бидејќи $2x(x+1)$ за било кој цел број $x\in\mathbb{Z}$ е делив со 4, имаме

$$2x^2+2x+C\equiv C \text{ (mod 4)}.$$

Сега, за да $M_1\cap M_2=\varnothing$ доволно е да избереме $C=B-\frac{A^2}{4}+2$.

12. Нека a,b,c,d се природни броеви такви што $a+b+1=c+d+1=p$, каде p е прост број и $a\not\equiv c(\text{mod}\,2)$. Докажи дека $p\,|\,a!b!+c!d!$.

Решение. Од условите на задачата следува

$$\begin{array}{ll} p-(a+1)\equiv-(a+1) \text{ (mod } p) & p-(c+1)\equiv-(c+1) \text{ (mod } p)\\ p-(a+2)\equiv-(a+2) \text{ (mod } p) & p-(c+2)\equiv-(c+2) \text{ (mod } p)\\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\ p-(p-1)\equiv-(p-1) \text{ (mod } p) & p-(p-1)\equiv-(p-1) \text{ (mod } p). \end{array}$$

Сега е јасно дека

$$(p-a-1)!\equiv(-1)^{p-a-1}(a+1)(a+2)....(p-1) \text{ (mod } p)$$

$$(p-c-1)!\equiv(-1)^{p-c-1}(c+1)(c+2)....(p-1) \text{ (mod } p).$$

и

$$a!(p-a-1)!\equiv(-1)^{p-a-1}(p-1)! \text{ (mod } p)$$

$$c!(p-c-1)!\equiv(-1)^{p-c-1}(p-1)! \text{ (mod } p).$$

Оттука

$$a!(p-a-1)!+c!(p-c-1)!\equiv(-1)^{p-a-1}(p-1)![(-1)^{a-c}+1](\text{mod } p).$$

Бидејќи $a\not\equiv c(\text{mod}\,2)$ добиваме дека $a-c$ не е парен број. Според тоа

$$(-1)^{p-a-1}(p-1)![(-1)^{a-c}+1]\equiv(-1)^{p-a-1}(p-1)![-1+1]\equiv 0 \text{ (mod } p),$$

од каде следува $a!(p-a-1)!+c!(p-c-1)!\equiv 0(\text{mod } p)$. Но,

$$a!(p-a-1)!+c!(p-c-1)!=a!b!+c!d!\ ,$$

па затоа

$$a!b!+c!d!\equiv 0(\text{mod } p),$$

односно $p\,|\,a!b!+c!d!$.

13. Во квадратна таблица (шема) со димензии 10×10 запишани се броевите $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на следниот начин

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Заокружени се десет броеви, во секоја редица и во секоја колона по еден број. Докажи дека меѓу нив има барем два еднакви.

Решение. Нека $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}$ се избраните броеви. Со b_i и c_i ќе ги означиме броевите кои се први во редицата и колоната во која се наоѓа a_i, за $i=1,2,3,...,10$. Бидејќи од секоја редица и колона е избран по еден број, тогаш

$$\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9,b_{10}\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8,c_9,c_{10}\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Тогаш

$$(b_1+c_1)+(b_2+c_2)+...+(b_{10}+c_{10})=(b_1+b_2+...+b_{10})+(c_1+c_2+...+c_{10})$$

$$=2(1+2+3+4+...+9)=90\equiv 0(\text{mod } 10)$$

Да забележиме дека $a_i\equiv b_i+c_i \ (\text{mod } 10)$, $i=1,2,3,...,10$. Според тоа

$$a_1+a_2+...+a_{10}\equiv (b_1+c_1)+(b_2+c_2)+...+(b_{10}+c_{10})\equiv 0 \ (\text{mod } 10).$$

Ако броевите $a_1,a_2,...,a_{10}$ се различни меѓу себе, тогаш

$$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

и

$$a_1+a_2+...+a_{10}=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45\equiv 5 \ (\text{mod } 10).$$

Заради добиената контрадикција, постојат $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ такви што $a_i=a_j$.

14. а) Одреди ги сите природни броеви n такви што 7 е делител на 2^n-1.

б) Докажи дека 7 не е делител на 2^n+1 за било кој природен број n.

Решение. а) Ќе разгледаме три случаи

1° $n=3k$. Тогаш

$$2^n-1=2^{3k}-1=(2^3)^k-1=8^k-1=(8-1)=7A,$$

каде $A=8^{k-1}+8^{k-2}+...+8^2+8+1$. Во овој случај $7\,|\,2^n-1$.

2° $n=3k+1$. Од особините на конгуенции

$$2^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,7)$$
$$2^n-1=2^{3k+1}-1=2\cdot(2^3)^k-1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$2^n-1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

Во овој случај $7\nmid 2^n-1$.

3° $n=3k+2$. Слично

$$2^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,7)$$
$$2^n-1=2^{3k+2}-1\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

Значи, $7\,|\,2^n-1$ само за $n=3k$, $k\in\mathbb{N}$.

б) Од својствата на конгруенции имаме

$$2^{3k}+1=8^k+1\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$2^{3k+1}+1=2\cdot 8^k+1\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$2^{3k+2}+1=4\cdot 8^k+1\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

Секој природен број има еден од облиците $3k, 3k+1, 3k+2$ па според тоа $7\nmid 2^n+1$ за било кој $n\in\mathbb{N}$.

15. Определи го остатокот од делењето на бројот $3^{105}+4^{105}$ со бројот 11.

Решение. Јасно е дека

$$3^3\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 11),\qquad 3^2\equiv -2\ (\mathrm{mod}\,11),$$

па од својствата на конгруенции следува $3^5\equiv -10\ (\mathrm{mod}\ 11)$, т.е. $3^5\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$. Слично,

$$4^3\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 11),\qquad 4^2\equiv 5\ (\mathrm{mod}\,11),$$

и затоа $4^5\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$. Сега

$$3^{105}=(3^5)^{21}\equiv 1^{21}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11)$$
$$4^{105}=(4^5)^{21}\equiv 1^{21}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 11),$$

и од својствата на конгруенциите добиваме

$$3^{105}+4^{105}\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 11).$$

16. Дали за секој парен природен број n, бројот $20^n+16^n-3^n-1$ е делив со 323.

Решение. Бројот 323 можеме да го запишеме во облик $323=17\cdot 19$. Бидејќи n е парен природен број, од особините на конгруенции имаме

$$20\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 17),\qquad 16\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 17)$$
$$20^n\equiv 3^n\ (\mathrm{mod}\ 17),\qquad 16^n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 17).$$

Од последните две конгруенции добиваме

$$17\,|\,20^n+16^n-3^n-1\,. \qquad (1)$$

Слично, од тоа што n е парен природен број, од особините на конгруенции имаме

$$20\equiv 1\ (\text{mod}\ 19)\,, \qquad 16\equiv -3\ (\text{mod}\ 19)$$

$$20^n\equiv 1\ (\text{mod}\ 19)\,, \qquad 16^n\equiv 3^n\ (\text{mod}\ 19)\,.$$

Значи,

$$19\,|\,20^n+16^n-3^n-1, \qquad (2)$$

Бидејќи $\text{NZD}(17,19)=1$, од (1) и (2) имаме $323=17\cdot 19\,|\,20^n+16^n-3^n-1$.

17. Да се определи најмалиот природен број $n\geq 4$, таков што од n различни цели броеви може да се изберат четири различни цели броеви a,b,c и d такви што $20\,|\,a+b-c-d$.

Решение. Нека S е множество во кое нема четири различни елементи a,b,c и d такви што $20\,|\,a+b-c-d$. Според тоа, не може да постојат четири различни елементи a,b,c и d, такви што $a\equiv c\ (\text{mod}\,20)$ и $b\equiv d\,(\text{mod}\ 20)$. Навистина, ако такви броеви постојат, тогаш од особините на конгруенции добиваме

$$a+b\equiv c+d\ (\text{mod}\ 20)\,,\ \text{т.е.} \qquad a+b-c-d\equiv 0\ (\text{mod}\ 20)\,,$$

т.е. $20\,|\,a+b-c-d$. Значи, нема четири различни елементи a,b,c и d, такви што $a+b$ и $c+d$ имаат исти остатоци при делење со 20.

Сега, ако бројот на различни остатоци на елементите од S при делење со 20 е k, тогаш множеството S не може да има повеќе од $k+2$ елементи. Навистина, ако $r_1,r_2,...,r_k$ се сите различни остатоци на елементите од S, и ако S има $k+3$ елементи, тогаш можни остатоци се $r_1,r_2,...,r_k,r_1,r_1,r_2$, па S ќе го исполнува условот од задачата, што е спротивно на нашата претпоставка.

Нека избереме k елементи од S со различни остатоци по модул 20. Тогаш бројот на збирови на два различни остатоци е еднаков на $\frac{k(k-1)}{2}$. Ако $k\geq 7$, тогаш

$$\frac{k(k-1)}{2}\geq \frac{7(7-1)}{2}=21>20\,,$$

па значи има две суми $a+b$ и $c+d$ кои се исти по модул 20 (според принципот на Дирихле). Значи k не може да е поголем од 6 и S не може да има повеќе од 8 елементи. Еден таков пример е $S=\{0,20,40,1,2,4,7,12\}$.

Конечно, множество со $n=9$ елементи секогаш има 4 различни елементи a,b,c,d такви што $20\,|\,a+b-c-d$.

18. Докажи дека простиот број p е делител на бесконечно многу броеви од видот 2^n-n.

