ДИНАМИКА НА ЛИНЕАРНОТО ПРЕСЛИКУВАЊЕ $f(x)=bx+c$ НА $\mathbb{R}$

Билјана Златановска
Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип

За парот *(X,f), X* е непразно множество и $f: X \to X$ е пресликување. За дадена точка x од X, нека
$x = x_0 = f^0(x), x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1),..., x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x),$
Низата $x_0, x_1,..., x_{n+1},...$ се вика ***траекторија*** на f со почеток во *x*. Множеството од сите слики $f^n(x) = f(f(...(f(x))...))$ на *x* кои се добиваат итеративно со f се вика ***орбита*** на x и се означува со $orb(x) = \{Z \mid z = f^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$. Точката *x* е ***неподвижна*** (фиксна) ***точка*** на пресликувањето f ако $f(x)=x$ ($orb(x) = \{x\}$). Точката *x* од *X* се вика ***периодична точка*** за *f* ако постои природен број n>1 така што $f^n(x) = x$ и $f^{n-1}(x) \neq x$. Најмалиот природен број n со даденото својство се вика период на *x*. Во тој случај $orb(x)$ има точно n точки и $orb(x)$ се вика ***периодична орбита***. Пресликувањето на точката *x* од *X* со *f* се нарекува ***движење*** или ***динамика*** на точката *x* кон $f(x)$, $f(x)$ кон $f(f(x))$ итн. Диференцната (рекурентна) равенка $x_{n+1} = f(x_n)$ определува ***дискретен динамички систем*** *(X,f)* (*X* е непразно множество и $f: X \to X$ е пресликување).

Линеарното пресликување на $\mathbb{R}$, $f(x)=bx+c$ го разгледуваме како диференцна равенка $x_{n+1} = f(x_n) = bx_n + c$. Комплетната класификација на динамиката на линеарното пресликување на $\mathbb{R}$, $f(x)=bx+c$ како наједноставно е неговото однесување во неподвижните точки (доколку истите постојат), како и егзистенцијата на периодични точки.

Генерално, однесувањето на пресликувањето $f(x)=bx+c$ ние можеме да го испитаме со графички и аналитички метод.

Графички метод: Во $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ се цртаат графиците на *f (x)* и *y=x*. Пресекот на овие две ја дава неподвижната точка на пресликувањето *f (x)*. Избираме произволна точка *x* од *x*-оската и цртаме вертикална линија паралелна со y-оската до пресек со графикот на *f (x)*. Ова е првата итерација на *f (x)*. Од *f (x)* цртаме линија паралелна со x-оската до пресек со *y=x*. Од таму се црта повторно линија паралелна со y-оската до пресек со графикот на *f (x)*, каде се добива втората итерација $f^2(x)$. Оваа процедура ја повторуваме повеќе пати (каде $f^k(x)$ е k-тата итерација на пресликувањето *f (x)*). Така се добива и орбитата на точката *x*, $orb(x)$. Ако со вакво цртање се доближуваме до неподвижната точка тогаш неподвижната точка игра улога на привлечна точка (атрактор или стабилна точка). Доколку се оддалечуваме од неподвижната точка тогаш неподвижната точка игра улога на одбивна точка (репелер или нестабилна точка).

Аналитички метод: Аналитичкиот метод се состои од наоѓање на апсолутната вредност на првиот извод на $y = f(x)$ (ако тој постои) во неподвижната точка:

1. Ако $|f'(x)|>1$ тогаш x е одбивна точка;
2. Ако $|f'(x)|<1$ тогаш x е привлечна точка.

