Глигор Тренчевски
Ристо Малчески
Костадин Тренчевски

МАТЕМАТИКА 3

ЗА ТРЕТА ГОДИНА ВО РЕФОРМИРАНОТО ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

СОДРЖИНА

ВОВЕД

Пред тебе е учебникот по изборниот предмет МАТЕМАТИКА за трета година од гимназиското образование. Тој е работен така, што ќе можеш и самостојно да се здобиваш со новите знаења и умеења што се предвидени со наставната програма по овој предмет.

Материјалот е поделен, согласно со програмата, во четири одделни целини (теми). На почетокот на секоја тема, покрај содржината што е разработена во неа даден е преглед на потребните предзнаења за успешно следење на материјалот кој е разработен во таа глава. Исто така, даден е и прегледот на новите знаења и умеења со кои треба да се стекнеш доколку успешно ги совладаш предвидените содржини. Секоја тема е заокружена целина и е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Темите се означени со римски броеви, додека лекциите се означени со арапски броеви. Во секоја тема, дефинициите, примерите, забелешките и теоремите се нумерирани интегрално за темата, што не е случај со задачите за вежбање кои се дадени по секоја лекција, како и задачите за повторување и утврдување кои се дадени на крајот на секоја тема. На крајот од секоја тема е даден тест, со чија помош можеш да ги провериш и да ги оцениш своите знаења и умеења.

Разработуваниот материјал содржи голем број тврдења (теореми), од кои дел треба да ги усвоиш без доказ, што е посебно назначено за секоја теорема. Примерите, кои ги има во доволен број, се целосно решени и се дадени како илустрација на тврдењата што се разработуваат. Затоа, особено е важно добро да ги разработиш, бидејќи само така можеш да се подготвиш за самостојно решавање на задачи, а потоа да преминеш кон решавање на задачите за вежбање.

За полесно користење на учебникот, даден е регистар на поимите со кои ќе се сретнеш во текот на учењето, како и список на користените ознаки.

На крајот од учебникот се дадени одговори и упатства на некои од задачите за вежбање. Пожелно е пред да го погледнеш одговорот или упатството на задачата, да се обидеш самостојно да ја решиш и да извршиш самопроверка. Само така ќе можеш да се здобиеш со самодоверба и ќе можеш успешно да усвојуваш нови знаења и умеења. Се разбира дека за посеопфатно и подлабоко усвојување на предвидениот материјал, пожелно е да користиш и дополнителна литература, па затоа таа е наведена во посебен дел, веднаш по одговорите и упатствата на задачите.

Авторите

ЛИСТА НА СИМБОЛИ

Симбол	***Значење***	***Симбол***	***Значење***
$\mathbf{N}$	множество природни броеви	$\log_a b$	логаритам од b за основа a
$\mathbf{Z}$	множество цели броеви	sec	секанс
$\mathbf{R}$	множество реални броеви	cosec	косеканс
$\angle$	агол	V_n^k	варијација без повторување од n елементи од класа k
$\circ$	степен	$\overline{V}_n^k$	варијација со повторување од n елементи од класа k
rad	радијан	P_n	пермутација без повторување од n елементи
$\overline{AB}$	должина на отсечка	$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m}$	пермутација од n елементи од тип $(k_1, k_2,\ldots, k_m)$
sin	синус	C_n^k	комбинација без повторување од n елементи од класа k
cos	косинус	$\overline{C}_n^k$	комбинација со повторување од n елементи од класа k
tg	тангенс	$\overline{A}$	настан спротивен на настанот A
ctg	котангенс	$P(A)$	веројатност на настанот A
$a^r, a > 0$	степен со реален експонент	π	бројот пи
$\in$	припаѓа	$\cup$	унија
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	реална функција	$\cap$	пресек
$\varnothing$	невозможен настан	$\subseteq$	подмножество
Ω	сигурен настан	$C_n^k, \binom{n}{k}$	биномен коефициент

ГЛАВА I

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Степен со реален експонент**
2. **Експоненцијална функција**
3. **Експоненцијални равенки**
4. **Поим за логаритам. Основни својства**
5. **Логаритамска функција**
6. **Декадни логаритми**
7. **Логаритамски равенки**
8. **Некои примени на експоненцијалните функции**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *дефиницијата на степен и операциите со степени со рационален показател,*
- *поимот реален број и приближните рационални вредности на ирационалните броеви,*
- *формулите за скратено множење,*
- *решавањето на линеарните и квадратните равенки, и*
- *решавањето на линеарните и квадратните неравенки.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ја усвоиш дефиницијата на експоненцијалната функција,
- да научиш да одредуваш дефинициона област на експоненцијална функција,
- да научиш да ја испитуваш монотоноста на експоненцијалната функција за различни вредности на основата,
- да составуваш таблици на вредности на експоненцијалната функција,
- да конструираш график на функција од видот $y = a^x; y = a^x \pm m; y = a^{x \pm p} \pm m;$ за $a \in \mathbf{R}$,
- да научиш да ја проценуваш положбата на графикот на експоненцијалната функција според аналитичкиот запис,
- да ја усвоиш дефинцијата на експоненцијалната равенка,
- да научиш да решаваш равенки од видот $a^x + m = 0, a^{f(x)} + m = 0, (a^{f(x)})^2 + ba^{f(x)} + c = 0,$,
- да ја усвоиш дефиницијата на логаритам,
- да ја усвоиш операцијата логаритмирање,
- да ги усвоиш својствата на логаритмирањето,
- да ги усвоиш правилата за логаритмирање на производ, количник, степен и корен,
- да научиш да одредуваш карактеристика на декаден логаритам од даден број,
- да научиш да логаритмираш бројни изрази и да вршиш приближни пресметувања,
- да ја усвоиш врската меѓу логаритми од броеви со различни основи,
- да ја усвоиш дефиницијата на логаритамската функција,
- да одредуваш дефинициона област на логаритамски функции од видот $y = \log_a x$ и $y = \log_a f(x)$,
- да научиш да ја испитуваш монотоноста на логаритамската функција,
- да научиш да ја проценуваш монотоноста на логаритамската функција според нејзината основа,
- да конструираш график на логаритамската функција $y = \log_a x$,
- да ја усвоиш дефиницијата на логаритамската равенка, и
- да научиш да решаваш едноставни логаритамски равенки.

Во математиката и нејзините примени важна улога имаат таканаречените експоненцијални и логаритамски функции. Експоненцијалната функција $x \mapsto a^x, a>0, x\in \mathbf{R}$ е потполно определено проширување на поимот за степен $n\mapsto a^n, a>0, n\in \mathbf{Z}$. Со експоненцијалните функции се опишуваат процесите на растење, како што е порастот на бројот на жителите на некоја земја, порастот на националниот доход итн. Исто така, со овие функции се опишуваат и процесите на опаѓање, на пример масата на радиоактивно тело во текот на времето и слично.

Посебно важна е експоненцијалната функција $x\mapsto 10^x, x\in \mathbf{R}$ и со неа поврзаната функција $x\mapsto \log x$. За важноста на овие функции доволно говори фактот дека секој калкулатор има вграден програм за приближно пресметување на вредностите на овие функции.

I.1. СТЕПЕН СО РЕАЛЕН ЕКСПОНЕНТ

Во прва година се запознавме со степените со показател (експонент) рационален број. Да се потсетиме. Прво се запознавме со степенот $a^n, a\in \mathbf{R}, n\in \mathbf{N}$, а потоа го воведовме и степенот чиј показател е 0, односно цел негативен број, и тоа со следниве дефиниции

$$a^0=1, a\neq 0 \text{ и } a^{-k}=\tfrac{1}{a^k}, k\in \mathbf{N}, a\neq 0.$$

Притоа забележавме дека степените a^0 и a^{-k}, за $a=0$ не се дефинирани. Понатаму, степенот со позитивен рационален експонент го воведовме со следнава дефиниција

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, a\geq 0, m,n\in \mathbf{N}, \qquad (1)$$

а степенот со негативен рационален експонет со дефиницијата

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a>0, m,n\in \mathbf{N}.$$

Да забележиме дека за $a<0$ дефиницијата (1) не можеме да ја примениме на изразот a^r, $r\in \mathbf{Q}$, што може да се види од следниов пример.

Пример 1. Нека $a<0$. За $r=\frac{2}{4}$ имаме $a^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{a^2}\in \mathbf{R}$, а за $r=\frac{1}{2}(=\frac{2}{4})$ добиваме $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\notin \mathbf{R}$. Понатаму, за $r=\frac{2}{6}$ имаме $a^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{a^2}>0$, а за $r=\frac{1}{3}(=\frac{2}{6})$ добиваме $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}<0$. ♦

Исто така, за степените со рационални експоненти важи следнава теорема.

Теорема 1. За секои $a,b>0$ и за секои $r,q\in \mathbf{Q}$ важат равенствата

$$a^r\cdot a^q=a^{r+q},\quad a^r:a^q=a^{r-q},\quad (ab)^r=a^r\cdot b^r,\quad (\tfrac{a}{b})^r=\tfrac{a^r}{b^r} \text{ и } (a^r)^q=a^{rq}. \blacklozenge \qquad (2)$$

Во претходниот дел се потсетивме на степените со експонент рационален број. Но, дали можеме да разгледуваме степен со експонент ирационален број? На пример, дали има смисла изразот $3^{\sqrt{2}}$? Пред да одговориме на ова прашање ќе докажеме уште едно својство на степните со експонент рационален број. Имено, ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 2. Нека $r>s; r,s\in\mathbf{Q}$. Ако $a>1$, тогаш $a^r>a^s$. Ако $0<a<1$, тогаш $a^r<a^s$.

Доказ. Нека $r>s; r,s\in\mathbf{Q}$ и $a>1$. Тогаш, $r=\frac{m}{n}, s=\frac{p}{q}$ и $r-s=\frac{mq-np}{nq}>0$, па затоа можеме да земеме дека $mq-np\geq 1$ и $nq\geq 1$. Сега од својствата на степен со природен експонент и од теорема 1 имаме $a^{mq-np}>1=1^{nq}$, па затоа

$$1<a^{\frac{mq-np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{a^r}{a^s}.$$

Ако во последното равенство помножиме со $a^s>0$ добиваме $a^r>a^s$, што и требаше да се докаже.

Ако $0<a<1$ и $r>s; r,s\in\mathbf{Q}$, тогаш $\frac{1}{a}>1$, па од претходно изнесеното следува $(\frac{1}{a})^r>(\frac{1}{a})^s$. Сега од теорема 1 следува $\frac{1}{a^r}>\frac{1}{a^s}$ и ако во последното равенство помножиме со $a^r a^s>0$ добиваме $a^r<a^s$, што и требаше да се докаже. ♦

Да се вратиме на прашањето за *степен со реален експонент*, т.е. дали има смисла изразот $3^{\sqrt{2}}$? За таа цел да ги разгледаме неравенствата

$$1<1{,}4<1{,}41<1{,}414<1{,}4142<...<\sqrt{2}<...<1{,}4143<1{,}415<1{,}42<1{,}5<2.$$

Ако ја искористиме теорема 2 добиваме

$$3^1<3^{1,4}<3^{1,41}<3^{1,414}<3^{1,4142}<... \text{ и } ...<3^{1,4143}<3^{1,415}<3^{1,42}<3^{1,5}<3^2.$$

Според тоа, изразот $3^{\sqrt{2}}$ исто така можеме да го сфатиме како степен чија вредност е еднозначно определена со претходните две низи неравенства, т.е.

$$3^1<3^{1,4}<3^{1,41}<3^{1,414}<3^{1,4142}<...<3^{\sqrt{2}}<...<3^{1,4143}<3^{1,415}<3^{1,42}<3^{1,5}<3^2.$$

Забелешка 1. Воопшто, изразите $a^r, a>0$, каде r е ирационален број, ги сфаќаме како степени и за нив важат истите правила како и за степените со рационални експоненти, т.е. точни се теоремите 1 и 2. Меѓутоа, во пракса при пресметување на бројните вредности на степените со ирационални експоненти конкретните пресметувања ги вршиме со помош на нивните приближни вредности.

Пример 2. а) Од $3^{1,41421}=4{,}728785881...$ и $3^{1,41422}=4{,}728837832...$ и како

$$1{,}41421<\sqrt{2}<1{,}41422 \text{ т.е. } 3^{1,41421}<3^{\sqrt{2}}<3^{1,41422}$$

заклучуваме дека со точност до третото децимално место важи $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}728$.

б) Од $7^{1{,}73205} = 29{,}09055857...$ и $7^{1{,}732051} = 29{,}09061517...$ и како

$$1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}732051 \text{ т.е. } 7^{1{,}73205} < 7^{\sqrt{3}} < 7^{1{,}732051}$$

заклучуваме дека со точност до третото децимално место важи $7^{\sqrt{3}} \approx 29{,}090$. ♦

Пример 3. а) Од теорема 1 имаме

$$\frac{3^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}}}{2 \cdot 3^{\sqrt{2}+1}} = \frac{3^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}}{2 \cdot 3^{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3^{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-\sqrt{2}}.$$

б) Бидејќи $\sqrt{2} < \frac{3}{2} < \sqrt{3}$ и како $6 > 1$ од забелешка 1 и теорема 2 следува

$$6^{\sqrt{2}} < 6^{\frac{3}{2}} < 6^{\sqrt{3}}.$$

Од друга страна, бидејќи $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ и $\sqrt{2} < \frac{3}{2} < \sqrt{3}$, повторно од теорема 2 и забелешка 1 следува

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\sqrt{2}}. ♦$$

Забелешка 2. Во пример 2 се пресметани неколку вредности на степени. По правило овие пресметувања се комплицирани, па затоа пожелно е да користиш калкулатор. Во случајов употребата на калкулаторот е едноставна и таа се состои во следново:

- ја внесуваш основата на степенот, на пример $2{,}41$,
- го притискаш копчето со ознака y^x,
- го внесуваш степеновиот показател, на пример $1{,}456$, после што на екранот ќе се појави бројот $3{,}599289786 \approx 2{,}41^{1{,}456}$.

ЗАДАЧИ

1. Напиши ги во облик на степени изразите

а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt[3]{x^2}$, в) $\sqrt[2n-1]{a^{-1}}$.

2. Пресметај

а) $81^{\frac{1}{2}}$, б) $32^{\frac{2}{5}}$, в) $(2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}) \cdot 2^{\frac{3}{2}}$, г) $(-15 \cdot 2^{\frac{1}{n}}) : (3 \cdot 2^{-\frac{1}{n-1}})$.

3. Без да пресметуваш, подреди ги по растечки редослед броевите: $2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{4}}$ и $5^{\frac{1}{6}}$.