Решение. Ако $p=2$, тогаш за $n=2k$ броевите од видот $2^{2k}-2k$ се деливи со $p=2$.

Нека претпоставиме дека p е непарен прост број. Бидејќи $\mathrm{NZD}(2,p)=1$ според малата теорема на Ферма, добиваме дека

$$2^{p-1}\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ p).$$

Тогаш за било кој природен број m имаме $(2^{p-1})^m\equiv 1^m \,(\mathrm{mod}\ p)$, односно

$$2^{m(p-1)}\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ p). \qquad (1)$$

Нека m е природен број таков што $m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)$. Тогаш

$$m(p-1)\equiv -1(p-1)=1 \,(\mathrm{mod}\ p) \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека

$$2^{m(p-1)}-m(p-1)\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p).$$

Броеви m кои го исполнуваат условот $m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)$ има бесконечно многу. Бидејќи $m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)$ добиваме дека $p\,|\,(m+1)$, односно дека $m=pk-1$ за некој природен број k. Обратно, секој број од облик $m=pk-1$ го исполнува условот $m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ p)$.

Множеството $\{n=(pk-1)(p-1)\,|\ k\in\mathbb{N}\}$ е бесконечно множество на природни броеви за кои е исполнет условот $p\,|\,(2^n-n)$.

19. Нека е $p>2$ прост број. Докажи дека секој делител на бројот 2^p-1 е од облик $2kp+1$, за некој природен број k.

Решение. Нека q е прост делител на бројот 2^p-1, односно $2^p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ q)$. Со d ќе го означиме најмалиот природен број, таков што $2^d\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ q)$. Тогаш $d\,|\,p$ (Докажи!) и бидејќи p е прост број добиваме $d=1$ или $d=p$. Но, бидејќи $2^d\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ q)$ добиваме $d=p$.

Од друга страна, според малата теорема на Ферма, имаме $2^{q-1}\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ q)$, од каде што добиваме дека $p=d\,|\,q-1$. Бидејќи q е непарен број, добиваме дека $q-1$ е делив со 2. Според тоа $2p\,|\,q-1$, па постои $k\in\mathbb{N}$ така што $q-1=2pk$, т.е. $q=2kp+1$.

Производ на неколку броеви од облик $2kp+1$ е број од ист облик. Секој делител на природен број е производ на неколку негови прости делители (некои од нив може и да се еднакви меѓу себе). Според тоа, секој делител на бројот 2^p-1 е од облик $2kp+1$, што и требаше да се докаже.

20. Нека p и q се различни прости броеви. Докажи дека

$$p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ pq).$$

Решение. Бидејќи p и q се различни прости броеви, според малата теорема на Ферма имаме

$$p^{q-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p)$$
$$q^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p)$$

односно $q \mid p^{q-1} - 1$ и $p \mid q^{p-1} - 1$, па затоа $q \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ и $p \mid q^{p-1} + p^{q-1} - 1$. Бидејќи $\text{NZD}(p, q) = 1$ добиваме дека $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$. Значи,

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } pq).$$

21. Нека p е непарен прост број и a е цел број кој не е делив со p. Докажи дека еден и само еден од броевите

$$A = a^{1+2+3+...+(p-1)} - 1$$

и

$$B = a^{1+2+3+...+(p-1)} + 1$$

е делив со p.

Решение. Ако $p \mid A$ и $p \mid B$, тогаш $p \mid B - A = 2$. Значи, $p = 1$ или $p = 2$ што не е можно бидејќи $p \geq 3$. Од друга страна

$$AB = (a^{1+2+3+...+(p-1)} - 1)(a^{1+2+3+...+(p-1)} + 1) = (a^{\frac{p(p-1)}{2}})^2 - 1 = (a^{p-1})^p - 1.$$

Според малата теорема на Ферма важи

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p)$$

и од теоремите за конгруенции имаме

$$(a^{p-1})^p \equiv 1^p \equiv 1 \ (\text{mod } p).$$

Значи, $p \mid AB$ а заради првиот дел од доказот имаме $p \mid A$ или $p \mid B$.

22. Нека a е цел број кој не е делив со простиот број p. Докажи дека

$$p \mid a^p + (p-1)!a.$$

Решение. Бидејќи $(a, p) = 1$ и p е прост број, според малата теорема на Ферма важи

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p),$$

т.е.

$$a^p \equiv a \ (\text{mod } p) \quad . \tag{1}$$

Од друга страна, според теоремата на Вилсон, имаме

$$(p-1)! \equiv -1 \ (\text{mod } p),$$

а според особините на конгруенции

$$a(p-1)! \equiv -a \ (\text{mod } p). \tag{2}$$

Повторно, од својствата на конгруенциите, (1) и (2) имаме

$$a^p + (p-1)!a \equiv a - a \ (\text{mod } p) \ ,$$

т.е.

$$a^p + (p-1)!a \equiv 0 \ (\text{mod } p).$$

Значи, $p \mid a^p + (p-1)!a$.

23. Определи ги сите прости броеви p такви што $5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p^2}$.

Решение. Ако p е прост број таков што $5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p^2}$, тогаш

$$5^{p^2} \equiv -1 \pmod{p},$$

односно

$$5^{p^2} + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \qquad (1)$$

Од друга страна, според теоремата на Фермат

$$5^p \equiv 5 \pmod{p}$$

$$5^{p^2} \equiv 5^p \equiv 5 \pmod{p}$$

$$5^{p^2} + 1 \equiv 6 \pmod{p} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $6 \equiv 0 \pmod{p}$. Единствени прости броеви за кои е точна последната конгруенција се $p = 2$ и $p = 3$.

а) За $p = 2$ имаме $5^4 + 1 = 626 \not\equiv 0 \pmod{4}$.

б) За $p = 3$ имаме $5^9 + 1 = 1953126 = 9 \cdot 217014 \equiv 0 \pmod{9}$.

Значи, постои еден единствен прост број за кој е исполнет условот од задачата.

24. Нека n е природен број кој не е делив со 17. Докажи дека барем еден од броевите $n^8 - 1$ и $n^8 + 1$ е делив со 17.

Решение. Бидејќи $\text{NZD}(n,17) = 1$ и 17 е прост број, според теоремата на Ферма важи

$$n^{17-1} \equiv 1 \pmod{17}$$

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

Значи, $17 \mid n^{16} - 1$, т.е. $17 \mid (n^8 - 1)(n^8 + 1)$ и бидејќи 17 е прост број добиваме $17 \mid n^8 - 1$ или $17 \mid n^8 + 1$.

25. Збирот на природните броеви a, b и c е делив со 30. Докажи дека и збирот на петите степени е делив со 30.

Решение. Бидејќи 5 е прост број, за било кој цел број x според малата теорема на Ферма е исполнето $x^5 \equiv x \pmod{5}$.

Слично, бидејќи 3 е прост број, од малата теорема на Ферма и особините на конгруенции имаме $x^3 \equiv x \pmod{3}$, т.е. $x^5 \equiv x^3 \equiv x \pmod{3}$.

За простиот број 2 имаме $x^2 \equiv x \pmod{3}$, па затоа $x^4 \equiv x^2 \equiv x \pmod{2}$, односно $x^5 \equiv x^2 \equiv x \pmod{2}$.

Сега бидејќи 2, 3 и 5 се прости броеви, за било кој цел број x е иполнето

$$x^5 \equiv x \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5}.$$

Значи,

$$a^5 \equiv a \pmod{30},\ b^5 \equiv b \pmod{30} \text{ и } c^5 \equiv c \pmod{30}.$$

Сега, од условот на задачата $a+b+c \equiv 0 \pmod{30}$ и од особините на конгруенции, имаме

$$a^5+b^5+c^5 \equiv a+b+c \equiv 0 \pmod{30},$$

што и требаше да се докаже.

26. Нека p е прост број. Докажи дека за секој $a \in \mathbb{N}$ важи

$$a^{(p-1)!+1} \equiv a \pmod{p}.$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

а) $p \mid a$. Во овој случај

$$a^{(p-1)!+1} = a \cdot a^{(p-1)!} \equiv 0 \equiv a \pmod{p}.$$

б) $p \nmid a$. Во овој случај, според малата теорема на Ферма имаме

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Од особините на конгруенции

$$(a^{p-1})^{(p-2)!} \equiv 1^{(p-2)!} = 1 \pmod{p}, \text{ т.е. } a^{(p-1)!+1} \equiv a \pmod{p}.$$

27. Докажи дека за секој природен број n и секој прост број p, бројот

$$1+\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)}$$

е делив со p.

Решение. Бидејќи p е прост број, за секој $k \in \{1,2,3,\dots,p-1\}$ точно е равенството $(k,p)=1$. Сега, од малата теорема на Ферма имаме

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{за } k=1,2,3,\dots,p-1.$$

Од својствата на конгруенции следува

$$k^{n(p-1)} = (k^{p-1})^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{за } k=1,2,3,\dots,p-1$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)} \equiv p-1 \pmod{p},$$

$$1+\sum_{k=1}^{p-1} k^{n(p-1)} \equiv p \equiv 0 \pmod{p},$$

што и требаше да се докаже.

28. Нека p е прост број.