Да се вратиме на линеарното пресликување $f(x)=bx+c$ на *R*. Неподвижната точка на $f(x)=bx+c$ ја наоѓаме,

$$f(x)=x \Rightarrow bx+c=x \Rightarrow x=\frac{c}{1-b}, b\neq 1.$$

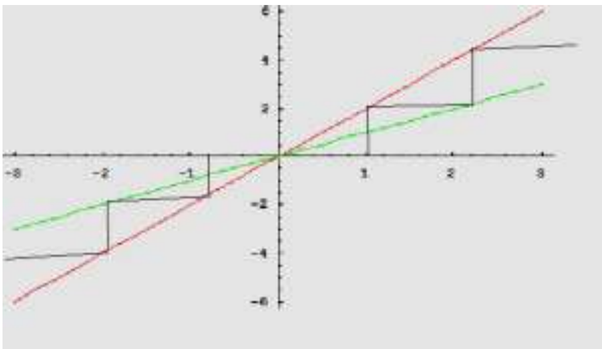
Првиот извод на $f(x)=bx+c$ е $f'(x)=b$, што повлекува дека однесувањето на линеарното пресликување $f(x)=bx+c$ на *R* во неподвижната точка $x=\frac{c}{1-b}, b\neq 1$ зависи од коефициентот b. Ќе разгледаме повеќе случаи:

Случај 1. За b≠0 и c=0, се добива пресликувањето $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|$.

1. За *b>0* и $b\neq 1$ се добиваат два случаи каде неподвижната точка е $x=\frac{c}{1-b}=\frac{0}{1-b}=0$.

i) За *b>1*, $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|>1$, неподвижна точка $x=0$ е одбивна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

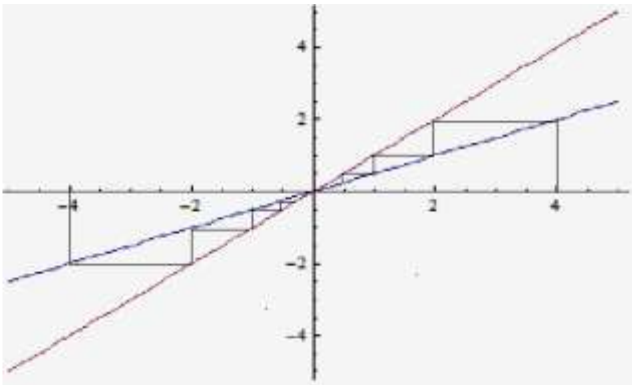
Пример 1: За $f(x)=2x$ со прв извод $|f'(x)|=2>1$, неподвижната точка x=0 е одбивна точка за сите точки од $f(x)=2x$ (цртеж 1).



Цртеж 1: f(x)=2x и orb(1), orb(-0.8)

ii) За *0<b<1*, $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|<1$, неподвижната точка $x=0$ е привлечна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

Пример 2: За $f(x)=\frac{x}{2}$ со извод $|f'(x)|=\frac{1}{2}<1$, неподвижната точка $x=0$ е привлечна точка за сите точки од $f(x)=\frac{1}{2}x$ (цртеж 2).

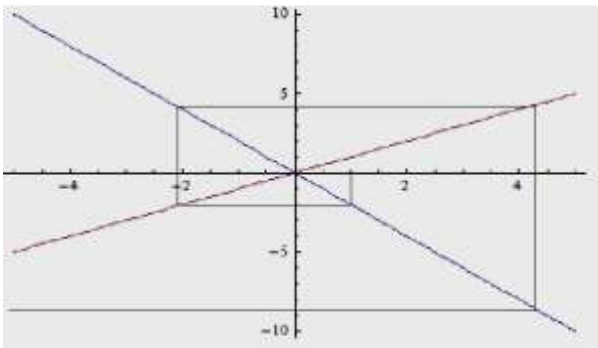


Цртеж 2: f(x)=x/2 и orb(4), orb(-4)

2. За $b<0$, се добиваат три случаи каде се јавува истата неподвижна точка $x=\frac{c}{1-b}=\frac{0}{1-b}=0$.

i) За $b<-1$, $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|>1$, неподвижнта точка x=0 е одбивна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

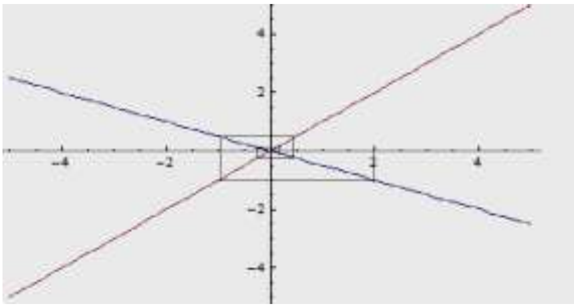
Пример 3: За $f(x)=-2x$ со извод $|f'(x)|=2>1$, неподвижната точка x=0 е одбивна точка за сите точки од $f(x)=-2x$ (цртеж 3).