4. Без да пресметуваш, подреди ги по растечки редослед броевите: $4^{\sqrt{2}}$, $4^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$, $4^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$.

I. 2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

Од разгледувањата во претходната точка можеме да заклучиме, дека при $a>0$ степенот a^x има, за секоја вредност $x\in\mathbf{R}$, точно една позитивна вредност. Според тоа, има смисол следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Нека $a>0$. Функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$, определена со

$$f(x)=a^x, \text{ за секој } x\in\mathbf{R} \tag{1}$$

ја нарекуваме *експоненцијална функција* со основа a.

Природно е да се запрашаме кои својства ги има експоненцијалната функција.

i) Од $1^x=1$, за секој $x\in\mathbf{R}$ добиваме дека во случај кога основата е $a=1$ експоненцијалната функција всушност е константната функција $f(x)=1$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

ii) Нека $a>0$. Од својствата на степените имаме дека $a^0=1$, што значи дека графикот на експоненцијалната функција (1) ја сече y – оската во точката $A(0,1)$. Понатаму, од својствата на степените и од $a>0$ следува дека за секој $x\in\mathbf{R}$ важи $a^x>0$, што значи дека графикот на експоненцијалната функција не ја сече x – оската, т.е. оваа функција нема нули.

iii) Нека $x_1\neq x_2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1<x_2$. Имаме:

- ако $0<a<1$, тогаш од забелешка 1 и теорема 2 следува дека $a^{x_1}>a^{x_2}$, т.е. $f(x_1)\neq f(x_2)$, и
- ако $a>1$, тогаш од забелешка 1 и теорема 2 следува дека $a^{x_1}<a^{x_2}$, т.е. $f(x_1)\neq f(x_2)$,

па затоа при $a\neq 1$ со (1) е зададена инјекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^+$.

Може да се докаже дека при $a\neq 1$, за секој $y\in\mathbf{R}^+$ постои $x\in\mathbf{R}$ таков, што $f(x)=y$, т.е. дека со (1) е зададена сурјекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^+$. Според тоа, точна е следнава теорема.

Теорема 3. Ако $a\neq 1$, тогаш експоненцијалната функција (1) е биекција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}^+$. ♦

iv) Од претходната теорема непосредно следува дека дефиниционата област на експоненцијалната функција (1) е множеството $\mathbf{R}$, а нејзиното множество вредности е множеството позитивни реални броеви $\mathbf{R}^+$.

v) Пред да ја разгледаме монотоноста на експоненцијалната функција, да се потсетиме дека:

- за функцијата $y=g(x)$ велиме дека строго монотоно расте, ако од $x_1<x_2$, следува $g(x_1)<g(x_2)$;

- за функцијата $y = g(x)$ велиме дека строго монотоно опаѓа, ако од $x_1 < x_2$, следува $g(x_1) > g(x_2)$.

Во *iii*) видовме дека за $0 < a < 1$ од $x_1 < x_2$ следува $a^{x_1} > a^{x_2}$ т.е. $f(x_1) > f(x_2)$, а за $a > 1$ од $x_1 < x_2$ следува $a^{x_1} < a^{x_2}$ т.е. $f(x_1) < f(x_2)$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 4. а) Ако $0 < a < 1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

б) Ако $a > 1$, тогаш функцијата (1) строго монотоно расте на целата дефинициона област. ♦

Пример 4. а) За да го нацртаме графикот на функцијата $y = 2^x$, $x \in \mathbf{R}$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на експоненцијалната функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 2^x$	$\frac{1}{32} = 0{,}03125$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1	2	4	8	16	32

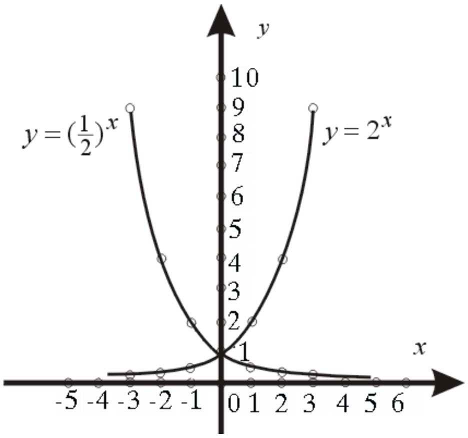
Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, 2^x)$ и истите ги поврземе (цртеж долу).

б) За да го нацртаме графикот на функцијата $y = (\frac{1}{2})^x$, $x \in \mathbf{R}$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на експоненцијалната функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (\frac{1}{2})^x$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{1}{32} = 0{,}03125$

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, (\frac{1}{2})^x)$ и истите ги поврземе (цртеж долу). ♦

Од пример 4 а) насетуваме дека функцијата $y = 2^x$, $x \in \mathbf{R}$ може да прими произволно голема вредност кога x е доволно голем број, односно произволна мала позитивна вредност кога x е доволно мал број. Последното ќе го покажеме на пример.



Пример 5. а) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што на пример $2^x > 8589934591$.

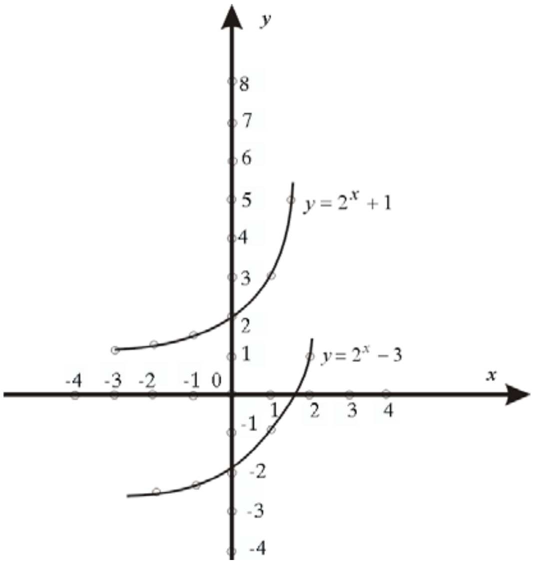
Бидејќи $2^{33} = 8589934592 > 8589934591$ од својствата на експоненцијалната функција следува дека за секој $x > 33$ важи

$$2^x > 2^{33} = 8589934592 > 8589934591.$$

б) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што $2^x < 0{,}0000000002$.

Бидејќи $2^{-33} = \frac{1}{2^{33}} = \frac{1}{8589934592} < 0{,}0000000002$ од својствата на експоненцијалната функција следува дека за секој $x < -33$ важи $2^x < 2^{-33} < 0{,}0000000002$. ♦

Од претходниот пример и од таблицата што и соодветствува на функцијата $y = 2^x$ се забележува следново: ако земеме дека x е негативно и дека постојано опаѓа, т.е. дека неговата апсолутна вредност расте, добиваме дека функцијата прима позитивни вредности и дека таа постојано опаѓа, но нејзината вредност никогаш не е еднаква на нула. Тоа значи дека соодветната крива за оние негативни вредности на апцисата x што неограничено опаѓаат се приближува до негативниот дел на $x-$оската, но во случајот не ја сече. Во ваков случај велиме дека $x-$оската е *хоризонтална асимптота* на дадената крива. Очигледно, $x-$оската е *хоризонтална асимптота* за кривата $y = (\frac{1}{2})^x$, со тоа што во овој случај ординатата y се приближува до $x-$оската во нејзиниот позитивен дел.



Воопшто говорено, $x-$оската е хоризонтална асимтота на функцијата $y = a^x$ и тоа:

- ако $a > 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до $x-$оската во негативниот дел, и
- ако $0 < a < 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до $x-$оската во позитивниот дел.

Забелешка 3. Во претходните разгледувања ја проучивме експоненцијалната функција (1) и научивме да го конструираме нејзиниот график. Овде, со помош на графикот на функцијата (1), ќе покажеме како можеме да го конструираме графикот на функцијата

$$f(x) = a^x + m\,,\ x \in \mathbf{R}. \qquad (2)$$

Да ја разгледаме функцијата $g(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. Притоа за функциите f и g важи $f(x) = g(x) + m$, за секој $x \in \mathbf{R}$. Според тоа, за секој $x \in \mathbf{R}$ вредноста на функцијата f можеме да ја пресметаме ако на вредноста на функцијата g додадеме m. Последното значи, дека графикот на функцијата (2) можеме да го добиеме со транслација во правец на $y-$оската за вектор со должина $|m|$ на графикот на функцијата (1) и тоа:

- во позитивна насока на $y-$оската, ако $m > 0$ и
- во негативна насока на $y-$оската, ако $m < 0$.

Притоа, функцијата (2) ја сече $y-$оската во точка $A(0,1+m)$ и правата $y = m$ е нејзина хоризонтална асимптота. На цртежот горе се дадени графиците на функциите $y = 2^x - 3$ и $y = 2^x + 1$.

Забелешка 4. Слично, како и во претходниот случај, графикот на функцијата

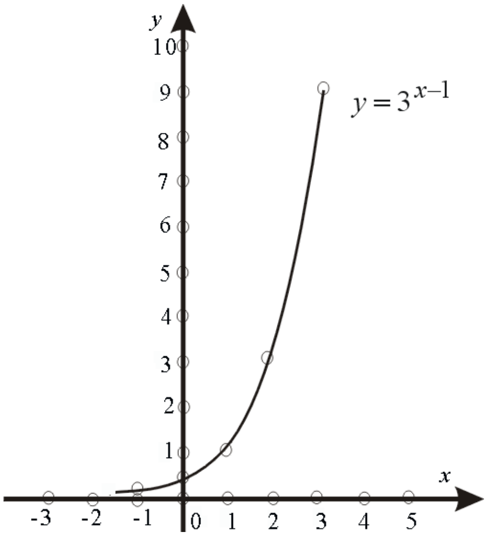
$$f(x) = a^{x+p}\,,\ x \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

можеме да го конструираме со помош на графикот на функцијата (1). Имено, од $f(x)=a^{x+p}=a^p a^x$, $x\in\mathbf{R}$ следува дека вредноста на функцијата f можеме да ја пресметаме ако вредноста на функцијата $g(x)=a^x$ ја помножиме со константата a^p. Јасно, графикот на функцијата (3) ја сече $y-$оската во точката $A(0,a^p)$ и $x-$оската е хоризонтална асимптота за функцијата (3).

Пример 6. Графикот на функцијата $y=3^{x-1}$ ја сече $y-$оската во точката $A(0,\frac{1}{3})$ и $x-$оската е негова хоризонтална асимптота. Составуваме табелица за некои вредности на функцијата:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=3^{x-1}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	21

Графикот на функцијата $y=3^{x-1}$ е даден на цртеж десно. ♦



Забелешка 5. На крајот од овој дел да забележиме дека графикот на функцијата

$$f(x)=a^{x+p}+m,\ x\in\mathbf{R} \qquad (4)$$

можеме да го конструираме така што прво ќе го конструираме графикот на функцијата $g(x)=a^{x+p}$ (види забелешка 4), а потоа истиот ќе го транслатираме согласно забелешка 3. Јасно, правата $y=m$ е хоризонтална асимптота за функцијата (4) и нејзиниот график ја сече $y-$оската во точката $A(0,a^p+m)$.

ЗАДАЧИ

1. Нацртај го графикот на функцијата

а) $f(x)=3^x$, б) $f(x)=\frac{1}{3^x}$, в) $f(x)=-3^x$, г) $f(x)=-\frac{1}{3^x}$.

2. Определи ја експоненцијалната функција $f(x)=a^x$, ако $f(\frac{2}{3})=\frac{9}{16}$.

3. а) Докажи дека за функцијата $f(x)=3^x$ важи равенството $f(2+3)=f(2)f(3)$.

б) Докажи дека за функцијата $f(x)=a^x$ важи равенството $f(x+t)=f(x)f(t)$.

4. Во ист координатен систем нацртај го графикот на функцијата $f(x)=2^x$ и на функцијата

а) $g(x)=x$, б) $g(x)=x^2$, в) $g(x)=3^x$, г) $g(x)=2^{|x|}$.

Спореди го растењето на овие функции.

5. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x)=3^x+4$, б) $f(x)=3^{x+1}+\sqrt{3}$, в) $f(x)=-2^x+1$, г) $f(x)=-2^{x+2}+\sqrt{2}$.

I.3. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Во равенката $2^x = 8$ непознатата x се наоѓа во експонентот, па затоа равенката од ваков вид ја нарекуваме *експоненцијална равенка.* Во овој дел, преку примери, ќе се осврнеме на решавањето на елементарни експоненцијални равенки, кои можат да се сведат на еднаквост на два степени со исти основи:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, 0 < a \neq 1, \tag{1}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми или количници на полиноми од најмногу втор степен. Притоа, од својствата на степените следува дека равенката (1) е еквивалентна на равенката

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

За $a = 1$ равенките (1) и (2) не се еквивалентни, бидејќи во овој случај решение на равенката (1) е множеството реални броеви $\mathbf{R}$, што не е случај со равенката (2). Исто така, ќе се осврнеме и на равенките кои можат да се сведат на експоненцијалната равенка од видот

$$a(A^{f(x)})^2 + bA^{f(x)} + c = 0, \tag{3}$$

каде $0 < A \neq 1$, $a,b,c \in \mathbf{R}$ и која со смената $A^{f(x)} = t$ се сведува на квадратната равенка

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{4}$$

чии решенија се $t_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Притоа од $A^{f(x)} > 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ следува дека равенката (3) има решение ако $t_1 > 0$ и истото го наоѓаме решавајќи ја равенката $A^{f(x)} = t_1$. Меѓутоа, ако $t_1 \leq 0$ тогаш за најденото t_1 не добиваме решение на (3). Аналогната дискусија се однесува и за решението t_2 на равенката (4).

Пример 7. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $2^x = 8$, **б)** $4^{3x+1} = 128$

Решение. а) Имаме

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

б) Од $128 = 2 \cdot 64 = 2 \cdot 4^3 = 2 \cdot (2^2)^3 = 2^7$ и $4 = 2^2$ следува

$$4^{3x+1} = 128 \Leftrightarrow (2^2)^{3x+1} = 2^7 \Leftrightarrow 2^{6x+2} = 2^7 \Leftrightarrow 6x + 2 = 7 \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}. \blacklozenge$$

Пример 8. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $0{,}1^{-x^2-x} - 100^{2x+5} = 0$, **б)** $7^x + 7^{x-1} = 8^x$, **в)** $7 \cdot 2^{x-3} + 4 \cdot 3^{x-2} = 3^x - 2^x$.

Решение. а) Имаме

$$0{,}1^{-x^2-x} - 100^{2x+5} = 0 \Leftrightarrow (10^{-1})^{-x^2-x} = (10^2)^{2x+5} \Leftrightarrow 10^{x^2+x} = 10^{4x+10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 4x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Решенијата на последнава равенка се $x_1 = -2$ и $x_2 = 5$ и тие се решенија на дадената равенка.

