

XLIII олимпијада

1. Нека n е природен број и T е множество точки (x, y) во рамнината такви што x и y се ненегативни цели броеви и $x + y < n$. Секоја точка на множеството T е обоена црвено или сино. Ако точката (x, y) е обоена црвено, такви се и сите точки (x', y') на множеството T за кои истовремено важи $x' \leq x$ и $y' \leq y$. Множеството од n сини точки се нарекува X -множество ако сите точки имаат различни x -координати, а множеството од n сини точки се нарекува Y -множество ако сите точки имаат различни y -координати. Докажи дека бројот на X -множествата е еднаков на бројот на Y -множествата.

Решение. Нека a_i е бројот на сини точки на правата $x = i$, а b_i е бројот на сини точки на правата $y = i$. Треба да докажеме дека $a_0 a_1 \dots a_{n-1} = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$. Всушност ќе докажеме дека низата $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ е пермутација на низата $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$.

Тврдењето ќе го докажеме по бројот на црвените точки. Основата на индукцијата (кога сите точки се сини) е тривијална. Сега да воочиме црвена точка (x, y) со најголем збир $x + y$. Тогаш $a_x = b_y = n - x - y - 1$. Ако оваа точка ја пребоиме во сино, тогаш a_x и b_y ќе се намалат за 1. Според индукцијата претпоставка $a_0, \dots, a_{x-1}, \dots, a_{n-1}$ е пермутација на $b_0, \dots, b_{x-1}, \dots, b_{n-1}$ и индуктивниот чекор одма следува.

2. Нека BC е дијаметар на кружница k со центар O , A е точка од k таква што $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$, а D е средината на лакот AB на кружницата k кој не ја содржи точката C . Нека правата која минува низ O и е паралелна со DA ја сече правата AC во точката J , а симетралата на отсечката OA ја сече кружницата k во точките E и F . Докажи, дека J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF .

Решение. Од

$$\angle BCA = \frac{1}{2} \angle BOA = \angle BOD$$

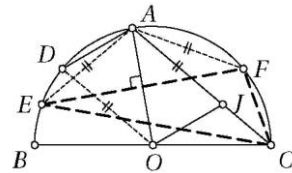
следува дека правите CA и OD се паралелни. Според тоа, четириаголникот $JADO$ е паралелограм. Оттука следува дека

$$\overline{AJ} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{AE} = \overline{AF},$$

па затоа

$$\angle JFE = \angle JFA - \angle EFA = \angle AJF - \angle ECA = \angle AJF - \angle ACF = \angle CFJ.$$

Сега од $\overline{AE} = \overline{AF}$ следува дека CJ е симетрала на $\angle ECF$, па затоа J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF .



3. Определи ги сите парови природни броеви (m, n) , $m, n \geq 3$ такви што

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

е природен број за бесконечно многу природни броеви a .

Решение. Нека $R(x)$ е остатокот при делењето на полиномот $F(x) = x^m + x - 1$ со полиномот $G(x) = x^n + x^2 - 1$. Тогаш за бесконечно многу x , треба $R(x)$ да е делив со $G(x)$ и како $\deg R < \deg G$, за секој доволно голем $|x|$ ќе важи $|R(x)| < |G(x)|$, па затоа мора да важи $R(x) = 0$. Значи, $R \equiv 0$, т.е. полиномот $F(x)$ е делив со полиномот $G(x)$.

Полиномот

$$H(x) = x^{m-n}G(x) - F(x) = x^{m-n+2} - x^{m-n} - x + 1$$

е делив со $G(x)$ и очигледно $\frac{H(x)}{G(x)}$ не е константа, па затоа $\deg H \geq \deg G + 1$, т.е. $m \geq 2n - 1$.

Од друга страна, бидејќи $G(0) = -1$ и $G(1) = 1$ добиваме дека полиномот $G(x)$ има барем една нула $\alpha \in (0, 1)$. Тогаш вџажи $F(\alpha) = 0$, т.е.

$$\alpha^m + \alpha = \alpha^n + \alpha = 1.$$

Ако $m \geq 2n$, тогаш

$$1 - \alpha = \alpha^m \leq (\alpha^n)^2 = (1 - \alpha^2)^2,$$

што е еквивалентно со

$$\alpha(1 - \alpha)(\alpha^2 + \alpha - 1) \leq 0,$$

но тоа не е можно бидејќи

$$\alpha^2 + \alpha - 1 > \alpha^m + \alpha - 1 = 0.$$

Значи, $m = 2n - 1$. Според тоа, за некој $a \in \mathbb{Z}$ имаме

$$H(x) = (x - a)G(x) = x^{n+1} - ax^n + x^3 - ax^2 - x - a.$$

Сега лесно се добива дека $a = 1$ и $(n, m) = (3, 5)$.

