

Томи Димовски

Ана Димовска

Скопје

## НЕРАВЕНСТВА КОИ СЕ ОДНЕСУВААТ НА ПАРАМЕТРИТЕ НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

Геометриските неравенства се стари колку и самата геометрија. Дел од нив се однесуваат на триаголниците. Во оваа статија ќе разгледаме некои неравенства поврзани со параметрите на триаголниците. Некои од нив се: должините на страните, полупериметарот, аглиите, вредностите на тригонометриските функции од тие агли, плоштината, симетралите на страните, висините, симетралите на аглиите, радиусите на впишаната и опишаната кружница и др.

Најпрво ќе разгледаме неколку примери во кои се дадени доволни услови за три позитивни реални броеви да бидат должини на страните на некој триаголник.

**Пример 1.** Нека се  $a, b$  и  $c$  се позитивни реални броеви. Тогаш постои триаголник со страни со должини  $a, b, c$  ако  $pa^2 + qb^2 > pqc^2$  за било кои  $p, q$  такви што  $p + q = 1$ .

**Решение.** Јасно е дека  $a, b$  и  $c$  се должини на страни на триаголник ако  $a + b > c, a + c > b$  и  $b + c > a$ .

Нека  $f = pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 = c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$ .  
Тогаш  $f = f(p)$  е квадратна функција по  $p$  и

$$f > 0 \Leftrightarrow \Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 < 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2) < 0 \Leftrightarrow (a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) < 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) > 0.$$

Последниот израз е позитивен ако трите множители се позитивни или еден од нив е позитивен, а другите два се негативни. Вториот случај не е можен бидејќи ако на пример  $b+c-a < 0$  и  $c+a-b < 0$ , тогаш  $c = \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b) < 0$ , што не е можно. Според тоа, сите три множители се позитивни. ■

**Пример 2.** Ако  $a, b$  и  $c$  се реални броеви такви што  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$ , тогаш постои триаголник чии страни се со должини  $a, b, c$ .

**Решение.** Најпрво ќе го покажеме идентитетот

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

Тргаме од десната страна и добиваме

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) &= ((a + b)^2 - c^2)((c^2 - (a - b)^2)) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab) = (4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) \\ &= (4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2)) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4). \end{aligned}$$

Од условот на задачата

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) > 0,$$

од каде следува дека множителите  $a + b - c$ ,  $a - b + c$ ,  $-a + b + c$  се позитивни, односно  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  и  $b + c > a$  (ако два од множителите се негативни се добива контрадикција како во претходниот пример). ■

**Пример 3.** Ако  $a, b, c$  и  $d$  се позитивни реални броеви такви што  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 > 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$ , тогаш за било кои три од нив постои триаголник со должини на страните тие три броеви.

**Решение.** Од условот на задачата и од неравенството на Коши-Шварц следува дека

$$\begin{aligned} 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) &< (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + d^2\right)^2 \\ &\leq \left(\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2 + d^4\right)(\sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Значи  $a^4 + b^4 + c^4 < 2\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)^2$ . Според претходниот пример, постои триаголник чии страни се со должини  $a, b, c$ . Истата дискусија се применува за било која друга тројка од броевите  $a, b, c, d$ . ■

Во следниот пример е покажано како геометријата може да биде корисна при докажување на неравенства.

**Пример 4.** Ако  $a, b, c > 0$  се такви што  $a^2 + b^2 - ab = c^2$ , тогаш  $(a - b)(b - c) \leq 0$ . Докажи!

**Решение.** Бидејќи  $c^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$ , броевите  $a, b, c$  може да ги гледаме како должини на страните на триаголник  $ABC$  таков што аголот спроти страната со должина  $c$  е  $60^\circ$ . Тогаш за аглите во триаголникот е исполнето  $\angle A \leq 60^\circ$  и  $\angle B \geq 60^\circ$ , или  $\angle A \geq 60^\circ$  и  $\angle B \leq 60^\circ$ . Тогаш според својството во триаголник: наспроти најголемиот агол лежи најголемата страна и обратно,  $a \leq c \leq b$  или  $a \geq c \geq b$ . И во двата случаи  $(a - b)(b - c) \leq 0$ . ■

Во следните примери со  $a, b$  и  $c$  се означени страните, а со  $s$  полупериметарот на даден триаголник.

**Пример 5.** Докажи дека  $3(bc + ca + ab) \leq (a + b + c)^2 < 4(bc + ca + ab)$ . Знак равенство важи ако триаголникот е рамнострани.

**Решение.** Од

$$2bc \leq b^2 + c^2, 2ca \leq c^2 + a^2, 2ab \leq a^2 + b^2$$

следува дека

$$2(bc + ca + ab) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Со додавање на  $4(bc + ca + ab)$  од двете страни на неравенството се добива

$$6(bc + ca + ab) \leq 2(a + b + c)^2,$$

односно

$$3(bc + ca + ab) \leq (a + b + c)^2.$$

Јасно е дека знак равенство важи ако  $a = b = c$ .