а) Докажи дека

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\dots+(p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

б) Докажи дека

$$1^p+2^p+3^p+\dots+(p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}$$

Решение. а) Бидејќи p е прост број, за $k=1,2,\dots,p-1$ имаме $\mathrm{NZD}(k,p)=1$. Според малата теорема на Ферма добиваме

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod p,\ k = 1,2,3,...., p-1.$$

Сега

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} 1 = p-1 \equiv -1 \pmod p.$$

б) Бидејќи p е прост број, за $k = 1,2,3,..., p-1$ имаме $(k, p) = 1$. Според малата теорема на Ферматимаме

$$k^p \equiv k \pmod p,\ k = 1,2,3,...., p-1.$$

Сега,

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^p \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{(p-1)p}{2} \pmod p.$$

Бидејќи p е прост непарен број, $p-1$ е парен број и $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$. Според тоа

$$\frac{(p-1)p}{2} \equiv p \equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{p-1} k^p \equiv 0 \pmod p.$$

29. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

а) $1^2 \cdot 3^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$

б) $2^2 \cdot 4^2 \cdot ... \cdot (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

Решение. Според теоремата на Вилсон

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod p.$$

Но за секој $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ е исполнето

$$i \equiv -(p-i) \pmod p.$$

а) Ако избереме $i = 2,4,6,8,..., p-1$ добиваме

$$\begin{array}{lcl} 2 \equiv -(p-2) \pmod p & & 2 \equiv -(p-2) \pmod p \\ 4 \equiv -(p-4) \pmod p & \text{т.е.} & 4 \equiv -(p-4) \pmod p \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ p-1 \equiv -(p-(p-1)) \pmod p & & p-1 \equiv -1 \pmod p \end{array}$$

Сега

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot (p-1) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (p-2) \pmod p$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (p-2)][1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (p-2)] \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod p$$

Значи,

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}} 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod p$$

б) Ако пак избереме $i = 1,3,5,7,..., p-2$ добиваме

$$\begin{array}{lcl} 1 \equiv -(p-1) \pmod p & & 1 \equiv -(p-1) \pmod p \\ 3 \equiv -(p-3) \pmod p & \text{т.е.} & 5 \equiv -(p-5) \pmod p \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ p-2 \equiv -(p-(p-2)) \pmod p & & p-2 \equiv -2 \pmod p \end{array}$$

Сега

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(p-2)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(p-1)\ (\text{mod } p)$$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(p-1)][2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(p-1)]\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(p-1)\equiv -1\ (\text{mod } p)$$

Значи,

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}}2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^2\equiv 1\ (\text{mod } p)$$

30. а) Нека p е прост број, а m и n ненегативни цели броеви такви што $m+n=p-1$. Докажи дека

$$m!n!\equiv(-1)^{m+1}\ (\text{mod } p)\,.$$

б) Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$[(\tfrac{p-1}{2})!]^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\ (\text{mod } p)\,.$$

Решение. а) Според теоремата на Вилсон и од условите на задачата, бидејќи p е прост број, имаме

$$(m+n)!=(p-1)!\equiv -1\ (\text{mod } p)\,.$$

Да забележиме дека

$$(m+n)!=[(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-(n-1))]m!\,.$$

Од особини на конгруенции имаме

$$-n\equiv m+n-(n-1)\ \ (\text{mod } p)$$

$$-n+1\equiv m+n-(n-2)\ \ (\text{mod } p)$$

$$-n+2\equiv m+n-(n-3)\ \ (\text{mod } p)$$

....

$$-n+(n-1)\equiv m+n-(n-n)\ \ (\text{mod } p)$$

односно

$$(-1)^n n!\equiv(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-(n-1))\ (\text{mod } p)\,. \qquad (*)$$

Повторно, од особините на конгруенции и од (*), добиваме

$$(-1)^n n!m!\equiv[(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-(n-1))]m!$$

$$=(m+n)!=(p-1)!\equiv -1\ (\text{mod } p)$$

$$(-1)^{n+m}n!m!\equiv(-1)^{m+1}\ (\text{mod } p)$$

и бидејќи $m+n$ е парен број

$$m!n!\equiv(-1)^{m+1}\ (\text{mod } p).$$

б) Нека p е непарен прост број. Тогаш

$$\frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{2}=p-1\,.$$

Според доказот од делот а) за $m=\frac{p-1}{2}, n=\frac{p-1}{2}$, добиваме

$$(\tfrac{p-1}{2})!(\tfrac{p-1}{2})!\equiv(-1)^{m+1}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\ (\text{mod } p)$$

односно

$$[(\tfrac{p-1}{2})!]^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

31. Природниот број $p>2$ е прост ако и само ако $(p-2)!\equiv 1 \pmod{p}$.

Решение. За секој природен број p имаме

$$(p-1)!+1=(p-1)(p-2)!+1=p(p-2)!-(p-2)!+1$$
$$(p-1)!+1-p(p-2)!=-(p-2)!+1$$

Ако p е прост број поголем од 2, тогаш според теоремата на Вилсон и особините на конгруенции

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}, \qquad p(p-2)!\equiv 0 \pmod{p}.$$

Повторно од особините на конгруенции, имаме

$$(p-1)!+1-p(p-2)!\equiv 0 \pmod{p}.$$

Значи,

$$-(p-2)!+1=(p-1)!+1-p(p-2)!\equiv 0 \pmod{p}$$
$$(p-2)!\equiv 1 \pmod{p}$$

Обратно, нека $(p-2)!\equiv 1 \pmod{p}$, т.е. $1-(p-2)!\equiv 0 \pmod{p}$. Но тогаш од $p(p-2)!\equiv 0 \pmod{p}$ и од особините на конгруенции

$$p(p-2)!+1-(p-2)!\equiv 0 \pmod{p},$$

т.е. $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}$. Сега, од теоремата на Вилсон добиваме дека p е прост број.

32. Докажи дека природниот број n е прост ако и само ако $n\mid N$, каде што $N=\sum_{k=1}^{n-3} k\cdot k!$.

Решение. За било кој природен број k е исполнето $k\cdot k!=(k+1)k!-k!$ па според тоа

$$\begin{aligned} N&=\sum_{k=1}^{n-3} k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n-3}[(k+1)!-k!]\\ &=(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n-2)!-(n-3)!)\\ &=(n-2)!-1\end{aligned}$$

Значи, $N=(n-2)!-1$, па според претходната задача n е прост број ако и само ако $(n-2)!\equiv 1 \pmod{n}$, т.е. $n\mid N=(n-2)!-1$.

33. Докажи дека за секој цел број $a, a>1$, постои прост број p так0в што $1+a+a^2+...+a^{p-1}$ е сложен број.

Решение. Ако $a=2$, тогаш за $p=11$ имаме

$$1+2+2^2+...+2^{11-1}=2^{11}-1=2047=23\cdot 89.$$

Нека $a>2$ е природен број. Тогаш $a-1>1$. Според тоа, постои прост број p кој е делител на $a-1$. Значи, $a-1\equiv 0 (\bmod p)$, т.е. $a\equiv 1 (\bmod p)$.

Според својствата на конгруенции, $a^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ за $k=0,1,2,...,p-1$, од каде добиваме

$$M = 1 + a + a^2 + ... + a^{p-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$$

а од неравенствата $M \geq 1 + a > p$ следува тврдењето на задачата.

34. Нека p е прост број и $p > 3$. Докажи дека $p^2 \mid \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}$.

Решение. Ако p е прост број и $p > 3$, тогаш $p-1$ е парен број, па $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$.

Збирот $\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1}$ можеме да го запишеме во облик

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} [k^{2p+1} + (p-k)(p-k)^{2p}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} [k^{2p+1} + (p-k)(k^{2p} - \binom{2p}{1} k^{2p-1} p + \binom{2p}{2} k^{2p-2} p^2 + ... - p^{2p})]$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} [k^{2p+1} + (p-k)k^{2p} + p^2(-2(p-k)k^{2p-1} + (p-k)\binom{2p}{2} k^{2p-2} + ... + (p-k)p^{2p-2})]$$

Од последната низа равенства и од особините на конгруенции добиваме

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} pk^{2p} \ (\mathrm{mod}\ p^2) . \qquad (*)$$

За секој $k = 1,2,3,...,\frac{p-1}{2}$ имаме $(p,k) = 1$ и според малата теорема на Фермат

$$k^p \equiv k \ (\mathrm{mod}\ p)$$

$$k^{2p} \equiv k^2 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

$$pk^{2p} \equiv pk^2 \ (\mathrm{mod}\ p^2) .$$

Сега,

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} pk^{2p} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} pk^2 \equiv p\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^2 \equiv p\frac{\frac{p-1}{2}(\frac{p-1}{2}+1)(2\frac{p-1}{2}+1)}{6} \equiv p^2 \frac{1}{6} \frac{p^2-1}{4} \ (\mathrm{mod}\ p^2) , \qquad (**)$$

Бидејќи $(p,6) = 1$ а $p-1$ и $p+1$ се два последователни парни броеви добиваме $8 \mid p^2 - 1$. Но, p е прост број поголем од 3 и $p-1, p, p+1$ се три последователни природни броеви, па затоа $3 \mid p^2 - 1$. Значи, $\frac{p^2-1}{24} \in \mathbb{N}$ од каде добиваме

$$p^2 \frac{1}{6} \frac{p^2-1}{4} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^2) .$$

Сега од (*) и (**) добиваме

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^2) \text{, т.е. } p^2 \mid \sum_{k=1}^{p-1} k^{2p+1} .$$

35. За природниот број n со $\varphi(n)$ го означуваме бројот од сите природни броеви кои се заемно прости со n. Најди ги сите природни броеви n за кои $\varphi(n) \mid n$.

