I и II ГОДИНА

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

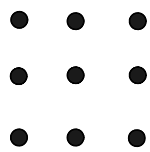
1. Кој од следните броеви е делив со 3:

(A) 2009 (B) $2+0+0+9$ $\boxed{(C)\ (2+0)(0+9)}$ (D) 2^9 (E) $200-9$.

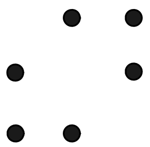
Решение. Бројот 2009 не е делив со 3 бидејќи збирот на неговите цифри е 11, а 11 не е делив со 3. Збирот на цифите на бројот $2+0+0+9=11$ е еднаков на два, и бидејќи не е делив со 3, добиваме дека и тој не е делив со 3. Бројот 2^9 е степен на прост број кој не е енаков на 3, добиваме дека тој не е делив со 3. Збирот на цифрите на бројот $200-9=191$ е еднаков на 11. Бидејќи тој не е делив со 3, добиваме дека и $200-9$ не е делив со 3.

Единествено бројот $(2+0)(0+9)=18$ има збир на цифри 9, кој е делив со 3. Значи, еинствено бројот $(2+0)(0+9)$ е делив со 3.

2. Кој е минималниот број на точки кои треба да се отстранат од квадратната шема дадена на цртежот, така што во точките кои ќе преостанат да нема три колинеарни?



(A) 1 (B) 2 $\boxed{(C)\ 3}$ (D) 4 (E) 7 .



Решение. Ако отстраниме две од дадените девет точки, тогаш тие припаѓаат на точно две редици. Значи од една од редиците не е отстранета точка. Таа редица има три точки кои се колинерани. Значи, треба да се отстранат повеќе од две точки. Очигледно е дека за три отстранети точки, задачата има решение. Едно такво решение е дадено на цртежот.

3. На една популарна трка учествувале 2009 атлетичари. Бројот на натпреварувачи кои Давид ги победил е трипати поголем од бројот на натпреварувачи кои него го победиле. Кое место го освоил Давид на трката?

$\boxed{(A)\ 503}$ (B) 501 (C) 500 (D) 1503 (E) 1507 .

Решение. Бројот на учесници кои Давид ги победил и го победиле е 2008. Ако x е бројот на учесници кои Давид го победиле, тогаш $3x$ е бројот на учесници кои тој ги победил. Според тоа

$$x+3x=2008$$
$$4x=2008$$

Бидејќи 502 учесници Давид го победиле, тој го освоил 503 -тото место.

4. Колку е вредноста на $\frac{1}{2}$ од $\frac{2}{3}$ од $\frac{3}{4}$ од $\frac{4}{5}$ од $\frac{5}{6}$ од $\frac{6}{7}$ од $\frac{7}{8}$ од $\frac{8}{9}$ од $\frac{9}{10}$ од 1000 ?

(A) 250 (B) 200 (C) 100 (D) 50 (E) ниту еден од овие.

Решение. Според условот на задачата треба да пресметаме

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot 1000\ .$$

Јасно е дека вредноста на тој израз е

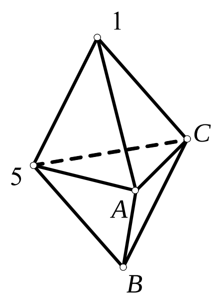
$$\frac{1}{10}\cdot 1000=100\ .$$

5. Во бројот добиен со последователно запишување 2009 пати на бројот 2009, збирот на непарните цифри по кои непосредно следува парна цифра е еднаков на:

(A) 2 (B) 9 (C) 4018 (D) 18072 (E) 18081 .

Решение. Непарни цифри што се појавуваат во добиениот број е цифрата 9. Единствена деветка во добиениот запис по која нема парна цифра е последната, односно деветката од последниот запис на 2009. Според тоа, бараниот збир е

$$\underbrace{9+9+9+...+9}_{2008 \text{ пати}}=9\cdot 2008=18072\ .$$



6. Едно тело е формирано од 6 триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секоја страна е пресметан збирот на броевите во нејзините темиња, и сите пресметани збирови се еднакви. Два од запишаните броеви се 1 и 5 како на цртежот. Колку е збирот на сите запишани броеви во темињата на телото?

(A) 9 (B) 12 (C) 17 (D) 18 (E) 24 .

