

НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Во оваа статија ќе го разгледаме неравенството на рускиот математичар Чебишев и неколку негови примени.

Тврдeње 1 (неравенство на Чебишев). Нека $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ се такви што $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, тогаш

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a$, за $i = 1, 2, \dots, n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказ. I начин. Од условот следува дека за секои $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ е исполнето неравенството

$$(a_i - a_k)(b_i - b_k) \geq 0, \quad (2)$$

од што следува

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k} (a_i - a_k)(b_i - b_k) &\geq 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i \neq k} a_i(b_i - b_k) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i \neq k} a_i(b_i - b_k) &\geq 0 \Leftrightarrow (n-1) \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i \neq k} a_i b_k \geq 0 \Leftrightarrow \\ n \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i, \end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (1). Јасно, во (1) знак за равенство важи ако и само ако за секои $i \neq k$ во (2) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $a_i = a$, за $i = 1, 2, \dots, n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, \dots, n$.

II начин. Равенството (1) ќе го докажеме со помош на математичка индукција.

За $n = 1$ имаме $a_1 \cdot b_1 \leq 1 \cdot a_1 b_1$, т.е. важи (1).

Нека претпоставиме дека неравенството (1) е точно за $n = k \geq 1$, т.е. дека за

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot \sum_{i=1}^k b_i \leq k \sum_{i=1}^k a_i b_i. \quad (3)$$

Нека се дадени реалните броеви a_i, b_i , $i = 1, 2, \dots, k+1$ такви што $a_1 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1}$

и $b_1 \leq \dots \leq b_k \leq b_{k+1}$. Да ставиме $A = \sum_{i=1}^k a_i$ и $B = \sum_{i=1}^k b_i$. Тогаш

$$A = \sum_{i=1}^k a_i \leq k a_{k+1} \text{ и } B = \sum_{i=1}^k b_i \leq k b_{k+1},$$

па затоа последователно добиваме

$$(A - ka_{k+1})(B - kb_{k+1}) \geq 0 \Leftrightarrow \quad (4)$$

$$\begin{aligned} AB + k^2 a_{k+1} b_{k+1} &\geq kBa_{k+1} + kAb_{k+1} \Leftrightarrow \\ (k+1)AB + k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} &\geq k(AB + Ab_{k+1} + Ba_{k+1} + a_{k+1}b_{k+1}) \Leftrightarrow \\ (k+1)AB + k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} &\geq k(AB + Ab_{k+1} + Ba_{k+1} + a_{k+1}b_{k+1}) \Leftrightarrow \\ (k+1)AB + k(k+1)a_{k+1}b_{k+1} &\geq k(A + a_{k+1})(B + b_{k+1}) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{k}AB + a_{k+1}b_{k+1} &\geq \frac{1}{k+1}(A + a_{k+1})(B + b_{k+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

Понатаму, од индуктивната претпоставка и од неравенството (5) добиваме

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i &= \sum_{i=1}^k a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1} \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i \cdot \sum_{i=1}^k b_i + a_{k+1} b_{k+1} = \frac{1}{k} AB + a_{k+1} b_{k+1} \\ &\geq \frac{1}{k+1} (A + a_{k+1})(B + b_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{k+1} b_i, \end{aligned}$$

т.е. неравенството (1) важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n .

Конечно, од (4) следува дека во (1) знак за равенство важи ако и само ако $A - na_{n+1} = 0$ или $B - nb_{n+1} = 0$, односно ако и само ако $a_i = a$, за $i = 1, 2, \dots, n+1$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, \dots, n+1$. ♦

Забелешка 1. Аналогно се докажува дека равенството (1) важи и во случај кога $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ се такви што $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

Забелешка 2. На потполно ист начин како во тврдење 1 се докажува дека за реалните броеви a_i, b_i , $i = 1, 2, \dots, n$ за кои важи $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ или пак важи $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ е точно неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \geq n \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (6)$$

Притоа доказот се разликува само во неравенството (4), кое во овој случај го добива видот

$$(A - ka_{k+1})(B - kb_{k+1}) \leq 0.$$

Во натамошните разгледувања ќе ја покажеме примената на неравенството на Чебишев.