Решение. Нека n и k се природни броеви за кои $n = k\varphi(n)$. Притоа $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_l^{a_l}$, $p_1 < p_2 < ... < p_l$ е канонската факторизација на n. Познато е дека

$$\varphi(n) = n(1-\tfrac{1}{p_1})(1-\tfrac{1}{p_2})...(1-\tfrac{1}{p_l}),$$

па ако замениме во $n = k\varphi(n)$, тогаш

$$p_1 p_2 ... p_l = k(p_1-1)(p_2-1)...(p_l-1). \qquad (1)$$

Ако бројот на прости делители на n е $l > 2$, тогаш бројот од десната страна на (1) делив со 4 а бројот од левата страна на (1) не е делив со 4. Според тоа, $l \le 2$. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $l = 2$. Тогаш равенството (1) го добива обликот

$$p_1 p_2 = k(p_1-1)(p_2-1).$$

Бидејќи $k(p_1-1)(p_2-1)$ е делив со 2, добиваме дека $p_1 = 2$. Но тогаш равенството го добива обликот

$$2p_2 = k(p_2-1).$$

Бидејќи $(p_2, p_2-1) = 1$ и $p_2 - 1$ е парен, добиваме дека $p_2 - 1 = 2$, т.е. $p_2 = 3$. Но тогаш $k = p_2 = 3$.

Значи, бараниот број е $n = 2^{a_1} 3^{a_2}$, каде $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

Случај 2. $l = 1$. Тогаш равенството го добива обликот $p_1 = k(p_1-1)$, од каде добиваме $p_1 = 2$ и $k = 2$. Но тогаш $n = 2^{a_1}$, каде $a_1 \in \mathbb{N}$..

7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Покажи дека на единствен начин со замена на различни букви со различни цифри се добива

$$\begin{array}{rccccc} & & Ш & Е & С & Т \\ & & Е & Д & Н & О \\ + & & & Д & В & Е \\ \hline & Д & Е & В & Е & Т \end{array}$$

при што $\text{Н} + 1 = \text{Т}$. (броевите не започнуваат со 0)

Решение. Очигледно е дека $\text{Д} = 1$. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се броевите кои ги памтиме при собирањето од десно на лево. Воочуваме дека $x_4 = 1$. Од $\text{Т} + \text{О} + \text{Е} = 10x_1 + \text{Т}$ следува дека $x_1 = 1$. Понатаму имаме $\text{Ш} + \text{Е} + x_3 = 10 + \text{Е}$ (зошто $x_4 = 1$), т.е. $\text{Ш} + x_3 = 10$. Бидејќи $\text{Е} + 1 + 1 + x_2 < 20$, заклучуваме дека $x_3 \le 1$, па значи $x_3 = 1$, $\text{Ш} = 9$. Од $x_3 = 1$ се добива дека $\text{Е} \in \{6,7,8\}$ (напиши ја соодветната шема).

Ако $\text{Е}=6$, тогаш $x_2=2$, $\text{В}=0$; но, $\text{С}+\text{Н}+\text{В}+1<20$, па добиваме дека $x_2\le 1$. Значи, $\text{Е}\ne 6$.

Ако $\text{Е}=7$, тогаш $x_2=1$ и $\text{В}=0$; но, $\text{С}+\text{Н}+1=10+7$, т.е. $\text{С}+\text{Н}=16$; од друга, пак, страна, $\text{С}+\text{Н}\le 8+6=14$. Значи, $E\ne 7$.

За $\text{Е}=8$, добиваме $\text{О}=2$; од $\text{С}+\text{Н}+1=8$ и $\text{Н}+1=\text{Т}$, добиваме $\text{С}=3$, $\text{Н}=4$, $\text{Т}=5$. Следствено,

$$\begin{array}{rrrrr} & 9 & 8 & 3 & 5 \\ & 8 & 1 & 4 & 2 \\ + & & 1 & 0 & 8 \\ \hline 1 & 8 & 0 & 8 & 5 \end{array}$$

2. Во продавница имало 6 сандаци со јаболка со тежини од 15 kg, 18 kg, 19 kg, 20 kg и 31 kg. Двајца купувачи купиле 5 сандаци, така што едниот зел двапати повеќе јаболка од другиот. Кој сандак останал непродаден?

Решение. Збирот на тежините на сите сандаци изнесува 119 kg. Купувачите зеле 5 сандаци, со тоа што едниот зел двапати повеќе од другиот, па затоа вкупната тежина мора да е делива со 3. Тоа е единствено можно ако се изостави сандакот од 20 kg, бидејќи само 20 при делење со три има ист остаток како и при делењето на 119 со 3. За да провериме дека задачата има смисла, да видиме кои сандаци ги купиле купувачите. Вкупната тежина на петте сандаци е 99 kg. Првиот купувач зел 66 kg, а вториот 33 kg. Значи, првиот ги купил сандаците со тежини 16 kg, 19 kg и 31 kg, а вториот ги купил сандаците со тежини 15 kg и 18 kg.

3. Пред секој од броевите $1,2,\ldots,2011$, избери еден од знаците + или -, така што изразот $A=|\pm 1\pm 2\pm\ldots\pm 2011|$ да има најмала вредност.

Решение. Јасно е дека $A\ge 0$. Ако најдеме избор на знаци за кој $A=0$, тогаш за таквиот избор A има најмала вредност . Пред првите три броеви ги избираме знаците -, - и +, а пред останатите 2008 броја (2008 е делив со 4), ги избираме наизменично знаците +, - , - , + . Се добива:

$A=|-1-2+3+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\ldots+(2008-2009-2010+2011)|=0$.

4. Едно момче за да стигне до саканата цел треба да помине низ три врати. На секоја врата стои по еден чувар. Момчето во себе носи извесен број јаболка. На првиот чувар треба да му даде половина од тој број и уште половина јаболко. На вториот чувар треба да му даде половина од остатокот и уште половина јаболко и на третиот чувар треба да му даде половина од остатокот и уште половина јаболко. Да се најде најмалиот број на јаболка што треба да го носи со себе момчето, за да стигне до саканата цел, без да се пресече ниту едно јаболко.

Решение. Нека x е бројот на јаболката што момчето ги носи со себе. На првиот чувар треба да му даде $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ јаболка. Му останале $x-\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{2}$

јаболка. На вториот чувар трба да му даде $\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$ јаболка. Му останале $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-3}{4}$ јаболка. И на третиот чувар треба да му даде $\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{8}$ јаболка. Бидејќи не е дозволено сечење на јаболката, потребно е броевите $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x+1}{4}$ и $\frac{x+1}{8}$ да бидат природни. Значи бројот $x+1$ треба да биде деллив со 8. Најмалиот природен број x за кој што важи ова е $x=7$.

5. На мудрецот S му го кажале само збирот на три последователни природни броеви, а на мудрецот P само нивниот производ, но ниеден од нив не бил во состојба да утврди кои се трите почетни броеви.

„Ако јас знаев“, рекол S, „дека твојот број е поголем од мојот, ќе ги определев броевите“.

„Но мојот број е помал од твојот“ заклучил P, и „броевите се ..., ... и ... “.

Определи ги трите броеви.

Решение. Да ја означиме сумата на трите броеви со s, а производот со p. Јасно е дека $s\geq 3$.

Мудрецот S ја знае сумата s, но таа е таква да тој не може да ги одреди броевите знаејќи ја само оваа сума без дополнителна информација.

Ако $s=3$, трите дадени броеви се еднакви на 1, во тој случај мудрецот S веднаш би ги одредил броевите. Значи, s не е 3.

Ако $s=4$, трите броеви се $2,1$ и 1, но и во овој случај мудрецот S веднаш би ги одредил броевите. Значи, s не е 4.

Ако $s=5$, трите броеви се $3,1$ и 1, или, пак $2,2$ и 1. Во првиот случај $p=3$, а во вториот $p=4$. Во двата случаи $p<s$; што значи дека S во овој случај знае дека производот е помал од сумата и не би ја дал изјавата дадена во текстот.

Занчи, s не е 5.

Нека $s\geq 7$. Освен другите можности, трите броеви можат да бидат $2,2$ и $s-4$, како и $2,1$ и $s-3$. Во првиот случај:

$p=4s-16=s+3s-16\geq s+211-16=s+5>s$, а во вториот:

$p=2s-16=s+s-16\geq s+7-6=s+1>s$.

Во двата случаи производот е поголем од збирот, па мудрецот S дури и ако знае дека производот е поголем од збирот, не може да одреди кои се трите броеви (има барем две можности). Значи, $s\leq 6$.

Останува можноста $s=6$. Во овој случај трите броеви се $4,1$ и 1 или $3,2$ и 1 или $2,2$ и 2. Во првиот случај $p=4$, во вториот $p=6$ а во третиот $p=8$.

Мудрецот S ги знае овие три можности и доколку знае дека производот е поголем, коже да заклучи дека трите дадени броеви се $2,2$ и 2. Значи, $s=6$.

Мудрецот P размислува на претходно изложениот начин и заклучува дека $s=6$. P го знае производот и тврди дека тој е помал од збирот. Значи, $p=4$ и дадените броеви се $4,1$ и 1.

6. Одреди ги сите подредени двојки (x,y), $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$ за коишто три од наведените тврдења се точни, а само едно е неточно:

(1) $y\,|\,(x+1)$ (2) $x=2y+5$ (3) $3\,|\,(x+y)$ (4) $x+7y$ е прост број

Решение. Тврдењата (2) и (3) не може истовремено да се точни. Од $x=2y+5$ и $3\,|\,(x+y)$, т.е. $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$ следува $2y+5+y=3k$, $5=3(k-y)$. Последното равенство не е можно, бидејќи десната страна е делива со 3 а левата не е.