Решение. Темињата во кои не се запишани броеви ќе ги означиме со A,B и C, како на цртежот. Од триаголникот $1,5,A$ и триаголникот $1,5,B$ имаме

$$1+5+A=1+5+C\ ,$$
$$A=C=x\ .$$

Сега,

$$1+5+x=1+2x\ ,$$
$$x=5\ .$$

Значи, во темињата A и C е запишан бројот $x=5$. Јасно е дека во темето B е запишан бројот 1.

7. За природниот број N, квадратот и кубот имаат еднаков број на цифри. Колку такви броеви има?

(A) 0 $\boxed{(B)\ 3}$ (C) 4 (D) 9 (E) бесконечно многу.

Решение. Со непосредна проверка за броевите од 1 до 10, добиваме дека $1,2$ и 4 се единствените броеви за кои квадратот и кубот имаат енаков број на цифри. Навистина,

$$\begin{array}{lll} 1^2=1 & 2^2=4 & 4^2=16 \\ 1^3=1 & 2^3=8 & 4^3=64 \end{array}.$$

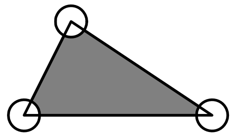
Нека x е број не помал од 10 за кој $x^2=\overline{a_1a_2...a_k}$. Тогаш $x=10+p$ и

$$x^3=x^2\cdot x=\overline{a_1a_2...a_k}(10+p)=10\cdot\overline{a_1a_2...a_k}+p\cdot\overline{a_1a_2...a_k}=\overline{a_1a_2...a_k0}+p\cdot\overline{a_1a_2...a_k}\ .$$

Очигледно е дека x^3 има повеќе цифри од x^2.

Значи, има три такви броеви.

8. Површината на триаголникот е 80 m^2, а радиусите на кружниците со центри во темињата на триаголникот се еднакви на 2 m. Колку е плоштината на затемнетиот дел на цртежот во m^2?



(*A*) 76 $\boxed{(B)\ 80-2\pi}$ (*C*) $40-4\pi$ (*D*) $80-\pi$ (*E*) 78π.

Решение. Од триаголникот се одземени три дела кои немаат заеднички пресек. Секој од нив е кружен исечок во круг со радиус $r=2$. Соодветните агли се α,β,γ при што

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ=\pi.$$

Значи, од триаголникот вкупно се одземени

$$P_O=\frac{1}{2}2^2\alpha+\frac{1}{2}2^2\gamma+\frac{1}{2}2^2\beta=2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=2\pi\text{ m}^2.$$

Сега, плоштината на затемнетата површина од цртежот е

$$P=(80-2\pi)\text{ m}^2.$$

9. Огнен последователно запишал седум броеви. Почнувајќи од третиот број секој од нив е збир на претходните два броја. Четвртиот запишан број е еднаков на 6, а шестиот запишан број е еднаков на 15. Кој е седмиот запишан број?

(*A*) 9 (*B*) 16 (*C*) 21 (*D*) 22 $\boxed{(E)\ 24}$

Решение. Нека првиот запишан број е a_1, а вториот запишан број е a_2. Тогаш броевите од запишаната низа се

$$a_1, a_2, a_1+a_2, a_1+2a_2, 2a_1+3a_2, 3a_1+5a_2, 5a_1+8a_2.$$

Од условот во задачата имаме

$$\begin{cases} a_1+2a_2=6 \\ 3a_1+6a_2=15 \end{cases}.$$

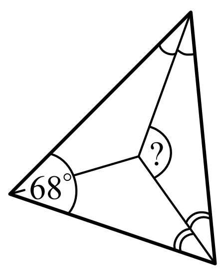
Решение на овој систем е $a_1=0$, $a_2=3$. Според тоа $a_3=3$, $a_4=6$, $a_5=9$, $a_6=15$.

Седмиот запишан број е $a_7=24$.

10. Триаголникот има еден агол од 68°. Трите симетрали на аглите се сечат во точката O. Определи го означениот агол на цртежот?