б) Имаме

$$7^x + 7^{x-1} = 8^x \Leftrightarrow 7^{x-1}(7+1) = 8^x \Leftrightarrow 8 \cdot 7^{x-1} = 8^x \Leftrightarrow \frac{8 \cdot 7^{x-1}}{8^x} = 1 \Leftrightarrow (\tfrac{7}{8})^{x-1} = 1 \Rightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

в) Прво ги префрламе степените со иста основа на иста страна од равенката и добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$7 \cdot 2^{x-3} + 2^x = 3^x - 4 \cdot 3^{x-2}.$$

Понатаму, пред загради вадиме 2^x и 3^x и ја добиваме еквивалентната равенка

$$2^x(7 \cdot 2^{-3} + 1) = 3^x(1 - 4 \cdot 3^{-2}).$$

После средувањето ја добиваме равенката $2^x \cdot \frac{15}{8} = 3^x \cdot \frac{5}{9}$, која е еквивалентна на равенката $(\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^3$ од каде наоѓаме $x = 3$. ♦

Пример 9. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$ **б)** $2^{x+2} - 2^{2-x} = 6$.

Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3 \cdot (9^2)^{\frac{1}{x}} - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$$

т.е. на равенката

$$3 \cdot (9^{\frac{1}{x}})^2 - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0.$$

Воведуваме смена $9^{\frac{1}{x}} = y$ и ја добиваме равенката

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

чии решенија се $y_1 = 3$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Според тоа, $9^{\frac{1}{x}} = 3$ па затоа $3^x = 9 = 3^2$ т.е. $x_1 = 2$ и $9^{\frac{1}{x}} = 3^{-1}$ па затоа $3^{-x} = 9 = 3^2$ и $x_2 = -2$.

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 6$ т.е. на равенката

$$4 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 4 = 0.$$

Во последната равенка ведуваме смена $y = 2^x$ и ја добиваме равенката $4y^2 - 6y - 4 = 0$ чии решенија се $y_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_2 = 2$. Но, $y = 2^x > 0$, па затоа $2^x = 2$ т.е. $x = 1$ е единствено решение на почетната равенка. ♦

Пример 10. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$, **б)** $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Решение. а) Очигледно, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(3^2)^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-1} \cdot 3^{-2} + 3 = 0$$

т.е. на равенката

$$(3^2)^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-1} \cdot 3^{-2} + 3 = 0 .$$

Воведуваме смена $3^{x^2-1} = t$ и ја добиваме равенката $t^2 - 4t + 3 = 0$ чии решенија се $t_1 = 3$ и $t_2 = 1$. Сега за $t_1 = 3$ ја добиваме равенката $3^{x^2-1} = 3 = 3^1$ од каде наоѓаме $x^2 - 1 = 1$ т.е. $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$, а за $t_2 = 1$ ја добиваме равенката $3^{x^2-1} = 1 = 3^0$ од каде наоѓаме $x^2 - 1 = 0$ т.е. $x_{3/4} = \pm 1$.

б) Дадената равенка ја делиме со $36^x \neq 0$ и ја добиваме еквивалентната равенка $3 \cdot \frac{16^x}{36^x} + 2 \cdot \frac{81^x}{36^x} = 5$ која е еквивалентна на равенката $3(\frac{4}{9})^x + 2(\frac{9}{4})^x = 5$. Воведуваме смена $(\frac{4}{9})^x = t$ и ја добиваме равенката $3t + \frac{2}{t} = 5, t \neq 0$ односно равенката $3t^2 - 5t + 2 = 0$ чии решенија се $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$. Сега, од $t_1 = 1$ добиваме $(\frac{4}{9})^x = 1 = (\frac{4}{9})^0$ т.е. $x = 0$, а од $t_2 = \frac{2}{3}$ добиваме $(\frac{4}{9})^x = \frac{2}{3} = (\frac{2}{3})^1$, односно $(\frac{2}{3})^{2x} = (\frac{2}{3})^1$ па затоа $2x = 1$ т.е. $x = \frac{1}{2}$. ♦

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ НЕРАВЕНКИ (за оние што сакаат да знаат повеќе)

Во овој дел ќе ги разгледаме само оние експоненцијални неравенки кои можат да се сведат на обликот

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}, 0 < a \neq 1 , \tag{5}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми од најмногу втор степен или се количници на полиноми од најмногу прв степен. Ако се искористи монотоноста на експоненцијалната функција, тогаш неравенката (5) е еквивалентна на неравенката

$$f(x) \leq g(x), \quad a > 1 \tag{6}$$

односно на неравенката

$$f(x) \geq g(x), \quad 0 < a < 1 . \tag{7}$$

Затоа, решавајќи ја неравенката (6), односно (7), ние всушност ја решаваме неравенката (5).

Пример 11. Реши ја експоненцијалната неравенка

а) $5^{2x^2-5x-3} > 1$, **б)** $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{1+\sqrt[4]{x}} \geq 9^{\sqrt{x}}$.

Решение. а) Бидејќи $5^0 = 1$ дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $5^{2x^2-5x-3} > 5^0$. Но $5 > 1$, па затоа последната неравенка е еквивалентна на неравенката $2x^2 - 5x - 3 > 0$. Нулите на квадратниот трином $2x^2 - 5x - 3$ се $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 3$ и како $2 > 0$ добиваме дека решение на неравенката $2x^2 - 5x - 3 > 0$ е множеството $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$. ♦

б) За $x \geq 0$ неравенката можеме да ја запишеме во обликот $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9 \cdot 3^{2\sqrt[4]{x}} \geq 3^{2\sqrt{x}}$. Ако поделиме со $3^{2\sqrt[4]{x}}$ ја добиваме неравенката $8 \cdot 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} + 9 \geq 3^{2(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})}$. Воведуваме смена $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = t > 0$ и ја добиваме неравенката $8t + 9 \geq t^2$ од каде наоѓаме $0 < t \leq 9 = 3^2$, т.е. $3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \leq 9 = 3^2$. Оттука добиваме $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \leq 2$. Ставаме $z = \sqrt[4]{x} \geq 0$ и добиваме $z^2 - z - 2 \leq 0$. Решението на оваа неравенка е $0 \leq z \leq 2$, т.е. $0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 2$, од што конечно добиваме $0 \leq x \leq 16$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $5^x = 25$, б) $10^x = 0{,}0001$, в) $\frac{1}{3^x} = 27$.

2. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $5^{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$, б) $(2^{x+2})^{x+1} = 64$, в) $6^{\sqrt{x-2}} = 36$.

3. Реши ги експоненцијалните равенки

а) $3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 21$, б) $7 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 81$, в) $2^x + 2^{x-1} = 3^x$.

4. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $3^{x-1} \cdot 2^{3x-7} = 12^{9-x}$, б) $5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x}$.

5. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $9^x - 3^x - 6 = 0$, б) $5 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 4^{x+1} = 32$, в) $5^x - 5^{3-x} = 20$.

6. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x$, б) $25^x + 4^x = 29 \cdot 10^{x-1}$.

7. Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $4^{\sqrt{2x-1}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{2x-1}}$, б) $9^{x+\sqrt{x-1}} + 1 = 10 \cdot 3^{x-1+\sqrt{x-1}}$.

8. *Реши ги експоненцијалните неравенки:*

а) $2^x > 2$, *б)* $3^{x-2} \le 1$, *в)* $5^{2x-1} > 0{,}04$.

9. *Реши ги експоненцијалните неравенки:*

а) $(5^{x-1})^{x+1} < 125$, *б)* $8^{x^2-2x+2} \ge 2^{3x+6}$, *в)* $1 \le 2^{x(x+3)} \le 16$.

10. *Реши ги експоненцијалните неравенки:*

а) $3^{2x} > 2 \cdot 3^x + 3$, *б)* $5^{2x} < 4 \cdot 5^x + 5$.

11. *Реши ги експоненцијалните неравенки:*

а) $\frac{1}{2^x+8} > \frac{1}{2^{x+3}+1}$, *б)* $\frac{1}{3^{x+1}+7} \le \frac{1}{3^x+5}$.

I.4. ПОИМ ЗА ЛОГАРИТАМ. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Во претходната лекција научивме да решаваме одредени видови експоненцијални равенки. На пример, решение на равенката $2^y = 8$ е $y = 3$. Меѓутоа, при изучувањето на експоненцијалната функција видовме дека за $a > 0$, $a \ne 1$ функцијата $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, определена со $f(x) = a^x$, за секој $x \in \mathbf{R}$ е сурјекција. Тоа значи дека, за секој $b > 0$ постои $x \in \mathbf{R}$ таков, што

$$a^x = b, \tag{1}$$

и како f е инјекција заклучуваме дека бројот x е единствен. Според тоа, при дадени позитивни реални броеви a и b равенката (1) има единствено решение. Бројот x, кој е решение на равенката (1) го нарекуваме логаритам од b за основа a и го означуваме со $\log_a b$. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 2. Нека $a,b>0$, $a\neq 1$. За реалниот бројот c ќе велиме дека е *логаритам од бројот* b *за основа* a ако и само ако $a^c=b$. Притоа пишуваме $c=\log_a b$.

Според тоа

$$c=\log_a b \Leftrightarrow a^c=b. \tag{2}$$

Пример 12. а) Нека $a=2$ и $b=\frac{1}{8}$. Од $2^{-3}=\frac{1}{8}$, според дефиниција 2 имаме

$$\log_2 \tfrac{1}{8}=-3\ .$$

б) Нека $a=10$ и $b=0{,}000001$. Од $10^{-6}=0{,}000001$ според дефиниција 2 имаме

$$\log_{10} 0{,}000001=-6\,.\ \blacklozenge$$

Во врска со логаритмите ќе докажеме неколку формули кои овозможуваат полесно користење на истите. Претходно да забележиме, дека од тоа што за секој $a>0$ важи $a^0=1$ и $a^1=a$, согласно со дефиниција 2 добиваме дека за секој $a>0$, $a\neq 1$ важи

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1. \tag{3}$$

Теорема 5. Ако $a>0$, $a\neq 1$, тогаш

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c\text{, за секои } b,c\in\mathbf{R}^+. \tag{4}$$

$$\log_a b^c=c\log_a b\text{, за секои } b\in\mathbf{R}^+, c\in\mathbf{R}. \tag{5}$$

$$\log_a \tfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c\text{, за секои } b,c\in\mathbf{R}^+. \tag{6}$$

$$\log_a b=\tfrac{\log_c b}{\log_c a}\text{, за секои } b,c\in\mathbf{R}^+,\ a\neq 1. \tag{7}$$

Доказ. Нека $b,c\in\mathbf{R}^+$. Да ставиме $w=\log_a(bc), u=\log_a b$ и $v=\log_a c$. Од дефиниција 2 имаме $bc=a^w, b=a^u$ и $c=a^v$. Понатаму, од горните равенства и од својствата на степените добиваме

$$a^w=bc=a^u a^v=a^{u+v},$$

и како експоненцијалната функција е биективно пресликување, имаме $w=u+v$. Конечно, со замена за w,u и v наоѓаме $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$, т.е. важи равенството (4).

Нека $b\in\mathbf{R}^+, c\in\mathbf{R}$. Да ставиме $w=\log_a b^c$ и $u=\log_a b$. Од дефиниција 2 имаме $a^w=b^c$ и $a^u=b$. Понатаму, од горните равенства и од својствата на степените добиваме

$$a^w=b^c=(a^u)^c=a^{cu},$$

и како експоненцијалната функција е биективно пресликување, имаме $w=cu$. Конечно, со замена за w и u наоѓаме $\log_a b^c=c\log_a b$, т.е. важи равенството (5).

Нека $b,c\in\mathbf{R}^+$. Со примена на равенствата (4) и (5) последователно добиваме

$$\log_a \tfrac{b}{c} = \log_a bc^{-1} = \log_a b + \log_a c^{-1} = \log_a b + (-1)\cdot \log_a c = \log_a b - \log_a c\,,$$
т.е. важи равенството (6).

Нека $b, c \in \mathbf{R}^+$. Да ставиме $w = \log_a b, u = \log_c b$ и $v = \log_c a$. Од дефиниција 2 имаме $b = a^w, b = c^u$ и $a = c^v$, т.е. $c = a^{\frac{1}{v}}$. Понатаму, од горните неравенства и од својствата на степените добиваме

$$a^w = b = c^u = (a^{\frac{1}{v}})^u = a^{\frac{u}{v}}$$

и како експоненцијалната функција е биективно пресликување имаме $w = \frac{u}{v}$. Конечно, со замена за w, u и v наоѓаме $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, т.е. важи равенството (7). ♦

Последица 1. Ако $a, b > 0$, ($a \neq 1$, $b \neq 1$) тогаш $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Доказ. Ако го искористиме равенството (7), за $c = b$ добиваме $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$. ♦

Пример 13. Пресметај ја вредноста на логаритмот

а) $\log_3 \sqrt[5]{243}$, **б)** $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a > 0$. **в)** $\log_{\sqrt{2}} 8$.

Решение. а) Од $243 = 3^5$ и од својствата на степените и логаритмите имаме

$$\log_3 \sqrt[5]{243} = \log_3 243^{\frac{1}{5}} = \log_3 (3^5)^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{5\cdot\frac{1}{5}} = \log_3 3 = 1.$$

б) Имаме: $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = \log_a 1 - \log_a \sqrt{a} = 0 - \log_a a^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_a a = -\frac{1}{2}$.

в) Имаме: $\log_{\sqrt{2}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 2} = 6$. ♦

Пример 14. За која основа логаритмот на бројот:

а) 64 е 3, **б)** $\frac{1}{256}$ е 8 ?

Решение. а) Нека бараната основа е a, т.е. $\log_a 64 = 3$. Од дефиниција 2 следува $a^3 = 64$ и како $64 = 4^3$ добиваме $a^3 = 4^3$, што значи $a = 4$ (зошто?).