Исто така, тврдењата (3) и (4) не можат истовремено да бидат точни. Од $x+y=3k$, $k\in\mathbb{N}$, добиваме $x+7y=3k-y+7y=3(k+2y)$, па од $k+2y>1$ повлекува дека $k+2y$ не може да биде прост број за ниедни $k,y\in\mathbb{N}$.

Следствено, треба да се точни (1),(2) и (4). Од (1) следува $x+1=my$, $m\in\mathbb{N}$, па со замена во (2) добиваме:

$$my-1=2y+5, \qquad y=\tfrac{6}{m-2}.$$

За да биде y природен број, треба $(m-2)\,|\,6$, т.е.

$$(m-2)\in\{1,2,3,6\} \quad \text{или} \quad m\in\{3,4,5,8\}.$$

Тогаш добиваме: $(x,y)\in\{(17,6),(11,3),(9,2),(7,1)\}$.

За да биде точно и тврдењето (4) треба за овие вредности на x и y изразот $x+7y$ да е прост број, а тоа е точно само за подредените парови $(17,6)$ и $(9,2)$.

7. Од 7 листови хартија одреден број листови се исечени на по 10 делови. Од добиените листови, одреден број листови повторно е исечен на по 10 делови. Ако оваа постапка се повтори неколку пати, дали е можно на крајот да се добијат 2005 листови?

Решение. Нека во првиот чекор се исечени n_1 листови. Тогаш после сечењето ќе има вкупно

$$10n_1+(7-n_1)=7+9n_1$$

листови (при тоа $1\le n_1\le 7$). Ако во вториот чекор се исечени n_2 листови ќе се добијат вкупно

$$10n_2+(7+9n_1-n_2)=7+9n_1+9n_2$$

листови. Продолжувајќи на сличен начин заклучуваме дека при секое ново сечење, бројот на листовите се зголемува за некој број помножен со 9. Според тоа, на крајот, ќе има вкупно $7+9n$ листови. Значи треба да важи равенството $2005=7+9n$, т.е. $9n=1998$. Бројот 1998 се дели со 9 значи одговорот е потврден.

8. Дадени се 21 плочка во облик на квадратче, со иста димензија. На четири плочки е запишан бројот 1; на две плочки е запишан бројот 2; на седум плочки е запишан бројот 3; на 8 плочки е запишан бројот 4. Користејќи 20 од тие плочки, Димитар формирал правоаголник со димензии 4 на 5. За формираниот правоаголник збирот на броевите во секоја редица е иста, и збирот на броевите во секоја колона е иста. Кој број стои на неискористената плочка?

Решение. Да го означиме со S збирот на сите броеви запишани на плочките кои го формираат правоаголникот. Од условот на задачата, имаме дека 4 е делител на S и дека 5 е делител на S. Значи 20 е делител на S. Збирот на сите броеви запишани на 21-та плочка е точно 61. Заклучуваме дека на неискористената плочка мора да стои бројот 1.

9. За позитивните рационални броеви a,b и c е исполнето равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Докажи дека $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во видот

$$ac+bc=ab,$$

односно

$$ab-ac-bc=0.$$

Тогаш

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-ac-bc)=(a+b-c)^2.$$

Сега

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b-c)^2}=|a+b-c|,$$

Бидејќи $a,b,c\in\mathbb{Q}^+$, добиваме $|a+b-c|\in\mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\in\mathbb{Q}^+$.

10. Нека x,y и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ се рационални броеви. Докажи дека $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ се исто така рационални броеви.

Решение. Да ставаме $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$. Јасно е дека $a\geq 0$. Ако $a=0$ т.е. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=0$ тогаш $\sqrt{x}=0$ и $\sqrt{y}=0$, што значи дека $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ се рационални броеви. Ако $a>0$, тогаш последователно имаме

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$$

$$\sqrt{x}=a-\sqrt{y}\quad /^2$$

$$x=a^2-2a\sqrt{y}+y$$

$$\sqrt{y}=\frac{a^2+y-x}{2a}\in\mathbb{Q}$$

бидејќи $a\neq 0.$ Конечно $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$ и $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$, па затоа

$$\sqrt{x}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{y}\in\mathbb{Q}.$$

11. Нека x,y и $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ $(x\neq y)$ се рационални броеви. Докажи дека $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ се исто така рационални броеви.

Решение. Да ставаме $\sqrt{x}-\sqrt{y}=a$. Од $x\neq y$ следува $a\neq 0.$ Имаме

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=a$$

$$\sqrt{x}=a+\sqrt{y}\quad /^2$$

$$\sqrt{y}=\frac{x-a^2-y}{2a}\in\mathbb{Q}$$

бидејќи $a\neq 0.$ Конечно $\sqrt{x}-\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$ и $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$, па затоа

$$\sqrt{x}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{y}\in\mathbb{Q}.$$

12. Ако x, y, z и $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ се рационални броеви, тогаш и $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ се исто така рационални броеви. Докажи!

Решение. Ако $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=r$, $r \in \mathbb{Q}$, тогаш $\sqrt{y}+\sqrt{z}=r-\sqrt{x}$. Последниот израз го квадрираме и го добиваме изразот

$$2\sqrt{zy}=(r^2+x-z-y)-2r\sqrt{x},$$

од кој со повторно квадрирање добиваме

$$4yz=(r^2+x-y-z)^2+4r^2x-4r(r^2+x-z-y)\sqrt{x}.$$

Бидејќи x, y, z и r се рационални броеви, заклучуваме дека и $\sqrt{x}$ е рационален број. На сличен начин заклучуваме дека и $\sqrt{y}$, односно $\sqrt{z}$ е рационален број.

13. Да се определат првите 1993 цифри по децималната запирка на бројот $\sqrt{0,9999...9}$, каде што во децималниот запис на бројот под корен се искористени 1993 деветки.

Решение. Да ставиме $a=0,999...9$. Бидејќи важи $0<a<1$, добиваме дека $0<\sqrt{a}<1$. Од последните две неравенства се добива

$$0<a=\sqrt{a}\sqrt{a}<\sqrt{a}<1,$$

т.е. $0<a<\sqrt{a}<1$ од каде што следува дека првите 1993 цифри по децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$ се деветки.

14. Нека $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$s_n=\sqrt{1+\tfrac{1}{1^2}+\tfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}+\tfrac{1}{(n+1)^2}}$$

е рационален број.

Решение. За $k \in \mathbb{N}$ имаме

$$1+\tfrac{1}{k^2}+\tfrac{1}{(k+1)^2}=\tfrac{k^2(k+1)^2+k^2+(k+1)^2}{k^2(k+1)^2}=\tfrac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}=\tfrac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}.$$

Сега

$$\sqrt{\tfrac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\tfrac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\tfrac{k(k+1)+1}{k(k+1)}=1+\tfrac{1}{k(k+1)}=1+\tfrac{1}{k}-\tfrac{1}{k+1},$$

па според тоа,

$$s_n=(1+\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+...+(1+\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n})+(1+\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1})=n+1-\tfrac{1}{n+1}$$

Значи, $s_n=n+1-\tfrac{1}{n+1} \in \mathbb{Q}$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

15. Докажи дека постојат бесконечно многу ирационални броеви x и y такви што

$$x+y=xy \in \mathbb{N}.$$

Решение. Нека n е произволен природен број. Ако x, y се реални броеви такви што $x+y=xy=n$, тогаш тие се решенија на квадратната равенка

$$t^2-nt+n=0.$$

Решенија на последната равенка се

$$t_{1/2}=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4n}}{2}.$$

Бидејќи за $n\geq 5$

$$(n-3)^2=n^2-6n+9<n^2-4n<(n-2)^2,$$

добиваме дека $\sqrt{n^2-4n}\in\mathbf{I}$, т.е. $\sqrt{n^2-4n}$ е ирационален број. Сега

$$x=\frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$$

се ирационални броеви за кои што $x+y=xy\in\mathbb{N}$.

Бидејќи n е произволен природен број, добивме дека постојат бесконечно многу од бараните броеви.

16. Да се определат вредностите за бројот $n\in\mathbb{N}$ за кои што $\sqrt{\frac{9n-1}{n+1}}$ е рационален број.

Решение. Нека претпоставиме дека $\sqrt{\frac{9n-1}{n+1}}$ е рационален број. Тогаш постојат $a,b\in\mathbb{N}$, такви што $\sqrt{\frac{9n-1}{n+1}}=\frac{a^2}{b^2}$ и $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Но тогаш

$$n=\frac{7a^2+b^2}{9b^2-a^2}=-7+\frac{64b^2}{9b^2-a^2}.$$

Од $(a,b)=1$ добиваме $(a^2,b^2)=1$ и $(9b^2-a^2,b^2)=1$. Според тоа $n\in\mathbb{N}$ ако и само ако $9b^2-a^2\mid 64$. Но a,b и n се природни броеви, па според тоа $9b^2-a^2\geq 8$, од каде добиваме

$$9b^2-a^2=(3b+a)(3b-a)\in\{8,16,32,64\}.$$

Уште повеќе збирот на $3b+a$ и $3b-a$ е делив со 6, нивната разлика е делива со 2 и $3b+a>3b-a$. Според тоа, можни се следните случаи

$$\begin{cases}3b+a=4\\3b-a=2\end{cases}\qquad\begin{cases}3b+a=8\\3b-a=4\end{cases}\qquad\begin{cases}3b+a=16\\3b-a=2\end{cases}$$

Од последните системи ги добиваме решенијата

$$(a,b)=(1,1),\ (a,b)=(2,2) \text{ и } (a,b)=(7,3).$$

Јасно е дека $a=2,b=2$ не е решение, бидејќи $\mathrm{NZD}(2,2)=2>1$.