(*A*) 120° $\boxed{(B)\ 124^\circ}$ (*C*) 128° (*D*) 132° (*E*) 136°

Решение. Нека триаголникот ABC има $\measuredangle C=68^\circ$, $\measuredangle B=\beta$ и $\measuredangle A=\alpha$. Тогаш



$$\alpha+\beta=180^\circ-68^\circ=112^\circ.$$

Јасно е дека $\measuredangle OBA=\dfrac{\beta}{2}$, $\measuredangle OAB=\dfrac{\alpha}{2}$, бидејќи OB и OA се симетрали на аглите α и β. Од триаголникот BOA имаме

$$\measuredangle BOA=180^\circ-\measuredangle OBA-\measuredangle OAB=180^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=180^\circ-\frac{112^\circ}{2}=180^\circ-56^\circ=124^\circ.$$

Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени

11. При секое тестирање оценките кои може да се добијат се $0,1,2,3,4$ или 5. По четири тестирања просечната оценка на Марија е 4. Еден од следните искази не е точен. Кој е тој

(A) Марија добила само оценки 4

(B) Марија добила оценка 3 точно двапати

$\boxed{(C)}$ Марија добила оцена 3 точно три пати

(D) Марија добила оцена 1 точно еднаш

(E) Марија добила оцена 4 точно двапати

Решение. Ако сите оцени на Марија се 4, тогаш и просекот е 4. Значи, првиот исказ може да е точен.

Ако Марија добила оцена 3 точно двапати, тогаш во другите две тестирања може да добие 5 и просекот ќе биде 4. Значи, и ова тврдење може да е точно.

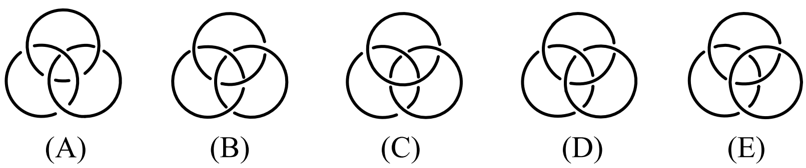
Ако Марија добила оцена 1 точно, тогаш во преостанатите три тестирања добила 5, па има просек 4. Значи, и ова тврдење не мора да е грешно.

Ако Марија добила оцена 4, точно двапати, т.е. во две тестирања, тогаш во преостанатите две тестирања може да добие 5 и 3, па ќе има просек 4. Значи, и ова тврдење не мора да е грешно.

Ако во три тестирања обила оцена 3, тогаш во четвртото тестирање каква и да добие оцена не може да има просечна оцена 4.

12. Борманови кругови се три кругови, кои имаат својство да ниту еден од нив не може да биде одвоен од останатите два без барем еден, било кој од трите, не биде отстранет со кинење. Кога еден ќе биде прекинат и отстранет, другите два не се поврзани меѓу себе. На кој од следните цртежи се нацртани Борманови кругови?

(A) A $\boxed{(B)\ \mathrm{B}}$ (C) C (D) D (E) E



Решение. Непосредно може да се виде, со непосредна проверка, дека борманови кругови се круговите нацртани на цртежот (B)

13. На еден остров некои од жителите се лажговци. Лажговците секогаш лажат, а другите жители на островот секогаш ја зборуваат вистината. Во еден ред биле наредени 25 жители на островот. Сите членови во редот, освен првиот, вели дека тој пред него во редот е лажго. Првиот во редот вели дека останатите членови во редот се лажговци. Колку членови во редот се лажговци?

(A) 0 (B) 12 $\boxed{(C)\ 13}$ (D) 24 (E) не е можно да се одреди

Решение. Последниот, т.е. 25 -тиот член на редот може да биде лажго или секогаш да ја зборува вистината. Ќе ги разгледаме двата случаи.

а) Нека 25 -тиот член на редот е лажго. Тогаш 24 -тиот член на редот е жител кој секогаш ја зборува вистината. Понатаму наназад, редоследно се распоредени лажго и жител на островот кој ја зборува вистината. При тоа, редицата изгледа

ЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛБЛВЛВЛВЛ

Бидејќи првиот е лажго и тој секогаш лаже, добиваме дека не сите по него во низата се лажговци. Тоа е една од бараните низи, и има 13 лажогвци и 12 жители кои секогаш ја зборуваат вистината.

б) Ако 25 -тиот члена на редицата е жител на островот кој секогаш ја зборува вистината, тогаш претпоследниот член на редот, т.е. 24 -тиот член на редот е лажго. Понатаму наизменично се менуваат членови на редот и тоа жител кој секогаш ја зборува вистината и лажго. Во овој случај редот изгледа

ВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВЛВ

Бидејќи првиот члена на редот е жител кој ја зборува вистината, тогаш сите по него лажат што не е точно. Значи овој случај не е можен.

