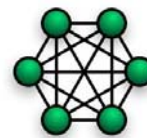


Медитеранска математичка олимпијада

29.04.2018 година

Mediterranean mathematical olympiad

29.04.2018



Задача 1. Целиот број $a \geq 1$ го нарекуваме *интересен*, ако за секој природен $n \geq 1$ бројот $a^{n+2} + 3a^n + 1$ е сложен. Докажи дека множеството $\{1, 2, 3, \dots, 2018\}$ содржи најмалку 500 интересни броеви.

Задача 2. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 2$ се реални броеви такви што $0 \leq a_i \leq \frac{\pi}{2}$. Докажи дека

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\sin a_i}\right) \left(1 + \prod_{i=1}^n (\sin a_i)^{1/n}\right) \leq 1.$$

Кога важи знак за равенство?

Задача 3. Определи го најголемиот природен број N за кој постои $6 \times N$ табела T за која се исполнети следниве својства:

- i) Секоја колона во некој редослед ги содржи броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6.
- ii) За секои две колони $i \neq j$ постои ред r така што $T(r, i) = T(r, j)$.
- iii) За секои две колони $i \neq j$ постои ред s така што $T(s, i) \neq T(s, j)$.

Забелешка. Со $T(m, k)$ е означен елементот кој се наоѓа во пресекот на m -тиот ред и k -тата колона.

Задача 4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека правите AE и AF , ($E, F \in BC$) се симетрични во однос на симетралата на $\angle A$. Правите AE и AF по вторпат ја сечат опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките M и N , соодветно. Точките P и R припаѓаат на полуправите AB и AC , соодветно и притоа важи $\angle AER = \angle C$ и $\angle PEA = \angle B$. Нека $L = AE \cap PR$ и $D = BC \cap LN$. Докажи дека

$$\frac{1}{MN} + \frac{1}{EF} = \frac{1}{ED}.$$

Секоја задача се вреднува по 7 поени.

Време за работа 4:30

Користењето на калкулатор не е дозволено.