За $a=1,b=1$ добиваме $n=1$ и $\sqrt{\frac{9\cdot1-1}{1+7}}=1\in\mathbb{Q}$.

За $a=7,b=3$ добиваме $n=11$ и $\sqrt{\frac{9\cdot11-1}{11+7}}=\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}$.

17. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е делив со 9.

Решение. Треба да се докаже дека за било кој природен број $n\in\mathbb{N}$,

$$9\mid(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$$

т.е. дека 9 го дели изразот

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1$$
$$= 3n^3-3n+9n$$
$$= 3n(n^2-1)+9n$$
$$= 3n(n-1)(n+1)+9n\,.$$

Од последниот запис се гледа дека првиот собирок е делив со 9, а јасно е дека вториот собирок е делив со 9. Според тоа и изразот е делив со 9.

18. Докажи дека дропката $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+1}$ не може да се скрати за било кој цел број a .

Решение. Дропката ќе ја запишеме во облик

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+1}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+a^2-8}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+(a^2+3)-11}$$

Од последниот запис на дропката се гледа дека таа може да се скрати ако бројот a^2+3 е делив со 11. Меѓутоа, следните импликации се точни:

$$a=11k\pm1,\ (k\in\mathbb{Z}) \quad\Rightarrow\quad a^2+3=121k^3\pm22k+4=11k_1+4.$$
$$a=11k\pm2,\ (k\in\mathbb{Z}) \quad\Rightarrow\quad a^2+3=11k+7,$$
$$a=11k\pm3,\ (k\in\mathbb{Z}) \quad\Rightarrow\quad a^2+3=11k+1,$$
$$a=11k\pm4,\ (k\in\mathbb{Z}) \quad\Rightarrow\quad a^2+3=11k+8,$$
$$a=11k\pm5,\ (k\in\mathbb{Z}) \quad\Rightarrow\quad a^2+3=11k+6,$$
$$a=11k,\ (k\in\mathbb{Z}) \quad\Rightarrow\quad a^2+3=11k+3.$$

Значи, a^2+3 не е делив со 11 за кој било цел број a. Затоа, дадената дропка не може да се скрати ни за еден цел број a.

19. Докажи дека збирот $S_k=1^k+2^k+...+n^k$, каде n е природен број, а k е непарен природен број, е делив со збирот $S_1=1+2+...+n$.

Решение. Треба да се докаже дека $\frac{n(n+1)}{2}\,|\,S_k$. Случаите $k=1$ и $k=2$ се тривијални. Да претпоставиме дека k е поголем од 2 . Ќе разгледаме два случаи

1° n е парен. Изразот S_k ќе го запишеме во облик

$$S_k=[1^k+n^k]+[2^k+(n-1)^k]+...+[(\tfrac{n}{2})^k+(\tfrac{n}{2}+1)^k] \qquad (1)$$

Секој од изразите во средните загради е делив со $n+1$, што значи дека $n+1$ го дели S_k . (Имено, за k непарен број е исполнето

$$a^k+b^k=(a+b)(a^{k-1}-a^{k-2}b+...+b^{k-1})\ ).$$

Ако S_k го запишеме во облик

$$S_k=[1^k+(n-1)^k]+[2^k+(n-2)^k]+...+[(\tfrac{n}{2}-1)^k+(\tfrac{n}{2}+1)^k]+n^k \qquad (2)$$

тогаш секој израз во средните загради е делив со $\frac{n}{2}$, а исто така и n^k е делив со $\frac{n}{2}$. Значи, ако n е парен број тогаш $S_1\,|\,S_k$.

2° Нека n е непарен број. Во тој случај, секој израз во средните загради, во разложувањето (1) е делив со $\frac{n+1}{2}$ па затоа $\frac{n+1}{2} \mid S_k$. Освен тоа, секој израз во средните загради од разложувањето (2), е делив со n и n^k е делив со n. Значи $n \mid S_k$, па според тоа $\frac{n(n+1)}{2} \mid S_k$, што и требаше да се докаже.

20. Одреди го реалниот број x од условот $2x-3,\ 5x-14$ и $\frac{2x-3}{5x-14}$ да се цели броеви.

Решение. Нека: $a=2x-3, b=5x-14, c=\frac{2x-3}{5x-14}$, каде a, b и c се цели броеви. Имаме $10x-15=5a, 10x-28=2b, a=bc.$ Оттука $5a-2b=13$ и $b(5c-2)=13.$ Бидејќи 13 е прост број, $b=1$, $a=3$ и $c=3$. Заради тоа $x=3$.

21. Нека n и k се природни броеви, $k \le n$. Докажи ги равенствата:

а) $\underbrace{333...3}_{n} \cdot \underbrace{333...3}_{k} = \underbrace{111...1}_{k-1}0\underbrace{999...9}_{n-k}\underbrace{888...8}_{k-1}9$

б) $\underbrace{666...6}_{n} \cdot \underbrace{666...6}_{k} = \underbrace{444...4}_{k-1}3\underbrace{999...9}_{n-k}\underbrace{555...5}_{k-1}6$.

Решение. а) Имаме:

$$L=3\cdot(10^0+10^1+10^2+...+10^{n-1})\cdot 3\cdot(10^0+10^1+10^2+...+10^{k-1})$$

$$=9\cdot\frac{10^n-1}{9}\cdot\frac{10^k-1}{9}=\frac{1}{9}(10^{n+k}-10^n-10^k+1).$$

$$D=9+8\cdot 10+...+8\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^k+...+9\cdot 10^{n-1}+0\cdot 10^n+10^{n+1}+...+10^{n+k-1}$$

$$=9+8\cdot 10\cdot\frac{10^{k-1}-1}{9}+9\cdot 10^k\,\frac{10^{n-k}-1}{9}+10^{n+1}\cdot\frac{10^{k-1}-1}{9}$$

$$=\frac{1}{9}(10^{n+k}-10^n-10^k+1),$$

т.е. $L=D$.

б) Доказот е сличен како под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

21. Страните на една книга се означени со броевите 1 до 100 на вообичен начин. Од книгата се откинати одреден број листови и збирот на броевите на откинатите страни е 4949. Колку листови се откинати од книгата?

Решение. Секој лист во книгата е означен со броевите $2n-1$ и $2n$ за некој $n\in\{1,2,3,....,50\}$. Нивниот збир е еднаков на $4n-1$. Со k ќе го означиме бројот на листови кои останале. Тогаш

$$(4n_1-1)+(4n_2-1)+...+(4n_k-1)=(1+2+3+...+100)-4949=101$$

$$4(n_1+n_2+...+n_k)-k=101.$$

Бидејќи $101\equiv 3 (\text{mod } 4)$, добиваме дека $k\equiv 3\ (\text{mod } 4)$. Значи k припаѓа на множеството $\{3,7,11,15,...,97\}$.

Ако $k=7$, тогаш

$$4(n_1+n_2+...+n_7)-7\ge 4(1+2+3+4+5+6+7)-7=105>101.$$

Ако $k>7$, тогаш слично како и претходно

$$4(n_1+n_2+...+n_k)-k \geq 4(1+2+3+...+k)-k = 4\frac{k(k+1)}{2}-k =$$

$$= 2k^2+k > 2\cdot 7^2+7 = 108+7 = -115 > 101.$$

Значи $k<7$ од каде заради условот за k, добиваме $k=3$. Според тоа, останале 3 листови, а се откинати 47 листови.

Секако дека таков случај е можен, на пример ако се истргнати првиот, вториот и 23-от лист. Тогаш

$$1+2+3+4+45+46 = 10+91 = 101.$$

Во општ случај

$$4(n_1+n_2+n_3)-3 = 101 \text{, т.е. } n_1+n_2+n_3 = 27.$$

Последната равенка има повеќе решенија: $\{(1,3,23),(1,5,21),...\}$.

22. Да се најдат сите можни целобројни вредности за m, такви што $\sqrt{m^2+m+1}$ е цел број.

Решение. Ако $m\in\mathbb{Z}$ и $m>0$, тогаш

$$m^2 < m^2+m+1 < m^2+2m+1,$$

$$m^2 < m^2+m+1 < (m+1)^2.$$

Но, тогаш

$$m < \sqrt{m^2+m+1} < m+1.$$

Меѓу два последователни природни броеви не постои природен број, па според тоа $\sqrt{m^2+m+1}$ не е природен број.

Ако $m\leq -2$, тогаш

$$m^2+2m+1 < m^2+m+1 < m^2$$

$$(m+1)^2 < m^2+m+1 < m^2,$$

$$\sqrt{(m+1)^2} < \sqrt{m^2+m+1} < \sqrt{m^2},$$

$$|m+1| < \sqrt{m \quad + m+1} < |m|,$$

односно

$$-(m+1) < \sqrt{m^2+m+1} < -m.$$

Меѓу последователните природни броеви $-(m+1)$ и $-m$ не постои природен број, па според тоа во овој случај $\sqrt{m^2+m+1}$ не е природен број.

За $m=0$ добиваме

$$\sqrt{m^2+m+1} = \sqrt{0^2+0+1} = \sqrt{1} = 1,$$

а за $m=-1$ добиваме

$$\sqrt{m^2+m+1} = \sqrt{(-1)^2+(-1)+1} = \sqrt{1} = 1.$$

Значи, единствени цели броеви m за кои $\sqrt{m^2+m+1}$ е цел број се $m=0$ и $m=-1$.