Пример 1. докажете дека за секои позитивни реални броеви x_i , $i = 1, \dots, n$ е исполнето равенството

$$\frac{1}{\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}} - \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Нека,

$$a_i = \frac{1}{x_i}, b_i = \frac{1}{1+x_i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Ако го искористиме неравенството на Чебишев и земеме предвид дека

$$a_i - b_i = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{1+x_i} = \frac{1+x_i-x_i}{x_i(1+x_i)} = \frac{1}{x_i(1+x_i)} = a_i b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq n \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i(1+x_i)} = n \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \right].$$

Конечно, ако во последното неравенство поделиме со $n \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}$ добиваме

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x_i = c$, $i = 1, 2, \dots, n$. ♦

Пример 2. Најдете n реални броеви $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ за кои е исполнето неравенството

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i x_{n-i+1}. \quad (7)$$

Решение. Нека $a_i = x_i$, $b_i = -x_{n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогаш $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, па од неравенството на Чебишев следува

$$-\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n (-x_{n-i+1}) \leq n \sum_{i=1}^n x_i (-x_{n-i+1}) = -n \sum_{i=1}^n x_i x_{n-i+1},$$

т.е.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq n \sum_{i=1}^n x_i x_{n-i+1}. \quad (8)$$

Од (7) и (8) следува дека важи знак за равенство, а во неравенството на Чебишев знак за равенство важи ако и само ако $a_i = a$, за $i = 1, 2, \dots, n$ или $b_i = b$, за $i = 1, 2, \dots, n$, што значи ако и само ако $x_i = x$, за $i = 1, 2, \dots, n$. ♦

Пример 3. Нека $x_1 \geq x_2 \geq x_3 > 0$ и $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Докажете дека

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geq 3 \frac{x_1 + x_2 + x_3}{y_1 + y_2 + y_3}. \quad (9)$$

Решение. Ако ставиме $a_i = x_i$, $b_i = \frac{1}{y_i}$, $i = 1, 2, 3$, тогаш од неравенството на Чебишев добиваме

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geq \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \right). \quad (10)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина за позитивните реални броеви $0 < y_1 \leq y_2 \leq y_3$ добиваме

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \geq \frac{9}{y_1 + y_2 + y_3}. \quad (11)$$

Конечно, неравенството (9) следува од неравенствата (10) и (11). ♦

Пример 4. Нека α, β, γ се аглиите (изразени во радијани) и a, b, c се должините на страните на триаголник. Докажете дека

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq \frac{9}{\pi}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако во равенството (9) ставиме $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \gamma$ и земеме предвид дека $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, добиваме

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3 \frac{1+1+1}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{9}{\pi}.$$

Јасно, зна за равенство важи ако и само во (9) важи знак за равенство, што значи ако и само ако во неравенствата (10) и (11) важи знак за равенство. Но, во (11) важи зна за равенство ако и само ако $y_1 = y_2 = y_3$, што во нашиот случај значи ако и само ако триаголникот е рамнострани. ♦

На крајот од нашите разгледувања ќе наведеме неколку задачи за самостојна работа за чие решавање може да се искористат неравенството на Чебишев и претходните примери.

Задача 1. Нека $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Докажете дека

а) ако $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, тогаш

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

б) ако $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, тогаш

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Задача 2. Нека α, β, γ се аглиите (изразени во радијани) и a, b, c се должините на страните на триаголник. Докажете дека

$$\text{а) } \frac{b+c-a}{\alpha} + \frac{c+a-b}{\beta} + \frac{a+b-c}{\gamma} \geq 3 \frac{a+b+c}{\pi}, \quad \text{б) } \frac{b+c-a}{a\alpha} + \frac{c+a-b}{b\beta} + \frac{a+b-c}{c\gamma} \geq \frac{9}{\pi}.$$

Задача 3. Ако a, b, c се позитивни реални броеви и $s = \frac{a+b+c}{2}$, тогаш

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}.$$

Упатство. Најпрво со помош на математичка индукција докажете дека за произволни позитивни реални броеви a_i , $i = 1, 2, \dots, k$ важи

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n \leq k^{n-1} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n),$$

А потоа искористете го претходното неравенство и неравенството на Чебишев.

Литература

1. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
2. Mitrinović, D. S.; Vasić, P. M.: *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970