Ирена Стојменовска, Скопје

РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ СО ПАРАМЕТАР

Суштината на правилното решавање на равенките и неравенките со параметар се состои во потполното и целосно испитување на зависниста на бараното решение од параметарот. Тоа ќе го илустрираме на неколку примери.

(Да забележиме дека решенијата ќе ги бараме во множеството на реални броеви $\boldsymbol{R}$)

Задача 1. Да се реши равенката

$$ax^2+2(a+1)x+2a=0. \tag{1}$$

Решение. При $a=0$ равенката (1) е линеарна, се сведува на равенката $2x=0 \Leftrightarrow x=0$. Нека $a\neq 0$. Дискриминантата $D=4(-a^2+2a+1)$ и нејзини корени се: $a_1=1-\sqrt{2}$ и $a_2=1+\sqrt{2}$. Во зависност од знакот на D имаме:

- Ако $D<0$ т.е. ако $a\in(-\infty,\ 1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},\ +\infty)$, равенката (1) нема решение.

- Ако $D=0$ т.е. ако $a=1-\sqrt{2}$ или $a=1+\sqrt{2}$, равенката (1) има едно решение $x=-\dfrac{a+1}{a}$. Следува за $a=1-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$; за $a=1+\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

- Ако $D>0$ т.е. ако $a\in(1-\sqrt{2},\ 0)\cup(0,\ 1+\sqrt{2})$, равенката (1) има два реални корени: $x_1=\frac{-2(a+1)+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-2(a+1)-\sqrt{D}}{2a}$.

Конечно, за решението на равенката $ax^2+2(a+1)x+2a=0$ имаме:

- Ако $a\in(-\infty,1-\sqrt{2})$, нема реални решенија;

$a=1-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$;

$a\in(1-\sqrt{2},0)$, $x_1=\dfrac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$, $x_2=\dfrac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$;

$a=0$, $x=0$;

$a\in(0,\ 1+\sqrt{2})$, $x_1=\dfrac{-(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$, $x_2=\dfrac{-(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+1}}{a}$;

$a=1+\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$;

$a\in(1+\sqrt{2},\ +\infty)$, нема реални решенија;

со што задачата е комплетно решена.

Задача 2. Да се реши неравенката

$$\sqrt{2x+a}\ \geq\ x. \tag{2}$$

Решение. Најнапред, областа на определеност на оваа неравенка е: $2x+a\ \geq\ 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq-\dfrac{a}{2}$ ќе ги разгледаме следните два случаи:

1) Нека $x<0$. Во овој случај решение на (2) е секој пар (x,a) од областа на определеност. Решението го добиваме од системот

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \ge -\dfrac{a}{2} \end{cases}. \qquad (3)$$

1а) Ако $a \le 0$, системот (3) нема решение,

1б) Ако $a > 0$, системот (3) има решение $x \in [-\frac{a}{2}, 0)$.

2) Ако $x \ge 0$, тогаш

$$\begin{cases} x \ge -\frac{a}{2} \\ \sqrt{2x+a} \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{a}{2} \\ 2x+a \ge x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{a}{2} \\ x^2 - 2x - a \le 0 \end{cases}.$$

Да ја разгледаме неравенката $x^2 - 2x - a \le 0$. Дискриминантата D на соодветната квадратна равенка е $D = 4(a+1)$. Во зависност од знакот на D ги имаме следните случаи:

2а) Ако $a < -1$, нема решение;

2б) Ако $a \ge -1$ неравенката $x^2 - 2x - a \le 0$ има решение,

$$1 - \sqrt{a+1} \le x \le 1 + \sqrt{a+1};$$

во овој случај (имајќи ги во предвид претходните ограничувања), решението на неравенката (2) го добиваме од системот:

$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{a}{2} \\ x \ge 0 \\ a \ge -1 \\ 1 - \sqrt{a+1} \le x \le 1 + \sqrt{a+1} \end{cases} \qquad (4)$$

За да го решиме овој систем, ќе ги споредиме (по големина) броевите 0, $-\dfrac{a}{2}$ и $1 - \sqrt{a+1}$.

Имаме: $0 > 1 - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 1 \Leftrightarrow a > 0$.