23. Природниот број го нарекуваме палиндром ако тој е еднаков на бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед. Определи ги сите природни броеви m и n такви што

$$\underbrace{111...11}_{m}\cdot\underbrace{111...11}_{n}$$

е палиндром.

Решение. Да забележиме дека $N=\underbrace{111...1}_{m-\text{пати}}\cdot\underbrace{111...1}_{n-\text{пати}}$ има $m+n-1$ цифри, бидејќи

$$N=\underbrace{111...1}_{m-\text{пати}}\cdot\underbrace{111...1}_{n-\text{пати}}<2\cdot 10^{m-1}\times 2\cdot 10^{n-1}=4\cdot 10^{m+n-2}$$

цифри.

Ако $m,n>9$, тогаш разгледувајќи ги првите десет најлеви цифри на N, деветтата цифра нема да е 9, па според тоа бројот што се состои од првите девет цифри на N е поголем од бројот формиран од од последните девет цифри на N но запишани во обратен редослед. Според тоа, ако m и n се поголеми од 9 бројот N не е палиндром.

Ако барем еден од броевите m и n не е поголем од 9, не е тешко да се види дека N ќе биде палиндром.

24. Определи ги природните броеви n за кои постојат рационални броеви a и b кои не се цели, така што $a+b$ и a^n+b^n се цели броеви.

Решение. *Случај 1.* Нека n е непарен природен број. Бираме $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{2^{n-1}-1}{2}$. Јасно е дека a и b се рациоанлни броеви кои не се цели. Притоа,

$$a+b=\frac{2^n-1}{2}+\frac{1}{2}=2^{n-1}.$$

Од друга страна,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-....+b^{n-1})=2^{n-1}(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-....+b^{n-1})$$

Секој собирок во заградата од десната страна има именител 2^{n-1} па тој збир е цел број.

Случај 2. Нека n е непарен број, т.е. $n=2k$ и нека a и b се рационални броеви за кои се исполнети условите од задачата. Тогаш $a=\frac{p}{d}$ и $b=\frac{q}{d}$, при што $(p,d)=1$, $(q,d)=1$ и $d\,|\,p+q$. Тогаш

$$\begin{aligned}p^n+q^n&=p^{2k}+q^{2k}=p^{2k}-q^{2k}+2q^{2k}=(p^2-q^2)(p^{2k-2}-p^{2k-4}q^2+....+q^{2k-2})+2q^{2k}=\\&=(p+q)K+2q^{2k}\end{aligned}$$

каде $K=(p-q)(p^{2k-2}-p^{2k-4}q^2+....+q^{2k-2})$ е цел број.

Бидејќи a^n+b^n е цел број, од равенството $a^n+b^n=\frac{p^n+q^n}{d^n}$ добиваме дека $d^n\,|\,p^n+q^n$, т.е. $d\,|\,p^n+q^n$. Од тоа што $d\,|\,p+q$ добиваме дека $d\,|\,2q^n$, а бидејќи $(q,d)=1$ имаме $d=2$. Според тоа, p и q се непарни броеви, па збирот p^n+q^n при делење со 4 има остаток 2, а тој треба да е делив со $2^{2k}=4^k$ за $k\geq 1$.

Заради добиената контрадикција, n не може да е парен број.

25. Тројката природни броеви (a,b,c) ја нарекуваме хармониска ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажи дека за секој природен број $c\in\mathbb{N}$, бројот на хармонични тројки е еднаков на бројот на делители на бројот c^2.

Решение. Ако (a,b,c) е хармонична тројка тогаш $\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$, односно $a>c$ и $b>c$. Значи, $a-c>0$ и $b-c>0$.

Од друга страна, имаме

$$\begin{aligned}
&ca+cb=ab\\
&ab-ca-ca+c^2=c^2\\
&a(b-c)-c(b-c)=c^2\\
&(a-c)(b-c)=c^2\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ако (r,s) се такви што $rs=c^2$, тогаш равенката (*) има едно решение (a,b), т.е.

$$a=c+r,$$
$$b=c+s\,.$$

Обратно, ако (a,b) е едно решение на (*), тогаш $c^2=rs$, каде $r=a-c$ и $s=b-c$.

Според тоа, помеѓу множеството решенија (a,b) на (*) и множеството $\{(r,s)\,/\,r,s\in\mathbb{N}, rs=c^2\}$ постои обратно еднозначно соодветствие. Според тоа, бројот на хармониски тројки е еднаков на бројот на делители на c^2.

26. Докажи дека за произволен природен број $a_1>1$, постои растечка низа од природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, таква што $a_1+a_2+...+a_n$ е делител на $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $a_1>0$ е произволно избран природен број. Јасно е дека тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за било кој природен број не поголем од n (индуктивна претпоставка). Ќе воведеме ознаки $B_n=a_1+a_2+...+a_n$ и $A_n=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$. Според индуктивната претпоставка

$$B_n=a_1+a_2+...+a_n \mid a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=A_n\,.$$

Од равенството

$$A_n+a_{n+1}^2=A_n+a_{n+1}^2-B_n^2+B_n^2=A_n+B_n^2+(a_{n+1}-B_n)(a_{n+1}+B_n)$$

добиваме дека избраниот број a_{n+1} треба да е таков што $a_{n+1}+B_n \mid A_n+B_n^2$. Сега е јасно дека доволно е за a_{n+1} да избереме

$$a_{n+1}=A_n+B_n^2-B_n$$

Тогаш

$$\begin{aligned}
&B_{n+1}=B_n+a_{n+1}=A_n+B_n^2\\
&A_{n+1}=A_n+(A_n+B_n^2-B_n)^2=A_n+(A_n+B_n^2-B_n)^2-B_n^2+B_n^2=\\
&\qquad=A_n+B_n^2+(A_n+B_n^2)(A_n+B_n^2-2B_n)=(A_n+B_n^2)(1+A_n+B_n^2-2B_n)
\end{aligned}$$

и

$$B_{n+1}=A_n+B_n^2 \mid (A_n+B_n^2)(1+A_n+B_n^2-2B_n)=A_{n+1}$$

Од друга страна,

$$a_{n+1} > A_n \ge a_n^2 > a_n .$$

Според принципот на математичка индукција, тврдењето од задачата е точно.

27. Природниот број N може да се претстави како збир на квадрати на три цели броеви, секој од кои е делив со 3. Докажи дека N може да се претстави како збир на квадрати на три цели броеви, кои не се деливи со 3.

Решение. Од условот на здачата бројот N може да се претстави во облик

$$9^n(a^2+b^2+c^2) , \qquad (*)$$

$a, b, c, n \in \mathbb{N}$ и a не е делив со 3.

Секој број од облик (*) може да се претстави на поинаков начин.

Лема. Секој број од облик (*) може да се претстави во облик

$$9^{n-1}(x^2+y^2+z^2) ,$$

каде $x, y, z \in \mathbb{Z}$ и $3 \nmid x, y, z$.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a+b+c$ не е делив со 3. Во спротивно a ќе го замениме со $-a$, при што добиваме број $-a+b+c = a+b+c-2a$ кој не е делив со 3. Сега

$$9(a^2+b^2+c^2) = (4a^2+4b^2+c^2)+(a^2+4b^2+4c^2)+(4a^2+b^2+4c^2) =$$

$$= (2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2a+2c-b)^2 .$$

Секој од броевите $2a+2b-c, 2b+2c-a, 2a+2c-b$ е конгуентен со бројот $2(a+b+c)$, кој не е делив со 3. Значи, ниту еден од нив не е делив со 3.

Сега со употреба на лемата $9^n(a^2+b^2+c^2)$ можеме да го запишеме во облик

$$9^{n-1}[(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2]$$

и $3 \nmid 2a+2b-c, 2b+2c-a, 2c+2a-b$.

Доволно е лемата да се примени уште $n-1$ пати последователно, за да се добие бараното претставување.

28. Нека N е природен број, $N > 1$, и S е збирот на сите делители на N (вклучувајќи ги 1 и N). Докажи дека

$$k\sqrt{N} < S < \sqrt{2k}N , \qquad (*)$$

каде k е бројот на сите делители.

Решение. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се делителите на бројот N. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < .... < d_k = N .$$

Но, тогаш $d_i \cdot d_{k+1-i} = N$, од каде заради неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина е исполнето:

$$2S = \sum_{i=1}^{k}(d_i + d_{k+1-i}) > \sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{d_i d_{k+1-i}} = \sum_{i=1}^{k} 2\sqrt{N} = 2k\sqrt{N}$$

(неравенството е строго бидејќи $d_1 + d_k = 1 + N > 2\sqrt{N}$, за било кој $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$). Со тоа е докажано левото неравенство.

Од равенството $d_i \cdot d_{k+1-i} = N$, добиваме

$$S=\sum_{i=1}^{k} d_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{N}{d_i}=N\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\,. \qquad (1)$$

Да забележиме дека $d_i \geq i$, за секој $i=1,2,3,...,k$. Но тогаш $\frac{1}{d_i}\leq\frac{1}{i}$, па според тоа

$$S=N\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\leq N\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\,.$$

Доволно е да се докаже дека $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}<\sqrt{2k}$, $k\geq 2$. Истото ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција.