б) Нека бараната основа е a, т.е. $\log_a \frac{1}{256} = 8$. Од дефиниција 2 следува $a^8 = \frac{1}{256}$ и како $\frac{1}{256} = \frac{1}{2^8} = (\frac{1}{2})^8$ добиваме $a^8 = (\frac{1}{2})^8$, што значи $a = \frac{1}{2}$ (зошто?). ♦

Пример 15. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8$, **б)** $(3^{\log_3 5})^4 + (2^{\log_2 6})^2$,

в) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36}$.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} 3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8 &= 3\log_5 5^2 + 2\log_3 3^3 - 4\log_2 2^3 \\ &= 3\cdot 2\log_5 5 + 2\cdot 3\log_3 3 - 4\cdot 3\log_2 2 = 6 + 6 - 12 = 0. \end{aligned}$$

б) Ако искористиме дека при $a>0$, $a\neq 1$, за секој $x\in\mathbf{R}^{+}$ важи $x=a^{\log_a x}$ (докажи!) добиваме

$$(3^{\log_3 5})^4+(2^{\log_2 6})^2=5^4+6^2=625+36=661.$$

в) Имаме

$$36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10}2}-3^{\log_9 36}=(6^2)^{\log_6 5}+10^{\log_{10}10-\log_{10}2}-3^{\frac{\log_3 36}{\log_3 9}}=6^{2\log_6 5}+10^{\log_{10}\frac{10}{2}}-3^{\frac{\log_3 36}{2}}$$

$$=6^{\log_6 5^2}+10^{\log_{10}5}-3^{\log_3 36^{\frac{1}{2}}}=5^2+5-36^{\frac{1}{2}}=30-6=24. \ \blacklozenge$$

Пример 16. а) Нека $c>0$. Логаритмирај го изразот $A=\frac{3a^2b}{y^2\sqrt[4]{ab^3}}$, $a,b,y>0$, за основа c.

б) Упрости го изразот: $A=\frac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a\frac{a}{b}}$, $a,b>0$.

в) Пресметај $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$, ако $\log_a 27=b$.

Решение. а) Имаме:

$$\log_c A=\log_c\frac{3a^2b}{y^2\sqrt[4]{ab^3}}=\log_c 3a^2b-\log_c y^2\sqrt[4]{ab^3}$$

$$=\log_c 3+2\log_c a+\log_c b-2\log_c y-\tfrac{1}{4}\log_c a-\tfrac{3}{4}\log_c b=\log_c 3+\tfrac{7}{4}\log_c a+\tfrac{1}{4}\log_c b.$$

б) Имаме:

$$A=\frac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a\frac{a}{b}}=\frac{(1-\log_a b)(1+\log_a b+\log_a^2 b)}{(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+1)\cdot(\log_a a-\log_a b)}=\frac{\log_a b(1-\log_a b)(1+\log_a b+\log_a^2 b)}{(1+\log_a b+\log_a^2 b)\cdot(1-\log_a b)}=\log_a b.$$

в) Имаме:

$$\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}=\frac{\log_3\sqrt[6]{a}}{\log_3\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{6}\log_3 a}{\frac{1}{2}\log_3 3}=\frac{1}{3}\log_3 a=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_a 3}=\frac{1}{\log_a 3^3}=\frac{1}{\log_a 27}=\frac{1}{b}. \ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја вредноста на логаритмот:

а) $\log_{\sqrt[3]{2}}16$, б) $\log_2\sqrt[3]{512}$, в) $\log_a\sqrt[21]{a^4}$, $a>0$.

2. За која основа логаритмот на бројот:

а) 625 е 4, б) $\frac{1}{128}$ е -7?

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{5}{4}\log_3 81+3\log_{\frac{1}{2}}16-2\log_2\frac{1}{32}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$, б) $\log_3 81\cdot\log_3\frac{1}{27}\cdot\log_2 16\cdot\log_2 8$,

в) $\log_2 16\cdot\log_2 8\cdot\log_2 4\cdot\log_2 2\cdot\log_2 1$, г) $5^{3-\log_5 25}+3^{2-\log_3 3}-2^{4-\log_2 5}$,

д) $(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8})\cdot 49^{\log_7 2}$.

4. Нека $z>0$, $z\neq 1$. Логаритмирај го изразот:

а) $A=(4a^2b^n\sqrt[4]{c^2d})^3, a,b,c,d>0$, б) $A=\frac{5}{a}\cdot\sqrt[3]{y\cdot\sqrt[4]{\frac{c}{d}}}, a,y,c,d>0$,

в) $A=(\frac{6a^{-3}y\sqrt[4]{ab}}{5z\sqrt[3]{y}})^5, a,b,y>0$, г) $A=\sqrt[3]{\frac{y^{-3}}{\sqrt{yz}}\sqrt{\frac{a}{b}}}, a,b,y>0$.

за основа z.

5. Упрости го изразот:

а) $\frac{(\sqrt[\log_2 3]{27}+\sqrt[\log_{49} 25]{5})(\sqrt[\log_4 9]{81}-\sqrt[\log_9 4]{8})}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$, б) $\sqrt[\log_b a]{a^2}-2\cdot\sqrt[\log_b a]{a}\cdot\sqrt[\log_a b]{b}+\sqrt[\frac{1}{2}\log_a b]{b}, a,b>0$.

6. Ако $x,y>0$ и $x^2+4y^2=12xy$, тогаш $\log_{10}(x+2y)-2\log_{10}2=\frac{1}{2}(\log_{10}x+\log_{10}y)$. Докажи!

7. Ако $y=2^{x^2}$ и $z=2^{y^2}$, тогаш $x=\pm\sqrt{\frac{\log_2\log_2 z}{2}}$. Докажи!

I.5. ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

Нека $a>0$, $a\neq 1$. Во претходните разгледувања видовме дека за секој $b\in\mathbf{R}^+$ постои единствен реален број c таков, што $c=\log_a b$, што ни дава за право да ја воведеме следнава дефиниција.

Дефиниција 3. Нека $a>0, a\neq 1$. Функцијата $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, определена со

$$f(x)=\log_a x, \text{ за секој } x\in\mathbf{R}^+ \qquad (1)$$

ја нарекуваме *логаритамска функција* со основа a.

Природно е да се запрашаме кои својства ги има логаритамската функција.

i) Нека $a>0, a\neq 1$. Бидејќи $\log_a x=0$ ако и само ако $a^0=x$ т.е. ако и само ако $x=1$, добиваме дека $x=1$ е единствена нула на функцијата (1). Според тоа, графикот на логаритамската функција (1) ја сече $x-$оската само во точка $A(1,0)$.

Последното значи, дека нулите на функција од видот $y=\log_a f(x)$ ги наоѓаме како решенија на равенката $f(x)=1$. На пример, нулите на функцијата $y=\log_4(3x-4)$ ги наоѓаме решавајќи ја равенката $3x-4=1$. Решение на последната равенка е $x=\frac{5}{3}$, што значи дека разгледуваната функција ја сече $x-$оската во точката $B(\frac{5}{3},0)$.

ii) Нека $a>0, a\neq 1$ и $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$ се такви, што $f(x_1)=f(x_2)=b$. Тогаш, $b=\log_a x_1$ и $b=\log_a x_2$, па затоа $x_1=a^b$ и $x_2=a^b$, т.е. $x_1=x_2$. Според тоа, логаритамската функција (1) е инјекција од $\mathbf{R}^+$ во $\mathbf{R}$.

Нека y е произволен реален број и да ставиме $x=a^y$. Имаме

$$f(x) = f(a^y) = \log_a a^y = y\log_a a = y .$$

Според тоа, за секој $y \in \mathbf{R}$ постои $x \in \mathbf{R}^+$ таков, што $f(x) = y$, што значи дека логаритамската функцијата (1) е сурјекција од $\mathbf{R}^+$ во $\mathbf{R}$. Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 6. Логаритамската функција (1) е биекција од $\mathbf{R}^+$ во $\mathbf{R}$. ♦

iii) Од претходната теорема непосредно следува дека дефиниционата област на логаритамската функција (1) е множеството позитивни реални броеви $\mathbf{R}^+$, а нејзиното множество вредности е множеството реални броеви $\mathbf{R}$.

Пример 17. Најди ја дефиниционата област на функцијата

а) $f(x) = \log_3(2x+1)$, **б)** $f(x) = \log_5(3x^2 + x + 2)$, **в)** $f(x) = \log_2(x^2 - x - 2)$.

Решение. а) Бидејќи логаритамската функција е дефинирана само за позитивни вредности на аргументот, добиваме дека бараната дефинициона област е множеството решенија на линеарната неравенка

$$2x+1>0 \Leftrightarrow x > -\tfrac{1}{2} .$$

Според тоа, дефиниционата област на функцијата $f(x) = \log_3(2x+1)$ е интервалот $(-\frac{1}{2},+\infty)$.

б) Бидејќи за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

$$3x^2 + x + 2 = (x\sqrt{3} + \tfrac{1}{2\sqrt{3}})^2 - \tfrac{1}{12} + 2 = (x\sqrt{3} + \tfrac{1}{2\sqrt{3}})^2 + \tfrac{23}{12} > 0 ,$$

добиваме дека дефиниционата област на функцијата $f(x) = \log_5(3x^2 + x + 2)$ е множеството реални броеви.

в) Дефиниционата област на разгледуваната функција е множеството решенија на неравенката $x^2 - x - 2 > 0$ (зошто?). Квадратниот трином има нули -1 и 2 и како коефициентот пред x^2 е позитивен, заклучуваме дека решение на равенката е множеството $(-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ и тоа е дефиниционата област на функцијата $f(x) = \log_2(x^2 - x - 2)$. ♦

iv) Нека $a > 0, a \neq 1$ и $x_1 \neq x_2$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1 < x_2$. Од $y_1 = \log_a x_1$ и $y_2 = \log_a x_2$ согласно со дефиниција 2 добиваме $x_1 = a^{y_1}$ и $x_2 = a^{y_2}$. Ќе разгледаме два случаја.

- Нека $a > 1$. Од $x_1 < x_2$ следува $a^{y_1} < a^{y_2}$ и бидејќи експоненцијалната функција за $a > 1$ строго монотоно расте, добиваме дека $y_1 < y_2$ т.е. $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Според тоа, за $a > 1$ логаритамската функција (1) строго монотоно расте.
- Нека $0 < a < 1$. Од $x_1 < x_2$ следува $a^{y_1} < a^{y_2}$ и бидејќи експоненцијалната функција за $0 < a < 1$ строго монотоно опаѓа добиваме дека $y_1 > y_2$ т.е. $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Според тоа, за $0 < a < 1$ логаритамската функција (1) строго монотоно опаѓа.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 7. а) Ако $0 < a < 1$, тогаш логаритамската функција (1) строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област.

б) Ако $a > 1$, тогаш логаритамската функција (1) строго монотоно расте на целата дефинициона област. ♦

v) Нека $a > 0, a \neq 1$. Да ја разгледаме експоненцијалната функцијата $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ определена со

$$g(x) = a^x, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}. \qquad (2)$$

За функциите (1) и (2) имаме $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $g \circ f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ и притоа важи

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(a^x) = \log_a a^x = x \log_a a = x, \text{ за секој } x \in \mathbf{R} \text{ и}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}^+.$$

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 8. Ако $a > 0, a \neq 1$, тогаш функциите (1) и (2) се заемно инверзни. ♦

Пример 18. а) За да го нацртаме графикот на функцијата $y = \log_2 x$, $x \in \mathbf{R}^+$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на логаритамската функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

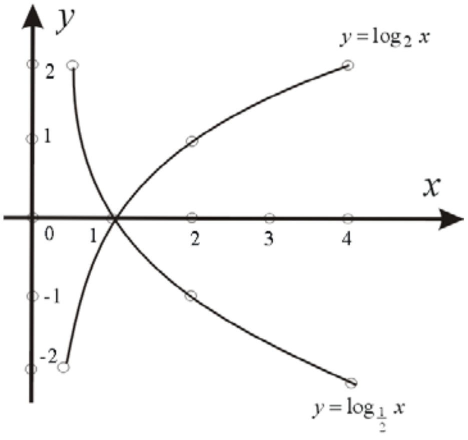
x	$\frac{1}{32} = 0{,}03125$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1	2	4	8	16	32
$y = \log_2 x$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, \log_2 x)$ и истите ги поврземе (цртеж долу).

б) За да го нацртаме графикот на функцијата $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in \mathbf{R}^+$, покрај тоа што ќе ги искористиме својствата на логаритамската функција, пожелно е да составиме и таблица за некои вредности на функцијата. Имаме:

x	$\frac{1}{32} = 0{,}03125$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	1	2	4	8	16	32
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	5	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	–5

Сега графикот на функцијата можеме да го добиеме ако во правоаголен координатен систем ги нацртаме точките кои во табелата соодветствуваат на подредените парови $(x, \log_{\frac{1}{2}} x)$ и истите ги поврземе (цртеж десно). ♦



Од пример 18 а) насетуваме дека функцијата $y = \log_2 x$, $x \in \mathbf{R}^+$ може да прими произволно голема вредност кога x е доволно голем број, односно произволна мала негативна вредност кога x е доволно мал позитивен број. Последното ќе го покажеме на пример.

Пример 19. а) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што на пример $\log_2 x > 20000$.

Одговорот на ова прашањето е едноставен, особено ако се има предвид монотоноста на логаритамската функција и ако земеме $x > 2^{20000}$. Имено, во случајот добиваме $\log_2 x > \log_2 2^{20000} = 20000$.

б) Поставуваме прашање дали постои реален број x таков, што $\log_2 x < -20000$.

Како и во случајот под а) и овде одговорот е едноставен. Имено, од монотоноста на логаритамската функција, за секој позитивен реален број x, таков што $x < 2^{-20000}$ следува $\log_2 x < \log_2 2^{-20000} = -20000$. ♦

Од претходниот пример и од таблицата што и соодветствува на функцијата $y = \log_2 x$ се забележува следново: ако земеме дека x е позитивен број помал од 1 и дека постојано опаѓа, т.е. дека тој се приближува кон 0, добиваме дека функцијата прима негативни вредности и дека таа постојано опаѓа, т.е. секој негативен реален број е вредност на функцијата. Тоа значи дека соодветната крива за оние позитивни вредности на апцисата x кои се доволно блиски до 0 се приближува до негативниот дел на $y-$оската. Во ваков случај велиме дека $y-$оската е *вертикална асимптота* на дадената крива. Очигледно, $y-$оската е *вертикална асимптота* за кривата $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, со тоа што во овој случај кривата се приближува до $y-$оската во нејзиниот позитивен дел.

Воопшто говорено, $y-$оската е хоризонтална асимтота на функцијата $y = \log_a x$ и тоа:

- ако $a > 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до $y-$оската во негативниот дел, и
- ако $0 < a < 1$, тогаш графикот на функцијата се приближува до $y-$оската во позитивниот дел.

ЗАДАЧИ

1. Во кои точки графикот на функцијата $f(x) = \log_a(5x^2 + 2x + 1), 0 < a \neq 1$ ја сече $x-$оската.

2. Најди ја дефиниционата област на функцијата:

а) $y = \log_2(-x+1)$, б) $y = \log_2 x^2$, в) $y = \log_2(x^2 - 2x)$,

г) $y = \log_3 \sqrt{x}$, д) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3)$.