14. Ако $a\square b = ab + a + b$ и $3\square 5 = 2\square x$, тогаш x е еднаков на:

(A) 3 (B) 6 $\boxed{(C)\ 7}$ (D) 10 (E) 12

Решение. Од дефиницијата на операцијата $\square$ имаме

$3\square 5 = 3\cdot 5 + 3 + 5$

$2\square x = 2\cdot x + 2 + x$.

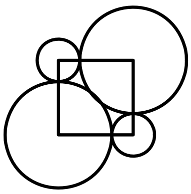
Сега,

$15 + 8 = 3x + 2$

$23 - 2 = 3x$,

$3x = 21$.

Бараниот природен број x е 7 .



15. Темињата на квадратот се центри на кружници: две големи и два мали. Големите кружници се допираат меѓу себе и секоја од нив се допира со двете мали кружници(види цртеж). За колку радиусот на поголемите кружници е поголем од радиусот на помалите кружници?

$(A)\ \frac{2}{9}$ $(B)\ \sqrt{5}$ $\boxed{(C)\ 1+\sqrt{2}}$ (D) 2,5 $(E)\ 0{,}8\pi$.

Решение. Радиусот на помалата кружница ќе го означиме со r_1 а радиусот на поголемата кружница ќе го означиме со r_2 . Ако должината на страната на квадратот е a , тогаш

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = a \\ \frac{1}{2} a\sqrt{2} = r_2 \end{cases}$$

Од втората равенка имаме $a = r_2\sqrt{2}$, и ако замениме во првата равенка добиваме

$r_1 + r_2 = r_2\sqrt{2}$.

Според тоа, $r_2 = (1+\sqrt{2})r_1$. Значи, радиусот на поголемата кружница r_2 е $1+\sqrt{2}$ пати поголем од радиусот r_1 на помалата кружница.

16. Растојанието меѓу $\sqrt{n}$ и 10 на бројната права е помало од 1. Колку такви природни броеви n постојат?

(*A*) 19 (*B*) 20 $\boxed{(C)\ 39}$ (*D*) 40 (*E*) 41

Решение. Од дадениот услов во задачата имаме

$10 \le \sqrt{n} < 11$ или $9 < \sqrt{n} \le 10$.

Според тоа,

$9 < \sqrt{n} < 11$

$81 < n < 121$.

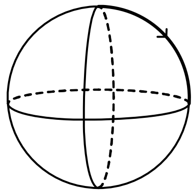
Значи, $82 \le n < 121$. Бидејќи $121 - 82 = 39$, добиваме дека постојат 39 природни броеви кои го исполнуваат условот од задачата.

17. Петко напишал во една редица неколку различни природни броеви кои не се поголеми од 10. Робинзон Крусо ги разгледал и забележал дека за секој пар соседни броеви, едниот од нив е делител на другиот. Колку најмногу такви броеви може да се запишат?

(*A*) 6 (*B*) 7 $\boxed{(C)}$ 8 (*D*) 9 (*E*) 10

Решение. Најмногу може да се запишат 8 такви броеви. На пример такви се броевите од низата

$5, 1, 4, 8, 2, 6, 3, 9$.



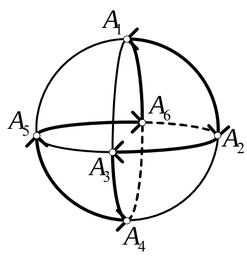
18. Три кружни прстени се споени заедно, така што секои два се сечат под прав агол, како што е прикажно на цртежот(рамнините во кои лежат се попарно взаемно нормални). Една бубамара слетала на една од пресечните точки и почнала да лази околу еден прстен, како што е прикажано на цртежот во правец на стрелката. Лазењето го продолжила на следниот начин: поминала четвртина кружница и на крајот завртела десно за 90°; патувала четвртина кружница и на крајот завртела лево за 90°; патувала четвртина кружница и завртела десно за 90°; итн.

Продолжувајќи на овој начин, колку четвртини од кружници треба да помине бубамарата за да се врати во точката од која тргнала?

$\boxed{(A)\ 6}$ (*B*) 9 (*C*) 12 (*D*) 15 (*E*) 18

Решение. Не е тешко а се провери дека бубамарата треба да помине шест четвртини кружници за да дојде во почетната положба. Тоа е претставено на цртежот. Патот кој треба да го помине бубамарата е

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$.



19. Колку нули треба да се ставаат на местото на $*$, така што децималниот број $1.*1$ што се добива е број поголем од $\frac{20009}{20008}$, а е помал од $\frac{2009}{2008}$?