Цртеж 3: f(x)= - 2x и orb(1)

ii) За $-1<b<0$, $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|<1$, неподвижната точка x=0 е привлечна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

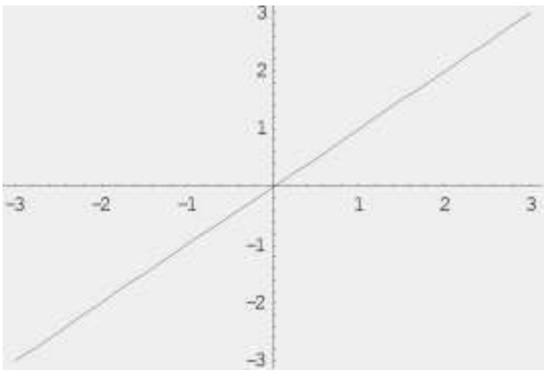
Пример 4: За $f(x)=-\frac{1}{2}x$, со извод $|f'(x)|=\frac{1}{2}<1$, неподвижната точка x=0 е привлечна точка на сите точки од $f(x)=-\frac{1}{2}x$ (цртеж 4).



Цртеж 4: f(x)= - x/2 и orb(2)

iii) За $b=-1$, $f(x)=-x$ има извод $|f'(x)|=1$. Ако ја земеме втората итерација на $f(x)=-x$, $f^2(x)=f(f(x))=x$ забележуваме дека таа се поклопува со $f(x)=x$. Ова ни покажува дека сите точки од $f(x)=-x$, освен 0 се периодични со период 2.

3. За *b*=1 се добива $f(x)=x$, со прв извод $|f'(x)|=1$. Ова е случај кога сите точки од правата се неподвижни (цртеж 5).

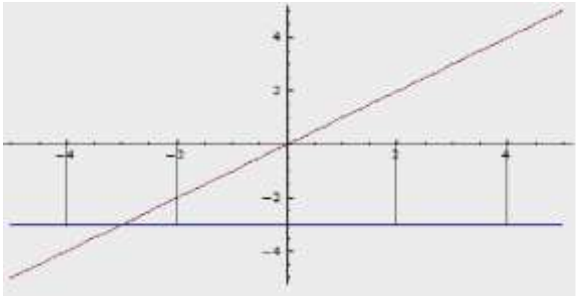


Цртеж 5: f(x)=x

Случај 2. За *b*=0 и c=0 се добива $f(x)=0$ т.е x-оската. Овде сите точки од функцијата $f(x)=0$ одат во 0 после првата итерација.

Случај 3. За *b*=0, c≠0 имаме $f(x)=c$ со извод $f'(x)=0$. Неподвижна точка е $x=\frac{c}{1-b}=\frac{c}{1}=c$. Сите точки од $f(x)=c$ одат во *c* после првата итерација и таа е привлечна точка за сите точки од $f(x)=c$.

Пример 5: За $f(x)=-3$ имаме неподвижна точка $x=-3$. Сите точки од $f(x)=-3$ одат во $x=-3$ по првата итерација (цртеж 6).

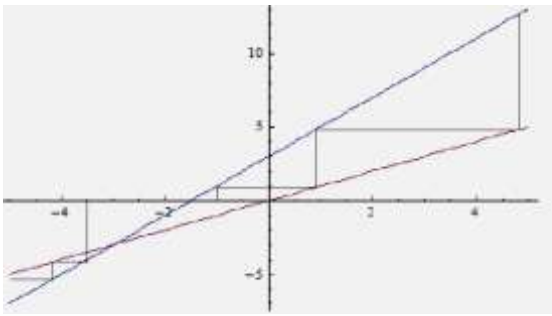


Цртеж 6: f(x)= - 3

Случај 4. За b≠0 и c≠0 имаме $f(x) = bx + c$ со извод $|f'(x)| = |b|$. Неподвижна точка е $x = \frac{c}{1-b} = -\frac{c}{b-1}$ за b≠1.

i) За b>1 и b<-1, $f(x) = bx + c$ со извод $|f'(x)| = |b| > 1$, неподвижната точка $x = -\frac{c}{b-1}$ е одбивна точка за сите точки од $f(x) = bx + c$.