Јасно е дека при $a > 0$ е исполнето $0 > -\dfrac{a}{2}$. Така, случајот 2б) природно се разбива на следните два подслучаја:

$2б'$) Ако $a > 0$, тогаш системот (4) се сведува на неравенствата $x \ge 0$ и $x \le 1 + \sqrt{a+1}$, од каде следува $x \in \left[0, 1 + \sqrt{a+1}\right]$.

$2б''$) Нека $-1 \le a \le 0$. Тогаш е исполнето: $0 \le -\dfrac{a}{2}$ и $0 \le 1 - \sqrt{a+1}$.

Да ги споредиме броевите $-\dfrac{a}{2}$ и $1 - \sqrt{a+1}$:

$$-\frac{a}{2} > 1 - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 1 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow a + 1 > 1 + a + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} < 0,$$

што не е исполнето за ниту една вредност на a. Значи $1 - \sqrt{a+1} \ge -\dfrac{a}{2} \ge 0$ па во овој случај, системот (4) се сведува на равенките: $x \ge 1 - \sqrt{a+1}$ и $x \le 1 + \sqrt{a+1}$, т.е. $x \in [1 - \sqrt{a+1}, 1 + \sqrt{a+1}]$.

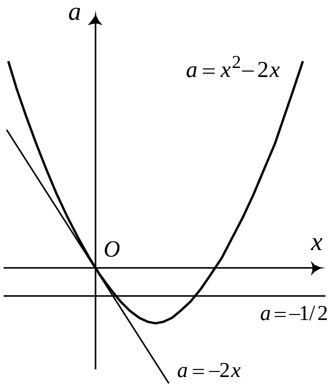
Конечно, решението на зададената неравенка е:

а) $a<-1$, нема решение;

б) $-1 \le a \le 0$, $X=[1-\sqrt{a+1},\ 1+\sqrt{a+1}\,]$;

в) $a>0$, $X=[-\frac{a}{2},\ 0) \cup [\,0,\ 1+\sqrt{a+1}\,] = [-\frac{a}{2}, 1+\sqrt{a+1}\,]$.

Во некои случаи, особено полезно е равенките и неравенките со параметар да се решаваат графички. Тоа ќе го илустрираме на претходниот пример. Заклучивме дека решението на равенката $\sqrt{2x+a} \ge x$ го добиваме од системите



$$\begin{cases} x<0 \\ x \ge -\dfrac{a}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge -\dfrac{a}{2} \\ x^2-2x-a \le 0 \end{cases}$$

кои сега ќе ги решиме графички.

Во правоаголен координатен систем xOa се претставени правата $a=-2x$ и параболата $a=x^2-2x$. Бидејќи $x^2-2x=-2x \Leftrightarrow x=0$, тие се сечат во точката $O(0,0)$. Поради

$$x \ge -\frac{a}{2} \Leftrightarrow,\ x \ge -\frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a \ge -2x.$$

Решение на првиот систем неравенки е множество точки (x,a) од левата полурамнина $(x<0)$, кои лежат "над" правата $a=-2x$ (и на самата права).

Решение на вториот систем неравенки е множество точки (x,a) од десната полурамнина (вклучувајќи ја и правата $x=0$), кои лежат "над" правата $a=-2x$ (и на самата права) и во "внатрешноста" на параболата $a=x^2-2x$ (вклучувајќи ги и точките од параболата). Бидејќи

$$a \ge x^2-2x \quad \Leftrightarrow \quad 1-\sqrt{a+1} \le x \le 1+\sqrt{a+1}, \quad a \ge -1.$$

Користејќи го цртежот, имаме:

Ако $a<-1$, решение нема;

$-1 \le a \le 0$, $X=[1-\sqrt{a+1},\ 1+\sqrt{a+1}\,]$;

$a>0$, $X=[-\frac{a}{2}, 1+\sqrt{a+1}\,]$.

Реши ги равенките:

1. а) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$, б) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{ax}=1$.

2. а) $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$, б) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Реши ги неравенките:

3. $(a+1)x>3a-1$

4. $\frac{a}{ax-a-1} \le 2$

5. $\frac{ax+1}{ax-1} \ge \frac{a+1}{a-1}$

6. $\sqrt{2ax+1} \ge x-1$

7. $\sqrt{x+a} \ge x+1$