3. Без да пресметуваш одреди го знакот на:

а) $\log_4 \frac{1}{3}$, б) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2$, в) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}$.

4. За кои вредности на x вредностите на функцијата $y = \log_3(5x + 7)$ се негативни.

5. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y=\log_3 x$, б) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, в) $y=\log_4 x$, д) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

6. Во ист график конструирај ги графиците на функциите:

$$y=\log_2 x,\ y=1+\log_2 x \text{ и } y=\log_2(x+1).$$

7. Дадена е функцијата $y=\log_{\sqrt{5}}(3x^2-2x)$.

а) Определи ги нулите и дефиниционата област на функцијата.

б) За кои вредности на x вредноста на функцијата е 2?

I.6. ДЕКАДНИ ЛОГАРИТМИ

Пресметување на количникот $1073741824:2097152$ е заморно. Меѓутоа, ако воочиме дека $1073741824=2^{30}$ и $2097152=2^{21}$, тогаш пресметувањето е поедноставно, т.е. $1073741824:2097152=2^{30}:2^{21}=2^9=512$. Забележуваме дека овде делењето на дадените броеви всушност го сведовме на одземање на нивните логаритми со основа 2, а потоа на наоѓање на степенот на бројот 2 на најдената разлика. Навистина, $\log_2 1073741824=30$ и $\log_2 2097152=21$.

За да можеме на наведениот начин да пресметуваме со сите позитивни броеви, треба да ги имаме пресметано нивните логаритми за основа 2 или за некоја друга основа. Во едноставни случаи лесно го наоѓаме логаритмот на даден број (*нумерусот*) по дадена база. Така, на пример,

$$\log_2 8=3,\text{ бидејќи } 2^3=8;\ \log_{10} 0{,}1=-1,\text{ бидејќи } 10^{-1}=0{,}1.$$

Меѓутоа, во општ случај, логаритмите се ирационални броеви.

Бидејќи најчесто работиме во декаден броен систем, потребни ни се логаритмите за база 10, па имаме *декаден логаритамски систем.* Притоа, при пресметувањата најчесто не ја пишуваме базата 10, но истата ја подразбираме.

а) КАРАКТЕРИСТИКА И МАНТИСА НА ЛОГАРИТМОТ

Знаеме дека $\log 1=0, \log 10=1, \log 100=2, \log 1000=3,\dots,\log 10^n=n$. Бидејќи функцијата $y=\log x$ строго монотоно расте, добиваме дека

- ако $1\le x<10$, тогаш $0\le \log x<1$,
- ако $10\le x<100$, тогаш $1\le \log x<2$,
- ако $100\le x<1000$, тогаш $2\le \log x<3$ итн.

Така, на пример, од $100<624<1000$ имаме $2<\log 624<3$, па затоа

$$\log 624=2+m,\text{ каде } m\in(0,1),$$

и притоа велиме дека бројот 2 е *карактеристика*, а бројот m *мантиса* на $\log 624$. Воопшто ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 4. Целиот дел на логаритмот го нарекуваме *карактеристика*, а неговиот децимален дел *мантиса* на логаритмот.

Како што видовме, карактеристиката на $\log 624$ е 2. Понатаму, за секој $x \in (100{,}1000)$ важи $2 < \log x < 3$, па затоа карактеристиката на $\log x$ е 2. Според тоа, логаритми од различни броеви можат да имаат еднакви карактеристики. Логично е да се запрашаме, дали логаритми од различни броеви можат да имаа еднакви мантиси? Одговорот на ова прашање е позитивен, што може да се види од следниве разгледувања.

Секој позитивен реален број x можеме да го запишеме во вид на производ на некој степен 10^k, $k \in \mathbf{Z}$ и број $y \in [1{,}10)$. Така, имаме

$$\begin{aligned} a &= 21{,}7 = 10^1 \cdot 2{,}17 \\ b &= 217000 = 10^5 \cdot 2{,}17 \\ c &= 0{,}00217 = 10^{-3} \cdot 2{,}17. \end{aligned} \tag{1}$$

Во сите три случаи важи

$$x = 10^k y, \ k \in \mathbf{Z}, y \in [1{,}10) . \tag{2}$$

Ако на равенството (2) ги примениме правилата за логаритмирање добиваме:

$$\log x = \log 10^k y = \log 10^k + \log y = k + \log y, \quad k \in \mathbf{Z}, 0 \le \log y < 1 , \tag{3}$$

што значи дека k е карактеристиката на бројот $\log x$ (целиот дел), а $\log y = m$ е неговата мантиса (дециналниот дел). Од равенствата (1) следува

$$\begin{aligned} \log a &= \log 21{,}7 = 1 + \log 2{,}17 = 1 + m \\ \log b &= \log 217000 = 5 + \log 2{,}17 = 5 + m \\ \log c &= \log 0{,}00217 = -3 + \log 2{,}17 = -3 + m, \end{aligned} \tag{4}$$

т.е. броевите a, b и c имаат карактеристики $1, 5$ и -3, соодветно и иста мантиса $m = \log 2{,}17$.

Од досегашните разгледувања можеме да заклучиме дека логаритмот на даден број е еднозначно определен со неговата карактеристика и неговата мантиса, па затоа ќе покажеме како истите се определуваат.

б) ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА КАРАКТЕРИСТИКАТА

Од равенствата (1), односно од формулата (3), следува:

- ако $x > 1$, тогаш карактеристиката на x е број кој е за 1 помал од бројот на цифрите на целиот дел од x напишан во декаден броен систем,
- ако $0 < x < 1$, тогаш карактеристиката на x е цел негативен број, чија апсолутна вредност е еднаква на бројот на нулите кои ги има бројот x пред првата цифра различна од 0 во декаден броен систем.

Според тоа, логаритамските карактеристики на броевите $1; \ 345{,}76; \ 0{,}35; \ 0{,}000201$, се еднакви на $0; \ 2; \ -1; \ -4$.

Забележуваме дека карактеристиката на логаритмот на бројот x зависи само од положбата на децималната запирка, а не зависи од вредностите на цифрите на бројот x. Последното се должи на својствата на декадниот броен систем, од кои всушност и следува дефиницијата на карактеристиката на логаритмот на даден број x.

в) ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА МАНТИСАТА

Мантисата m на логаритмот на бројот x, како што видовме, е децималниот дел на логаритмот. Од равенствата (3) и (4) следува дека сите броеви кои се разликуваат само во положбата на децималната запирка, односно во бројот на нулите пред првата цифра која во декадниот запис е различна од 0 имаат иста мантиса. Во претходниот дел видовме како може да се определи карактеристиката на $\log x$. Меѓутоа, определувањето на мантисата е многу сложено и за истото се потребни знаења од областа математичка анализа, делови од кои ќе ги изучуваш во следната учебна година. Меѓутоа, во меморијата на современите калкулатори е вграден алгоритмот за пресметување на логаритам од позитивен реален број x, кој може да се пресмета на следниов начин:

- го внесуваме бројот x, на пример $x=12{,}3456$ и
- го притискаме копчето на кое пишува $\log$ и на екранот ќе се појави логаритмот од бараниот број, во случајот $\log x = \log 12{,}3456 = 1{,}091512202$.

Да се вратиме на равенствата (1). За дадените броеви, со помош на калкулатор наоѓаме:

$$\log 21{,}7 = 1{,}336459734 = 1 + 0{,}336459734$$

$$\log 217000 = 5{,}336459734 = 5 + 0{,}336459734$$

$$\log 0{,}00217 = -2{,}6635440266$$

Забележуваме дека мантисите на $\log 21{,}7$ и $\log 217000$ се еднакви на $0{,}336459734$, што е согласно со равенствата (4). Но што станува со мантисата на $\log 0{,}00217 = -2{,}6635440266$? Дали калкулаторот грешно пресметува? Се разбира дека не. Проблемот е во тоа што карактеристиката на $\log 0{,}00217$ е -3, па за да ја добиеме мантисата на $\log 0{,}00217$ од најдената вредност на $\log 0{,}00217$ треба да одземеме 3 и да додадеме 3. Притоа добиваме

$$\log 0{,}00217 = -2{,}6635440266 = -3 + 3 - 2{,}6635440266 = -3 + 0{,}336459734$$

т.е. мантисите на броевите $\log 21{,}7$; $\log 217000$ и $\log 0{,}00217$ се еднакви.

г) АНТИЛОГАРИТМИРАЊЕ

Во практиката често пати можеме да го определиме логаритмот y на некој број x и треба да го најдеме бројот x и оваа постапка ја нарекуваме *антилогаритмирање*. Ако ја искористиме дефиницијата на логаритмот, тогаш од равенството $y = \log x$ добиваме $x = 10^{y}$, што значи дека со помош на калкулатор за дадената вредност на y треба да ја пресметаме вредноста на степенот 10^{y}. На пример, ако $\log x = 1{,}234567891$, тогаш

$$x = 10^{1{,}234567891} = 17{,}16199974.$$

ЗАДАЧИ

1. Определи ги карактеристиките на броевите

а) 324, б) 53054, в) $32{,}08$, г) $0{,}2$, д) $0{,}043$.

2. Знаејќи дека $\log 4 = 0{,}602059991$, најди ги логаритмите на броевите

а) 40, б) $0{,}4$, в) $0{,}0004$, г) 40000, д) 4000000.

3. Со калкулатор пресметај

а) $\log 256$, б) $\log 0{,}69$, в) $\log 0{,}02635$.

а потоа определи ги карактеристиките и мантисите на овие логаритми.

4. Со калкулатор најди ја вредноста на x, ако $\log x$ е еднаков на:

а) $-1{,}23654$, б) $5{,}5432167$, в) $0{,}026357891$.

I.7. ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \log_2(2x+3)$. Како што знаеме нулите на оваа функција ги наоѓаме решавајќи ја равенката $2x+3=1$. Меѓутоа, во суштина ние ја решаваме равенката

$$\log_2(2x+3) = 0$$

за која велиме дека е *логаритамска равенка*. Во овој дел, предмет на нашите разгледувања ќе бидат токму логаритамските равенки и нивното решавање во множеството реални броеви ќе го усвоиме преку примери.

Пример 20. Реши ја логаритамската равенка

$$\log_4(x+3) + \log_4(x-2) - \log_4 6 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Прво ќе ја определиме дефиниционата област на равенката. Имено, за да се дефинирани логаритмите на левата страна на равенката, потребно е подлогаритамските величини истовремено да се ненегативни, т.е. $x+3>0$ и $x-2>0$, од што добиваме $x>-3$ и $x>2$, односно $x \in (2,+\infty)$. Последното значи, ако постои решение на равенката (1), тогаш тоа мора да припаѓа на интервалот $(2,+\infty)$. На овој интервал, равенката (1) е еквивалентна на равенката $\log_4 \frac{(x+3)(x-2)}{6} = 0$, т.е. на равенката $\frac{(x+3)(x-2)}{6} = 4^0$, која е еквивалентна на квадратната равенка

$$x^2 + x - 12 = 0. \qquad (2)$$

Решенијата на равенката (2) се: $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$, т.е. $x_1 = -4$ и $x_2 = 3$.

Бидејќи $x_1 = -4 \notin (2,+\infty)$, заклучуваме дека $x_1 = -4$ не е решение на равенката (1), а како $x_2 = 3 \in (2,+\infty)$, заклучуваме дека $x_2 = 3$ е решение на равенката (1). Навистина, со замена во (1) за $x_2 = 3$ добиваме:

$$\log_4(3+3) + \log_4(3-2) - \log_4 6 = \log_4 6 + \log_4 1 - \log_4 6 = \log_4 6 + 0 - \log_4 6 = 0. \blacklozenge$$

Пример 21. Реши ја равенката

$$\log(4-2x^2)=\log 7x\,. \tag{3}$$

Решение. Во претходниот пример прво ја определивме дефинционата област на равенката, а потоа преминавме на нејзино решавање на дефинционата област. Меѓутоа, можеме да постапиме и вака:

$$\log(4-2x^2)=\log 7x \Rightarrow 4-2x^2=7x \Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0\,.$$

Решенијата на последната равенка се $x_1=-4$ и $x_2=\frac{1}{2}$. Останува да провериме дали најдените решенија се решенија и на почетната равенка. Притоа, бидејќи за $x_1=-4$ подлогаритамските величини во (3) се $4-2\cdot(-4)^2=7\cdot(-4)=-28<0$, а логаритмот е дефиниран само за позитивни реални броеви, заклучуваме дека $x_1=-4$ не е решение на равенката (3). Лесно се гледа дека $x_2=\frac{1}{2}$ е решение на равенката (3). Провери! ♦

Пример 22. Реши ја равенката $x^{\frac{1+\log x}{4}}=10^{\log x+1}$.

Решение. Јасно $x>0$. Ако, за основа 10, ја логаритмираме дадената равенка последователно добиваме

$$\frac{\log x+1}{4}\log x=\log x+1\,,$$

$$(1+\log x)(1-\tfrac{1}{4}\log x)=0$$

од што следува $\log x+1=0$ или $1-\frac{1}{4}\log x=0$ т.е. $x_1=10^{-1}$и $x_2=10^4$. Најдените решенија се позитивни, па затоа тие се решенија и на почетната равенка. Провери! ♦

Пример 23. Реши ја равенката $\log_{x+2}(x^2+5x-4)^4=8$.

Решение. Имаме

$$\log_{x+2}(x^2+5x-4)^4=8 \Leftrightarrow 4\log_{x+2}|x^2+5x-4|=8 \Rightarrow |x^2+5x-4|=(x+2)^2\,.$$

Од $x^2+5x-4=(x+2)^2=x^2+4x+4$ се добива едно решение на последната равенка, и тоа: $x=8$, а од $-x^2-5x+4=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 2x^2+9x=0$ се добиваат две решенија на последната равенка и тоа: $x=0$ и $x=-\frac{9}{2}$. Решенија на дадената равенка се само $x=0$ и $x=8$, бидејќи за $x=-\frac{9}{2}$ имаме $x+2<0$, т.е. основата на логаритмот е негативна, а тоа не е можно. ♦

Пример 24. Реши ја равенката $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Решение. Јасно, $x>0$. Ако искористиме дека $\log_{16}x=\frac{1}{\log_x 16}=\frac{1}{4\log_x 2}=\frac{1}{4}\log_2 x$ и $\log_4 x=\frac{1}{2}\log_2 x$ добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7$$

т.е. на равенката $\log_2 x=4$, чие решение е $x=2^4=16$ и тоа е решение на почетната равенка (зошто?). ♦

ЛОГАРИТАМСКИ НЕРАВЕНКИ (за оние што сакаат да знаат повеќе)

Во овој дел ќе ги разгледаме само оние логаритамски неравенки кои можат да се сведат на обликот

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x), 0 < a \ne 1, \tag{5}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми од најмногу втор степен или се количници на полиноми од најмногу прв степен. Притоа, дефиниционата област на неравенката (5) ја наоѓаме од условите

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0. \tag{6}$$

Имајќи ги предвид условите (6), ако се искористи монотоноста на логаритамската функција, тогаш неравенката (5) е еквивалентна на системот неравенки

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ f(x) \le g(x),\quad a > 1 \tag{7}$$

односно на неравенката

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0, f(x) \ge g(x),\quad 0 < a < 1. \tag{8}$$

Затоа, решавајќи ја неравенката (7), односно (8), ние всушност ја решаваме неравенката (5).

