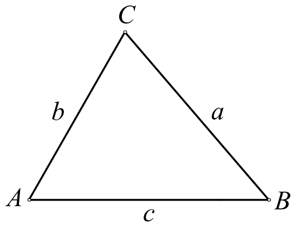
Ѓорѓи Цветков, Кратово

НЕКОИ НЕРАВЕНСТВА ЗА ПРАВОАГОЛНИОТ ТРИАГОЛНИК

Нека a, b и c се должините на страните на ΔABC, (црт. 1). Сигурно ви е познато дека било која страна на триаголникот е поголема од разликата на другите две страни, а помала од нивниот збир, т.е. дека ако $b > c$, тогаш

$$b-c < a < b+c. \qquad (1)$$



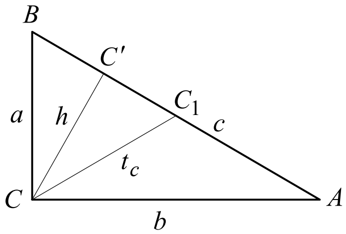
Црт. 1

Последните неравенства важат за секој ΔABC. Во оваа работа ќе докажеме некои неравенства кои важат меѓу елементите на правоаголен триаголник.

За таа цел ќе разгледаме неколку задачи.

Задача 1. Нека h е висината повлечена кон хипотенузата c на правоаголниот ΔABC. Докажи дека

$$c \geq 2h. \qquad (1)$$



Црт. 2

Решение. Центарот на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник ABC се совпаѓа со средината c_1 на хипотенузата AB, (црт. 2), па затоа

$$\overline{AC_1} = \overline{BC_1} = \overline{CC_1} = \tfrac{c}{2}.$$

Бидејќи хипотенузата е најголема страна во правоаголен триаголник, од $\Delta CC_1C'$ следува $\frac{c}{2} > h$, т.е. $c > 2h$. Во последното неравенство знакот за равенство важи ако и само ако $C' = C_1$, т.е. ако и само ако $a = b$.

II начин. Бидејќи квадратот на секој реален број е ненегативен, за катетите a и b на правоаголниот триаголник важи $(a-b)^2 \geq 0$ т.е. $a^2+b^2 \geq 2ab$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$. Од Питагоровата теорема имаме $a^2+b^2 = c^2$ и бидејќи $\frac{ab}{2} = P = \frac{ch}{2}$, т.е. $ab = ch$, со замена во неравенството добиваме $c^2 \geq 2ch$. Но, $c > 0$, па затоа последното неравенство е еквивалентно на неравенството $c \geq 2h$.

Задача 2. Нека се t_a и t_b тежишните линии кои соодветствуваат на катетите a и b на правоаголниот триаголник ABC. Докажете дека

$$1 < \frac{t_a+t_b}{a+b} < \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

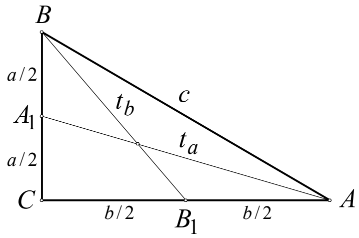
Решение. Од правоаголниот триаголник CAA_1 добиваме $t_a < \frac{a}{2}+b$, а од ΔBCB_1 следува $t_b < a+\frac{b}{2}$. Ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството

$$t_a + t_b < (\frac{a}{2} + b) + (a + \frac{b}{2}) = \frac{3}{2}(a+b),$$

од кое приделење со $a+b>0$ следува

$$\frac{t_a+t_b}{a+b} < \frac{3}{2},$$

што значи десното неравенство во неравенството (2) е исполнето.



Црт. 3

Бидејќи t_a и t_b се хипотенузи во правоаголните триаголници CAA_1 и BCB_1, соодветно, добиваме $t_a > a$ и $t_b > b$, па затоа $t_a + t_b > a + b$ што значи важи левото неравенство во (2).

