# Четвёртый турнир городов

---

**Первый тур**

1982-83 учебный год
В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

**7-8 классы**

---

**Задача 1.**(12)
В колоде 36 карт, разложенных в таком порядке, что масти периодически чередуются в последовательности: пики, трефы, червы, бубны, пики, трефы, червы, бубны, и т. д. С колоды сняли часть, перевернули её как целое и врезали в оставшуюся. После этого карты снимают по четыре. Доказать, что в каждой четвёрке все масти разные.
*А. Мерков, Москва*

**Задача 2.**(7)
Несколько фишек двух цветов расположены в ряд (встречаются оба цвета). Известно, что фишки, между которыми 10 или 15 фишек, одинаковы. Какое наибольшее число фишек может быть?
*Фольклор*

**Задача 3.**(7)
Доказать, что уравнение $m! * n! = k!$ имеет бесконечно много решений таких, что $m$, $n$ и $k$ - натуральные числа, большие единицы. (Через $k!$ обозначается произведение $1*2*3*...*k$ ).
*Фольклор*

**Задача 4.**
а)(5) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены пятью хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?
б)(12) 20 точек, делящие окружность на 20 равных дуг, попарно соединены 10 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.
*В. Произволов, Москва*

**Первый тур**

1982-83 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

## 9-10 классы

**Задача 1.**(15)

Докажите для каждого натурального числа n>1 равенство:

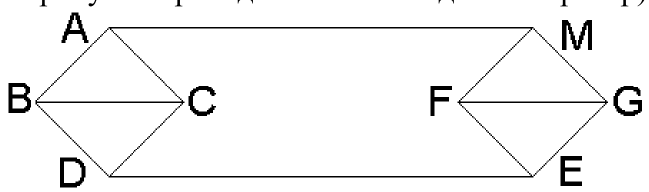
$[n^{1/2}]+ [n^{1/3}]+ ...+ [n^{1/n}] = [\log_2 n]+ [\log_3 n]+ ...+ [\log_n n]$

(Через [x] обозначена целая часть числа x.)

*В.В. Кисиль*

**Задача 2.**(8) Существует ли многогранник (не обязательно выпуклый), полных список рёбер которого имеет вид: AB, AC, BC, BD, CD, DE, EF, EG, FG, FH, GH, AH?

(На рисунке приведена схема соединения рёбер)




*Фольклор*

**Задача 3.**

На полосе бумаги написаны подряд 60 знаков: "x" и "o". Эту полоску разрезают на куски с симметричным расположением знаков.

Например: o, x x , o x x x x o , x o x , ... .

а)(12) Докажите, что существует такой способ разрезания, при котором кусков не больше 24.

б)(12) Приведите пример такого расположения знаков, при котором меньше 15 кусков получить нельзя.

в)(?) Постарайтесь улучшить оценку.

*Фольклор*

**Задача 4.**(20)

а)(14) Из произвольной точки M внутри правильного n-угольника проведены перпендикуляры $\mathbf{MK_1}$, $\mathbf{MK_2}$, ..., $\mathbf{MK_n}$ к его сторонам (или их продолжениям).

Докажите, что сумма векторов $\mathbf{MK_1}+\mathbf{MK_2}+...+\mathbf{MK_n}$ равна $\mathbf{MO}$*n/2 (O - центр n-угольника).

б)(14) Докажите, что сумма векторов, проведённых из любой точки M внутри правильного тетраэдра перпендикулярно к его граням, равна (4/3)*$\mathbf{MO}$, где O - центр тетраэдра.

(за каждый пункт по 14 очков, за оба пункта - 20)

*В.В. Прасолов, Москва*

**Задача 5.**(1)

Марсианское метро на плане имеет вид замкнутой самопересекающейся линии, причём в одной точке может происходить только одно самопересечение.

Доказать, что тоннель с таким планом можно прорыть так, что поезд будет проходить попеременно под и над пересекающей линией.

*Фольклор*

## Второй тур

20 марта 1983 г.

### 7-8 классы

По выбору можно решать один из двух вариантов: "Т" или "Л"

---

Первые 5 задач - вариант "Т".