Пример 25. Реши ја неравенката $\log_2(x^2 - 7x + 10) \le \log_2(3x - 11)$.

Решение. Од претходно изнесеното следува дека дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \\ 3x - 11 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \le 3x - 11 \end{cases}$$

Решението на првата неравенка е $x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$, на втората $x \in (\frac{11}{3}, +\infty)$ и на третата $x \in [3,7]$. Конечно, наоѓаме $x \in (5,7]$. ♦

На крајот од овој дел ќе разгледаме уште еден пример, за чие решавање е потребно да се реши експоненцијална неравенка.

Пример 26. Реши ја равенка $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$.

Решение. Дадената равенка има смисол за $4 \cdot 3^x - 1 > 0$ од што следува $3^x > \frac{1}{4} = 3^{\log_3 \frac{1}{4}}$ т.е. $x > \log_3 \frac{1}{4}$. Понатаму од $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$ последователно добиваме

$$4 \cdot 3^x - 1 = 3^{2x+1},$$

$$4 \cdot 3^x - 1 = 3 \cdot (3^x)^2.$$

Воведуваме смена $y = 3^x$ и од последната равенка ја добиваме равенката $3y^2 - 4y + 1 = 0$ чии решенија се $y_1 = \frac{1}{3}$ и $y_2 = 1$. Според тоа, $3^x = \frac{1}{3}$ па е $x_1 = -1$ и $3^x = 1$ па е $x_2 = 0$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x_1 > \log_3 \frac{1}{4}$ и $x_2 > \log_3 \frac{1}{4}$, што значи дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка. ♦

ЗАДАЧИ

1. Реши ги равенките

а) $\log_3(2x + 4) = 2$, б) $\log_2(x - 5) = 1$, в) $\log_3(x^2 + 1) = 2$.

2. Реши ги равенките

а) $\log x+\log(x+3)=1$,   б) $\log x-\log\frac{1}{x-1}-\log 2=\log(2x+3)$.

3. Реши ги равенките

а) $\log_x\sqrt{5}+\log_x 5x-2{,}25=(\log_x\sqrt{5})^2$,   б) $\log_a x-\log_{a^2}x+\log_{a^4}x=\frac{3}{4},\ a>0$.

4. Реши ја равенката $\log_2(x^2+2x-7)\log_{x^2-6x+9}4=1$.

5. Реши ја равенката $\log_{x+3}(x^2+7x-9)^4=8$.

6. Реши ја равенката $x^{\frac{a\lg x+1}{4}}=10^{b(\lg x+1)}$, $a,b\in\mathbf{R}$.

7. Реши ја равенката $2\log_4(2^x-1)+x+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=0$.

8. Реши ги неравенките

а) $\log(x-4)+\log(x+1)<1$,   б) $\log(x-2)>\log x$,

в) $x^{(\log x)^2-3\log x+1}>1000$,   г) $\log_3(x^2-5x+6)<0$.

I.8. НЕКОИ ПРИМЕНИ НА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИТЕ ФУНКЦИИ

На крајот од оваа тема ќе разгледаме неколку примени на експоненцијалните функции, за кои сметаме дека ќе придонесат за подобро запознавање на важноста на овие функции. За таа цел ќе разгледаме три примери.

Пример 27. Ако сума од C_0 денари ја вложиме во банка со каматна стапка од p проценти и за временски период од n години, тогаш сумата ќе се зголеми за вредноста на каматата која во случај на таканареченото *обично вкамашување* се пресметува според формулата $K=\frac{C_0 p}{100}n$. Според тоа, после n години ќе располагаме со сума од

$$C=C_0+\frac{C_0 p}{100}n \qquad (1)$$

денари. Покрај едноставното вкаматување постои и таканаречено *сложено вкамашување,* кое се состои во посебен договор меѓу банката и штедачот. Имено, штедачот нема да ги подига парите во текот на n години, а банката оваа услуга ја плаќа со тоа што на крајот од секоја година кон сумата која во иднина ќе се вкаматува ја допишува каматата за изминатата година. Така, после првата година сумата C_0 се зголемува за $\frac{C_0 p}{100}$ денари, па штедачот има сума од

$$C_1=C_0+\frac{C_0 p}{100}=C_0(1+\frac{p}{100})=C_0 r$$

денари, каде $r=1+\frac{p}{100}$. Со впишувањето на каматата во текот на следната година штедачот ќе добива камата на сумата C_1, па затоа износот на каматата ќе биде $\frac{C_1 p}{100}$. Според тоа, после две години сумата која штедачот ја има во банката ќе биде

$$C_2 = C_1 + \frac{C_1 p}{100} = C_1(1+\frac{p}{100}) = C_0 r^2 ,$$

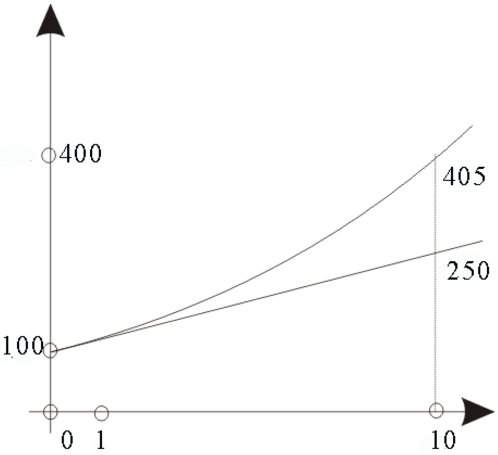
денари. Очигледно, после n години, штедачот во банката ќе има

$$C_n = C_0 r^n \qquad (2)$$

денари и дури тогаш ќе може да ја подигне сумата. На цртежот десно е прикажан графикот на функцијата

$$f(x) = C_0 r^x ,$$

кој соодветствува на почетната сума од $C_0 = 100$ денари, процент $p = 15\%$ е време од $n = 10$ години. Во случајот имаме



$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$$

па затоа станува збор за функцијата $f(x) = 100 \cdot 1{,}15^x$. Според тоа, порастот на сумата при сложеното вкаматување е експоненцијален и после $n = 10$ години штедачот ќе добие сума $f(10) = 100 \cdot 1{,}15^{10} \approx 405$ денари. Меѓутоа, ако со истата каматна стапка штедачот вложи 100 денари на 10 години, тогаш според формулата (1) добиваме дека тој ќе добие сума од $100 \cdot (1 + \frac{15}{100} \cdot 10) = 250$ денари. ♦

Пример 28. Во моментот радиусот на пресекот на стеблото на едно дрво изнесува $2cm$ и истиот годишно се зголемува за 20%. Со аналогни заклучувања како во претходниот пример наоѓаме дека радиусот на стеблото после t години се задава со формулата

$$R(t) = 2 \cdot 1{,}2^t \, cm . \qquad (3)$$

Користејќи ја формулата (3) за радиусот на стеблото после 8 години наоѓаме

$$R(8) = 2 \cdot 1{,}2^8 cm \approx 2 \cdot 4{,}3 cm = 8{,}6 cm .$$

Меѓутоа, ако сакаме да го пресметаме радиусот на стеблото после 16 години, 5 месеци и 14 дена, тогаш прво го определуваме времето t_1 во години. Имаме

$$t_1 = 16 + \frac{5}{12} + \frac{14}{365} \approx 16 + 0{,}417 + 0{,}038 = 16{,}455 \text{ години}$$

и од формулата (3) наоѓаме

$$R(16{,}455) = 2 \cdot 1{,}2^{16{,}455} cm \approx 2 \cdot 20{,}0875 cm \approx 40{,}17 cm . \ ♦$$

Пример 29. Да земеме дека литар алкохол го разредуваме на следниов начин: одлеваме петтина од шишето и потоа го дополнуваме со вода, потоа добро ќе измешаме и одлеваме $\frac{1}{5}$ од растворот и шишето повторно го дополнуваме со вода и така постапката ја повторуваме. Бидејќи $\frac{1}{5} = 0{,}2$ после првото разредување количеството алкохол во шишето е дадена со

$$a = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 .$$

После второто разредување количеството алкохол во шишето е дадено со

$$a - a \cdot 0{,}2 = a(1 - 0{,}2) = a^2,$$

после третото разредување количеството алкохол е дадено со a^3 итн., после n – тото разредување количеството алкохол е дадено со a^n. Според тоа, станува збор за функцијата

$$f(x) = a^x = 0{,}8^x. \tag{4}$$

Сакаме да добиеме алкохолен раствор кој ќе содржи приближно 10% алкохол. Колку разредувања на чистиот алкохол треба да направиме?

За да одговориме на поставеното прашање, треба за функцијата (4) да го определиме аргументот x така, што $f(x) = 0.1$. Имаме

$$0{,}8^x = 0{,}1.$$

Последната равенка ја логаритмираме за основа 10 и последователно наоѓаме

$$x \log 0{,}8 = \log 0{,}1,$$

$$x = \frac{\log 0{,}1}{\log 0{,}8} \approx \frac{-1}{-0{,}096910013} \approx 10{,}31885116.$$

Според тоа, после 10 разредувања ќе добиеме алкохолен раствор кој ќе содржи околу 10% алкохол или поточно

$$f(10) = 0{,}8^{10} \approx 10{,}74$$

проценти алкохол. ♦

ЗАДАЧИ

1. Пресметај го полупериодот на распаѓање на радиумот ако неговата маса се пресметува според формулата $M(t) = M_0 10^{-0{,}000174t}$, каде M_0 е сегашната маса и $M(t)$ е масата после t години. Полупериод на распаѓање е времето t за кое масата M_0 ќе се намали на маса $\frac{1}{2}M_0$.

2. Биолог во лабораторија одгледува некој вид бактерии кои се размножуваат според законот $N_n = N_0 \cdot 3^n$, каде N_n е бројот на бактериите после n дена, а N_0 е бројот на бактериите кои ги имал на почетокот. Нека претпоставиме дека после два дена имал 250000 бактерии.

а) Колку бактерии имал после 4 дена?

б) После колку време бројот на бактериите се зголемил 5 пати?

3. Бројот на жителите на еден град се зголемува за 30%:

а) на секои 10 години; б) на секои 5 години, в) на секои 3 години.

Колку жители ќе има тој град во 2050 година, ако во 2003 година има 12000 жители?

4. За колку време ќе се удвои главнината на влогот при сложено вкаматување ако е:

а) $p = 12\%$, б) $p = 17\%$, в) $p = 21\%$?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y=3^x-1$, б) $y=2\cdot 3^x$.

2. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y=2^{\frac{x^2}{|x|}}$, б) $y=2^{x-|x|}$.

3. Конструирај го графикот на функцијата $y=|3^x-1|$.

4. Реши ја равенката

а) $25^x=5^{3-x}$, б) $3^x\cdot 5^{2x-3}=45$, в) $2^x\cdot 3^{x-1}\cdot 5^{2x+1}=250$.

5. Реши ја равенката

а) $(\frac{5}{9})^{2x-7}=\sqrt[3]{(\frac{9}{5})^{3x-1}}$, б) $(\frac{4}{7})^x(\frac{7}{4})^{3x-1}-\frac{16}{49}=0$.

6. Реши ја равенката

а) $4^x+2^x=20$, б) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$, в) $4^x-5\cdot 2^x-24=0$,

г) $9^{\sqrt[3]{x}}-2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}}=3$, д) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$.

7. Реши ја равенката

а) $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$, б) $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0$,

в) $5^{1+\frac{1}{x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{x}}+2\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$, г) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$,

д) $4\cdot\sqrt[x]{81}-12\cdot\sqrt[x]{36}+9\cdot\sqrt[x]{16}=0$, ѓ) $2^{2(x^2-x)-3}-2^{x^2-x-2}=1$.

8. Реши ја равенката

а) $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x+(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x=8$, б) $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x=34$,

в) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x+(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x=14$, г*) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2^x$.

9. Реши ја равенката

а*) $4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x$, б*) $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6(2^x-\frac{1}{2^{x-1}})=1$.

10. Реши ја неравенката

а) $5^{x^2+3x}\le 125\cdot 5^x$, б) $125\cdot(\frac{1}{5})^{3x^2}\le(\frac{1}{25})^{-4x}$, в) $2^x\cdot 5^x>0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$.

11. Реши ја неравенката

а) $2^x+2^{-x+1}-3<0$, б) $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<2$, в) $\frac{1}{2^x+3}>\frac{1}{2^{x+2}-1}$.

12. Пресметај:

а) $\log_{\frac{1}{10}}1000$, б) $\log_{\sqrt{3}}81$, в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}8$.

13. Пресметај

а) $\log_2 \log_2 16 + \log_3 \log_3 27$, б) $2 \cdot 5^{\log_5 125} + 5 \cdot 3^{\log_3 81}$,

в) $5^{\log_5 25} \cdot 2^{\log_2 8} \cdot 3^{\log_3 3}$, г) $2^{3+\log_2 6} + 3^{4+\log_3 8}$,

д) $(3^{\log_3 5})^3 - 2^{3\log_2 8} + 5^{2\log_5 25}$, ѓ) $2\log_5 125 \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2\log_3 9-1}$.

14. Нека $z > 0$. Логаритмирај го изразот:

а) $A = \frac{2ax^3 \cdot \sqrt[4]{5}}{3by^2 \cdot \sqrt[3]{7}}, a, b, x, y > 0$, б) $A = (\frac{c^5 z \cdot \sqrt[3]{c^2 d}}{\sqrt{ab}})^2, a, b, c, d, z > 0$,

в) $A = \sqrt[5]{(\frac{1}{a^3 b^2 \cdot \sqrt[4]{c^3}})^2}, a, b, c > 0$.

15. Упрости го изразот

а) $2\log(a+b) - \frac{2}{3}\log(a-b) + \frac{1}{2}\log a$,

б) $3\log a + \frac{1}{2}\log 7 + \frac{1}{2}\log b - 3\log c - \log 8$,

в) $\log 3 + \frac{1}{2}(\log a + 3\log b) - 2\log d - \frac{1}{3}\log c$.