4. Нека $n > 1$ е природен број и нека $d_1, d_2, \dots, d_k$ се сите позитивни делители на бројот n , при што

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Нека $D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

а) Докажи, дека $D < n^2$.

б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2 .

Решение. а) Јасно, $n = d_i d_{k+1-i}$, т.е. $\frac{d_i}{n} = \frac{1}{d_{k+1-i}}$, па затоа

$$\begin{aligned}\frac{D}{n^2} &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_i d_{i+1}}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{k+1-i} - d_{k-i}}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{d_{k-i}} - \frac{1}{d_{k+1-i}} \right) = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} = 1 - \frac{1}{n} < 1,\end{aligned}$$

што значи дека $D < n^2$.

б) Од решението под а) имаме

$$\frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \geq \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_2},$$

па затоа $d_1 = 1 < \frac{n^2}{D} \leq d_2$. Според тоа, ако D е делител на n^2 , тогаш мора да важи $\frac{n^2}{D} = d_2$, па затоа $k = 2$. Значи, природниот број $n > 1$ има точно два позитивни делител, односно n е прост број.

5. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такви што важи

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad (1)$$

за секои $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x = z = 0$ и $y = t$ добиваме $4f(0)f(y) = 2f(0)$.

Ако $f(0) \neq 0$, тогаш $f(y) = \frac{1}{2}$, за секој $y \in \mathbb{R}$.

Нека $f(0) = 0$. Ако во (1) ставиме $z = t = 0$ добиваме

$$f(xy) = f(x)f(y), \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ако $f(y) = 0$ за некој $y \neq 0$, добиваме дека $f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Затоа нека $f(y) \neq 0$ за секој $y \neq 0$. Да забележиме дека од (2) следува дека

$$f(x) = f(\sqrt{x})^2 > 0 \text{ за секој } x > 0, \text{ па од (1) за } t = x \text{ и } z = y \text{ следува}$$

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \geq f(x^2),$$

за секои $x, y \geq 0$. Според тоа, функцијата f строго монотонно расте на $\mathbb{R}^+$.

Од (2) следува дека $f(1) = 1$. Понатаму, ако во (1) земеме $t = y$, тогаш од (2) по скратувањето со $f(y)$ добиваме

$$2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z), \text{ за секои } x, z \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Сега ако во (3) земеме $x = 0$ добиваме $f(z) = f(-z)$. Понатаму, користејќи ја (3) со индукција лесно се докажува дека $f(nx) = n^2 f(x)$ за секој $n \in \mathbb{N}$, а оттука следува дека $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^2} f(m) = (\frac{m}{n})^2$ за секој рационален број $\frac{m}{n}$.

Конечно, бидејќи функцијата f монотонно расте за $x > 0$ мора да важи

$$f(x) = x^2 \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

Лесно се проверува дека функциите $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x^2$ навистина се решенија на равенката (1).

6. Нека $k_1, k_2, \dots, k_n$, ($n \geq 3$) се кружници со радиуси еднакви на 1 и центри $O_1, O_2, \dots, O_n$, соодветно. Докажи дека ако ниту една права нема заеднички точки со повеќе од две од дадените кружници, тогаш

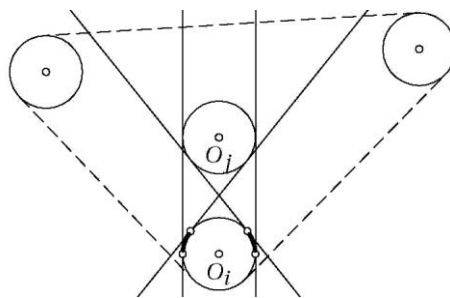
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Решение. Јасно,

$$\frac{2}{O_i O_j} = \sin \alpha_{ij} < \alpha_{ij},$$

каде $2\alpha_{ij}$ е аголот меѓу внатрешните заеднички тангенти на кружниците k_i и k_j . Затоа доволно е да се докаже дека

$$\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \leq (n-1)\pi.$$



За произволни $1 \leq i, j \leq n$, ($i \neq j$) да го разгледаме множеството k_{ij} од сите точки на кружницата k_i во кои тангентата на k_i ја сече или ја допира кружницата k_j . Множеството k_{ij} се состои од два лака со централен агол α_{ij} . Според условот на задачата множествата k_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) се заемно дисјунктни, па затоа важи $2 \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \leq 2n\pi$.

Нека K е конвексната обвивка на кружниците $k_1, k_2, \dots, k_n$. Нејзината граница се состои од неколку отсечки и од лака на кружници со вкупен збир на должини 2π . Овие лака се дисјунктни со сите множества k_{ij} , па така всушност важи $2 \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \leq 2(n-1)\pi$, со што доказот е завршен.