Задача 3. Нека h е висината спуштена кон хипотенузата c во правоаголниот триаголник ABC, со катети a и b. Докажи дека

$$c + h > a + b. \tag{3}$$

Решение. Бидејќи $h > 0$, имаме $h^2 > 0$. Ако ја искористиме Питагоровата теорема и равенството $ab = ch = 2P$ последователно добиваме

$$h^2 > 0 \Leftrightarrow c^2 + h^2 > a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 + h^2 + 2ch > a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow (c+h)^2 > (a+b)^2.$$

Но, a, b и c се позитивни големини, па затоа од последното неравенство следува неравенството (3).

Задача 4. Ако P е плоштината, а c хипотенузата во правоаголен триаголник, тогаш

$$P \le \frac{c^2}{4}. \tag{4}$$

Докажи!

Решение. Нека h и t_c се висината и тежишната линија спуштени над хипотенузата во правоаголниот триаголник ABC, (црт. 2). Јасно, $h \le t_c = \frac{c}{2}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $C' = C_1$, т.е. ако и само ако $a = b$. Ако го искористиме добиеното неравенство добиваме

$$P = \frac{ch}{2} \le \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4},$$

што и требаше да се докаже.

II начин. Во задача 1 (II начин) докажавме дека $a^2 + b^2 \ge 2ab$, каде со a и b се означени должините на катетите на правоаголниот триаголник. Сега, од $ab = 2P$ со примена на Питагоровата теорема и претходното неравенство го добиваме неравенството

$$c^2 = a^2 + b^2 \ge 2ab = 4P,$$

кое е еквивалентно на неравенството (4).

Задачи 5. Докажи дека за катетите a, b и хипотенузата c на правоаголниот триаголник ABC е исполнето неравенството

$$a + b \le c\sqrt{2}. \tag{5}$$

Решение. Аго на неравенството $0 \le (a-b)^2$, во кое знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, на двете страни додадеме $(a+b)^2$, и ја примениме Питагоровата теорема го добиваме неравенството:

$$(a+b)^2 \le (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2+b^2) = 2c^2.$$

Но, a, b и c се позитивни големини, па затоа последното неравенство е еквивалентно на неравенството (5).

Задача 6. Докажи дека во правоаголен триаголник важи неравенството

$$R + r \ge \sqrt{2P} \qquad (6)$$

каде R и r се радиусот на впишаната и опишаната кружница, соодветно, а P е плоштината на триаголникот.

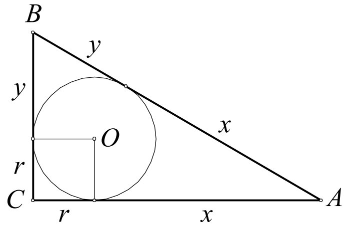
Решение. При ознаките на цртеж 4 добиваме

$$2r + 2x + 2y = a + b + c$$

$$2r = a + b + c - 2(x+y)$$

$$2r = a + b + c - 2c$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$



Црт. 4

Бидејќи $R = \frac{c}{2}$, добиваме

$$R + r = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} = \sqrt{2P},$$

што и требаше да се докаже.

Задача 7. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи дека

$$a^3 + b^3 < c^3. \qquad (7)$$

Решение. Ако неравенствата $a<c$ и $b<c$ ги помножеме со $a^2>0$ и $b^2>0$, соодветно, добиваме $a^3 < ca^2$ и $b^3 < cb^2$. Со собирање на последните две неравенства и примена на Питагоровата теорема добиваме

$$a^3 + b^3 < ca^2 + cb^2 = c(a^2+b^2) = c \cdot c^2 = c^3,$$

т.е. неравенството (7) важи.

Забелешка. Ако се искористи идејата од решението на задача 7 и принципот на математичка индукција, може да се доаже дека за секој природен број $n \ge 3$ важи

$$a^n + b^n < c^n.$$

На читателите кои се запознаени со математичката индукција им се препорачува да го докажат последното неравенство.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Со h да ја означиме висината спуштена на хипотенузата c во правоаголниот триаголнок, а со r и R радиусот на впишаната и опишаната кружница, соодветно. Докажи дека:

а) $R \ge r(1+\sqrt{2})$ б) $a+b \ge 2h\sqrt{2}$ в) $\sqrt{2}-1 \le \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$.

2. Докажи дека во правоаголен триаголник со катети a и b важат неравенствата:

а) $t_a^2 + t_b^2 \ge \frac{5}{8}(a+b)^2$ б) $\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2$.