16. а) Ако е $\log_a 10 = m, 0 < a \neq 1,$ пресметај $\log_{10a} a$.

б) Ако е $\log_a 32 = m, 0 < a \neq 1,$ пресметај $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[8]{a}$.

17. Ако $a^2 + b^2 = 7ab$ и $a > 0, b > 0$, докажи дека $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

18. Ако $a^2 + b^2 = 6ab$ и $a > 0, b > 0$ и $a > b$, докажи дека

$$\log(a+b) - \log(a-b) = \frac{1}{2}\log 2.$$

19. Ако a и b се катети на правоаголен триаголник, а c негова хипотенуза, докажи дека $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.

20. Ако е $\log_5 2 = a, \log_5 3 = b$, пресметај $\log_{45} 100$.

21. Ако е $\log_7 2 = c, \log_7 5 = d$, пресметај $\log_{70} 2{,}5$.

22. Пресметај $\log_{\sqrt{3}} 8$, ако $\log_{12} 3 = a$.

23. Ако е $\log_b a = m, \log_c b = n$, пресметај $\log_{bc} ab$.

24. Ако $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$, докажи дека $f(a) + f(b) = f(\frac{a+b}{1+ab})$.

25. Ако a, b, c и d се позитивни броеви различни од 1, докажи дека

$$\log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d = \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abc} d}.$$

26. Ако $n \in \mathbf{N}$, $0 < a \neq 1$ и $0 < x \neq 1$ докажи дека

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2}\log_x a.$$

27. Докажи дека за секои $a, b \in (0,1)$ важи неравенството $\log_a \frac{2ab}{a+b} \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

28. Ако $a>1, b>1, c>1$ или $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$ докажи дека

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

29. Докажи дека

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>4{,}4.$$

30. Колку цифри има бројот

а) 3^{100}, б) 7^{2003}?

31. Кој број е поголем 21^{23} или 23^{21}?

32. Најди ја дефиниционата област на функцијата

а) $y=\log(x^2-1)$, б) $y=\log(4x-x^2-1)$, в) $y=\log(x^2+1)$,

г) $y=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\log_5(x-1)}$, д) $y=\log(x^2-1)+\sqrt{4x-x^2}$.

33. Без да пресметуваш, определи кои од дадените броеви е поголем:

а) $\log_3 2$ или $\log_3 5$, б) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ или $\log_{\frac{1}{3}} 5$, в) $\log_2 3$ или $\log_5 3$.

Одговорот да се образложи!

34. Конструирај го графикот на функцијата:

а) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, б) $y=2+\log_2 x$, в) $y=-1+\log_{\frac{1}{3}} x$,

г) $y=|\log_2 x|$, д) $y=\log_2|x-1|$.

35. Реши ја равенката:

а) $\log_x(x-1)=2$, б) $\log_3(x+1)-\log_3(x-1)=1$.

36. Реши ја равенката:

а) $\log_2(2^x-3)=2-x$, б) $\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2$, в) $\log_2(\log_2 x)=0$.

37. Реши ја равенката

а) $\frac{\log(1+\sqrt{x+1})}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$, б) $\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=1$.

38. Реши ја равенката

а) $\log^2 x-5\log x+6=0$, б) $\log^2 x-\log x^6=\log_2 3-9$,

в) $x^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9$, г) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=6$.

39. Реши ја равенката

а) $x^{\log x}=10000$, б) $x^{\log x}=100x$, в) $x^{2\log_3 x}=3x$.

40. Реши ја равенката

а) $\log_3(4\cdot 3^x-1)=3x+1$, б) $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$,

в) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$.

41. Реши ја равенката

а) $\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 8}=11$, б) $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$.

42. Реши ја равенката

а) $5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{\log x+1}-5^{\log x-1}$, б) $\sqrt{\log_2 x}-\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{x}$,

в) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5$.

43. *Реши ја неравенката*

а) $\log_7(2x-8)>\log_7(x-2)$, *б)* $\log_{\frac{1}{2}}(1+2x)>-1$,

в) $\log_2^2 x-3\log_2 x+2\geq 0$, *г)* $\log_2 x-2\log_x 2+1>0$.

44. *Реши ја неравенката*

а) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-4}{2x+5}>1$, *б)* $\frac{\log_{0,5}(x-3)}{x-5}<0$, *в)* $\frac{\log_2(x+1)}{x-1}>0$.

45. *Реши ја неравенката*

а) $(\frac{2}{5})^{\log_{0,5}(x^2+5x+8)}\leq 2,5$, *б)* $3^{2+\log x}<3^{5+\log x^2}-2$.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. Без да пресметува подреди ги по опаѓачки редослед броевите $3^{\frac{1}{3}},2^{\frac{1}{2}},5^{\frac{1}{5}}$.

2. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=2^{x+1}+3$.

3. Реши ја равенката: а) $2^{-x+4x}=\frac{1}{8}$, б) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

4. Одреди ја дефиниционата област на функцијата

а) $f(x)=\log_2\frac{x-2}{x+2}$, б) $f(x)=\log_{\frac{25-x^2}{16}}(-x^2-2x+24)$

5. Упрости го изразот $A=\log(x-1)+2\log(x-3)-\log a^2+\log(a-1)$

6. Пресметај ја вредноста на изразот $A=\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{27}+\log_9\sqrt{3\sqrt{3}}$.

7. Ако е $\log_a x=k,\ \log_b x=m,\ \log_c x=n,$ каде $0<a,b,c\neq 1$ пресметај $\log_{abc}x$.

8. Конструирај го графикот на функцијата $f(x)=2+\log_{\frac{1}{3}}x$.

9. Кој број е поголем 33^{32} или 32^{33}?

10. Реши ја логаритамската равенка:

а) $\log x+\log(x+3)=1$, б) $\log_{4x}2\cdot\log_{\frac{x}{4}}2=\log_{\frac{x}{16}}2$.

ГЛАВА II

ТРИГОНОМЕТРИЈА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Проширување на поимот агол. Ориентиран агол**
2. **Мерење на агли и лаци**
3. **Тригонометриска кружница**
4. **Тригонометриски функции од произволен агол**
5. **Знаци на тригонометриските функции во одделени квадранти**
6. **Основни зависности меѓу тригонометриските функции од еден ист агол**
7. **Сведување на тригонометриските функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол**
8. **Графичко определување на вредностите на тригонометриските функции**
9. **Периодичност, парност и непарност на тригонометриските функции**
10. **Интервали на растење и опаѓање. Менување на тригонометриските функции**
11. **Графици на основните тригонометриски функции**
12. **График и основни својства на функција** $y = a\sin(bx + c)$
13. **Тригонометриски функции од збир и разлика на два агла**
14. **Тригонометриски функции на удвоен агол и на половината на даден агол изразени преку функцијата на тој агол**
15. **Трансформација на алгебарски збир на тригонометриски функции во производ и обратно**
16. **Графичко определување на аголот по дадена вредност на една негова тригонометриска функција**
17. **Основни тригонометриски равенки**
18. **Решавање на тригонометриски равенки што содржат само една тригонометриска функција од втор степен во однос на истата функција**
19. **Решавање на тригонометриски равенки по метод на разложување на множители**
20. **Синусна теорема**
21. **Решавање на основните задачи за триаголник со синусната теорема**
22. **Косинусна теорема**
23. **Решавање на основни задачи за кој било триаголник**
24. **Формули за плоштина на триаголник**
25. **Примена на тригонометријата**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *тригонометриските функции од остар агол,*
- *решавањето на квадратните равенки, и*
- *својствата на триаголникот и видовите триаголници.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

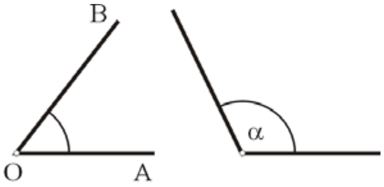
Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го прошириш поимот за агол,
- да ги усвоиш операциите: собирање и одземање на ориентирани агли и множење на ориентиран агол со број,
- да ги усвоиш единиците за мерење на агли,
- да ја усвоиш усвоиш тригонометриската кружница,
- да ги усвоиш дефинициите на тригонометриските функции од произволен агол,
- графички да одредуваш вредност на тригонометриска функција од даден агол,
- графички да го одредуваш аголот за дадена вредност на тригонометриска функција,
- да ги усвоиш основните зависности на тригонометриските функции,
- алгебарски да ги одредуваш вредностите на тригонометриските функции од дадена вредност на една од нив,
- да ја усвоиш периодичноста, монотоноста и парноста на тригонометриските функции,
- да научиш да ги одредуваш нулите и екстремните вредности на тригонометриските функции,
- да научиш да конструираш график на тригонометриска функција,
- да ги усвоиш адиционите теореми за тригонометриските функции,
- да научиш да трансформираш збир и разлика на тригонометриски функции во производ и обратно,
- да научиш да ги решаваш основните и некои специјални видови тригонометриски равенки, и
- да ги усвоиш синусната и косинусната теорема и нивната примена при решавање на произволен триаголник.

Мината учебна година се запозна со тригонометриските функции од остар агол. Тригонометриските функции наоѓаат примена скори во сите природни науки, па затоа истите посебно ќе ги изучиме, а исто така ќе се осврнеме и на некои примени на тригонометриските функции.

II.1. ПРОШИРУВАЊЕ НА ПОИМОТ АГОЛ. ОРИЕНТИРАН АГОЛ

Од геометријата знаеш, дека *агол* е рамнинска геометриска фигура образувана од две полуправи со заеднички почеток. Полуправите се викаат *краци*, а заедничкиот почеток – *теме* на аголот. Ако заедничкиот почеток е O, а A и B се две точки од двата крака, аголот го бележиме со $\angle AOB$ (црт. 1). Често пати аголот го бележиме и само со мала буква од грчката азбука (црт. 1).

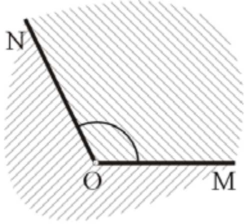


црт. 1

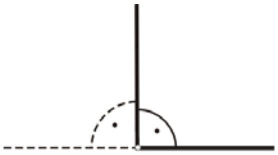
црт. 2

Аголот се вика рамен, ако неговите краци заедно со темето образуваат една права (црт. 2).

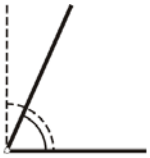
Аглите го имаат следново основно својство: Секој агол ја разделува рамнината на два дела (области), од кои едниот дел (кој било) се вика *внатрешност на аголот*, а другиот дел – негова *надворешност* (црт. 3). Внатрешноста на аголот ја означуваме обично со лак како на цртежите 1 и 2.



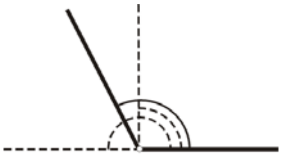
црт. 3



црт. 4



црт. 5



црт. 6

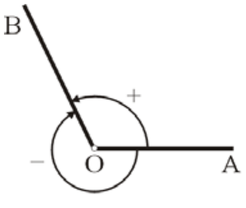
Знаеш, аглите можеме да ги споредуваме. Така, на пример, велиме: Кои било два рамни агла се еднакви. Половината од рамниот агол се вика *прав агол* (црт. 4). Секој агол, што е помал од правиот агол, се вика *остар агол* (црт. 5); а секој агол, што е поголем од правиот, но помал од рамниот агол, се вика *тап агол* (црт. 6).

Секој агол има своја *големина* која може да се мери и изразува со броеви. Тоа значи дека, при дадена *мерна единица* на секој агол му одговара (може да му се придружи) еден единствен позитивен реален број, кој се вика *мерен број* на аголот.

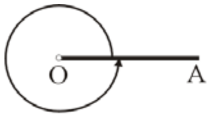
Основна мерна единица за мерење на големината на аглите е степен. *Степен* е агол, кој е $\frac{1}{90}$ од правиот агол и се означува со 1°. Помали единици од степенот се *аглова минута,* која е $\frac{1}{60}$ од степенот и се означува со $1'$, и *аглова секунда*, која е $\frac{1}{60}$ од агловата минута и се озанчува со $1''$.

Во дефиницијата за агол, краците на аголот ги сметавме за рамноправни, па затоа не правевме разлика меѓу записите $\angle AOB$ и $\angle BOA$. Меѓутоа, постојат проблеми во кои, битно е да се знае кој од краците на аголот е *прв (почетен)*, а кој *втор (краен)*. Кога ќе запишеме, на пример, $\angle AOB$, земаме OA да е прв крак, а OB – втор крак на аголот. Ако, пак, сакаме тоа појасно да го истакнеме, тогаш наместо $\angle AOB$, пишуваме $\angle(OA, OB)$.

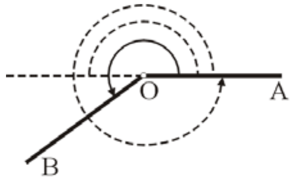
За потребите на тригонометријата и другите науки ќе извршиме проширување на поимот агол. Првиот крак OA, со ротација околу темето O во рамнината на аголот, можеме да го доведеме до поклопување со неговиот втор крак OB (црт. 7). Оваа ротација, забележуваме дека, може да се изврши во рамнината во две заемно спротивни насоки: во насока на вртењето на часовниковите стрелки, или во спротивната, од таа, насока (црт. 7). Едната од тие две насоки на ротација во рамнината се зема за *позитивна*, а другата – за *негативна*. По договор, за позитивна насока се зема насоката на ротација, што е спротивна од насоката на ротација на часовниковите стрелки.



црт. 7



црт. 8

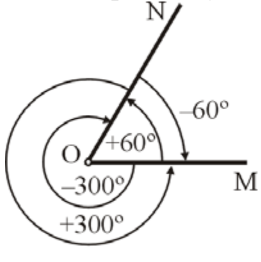


црт. 9

Аголот, добиен со ротација на неговиот прв крак во позитивна насока, додека не се поклопи со вториот негов крак, се вика *позитивен агол*. А аголот, пак, добиен со ротација на првиот крак околу темето, во негативна насока, додека не се поклопи со неговиот втор крак, се вика *негативен агол*. Големината на позитивните агли ја изразуваме со позитивни броеви (+50°, +83°, итн.), а големината на негативните агли – со негативни броеви (–25°, –37°, итн.).

Ако првиот крак не направи никаква ротација и остане во својата почетна положба, велиме дека тој образувал агол од 0°, или *нула агол*. Ако, пак, првиот крак направи една полна ротација и се совпадне со својата почетна положба, велиме дека тој образувал *полн агол*, односно агол од 360° (или –360°) (црт. 8).

Агол, што е поголем од рамниот агол, но помал од полниот агол, се вика *конкавен агол* (црт. 9).



