

## ЕДНО НЕРАВЕНСТВО ВО ВРСКА СО СИМЕТРАЛАТА НА ВНАТРЕШЕН АГОЛ НА ТРИАГОЛНИК

Прво ќе дадеме два докази на следнава теорема:

**Теорема 1.** Нека во  $\triangle ABC$ ,  $\overline{AD}$  е должина на симетралата  $s_\alpha$  на аголот  $\alpha = \angle BAC$ ; ( $D \in BC$ ). Тогаш важи неравенството

$$s_\alpha = \overline{AD} < \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}. \quad (1)$$

**Доказ 1:** Нека симетралата на аголот  $\alpha$  ја сече опишаната кружница  $k$  на  $\triangle ABC$  во точката  $E$  (види цртеж). Следува дека

$$\angle ABC = \angle AEC, \quad (2)$$

како периферни агли над иста тетива  $AC$  (лак  $AC$ ) на кружницата  $k$ .

Натаму важи  $\angle BAE = \angle EAC = \frac{\alpha}{2}$ ,

т.е.

$$\angle BAD = \angle EAC = \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме де

$$\triangle ABD \sim \triangle AEC,$$

а одовде

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE},$$

односно заради

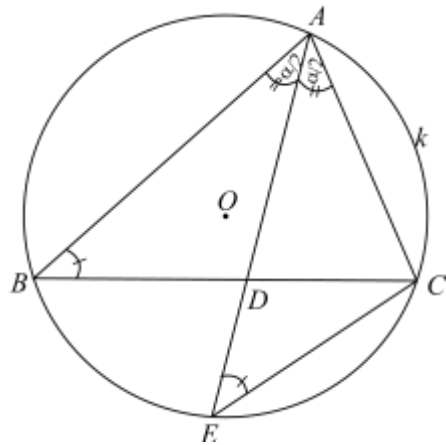
$$\overline{AD} < \overline{AE} \Leftrightarrow \overline{AD}^2 < \overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC},$$

т.е.

$$s_\alpha = \overline{AD} < \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}, \text{ што требаше да се докаже.}$$

Ставајќи во (1)  $\overline{AB} = c$  и  $\overline{AC} = b$ , добиваме:

$$s_\alpha < \sqrt{bc}. \quad (4)$$



**Доказ 2:** Ќе ја користиме познатата формула за должината на симетралата  $s_\alpha$  на внатрешниот агол  $\alpha$  на  $\triangle ABC$ :

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{s(s-a)},$$

односно заради  $s = \frac{a+b+c}{2}$ :

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}, \text{ т.е.}$$

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{(b+c)^2 - a^2}, \text{ па}$$

$$s_\alpha = \sqrt{bc \left[ 1 - \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 \right]},$$

а одовде заради  $1 - \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 < 1$ :

$$s_\alpha < \sqrt{bc}, \text{ што требаше да се докаже.}$$

Аналогно ги добиваме следниве неравенства:

$$s_\beta < \sqrt{ac}, \quad (5)$$

$$s_\gamma < \sqrt{ab}. \quad (6)$$

Ќе наведеме неколку последици од теорема 1.

**Последица 1.** По множењето на неравенствата (4), (5) и (6), добиваме:

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{ab}, \text{ т.е.}$$

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < \sqrt{a^2 b^2 c^2},$$

односно

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < abc. \quad (7)$$

**Последица 2.** о собирање на неравенствата (4), (5) и (6) имаме:

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} \leq \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} = a+b+c = 2s$$

т.е.

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 2s. \quad (8)$$

**Последица 3.** Од (4), (5) и (6) имаме:

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha &< c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} \\ &\leq c \cdot \frac{a+b}{2} + a \cdot \frac{b+c}{2} + b \cdot \frac{a+c}{2} = ab + bc + ca \end{aligned}$$

т.е.

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha < ab + bc + ca . \quad (9)$$

**Последица 4.** По квадрирање на неравенствата (4), (5) и (6) и собирање на новодобиените неравенства добиваме:

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 < ab + ba + ca \quad (10)$$

Неравенствата (7), (8), (9) и (10) може да се направат построги (т.е. да се поправат). Во [2] се дадени следниве неравенства:

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma \leq rs^2, \quad (8.14 \text{ од } [2])$$

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \leq s\sqrt{3}, \quad (8.9 \text{ од } [2])$$

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha \leq s^2, \quad (8.16 \text{ од } [2])$$

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \leq s^2. \quad (8.19 \text{ од } [2])$$

Лесно се докажува дека овие неравенства се појакни (подобри) од неравенствата (7), (8), (9) и (10), т.е.

$$rs^2 < abc, \quad (11)$$

$$s\sqrt{3} < 2s, \quad (12)$$

$$s^2 < ab + bc + ca. \quad (13)$$

За да го докажеме неравенството (11), ќе земеме дека  $abc = 4RP = 4Rrs$ ; и добиваме:

$$rs^2 < 4Rrs \Leftrightarrow s < 4R \Leftrightarrow 2s < 8R,$$

што е точно бидејќи од неравенството 5.3 од [2] имаме:

$$2s \leq 3R\sqrt{3},$$

а важи и  $3R\sqrt{3} < 8R$ .

Неравенството (12) заради  $\sqrt{3} < 2$  е очигледно точно.

Неравенството (13) се сведува на следново неравенство

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 < ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca),$$

кое лесно се докажува заради неравенството на триаголник:

$$|b-c| < a, |c-a| < b, |a-b| < c, \text{ т.е.}$$

$$(b-c)^2 < a^2, (c-a)^2 < b^2, (a-b)^2 < c^2,$$

па после собирањето:

$$\begin{aligned}(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 &< a^2 + b^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &< 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow (a+b+c)^2 &< 4(ab + bc + ca).\end{aligned}$$

На крајот да кажеме дека во неравенствата од [2] важи равенство ако и само ако се работи за рамностран триаголник.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] **Bottema, O, and oth.**, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.