За $k=2$ имаме

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<2=\sqrt{2\cdot 2}\,.$$

Нека тврдењето е точно за $k=n$, т.е. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\sqrt{2n}$ (индуктивна претпоставка). Од точноста на неравенството

$$1<(n+1)(\sqrt{2(n+1)}-\sqrt{2n}),\ \ n\in\mathbb{N}\,,$$

ја добиваме точноста на неравенството $\sqrt{2n}+\frac{1}{n+1}<\sqrt{2(n+1)}$. Сега

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}<\sqrt{2n}+\frac{1}{n+1}<\sqrt{2(n+1)}\,.$$

Според принципот на математичка индукција $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}<\sqrt{2k}$ за секој $k\in\mathbb{N}$.

Со тоа е докажана (*).

29. Докажи дека природниот број A е квадрат на природен број ако и само ако за секој природен број n, барем една од разликите

$$(A+1)^2-A,\ (A+2)^2-A,\ \dots,\ (A+n)^2-A$$

е делива со n.

Решение. а)Нека $A=d^2$ каде $d\in\mathbb{N}$. Тогаш за секој $j=1,2,3,...,n$ имаме

$$(A+j)^2-A=(d^2+j)^2-d^2=(d^2-d+j)(d^2+d+j)\,.$$

Природните броеви од низата

$$d^2-d+1,\ d^2-d+2,\ d^2-d+3,...,\ d^2-d+n \qquad (1)$$

се делители на природните броеви од низата

$$(A+1)^2-A,\ (A+2)^2-A,\ \dots,\ (A+n)^2-A\,,$$

соодвено.

Но за низата (1) од n последователни природни броеви постои k, така што n е делител на d^2-d+k, па значи и на $(A+k)^2-A$.

б) Нека A не е квадрат на природен број. Тогаш постои прост делител p на A, таков што $p^{2k-1}\mid A$ и $p^{2k}\nmid A$.

Ќе избереме $n=p^{2k}$. Според условот опишан во задачата, за некој $j\in\{1,2,3,...,p^{2k}\}$ разликата $(A+j)^2-A$ е делива со p^{2k}. Според тоа $(A+j)^2$ и A имаа еднакви остатоци при делење со p^{2k-1}. Но $p^{2k-1}\mid A$, па според теоремите за деливост $p^{2k-1}\mid (A+j)^2$. Бидејќи $(A+j)^2$ е полн квадрат добиваме дека $p^{2k}\mid (A+j)^2$. Повторно според теоремите за деливост $p^{2k}\mid A$.

Заради добиената` контрадикција добиваме дека A е полн квадрат.

30. Нека $\frac{1}{2}<x<1$ и $k\in\mathbb{N}$. Пресметај го збирот $S=[\frac{x+1}{x}]+[\frac{x+2}{x+1}]+...+[\frac{x+k}{x+k-1}]$.

Решение. Од условот $\frac{1}{2}<x<1$ го добиваме равенството:

$$[\tfrac{1}{x+1}]=[\tfrac{1}{x+2}]=...=[\tfrac{1}{x+k-1}]=0,\ [\tfrac{1}{x}]=1.$$

Затоа

$$\begin{aligned} S&=[\tfrac{x+1}{x}]+[\tfrac{x+2}{x+1}]+...+[\tfrac{x+k}{x+k-1}]\\ &=[1+\tfrac{1}{x}]+[1+\tfrac{1}{x+1}]+...+[1+\tfrac{1}{x+k-1}]\\ &=1+[\tfrac{1}{x}]+1+[\tfrac{1}{x+1}]+...+1+[\tfrac{1}{x+k-1}]\\ &=k+1.\end{aligned}$$

31. Ако x е реален број, докажи го равенството $[x+\frac{1}{2}]=[2x]-[x]$.

Решение. Нека $x=x_0+y+\frac{1}{2}$, каде $y<\frac{1}{2}$. Тогаш

$$[x]=x_0 \text{ и } [x+\tfrac{1}{2}]=[x_0+y+1]=x_0+1.$$

Исто така $[2x]=[2x_0+2y+1]=2x_0+1$. Затоа

$$[2x]-[x]=2x_0+1-x_0=x_0+1=[x+\tfrac{1}{2}].$$

32. Нека n е природен број. Пресметај го збирот

$$S=[\tfrac{n+1}{2}]+[\tfrac{n+2}{2^2}]+[\tfrac{n+2^2}{2^3}]+...+[\tfrac{n+2^k}{2^{k+1}}].$$

Решение. Имаме

$$S=[\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{n}{2^2}+\tfrac{1}{2}]+[\tfrac{n}{2^3}+\tfrac{1}{2}]+...+[\tfrac{n}{2^{k+1}}+\tfrac{1}{2}].$$

Со примена на равенството од претходната задача добиваме

$$S=([n]-[\tfrac{n}{2}])+([\tfrac{n}{2}]-[\tfrac{n}{2^2}])+([\tfrac{n}{2^2}]-[\tfrac{n}{2^3}])+...+([\tfrac{n}{2^k}]-[\tfrac{n}{2^{k+1}}])=[n]-[\tfrac{n}{2^{k+1}}].$$

33. Реши ја равенката

$$[\tfrac{2x-1}{3}]+[\tfrac{4x+1}{6}]=\tfrac{5x-4}{3}.$$

Решение. Воведуваме ознака $\frac{2x-1}{3}=y$. Тогаш ја добиваме равенката $[y]+[y+\frac{1}{2}]=\frac{5y-1}{2}$. Ако го искористиме равенството од задача 31 добиваме $[2y]=\frac{5y-1}{2}$. Со смената $\frac{5y-1}{2}=a,(a\in\mathbb{Z})$ добиваме $[\frac{4a+2}{5}]=a$. Според тоа

$a \le \frac{4a+2}{5} < a+1$. Конечно добиваме $-3 < a \le 2$, па според тоа можните вредности за a се: $-2,-1,0,1,2$. Оттука $x \in \{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2\}$.

34. Определи ги сите природни броеви m и n за кои

$$[\frac{n^2}{m}] = [\frac{n}{m}] + mn\,. \qquad (*)$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $n < m$. Во овој случај очигледни се неравенствата

$$[\frac{n^2}{m}] \le \frac{n^2}{m} < m \le mn \le mn + [\frac{n}{m}]\,.\ n < m$$

Во овој случај равенката нема решение во множеството природни броеви.

Случај 2. $n \ge m$. За било кој реален број a со $\{a\}$ ќе го означиме неговиот децимален дел. Имаме, $[a] = a - \{a\}$. Ако последното равенство го примениме на $[\frac{n^2}{m}]$ и $[\frac{n}{m}]$, добиваме

$$\frac{n^2}{m} - \frac{n}{m} - mn = \{\frac{n^2}{m}\} - \{\frac{n}{m}\}\,.$$

Бидејќи $0 \le \{\frac{n^2}{m}\}, \{\frac{n}{m}\} < 1$, имаме $|\frac{n^2}{m} - \frac{n}{m} - mn| = |\{\frac{n^2}{m}\} - \{\frac{n}{m}\}| < 1$. Од последното неравенство следува

$$|\frac{n^2}{m} - \frac{n}{m} - mn| = |\frac{n}{m}(n - m^2 - 1)| < 1\,,$$

па според тоа

$$|(n - m^2 - 1)| < \frac{m}{n} \le 1\,.$$

Од тоа што m и n се природни броеви, $n - (m^2 + 1) = 0$, т.е. $n = m^2 + 1$.

Обратно, не е тешко да се провери дека за секој $m \in \mathbb{N}$ и $n = m^2 + 1$ е исполнето равенството (*).

Конечно, единствени решенија се $m, n = m^2 + 1, m \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002

41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007
42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E. , Rouseau, C.. Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
67. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
68. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
69. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
70. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
71. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
72. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
73. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
74. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
75. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
76. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
77. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
78. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
79. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
80. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
81. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
82. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
83. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје

84. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
85. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
86. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
87. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол нма триаголник, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
97. Арсланагиќ,Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
98. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
108. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
109. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
110. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
111. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д. Полиномни равенки, Сигма, Скопје
113. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
114. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
115. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
116. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
117. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
118. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
121. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
122. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
123. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
124. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
125. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје

126. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
127. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
128. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
129. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015
130. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
131. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
132. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
134. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
135. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
136. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
137. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
138. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
153. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
154. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
155. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
157. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
158. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
159. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
160. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
161. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
162. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
167. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
168. Карстенсен, Ј., Муминагиуħ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
169. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
170. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
171. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970

172. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
173. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
174. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
175. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
176. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
177. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
178. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
179. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје
180. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
181. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
182. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
183. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^{+}$, Софија, 1997
184. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
185. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
188. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
191. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
192. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
193. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
195. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
196. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
197. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
202. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
203. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
204. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001

210. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
211. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
212. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
213. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
214. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
215. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
216. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
217. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
218. Малчески, Р.. Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
219. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
220. Малчески, Р.: Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
221. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
222. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
223. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
224. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
226. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
227. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
228. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
229. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
230. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединитe и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
231. Малчески, Р.: Неравенства меѓу срединитe, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
233. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
234. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
235. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
236. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
237. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
238. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
239. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
240. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
241. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
242. Малчески, Р.:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
248. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
249. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
252. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
253. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
254. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
255. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013

256. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
257. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
258. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
259. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
260. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
261. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
262. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
263. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
264. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
265. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
266. Мушкаров, О., Грозед, С.: Едно математично чудовиште, Сигма, Скопје
267. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
268. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
269. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
270. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
271. Поја, Г.: Математическое откріитие, Москва 1976
272. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
273. Поповска – Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
274. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
275. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
276. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
277. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
278. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
279. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
280. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
281. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
282. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
283. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
284. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
285. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
286. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
287. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
288. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
291. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
292. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
293. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
294. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
295. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
296. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
297. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
299. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
301. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
302. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011