(A) 1 (B) 2 $\boxed{(C)\ 3}$ (D) 4 (E) 5

Решение. Бројот $\frac{2009}{2008}$ може да се запише во облик

$$\frac{2009}{2008}=1{,}0004\ldots.$$

Од друга страна, бројот $\frac{20009}{20008}$ може да го запишеме во облик

$$\frac{20009}{20008}=1{,}00004\ldots.$$

За да добиеме децимален број со бараните својства очигледно е дека треба да се допишат три нули. Бараниот број е 3.

20. Ако $a=2^{25}$, $b=8^{8}$ и $c=3^{11}$, тогаш

(A) $a<b<c$ (B) $b<a<c$ $\boxed{(C)\ c<b<a}$ (D) $c<a<b$ (E) $b<c<a$.

Решение. Броевите a и b можеме да ги запишеме во облик

$$a=2^{25}=2\cdot 2^{24}=2\cdot(2^2)^{12}=2\cdot 4^{12}$$

$$b=8^8=(2^3)^8=2^{24}=(2^2)^{12}=4^{12}.$$

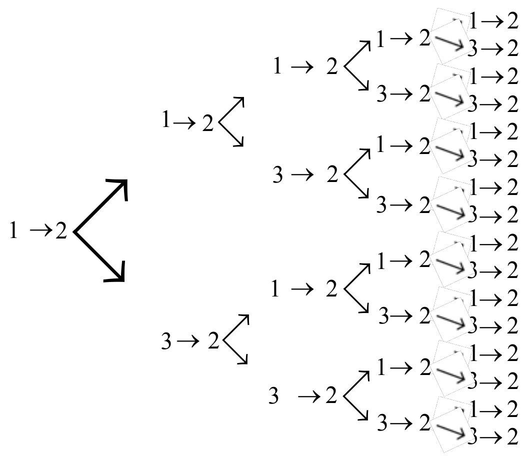
Бидејќи $3<4$ и $11<12$, добиваме дека $3^{11}<4^{12}<2\cdot 4^{12}$, од каде добиваме дека $c<b<a$.

<u>Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени</u>

21. Колку десетцифрени броеви може да се запишат со цифрите $1, 2$ и 3, така што две соседни цифри се разликуваат за 1.

(A) 16 (B) 32 $\boxed{(C)\ 64}$ (D) 80 (E) 100

Решение. Бараните броеви може да се запишат со една од цифрите $1, 2$ или 3.



а) Во случајот кога започнуваат со цифрата 1 постојат 16 како што може да се види од претходната шема.

б) Во случајот кога броевите започнуваат со цифрата 3, може да се виде на потполно ист начин како и претходно (може да се нацрта шема) дека има 16.

в) Во случајот кога броевите започнуваат со цифрата 2, може да се виде на потполно ист начин како претходно (нацртај шема) дека има 32 броеви.

Значи, вкупно има 64 броеви кои го исполнуваат условот на задачата.

22. Едно кенгурче има 2009 единечни коцкички, и од нив треба да ги употреби сите и да направи квадар. Тоа има и 2009 налепници во боја кои се квадратчиња со страна 1, со кои треба да ги обои страните на квадарот. Кенгурчето ја постигнало целта, направило квадар и ги обоило сите страни на квадарот. Колку налепници му останале?

(A) повеќе од 1000 $\qquad \boxed{(B)\ 763} \qquad (C)$ 476 $\qquad (D)$ 49

(E) не е то ч но дека кенгур ч ето може да ја постигне својата цел

Решение. Од дадените единечни коцкички, кенгурчето може да состави квадар, а да ги употреби сите коцкички, на три начини и тоа

$a)$ квадар со димензии $1\times1\times2009$,

$b)$ квадар со димензии $1\times7\times287$

$c)$ квадар со димензии $7\times7\times287$.

Во случајот $a)$ за да ги обои страните на квадарот потребни му се

$$2009+2009+2009+2009+2=8038$$

налепници. Кенгурчето не составил квадар со димензии $1\times1\times2009$.

Во случајот $b)$ за да ги обои сите страин на квадарот, на кенгурчето му се потребни

$$7+7+287+287+2009+2009=4606$$

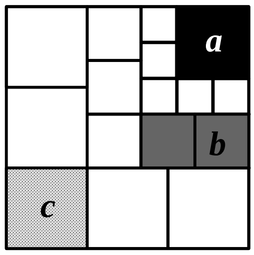
налепници. Кенгурчето не составило квадар со димензии $1\times7\times287$.

