Tuesday, 22. September 2020

Problem 4. There is an integer $n > 1$. There are n^2 stations on a slope of a mountain, all at different altitudes. Each of two cable car companies, A and B, operates k cable cars; each cable car provides a transfer from one of the stations to a higher one (with no intermediate stops). The k cable cars of A have k different starting points and k different finishing points, and a cable car which starts higher also finishes higher. The same conditions hold for B. We say that two stations are *linked* by a company if one can start from the lower station and reach the higher one by using one or more cars of that company (no other movements between stations are allowed).

Determine the smallest positive integer k for which one can guarantee that there are two stations that are linked by both companies.

Problem 5. A deck of $n > 1$ cards is given. A positive integer is written on each card. The deck has the property that the arithmetic mean of the numbers on each pair of cards is also the geometric mean of the numbers on some collection of one or more cards.

For which n does it follow that the numbers on the cards are all equal?

Problem 6. Prove that there exists a positive constant c such that the following statement is true:

Consider an integer $n > 1$, and a set $\mathcal{S}$ of n points in the plane such that the distance between any two different points in $\mathcal{S}$ is at least 1. It follows that there is a line ℓ separating $\mathcal{S}$ such that the distance from any point of $\mathcal{S}$ to ℓ is at least $cn^{-1/3}$.

(A line ℓ *separates* a set of points $\mathcal{S}$ if some segment joining two points in $\mathcal{S}$ crosses ℓ.)

Note. Weaker results with $cn^{-1/3}$ replaced by $cn^{-\alpha}$ may be awarded points depending on the value of the constant $\alpha > 1/3$.

вторник, 22. сентября 2020

Задача 4. Дано целое число $n > 1$. На горном склоне расположено n^2 фуникулёрных станций на разных высотах. Каждая из двух фуникулёрных компаний A и B владеет k подъёмниками. Каждый подъёмник осуществляет регулярный беспересадочный трансфер с одной из станций на другую, более высоко расположенную станцию. k трансферов компании A начинаются на k различных станциях; также они заканчиваются на k различных станциях; при этом трансфер, который начинается выше, и заканчивается выше. Те же условия выполнены для компании B. Будем говорить, что две станции *связаны* фуникулёрной компанией, если можно добраться из нижней станции в верхнюю, используя один или несколько трансферов данной компании (другие перемещения между станциями запрещены). Найдите наименьшее k, при котором заведомо найдутся две станции, связанные обеими компаниями.

Задача 5. Имеется $n > 1$ карточек, на каждой из которых написано целое положительное число. Оказалось, что для любых двух карточек среднее арифметическое написанных на них чисел равно среднему геометрическому чисел, написанных на карточках некоторого набора, состоящего из одной или более карточек. При каких n из этого следует, что все числа, написанные на карточках, равны?

Задача 6. Докажите, что существует положительная константа c, для которой выполняется следующее утверждение:

Пусть $\mathcal{S}$ — множество из $n > 1$ точек плоскости, в котором расстояние между любыми двумя точками не меньше 1. Тогда существует прямая ℓ, разделяющая множество $\mathcal{S}$, такая что расстояние от любой точки $\mathcal{S}$ до ℓ не меньше чем $cn^{-1/3}$.

(Прямая ℓ *разделяет* множество точек $\mathcal{S}$, если она пересекает некоторый отрезок, концы которого принадлежат $\mathcal{S}$.)

Замечание. Более слабые результаты с заменой $cn^{-1/3}$ на $cn^{-\alpha}$ могут оцениваться в зависимости от значения константы $\alpha > 1/3$.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.