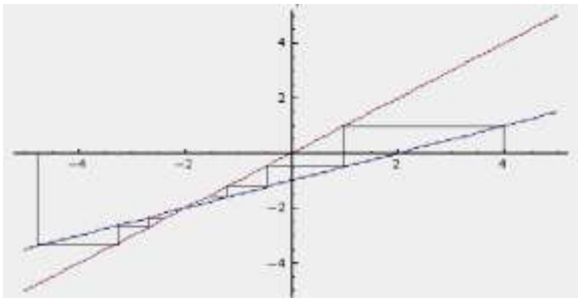
Пример 6: За $f(x) = 2x + 3$ со прв извод $|f'(x)| = 2 > 1$, неподвижната точка $x = -\frac{c}{b-1} = -\frac{3}{2-1} = -3$ е одбивна точка за сите точки од $f(x) = 2x + 3$ (цртеж 7).



Цртеж 7: f(x)=2x+3 и orb(-1), orb(-3.5)

ii) За 0<b<1 и -1<b<0, $f(x) = bx + c$ со прв извод $|f'(x)| = |b| < 1$, неподвижната точка $x = -\frac{c}{b-1}$ е привлечна точка за сите точки од $f(x) = bx + c$.

Пример 7: За $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ со извод $|f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, неподвижната точка $x = -\frac{c}{b-1} = -\frac{-1}{\frac{1}{2}-1} = -\frac{-1}{-\frac{1}{2}} = -2$ е привлечна точка за сите точки од $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ (цртеж 8).

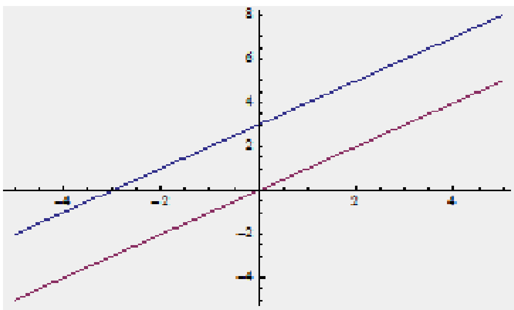


Цртеж 8: f(x) = x/2 – 1 и orb(4), orb(-4.5)

iii) За b=-1, c≠0, $f\left(x\right)=-x+c$ со прв извод $\left|f'\left(x\right)\right|=\left|-1\right|=1$, неподвижна точка $x=-\frac{c}{-1-1}=\frac{c}{2}$ и втора итерација $f^2\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=f(-x+c)=-(-x+c)+c=x$. Овој случај се сведува на истиот случај како и за $f\left(x\right)=-x$, каде сите точки од $f\left(x\right)=-x+c$, освен c се периодични со период 2.

Случај 5. За b=1, c≠0, $f\left(x\right)=x+c$ со извод $\left|f'\left(x\right)\right|=\left|b\right|=1$ чиј график е паралелен со $f\left(x\right)=x$. Ова е случај кога $f\left(x\right)=x+c$ и y=x немаат пресечни точки и тогаш нема ниту неподвижни точки, ниту периодични точки.

Пример 10: За $f\left(x\right)=x+3$ со извод $\left|f'\left(x\right)\right|=1$ нема ниту неподвижни точки, ниту периодични точки (цртеж 9).



Цртеж 9: f(x)=x+3

Заклучок: Од дадената анализа може да констатираме дека покомплексна слика за динамиката на линеарната функција $f\left(x\right)=bx+c$ на R ни даваат $f\left(x\right)=-x$ и , каде се појавуваат и периодични точки со период 2. Како и да е, може да се заклучи дека динамиката на линеарното пресликување на R е многу едноставна.