Во случајот $c)$ на кенгурчето му се потребни

$$49+49+4\cdot7\cdot41-1246$$

налепници. Значи овој е единствен случај во кој кенгурчето може да ја постигне својата цел. Нему му останале 763 налепници.

23. Дадени се три делови на еден квадрат: црн со плоштина a, сив со плоштина b и шрафиран со плоштина c, како на цртежот. Кој од следните одговори е точен?



$\boxed{(A)\ a<b<c} \qquad (B)\ a<c<b \qquad (C)\ b<a<c$

$(D)\ b<c<a \qquad (E)\ c<a<b$

Решение. Црниот дел се состои од четири квадратчиња со должина на страна x. Според тоа $a=4x^2$. Сивиот дел се состои од две кваратчиња со должина на страна y. Значи, $b=2y^2$ и $3x=2y$, т.е. $x=\frac{2}{3}y$. Шрафираниот дел се состои од едно квадратче со должина на страната z. Значи, $c=z^2$ и $3y=2z$, т.е. $z=\frac{3}{2}y$.

Сега јасно е дека

$$a=\frac{16}{9}y^2, \qquad b=2y^2, \qquad c=\frac{9}{4}y^2.$$

Очигледно е дека $a<b<c$.

24. Неколку портокали, јаболка, банани и праски се наредени во редица. Секое од четирите видови овошја во редицата се наоѓа по секој од дадените видови овошја. Кој е најмалиот број на овошја во редицата?

(A) 4 (B) 5 $\boxed{(C)\ 8}$ (D) 11 (E) таков распоред не е можен

Решение. За да секој вид овошје се наоѓа по секој од четирите вида овошја и бројот на овошја во редицата да биде најмал, на почетокот на редицата треба да има четири овошја, по еден примерок од секој вид. Распоредот не е битен бананите, јаболката, портокалите и праските ќе ги означиме со B,A,O,P соодветно. Во продолжение на редицата треба најмалку да има по еден од секој од видовите овошја (за да редицата има најмала должина). Еден таков распоред е

BAOPBAOP .

За ваквиот распоред, исполнети се сите услови од задачата. Значи, бараниот број е 8 .

25. Кој е најмалиот природен број n за кој

$$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot\ldots\cdot(n^2-1) \qquad (1)$$

е полн квадрат?

(A) 6 $\boxed{(B)\ 8}$ (C) 16 (D) 27 (E) друг одговор

Решение. Користејќи го равенството $k^2-1=(k-1)(k+1)$ изразот (1) можеме да го запишеме во облик

$$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot\ldots\cdot(n^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot n\cdot(n-1)(n+1).$$

Сега за $n=2,3,4,...$ имаме

$$2^2-1=1\cdot3$$

$$(2^2-1)(3^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4=2^2\cdot2\cdot3$$

$$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5=2^2\cdot3^2\cdot2\cdot5$$

$$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6=2^6\cdot3^3\cdot5$$

$$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)(6^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot7=2^6\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$$

$$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)(6^2-1)(7^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot7\cdot6\cdot8=2^{10}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

$$(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)(6^2-1)(7^2-1)(8^2-1)=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot5\cdot7\cdot6\cdot8\cdot7\cdot9=$$
$$=2^{10}\cdot3^6\cdot5^2\cdot7^2=(2^5\cdot3^3\cdot5\cdot7)^2$$

Значи, најмалиот природен број е $n=8$.

26. Најмалиот делител на еден природен број N кој е поголем од 1 е 45 пати помал од најголемиот негов делител кој е помал од N . Колку такви природни броеви има?

(A) 0 (B) 1 $\boxed{(C)\ 2}$ (D) повеќе од 2 (E) не може да се определи

Решение. Нека бараниот број е N, а најмалиот делител е x Бидејќи $45=3^2\cdot5$, најмал делител на бараниот број може да биде $x=2$ или $x=3$. Ќе ги разгледаме двата случаи.

Ако $x=2$, тогаш најголемиот делител на бројот N е $45x=90$. Бидејќи $N=45x\cdot x=45x^2=180$.

