

БМО 1995

1. Определи ја вредноста на изразот

$$(\dots(((2*3)*4)*5)*\dots)*1995$$

каде $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ за произволни позитивни броеви x и y .

Решение. Нека $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ и $n^* = 2 * 3 * \dots * n$. Непосредно се проверува дека $f(x * y) = f(x)f(y)$ и затоа

$$f(n^*) = f(2)f(3)\dots f(n) = (-1)^n \frac{2}{n(n+1)}.$$

Оттука

$$n^* = \frac{1-f(n^*)}{1+f(n^*)} = \frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$

Во случајов $1995^* = \frac{1991009}{1991011}$

2. Дадени се кружниците $c_1(O_1, r_1)$ и $c_2(O_2, r_2)$, кои се сечат во точките A и B , при што $r_2 > r_1$ и $\angle O_1 A O_2 = 90^\circ$. Правата $O_1 O_2$ ја сече c_1 во точките C и D , а c_2 ја сече во точките E и F (E е меѓу C и D , а D е меѓу E и F). Правата BE ги сече кружницата c_1 во точката K и правата AC во точката M , а правата BD ги сече кружницата c_2 во точката L и правата AF во точката N . Докажи, дека $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}$.

Решение. Нека $P = AO_1 \cap c_1$, $Q = AO_2 \cap c_2$, $\angle ACO_1 = \alpha$ и $\angle AFO_2 = \beta$. Тогаш $\angle AFL = \angle ABD = \angle ACD = \alpha$ и аналогно $\angle ACK = \beta$. Од друга страна имаме $\angle APB = 2\alpha$ и $\angle AQB = 2\beta$. Сега од $\triangle MKC$ и $\triangle KCE$ соодветно добиваме, дека

$$\overline{KM} = \frac{\overline{CK} \sin \beta}{\cos(\alpha-\beta)} \text{ и } \overline{KE} = \frac{\overline{CK} \sin(\alpha+\beta)}{\cos \beta}.$$

Според тоа,

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}} = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}{\sin \beta \cos \beta}$$

и аналогно

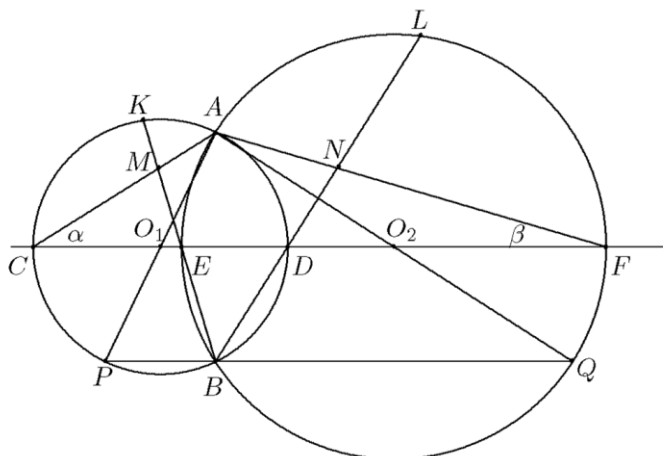
$$\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}.$$

Од последните две равенства следува

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$$

Останува да забележиме, дека $\angle ABP = \angle ABQ = 90^\circ$ и значи

$$\frac{\overline{AB}}{2r_1} = \sin 2\alpha, \frac{\overline{AB}}{2r_2} = \sin 2\beta.$$



Според тоа,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}.$$

Забелешка. Тврдењето на задачата го докажавме без да го искористиме условот $\angle O_1 A O_2 = 90^\circ$, што значи дека задачата е предефинирана.

3. Нека $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$ и $a + b$ е парен број. Докажи, дека корените на равенката

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$$

се природни броеви, но ниту еден од нив не е точен квадрат.

Решение. Корените на равенката се $x_1 = b^2 + 1$ и $x_2 = a^2 - b^2 - a$. Јасно, тие се природни броеви и x_1 не е точен квадрат. Да претпоставиме дека постојат природни броеви $a > b$, за кои $a + b$ е парен број и x_2 е точен квадрат, на пример c^2 . Тогаш $m = \frac{a+b}{2}$ и $n = \frac{a-b}{2}$ се природни броеви и важи

$$(4m-1)(4n-1) = 4(4mn - m - n) + 1 = 4(a^2 - b^2 - a) + 1 = (2c)^2 + 1^2.$$

Според тоа, бројот $(2c)^2 + 1$ има прост делител од видот $4k-1$. Како што е познато, на пример, следува од малата теорема на Ферма, дека тој делител треба да е делител на $2c$ и 1 , што е противречност.

4. Нека n е природен број и S е множеството од сите точки (x, y) , каде x и y се природни броеви и $x \leq n$, $y \leq n$. Нека T е множеството од сите квадрати со темиња од S . Со a_k , $k \geq 0$ да го означиме бројот на паровите точки од S , кои се темиња на точно k квадрати од T . Докажи дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Решение. Бројот на паровите точки од S е еднаков на $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2}$.

Бројот на квадратите од T , чии страни се паралелни со координатните оски и имаат должина k е еднаков на $(n-k)^2$. Секој од тие квадрати содржи $k-1$ квадрати чии темиња лежат на неговите страни и чии страни се паралелни со координатните оски. Според тоа, бројот на сите квадрати од T е еднаков на

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)j^2 = n \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j^3 = n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Од друга страна, ако земеме предвид дека темињата на секој квадрат генерираат 6 парови точки од S , добиваме дека бројот на сите квадрати од T е еднаков на $\frac{a_1+2a_2+3a_3}{6}$. Според тоа,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \binom{n^2}{2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$$

од каде следува дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.