Бидејќи  $a, b$  и  $c$  се страни на триаголник

$$|b - c| < a, |c - a| < b, |a - b| < c,$$

односно

$$(b-c)^2 < a^2, (c-a)^2 < b^2 \text{ и } (a-b)^2 < c^2.$$

Со собирање на последните три неравенства се добива

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(bc + ca + ab),$$

односно

$$(a+b+c)^2 < 4(bc + ca + ab). \blacksquare$$

**Пример 6.** Докажи дека  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35}(s^2 + \frac{abc}{s})$ . Знак равенство важи ако триаголникот е рамностран.

**Решение.** Од неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина следува неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

а од неравенството меѓу аритметичка и геометричка средина следува неравенството

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Следува дека

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}s^2 = \frac{36}{35}\left(s^2 + \left(\frac{2}{3}s\right)^3 \cdot \frac{1}{s}\right) = \frac{36}{35}\left(s^2 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{s}\right) \geq \frac{36}{35}\left(s^2 + \frac{abc}{s}\right).$$

Јасно е дека знак равенство важи ако  $a = b = c$ .  $\blacksquare$

**Пример 7.** Докажи дека  $8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$ . Знак равенство важи ако триаголникот е рамностран.

**Решение.** Очигледно е дека

$$\sqrt{a^2 - (b-c)^2} \leq a, \sqrt{b^2 - (c-a)^2} \leq b, \sqrt{c^2 - (a-b)^2} \leq c.$$

Со множење на овие неравенства добиваме

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} \leq abc.$$

Бидејќи

$$a + b - c > 0, b + c - a > 0, c + a - b > 0$$

се добива

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc,$$

односно

$$8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc.$$

Јасно е дека знак равенство важи акко  $a = b = c$ . ■

**Пример 8.** Докажи дека  $abc < a^2(s - a) + b^2(s - b) + c^2(s - c) \leq \frac{3}{2}abc$ . Знак равенство важи акко триаголникот е рамнострани.

**Решение.** Бидејќи

$$2 \sum_{cyc} a^2(s - a) = \sum_{cyc} a^2(b + c - a) = - \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} b^2c$$

и

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = - \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} b^2c - 2abc,$$

добиваме

$$2 \sum_{cyc} a^2(s - a) = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) + 2abc.$$

Од претходната задача следува дека

$$a^2(s - a) + b^2(s - b) + c^2(s - c) \leq \frac{3}{2}abc, \quad (1)$$

каде знак равенство важи акко  $a = b = c$ .

Од друга страна бидејќи

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0$$

следува дека

$$\sum_{\text{сус}} a^2(s-a) > abc. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува бараното неравенство. ■

**Пример 9.** Докажи дека  $bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) \geq 48(s-a)(s-b)(s-c)$ . Знак равенство важи ако триаголникот е рамностран.

**Решение.** Од

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ca}, a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

следва дека

$$bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) \geq 2\left((bc)^{\frac{3}{2}} + (ca)^{\frac{3}{2}} + (ab)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува

$$(bc)^{\frac{3}{2}} + (ca)^{\frac{3}{2}} + (ab)^{\frac{3}{2}} \geq 3abc,$$

односно

$$bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) \geq 6abc.$$

Од задача 3 и последното неравенство следува дека

$$bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) \geq 48(s-a)(s-b)(s-c).$$

Јасно е дека знак равенство важи ако  $a = b = c$ . ■

**Пример 10.** Докажи дека  $\frac{2s}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ . Знак равенство важи ако триаголникот е рамностран.

**Решение.** Од

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

следва дека

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 \geq (ca)(ab) + (ab)(bc) + (bc)(ca).$$

Со делење на двете страни од неједнаквоста со  $a^2b^2c^2$  се добива

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}.$$

Бидејќи

$$\frac{2s}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab},$$

следува дека

$$\frac{2s}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Јасно е дека знак равенство важи ако  $a = b = c$ . ■

**Пример 11.** Докажи дека  $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ . Знак равенство важи ако триаголникот е рамнострани.

**Решение.** Од неједнаквоста на аритметичка и хармониска средина се добива

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}, \quad (1)$$

каде што знак равенство важи ако  $a = b = c$ .

Бидејќи

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3, \quad (2)$$

од (1) следува дека

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Од друга страна,

$$b+c > \frac{1}{2}(a+b+c), c+a > \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ и } a+b > \frac{1}{2}(a+b+c). \quad (3)$$

Од (2) и (3) следува дека

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2. \quad \blacksquare$$

### Задачи за самостојна работа

1. (ИМО 1983) Нека  $a, b$  и  $c$  се должините на страните на даден триаголник. Докажи дека

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

2. (ИМО 1964) Нека  $a, b$  и  $c$  се должините на страните на даден триаголник. Докажи дека

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

3. Нека  $a, b$  и  $c$  се должините на страните на даден триаголник. Докажи дека

$$a(b+c-a) < 2bc.$$

### Литература

[1] O. Bottema, R. Z. Djordjevic, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, 1st Edition, 1968

[2] R. B. Manfrino, J. A. G. Ortega, R. V. Delgado, *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, 2009