**Задача 1т.**(8)
Пешеход шёл 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км.
Следует ли из этого, что его средняя скорость за всё время равна 5 км/час?
*Н. Константинов, Москва*

**Задача 2т.**(13)
Правильный 4k-угольник разрезан на параллелограммы. Доказать, что среди них не менее k прямоугольников. Найти их общую площадь, если длина стороны 4k-угольника равна a.
(Если не найдена площадь, то задача оценивалась в 11 баллов).
*В.В. Произволов, Москва*

**Задача 3т.**
В Швамбрании N городов, каждые два соединены дорогой. При этом дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник устанавливает на всех дорогах одностороннее движение таким образом, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться.
Доказать, что
а)(3) волшебник может это сделать;
б)(1) найдётся город, из которого можно добраться до всех и найдется город, из которого нельзя выехать;
в)(5) существует и притом единственный путь, обходящий все города.
*Л.М. Коганов, Москва*

**Задача 4т.**(18)
На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает произвольную клетку в красный цвет; второй окрашивает произвольную неокрашенную клетку в синий цвет; затем первый окрашивает произвольную неокрашенную клетку в красный цвет, а второй еще одну неокрашенную клетку в синий цвет и т. д. Первый стремится к тому, чтобы центры каких-то четырёх красных клеток образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать.
Может ли выиграть первый игрок?
*Д.Г. Азов*

**Задача 5т.**(18)
Доказать, что из 17 различных натуральных чисел либо найдутся пять таких чисел a, b, c, d, e, что каждое из чисел этой пятёрки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдутся пять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.
*Известная теорема*

Вариант "Л" состоит из первых трёх задач варианта "Т" и двух других задач:

**Задача 4л.**(8)
Натуральные числа M и K отличаются перестановкой цифр. Доказать, что
а)(4) сумма цифр 2M равна сумме цифр 2K;
б)(4) сумма цифр M/2 равна сумме цифр K/2 (если M и K чётны);
в)(2) сумма цифр 5M равна сумме цифр 5K.
(пункты а) и б) вместе оцениваются в 6 баллов).
*А.Д. Лисицкий*

**Задача 5л.**(6)
Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен $30^o$. Из этого угла по медиане противоположной стороны выпущен шар (материальная точка).
Доказать, что после восьми отражений (угол падения равен углу отражения) он попадёт в лузу, находящуюся в вершине угла $60^o$.
*Фольклор*

## Второй тур

20 марта 1983 г.

### 9-10 классы

По выбору можно решать один из двух вариантов: "Т" или "Л"

---

Первые 5 задач - вариант "Т".

**Задача 1т.**(12)
Числа от 1 до 1000 расставлены по окружности. Доказать, что их можно соединить 500 непересекающимися отрезками, разность чисел на концах которых (по модулю) не более 749.
*А.А. Разборов*

**Задача 2т.**(8)
На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, M и K так, что AM, BK и CP пересекаются в одной точке и сумма векторов **AM**, **BK** и **CP** равна 0.
Доказать, что K, M и P - середины сторон треугольника.
*Фольклор*

**Задача 3т.**
В Швамбрании N городов, каждые два соединены дорогой. При этом дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник устанавливает на всех дорогах одностороннее движение таким образом, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Доказать, что
а)(2) волшебник может это сделать;
б)(1) найдётся город, из которого можно добраться до всех и найдётся город, из которого нельзя выехать;
в)(4) волшебник может осуществить своё намерение N! способами.
*Л. Коганов*

**Задача 4т.**
а)На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает произвольную клетку в красный цвет; второй окрашивает произвольную неокрашенную клетку в синий цвет; затем первый окрашивает произвольную неокрашенную клетку в красный цвет, а второй еще одну неокрашенную клетку в синий цвет и т. д. Первый стремится к тому, чтобы центры каких-то четырёх красных клеток образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать.
а)(12) Может ли выиграть первый игрок?
б)(30)Каков будет ответ на этот вопрос, если второй игрок закрашивает синим цветом сразу по две клетки?
*Д.Г. Азов*

**Задача 5т.**(30)
k вершин правильного n-угольника P закрашены. Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального m верно следующее условие: если $M_1$ - множество m расположенных подряд вершин и $M_2$ - другое такое множество, то количество закрашенных вершин в $M_1$ отличается от количества закрашенных вершин в $M_2$ не больше, чем на 1.
Доказать, что для любых натуральных n и k ($k \leq n$) почти равномерная закраска существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.
*М. Концевич, Москва*

<u>Вариант "Л" состоит из первых трёх задач варианта "Т" и двух других задач:</u>

**Задача 4л.**(7)
Несколько ребят стоят в круг. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз.
Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
*А. Анджанс*

**Задача 5л.**(6)
Внутри правильного n-угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на 2n отрезков. Занумеруем их подряд: 1, 2, 3, ..., 2n. Доказать, что сумма длин отрезков с чётными номерами равна сумме длин отрезков с нечётными номерами.
*А. Анджанс*