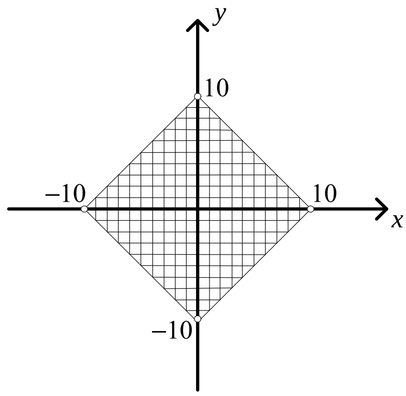
Ако $x=3$, тогаш најголемиот делител на бројот N е $45\cdot x=135$. Во тој случај $N=3\cdot 135=405$.

Според тоа, постојат два такви броја.

27. Едно кенгурче се наоѓа во координатниот почеток на еден правоаголен декартов координатен систем во рамнина. Тоа може да скокне за единица вертикално или единица хоризонтално. Во колку различни точки од рамнината може да стаса кенгурчето по десет скока?

$\boxed{(A)\ 121}$ (B) 100 (C) 400

(D) 441 (E) ниеден од дадените одговори

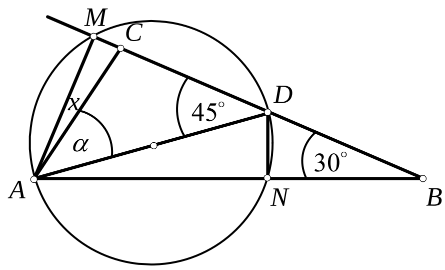


Решение. Кенгурчето може да стаса до секоја точка со целобројни координати од квадратот ограничен со правите $x+y=10$, $x+y=-10$, $x-y=10$ и $x-y=-10$. На секоја страна од тој квадрат има по 11 точки. Во целиот таков квадрат има $11\cdot 11=121$ точка со целобројни координати.

Значи, кенгурчето може да стигне до 121-на точка.

28. Нека AD е тежишна линија во триаголникот ABC. Аголот $\measuredangle ABC$ има 30°, а аголот $\measuredangle ADC$ има 45°. Колку степени има аголот $\measuredangle CAD$

$\boxed{(A)\ 45^\circ}$ (B) 30° (C) 25° (D) 20° (E) 15°



Решение. Од точката A ќе спуштиме нормала врз страната BC и нека нејзиното подножје е точката M, а од точката D, која е средина на страната BC ќе спуштиме нормала на страната AB. Нека нејзиното подножје е точката N. Четириаголникот $ANDM$ е вписан четириаголник.

Вовеуваме ознака $\measuredangle MAC=x$. Тогаш јасно е ека $\alpha+x=45^\circ$. Сега не е тешко да се пресмета дека $\measuredangle x=15^\circ$ и $\alpha=30^\circ$.

29. Која е најголемата вредност за k, за која 3^k е делител на

$$1\bullet 11\bullet 111\bullet\ldots\bullet \underbrace{111\ldots1}_{\text{24 pati 1}}$$

(A) 20 (B) 15 (C) 12 $\boxed{(D)\ 10}$ (E) 8

Решение. Бројот 3 е делител само на множителите

111, 111111,111111111, 111111111111, 111111111111111, 111111111111111111,

111111111111111111111, 111111111111111111111111, од дадениот производ. На останатите множители од дадениот производ бројот 3 не е делител. Според тоа, степенот на бројот 3 како делител на дадениот производ е

$$3\cdot 3\cdot 3^2\cdot 3\cdot 3\cdot 3^2\cdot 3\cdot 3=3^{10}.$$

Бараната вредност за k е $k=10$.

30. Квадратна шема 3×3 треба да се дополни до магичен квадрат (збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и дијагонала е ист). Ако два од броевите се дадени (види цртеж), колку е означениот број a?

a		
		47
	63	

(A) 16 (B) 51 (C) 54 (D) $\boxed{55}$ (E) 110

Решение. Нека во останатите полиња на квадратната шема се запишани броевите x,y,z,u,v,w. Бидејќи дадениот квадрат е магичен квадрат, имаме

a	x	y
z	u	47
v	63	w

$$\begin{cases} a+x+y=z+u+47\\ v+w+63=z+u+47\\ a+u+w=z+u+47\\ v+u+y=z+u+47\\ a+z+v=z+u+47\\ x+u+63=z+u+47\\ y+w+47=z+u+47 \end{cases}$$

Ако го решиме овој систем од седум равенки со седум непознати, ќе добиеме $a=55$.