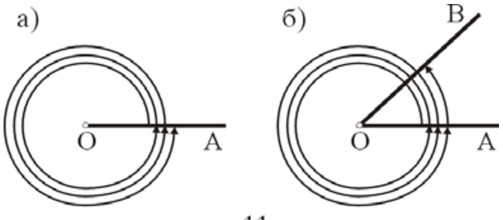
црт. 10

Дефиниција 1. Агол, чиј еден крак е примен за прв, а другиот – за втор, и назначена е насоката на ротацијата на првиот крак до неговото поклопување со вториот крак, се вика *ориентиран* или *насочен агол*.

Значи, разликуваме позитивни и негативни насочени агли. За означување на насочените агли често се користи ознаката со стрелка, на пример, $\angle\overrightarrow{AOB}$. За кој било насочен агол $\angle\overrightarrow{AOB}$ важи: $\angle\overrightarrow{AOB} = -\angle\overrightarrow{BOA}$. Исто така, за насочените агли $\angle\overrightarrow{AOB}$ и $\angle\overrightarrow{BOC}$ важи: $\angle\overrightarrow{AOB} + \angle\overrightarrow{BOC} = \angle\overrightarrow{AOC}$ (направи цртеж). Последните две равенства се аналогни на векторските равенства $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. За понатаму се договараме стрелката за насочените агли да не ја пишуваме, бидејќи во оваа тема понатаму ќе работиме само со насочени агли.

Според претходно кажаното, ако на пример, позитивниот агол е $\angle MON = 60^{\circ}$, тогаш негативниот агол е $\angle MON = -300^{\circ}$ (црт. 10). Или, ако позитивниот агол е $\angle NOM = 300^{\circ}$, тогаш негативниот агол ќе биде $\angle NOM = -60^{\circ}$ (црт. 10).

До тука разгледувавме ротации на кракот OA во рамнината, најмногу до едно полно завртување околу темето O. Притоа, беа образувани ориентирани агли, чии мерни броеви се од интервалите $[-360^{\circ}, 0^{\circ}]$ или $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$. Таквите ориентирани агли ги викаме *елементарни агли*.



црт. 11

Очигледно е дека, ако кракот OA, што ротира во рамнината околу темето O, направи неколку полни завртувања, тогаш тој ќе се совпадне со својата почетна положба OA (црт. 11 а), а ако направи плус и уште некој агол, што е дел од полно завртување, тој ќе дојде во некоја друга положба OB (црт. 11 б).

Значи, постои бесконечно множество агли, чии први и втори краци имаат една иста положба во рамнината. Сите тие агли се разликуваат еден од друг за цел број полни (позитивни или негативни) завртувања. Така, доаѓаме до поимот *обопштен агол*, имено:

Дефиниција 2. Агол, чиј еден крак е примен за прв, а другиот – за втор, и даден е бројот на полните завртувања на првиот крак во определена (позитивна или негативна) насока, сѐ додека не се совпадне со вториот крак, се вика *обопштен агол*.

Мерен број на обопштениот агол е број од облик $\alpha + k \cdot 360^{\circ}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, каде α е мерен број на елементарниот агол, што е зададен со краците, а k е цел број. Ако $\alpha \in [0^{\circ}, 360^{\circ})$ и $k \geq 0$, тогаш k е бројот на полните позитивни ротации, а ако $\alpha \in (-360^{\circ}, 0^{\circ}]$ и $k < 0$, тогаш $-k$ е бројот на полните негативни ротации. Бидејќи мерните броеви на обопштените агли се реални броеви, обопштените агли ги собираме, така што мерниот број на збирот на два агла е еднаков на збирот од мерните броеви на соодветните агли. Исто така, обопштен агол се множи со реален број, така што соодветниот мерен број е производ на мерниот број на дадениот агол и дадениот реален број.

Пример 1. Стрелките на часовникот покажуваат 3 часот и 25 минути. Кој обопштен агол ќе го опише големата (минутна) стрелка, ако стрелките ги вратиме назад толку за да покажуваат 0 часот?

Решение. Прво, големата стрелка ќе ја вратиме од положба 25 минути на положба 0 минути. Тогаш таа ќе опише агол $+150^{\circ}$, а потоа и малата стрелка за да ја вратиме од положба 3 часот на положба 0 часот, големата стрелка треба да направи 3 полни ротации во позитивна насока. Според тоа, конечно, таа ќе опише агол од

$$+150^{\circ} + 3 \cdot 360^{\circ} = 150^{\circ} + 1080^{\circ} = 1230^{\circ}. \ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Кој агол е рамен?

2. Во кој интервал е затворен мерниот број на: а) остар агол, б) тап агол?

3. Даден е позитивниот агол $\angle AOB = 150^{\circ}$. Одреди ја големината на:

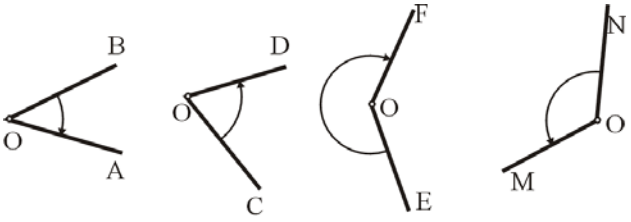
а) негативниот агол $\angle BOA$, б) позитивниот агол $\angle BOA$, в) негативниот агол $\angle AOB$.

4. Кој обопштен агол ќе го опише: а) часовната, б) минутната, в) секундната стрелка на часовникот за едно деноноќие?

5. Дадени се две точки O и T во рамнината. Конструирај кружница $k(O,\overline{OT})$, а потоа одреди точка M, таква што $M\in k$ и $\angle TOM = -45^\circ$.

6. Кои од ориентираните агли на цртежот 12 се позитивни, а кои негативни? Со помош на агломер одреди ја нивната големина со точност до 1°.

7. Ориентираните агли со големина: $\alpha = -285^\circ$, $\beta = 305^\circ$, $\gamma = -198^\circ30'$ изрази ги преку ориентирани агли, чии мерни броеви да се од интервалот $(-180^\circ, 180^\circ)$.



црт. 12

8. Нацртај правоаголен координатен систем xOy. Конструирај агол, чиј прв крак се совпаѓа со позитивниот дел на Ox-оската и има големина: $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = -60^\circ$, $\alpha_3 = 60^\circ - 360^\circ$, $\alpha_4 = -60^\circ - 360^\circ$, $\alpha_5 = 60^\circ + 2\cdot 360^\circ$.

9. На кои од аглите во претходната задача, им се совпаѓаат и вторите краци?

10. Часовникот во моментот покажува точно 3 часот. Колку часот ќе покажува часовникот, ако од тој момент минутната стрелка опише агол од -780°?

11. Нацртај кружница $k(O, r)$ и во неа нацртај централен агол AOB, што му одговара на кружниот лак AB, чија должина е еднаква на должината на радиусот на кружницата k.

12. На кој број е еднаков односот од должината на кружницата и должината на нејзиниот: а) дијаметар, б) радиус?

II.2. МЕРЕЊЕ НА АГЛИ И ЛАЦИ

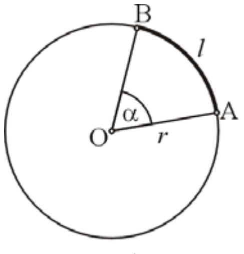
За мерење на големината на аглите, потребно е големината на одреден агол да се земе за *единица мерка*, и со неа да се мерат другите агли. За единица мерка може да се земе кој било агол. Во практиката, за единица мерка земен е степенот, кој е $\frac{1}{90}$ од правиот агол, односно $\frac{1}{360}$ од полниот агол. Сега ќе се запознаеме и со друга поприродна единица мерка за мерење на големината на аглите.

Од геометријата знаеш дека должината l на кружен лак од кружница со радиус r, што му одговара на централен агол од α степени, ја пресметуваме со формулата:

$$l = \frac{\pi r\alpha}{180}. \qquad (1)$$

Од неа, пак, за односот од должината на лакот и радиусот на кружницата, ја добиваме формулата:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi\cdot\alpha}{180}. \qquad (2)$$

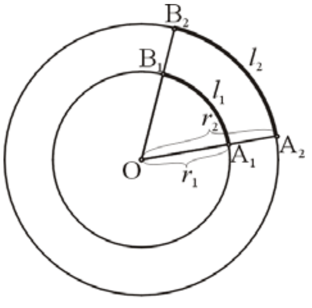


црт. 13

Од формулата (1) забележуваме дека, должината l на лакот зависи од радиусот r и централниот агол α во кружницата (црт. 13), а од формулата (2) забележуваме дека, односот $\frac{l}{r}$ од должината на лакот и радиусот на кружницата чиј дел е тој лак, зависи само од големината на централниот агол α.

Навистина, кај две концентрични кружници за еден ист централен агол (црт. 14), односот од должината на лакот l и неговиот радиус r останува ист, т.е. важи: $\frac{l_1}{r_1}=\frac{l_2}{r_2}$. Тоа следува од фактот, што кружните исечоци OA_1B_1 и OA_2B_2 (црт. 14) се слични. Значи, односот $\frac{l}{r}$ ја карактеризира големината на централниот агол α, т.е. важи:

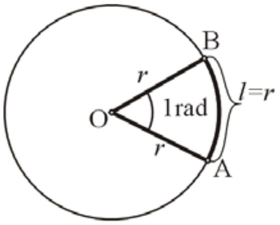
$$\frac{l}{r}=k\cdot\alpha, \qquad (2')$$



црт. 14

каде k е некој коефициент на пропорционалност, кој зависи само од изборот на единицата мерка за мерење на аглите. Така, на пример, ако аглите ги мериме во степени, тогаш $k=\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}$. При друга мерна единица коефициентот k ќе има нова вредност, итн.

Најприродно би било да се избере таква единица мерка за мерење на аглите, за која би добиле да е $k=1$, т.е. да имаме $\frac{l}{r}=\alpha$. Притоа, ќе добиеме $\alpha=1$, ако ставиме $l=r$. Така, избраната единица за мерење на аглите се вика *радијан*. Значи, ја усвојуваме следнава:



црт. 15

Дефиниција 3. *Радијан* е централен агол, што одговара на кружен лак, чија должина е еднаква на радиусот на кружницата (црт. 15).

За да одредиме колку радијани содржи произволен централен агол, доволно е должината l на соодветниот кружен лак да се подели со радиусот r на кружницата. Според тоа, мерниот број φ на тој агол во радијани е еднаков на $\frac{l}{r}rad$, т.е. важи формулата:

$$\varphi=\frac{l}{r}rad. \qquad (3)$$

Односот $\frac{l}{r}$ е неименуван (апстрактен) број, па затоа при изразувањето на аглите во радијани, обично, именувањето на единицата rad се изостава. На пример, наместо $\varphi=3\ rad$ пишуваме само $\varphi=3$. Ако централниот агол е мерен во радијани, тогаш познатата формула (1) за должина на кружен лак добива многу едноставен вид:

$$l=r\varphi. \qquad (3')$$

Да одредиме сега, каква врска постои меѓу единиците мерки степени и радијани.

Со α и φ да ги означиме соодветно мерните броеви во степени и во радијани на еден ист агол. На централен агол од 90° и 180° во која било кружница им одговараат кружни лаци, што соодветно се еднакви на $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ од кружницата. Според тоа, на централен агол од 360°, односно на полниот агол 360° му одговара целата кружница, чија должина l, е еднаква на $l=2\pi r$. Тогаш од формулата (1) наоѓаме:

На полниот агол 360° му одговараат $\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$ радијани.

Значи, на 1^o одговараат $\frac{2\pi}{360} rad$, а на α степени одговараат $\frac{2\pi}{360}\cdot\alpha=\frac{\pi\alpha}{180} rad$.

Затоа, бараната врска меѓу α и φ е изразена со формулата:

$$\varphi=\frac{\pi\alpha}{180}. \tag{4}$$

Со помош на добиената формула, лесно ја составуваме следнава таблица за изразување на некои агли од степени во радијани:

α^o	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
$\varphi\, rad$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Мерниот број на обопштениот агол изразен во радијани ќе биде:

$$\varphi+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{5}$$

каде φ е мерниот број на елементарниот агол во радијани.

Пример 2. Даден е аголот $\alpha = 48^o24'36''$. Да го изразиме во радијани.

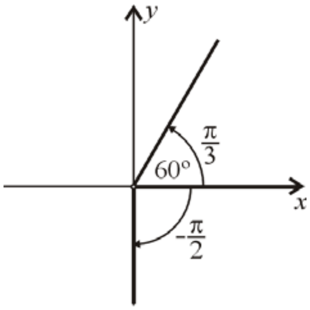
Решение. Прво минутите и секундите на аголот α ги изразуваме во децимален дел од степенот:

$$\alpha = 48^o24'36'' = 48^0+\left(\frac{24}{60}\right)^o+\left(\frac{36}{3600}\right)^o = 48^o+\left(\frac{4}{10}\right)^o+\left(\frac{1}{100}\right)^o$$

$$= 48^o + 0{,}4^o + 0{,}01^o = 48{,}41^o.$$

Потоа, од формулата (4), добиваме

$$\varphi=\frac{\pi\cdot 48{,}41}{180}\approx 0{,}845 \text{ радијани. } \blacklozenge$$



црт. 16

Пример 3. Аголот, чиј мерен број е 1 радијан да го изразиме во степени (црт. 16).

Решение. Од формулата (4) имаме:

$$\alpha=\frac{180\varphi}{\pi}. \tag{6}$$

Од формулата (6) за $\varphi = 1$ *rad*, добиваме $\alpha=\frac{180}{\pi}\approx 57{,}296^o \approx 57^o17'45''$. ♦

Пример 4. Радиусот на една кружница е r = 5 (cm), а треба да се одреди должината на кружен лак од неа, што му одговара на централен агол од $\frac{\pi}{9}$ радијани.

Решение. Од формулата (3’) наоѓаме: $l = \varphi\cdot r = \frac{\pi}{9}\cdot 5 = \frac{5\pi}{9}\approx 1{,}75$ *(cm)*.♦

ЗАДАЧИ

1. Изрази ја единицата мерка 1^o во радијани.

2. Аглите, зададени во степени: -6^o, 12^o, -18^o, -36^o, 210^o, изрази ги во радијани.

3. Мерниот број φ на аголот, во радијани е: $\frac{\pi}{12},-\frac{5\pi}{6},-\frac{3\pi}{4}$. Изрази го неговиот мерен број во степени.

4. Колкав е мерниот број на аголот во радијани, што го опишува:

а) часовната, б) минутната стрелка на часовникот за 10 дена?

5.* Запчесто тркало со 18 запци го движи друго тркало со 108 запци. За колкав агол треба да се заврти малото тркало, за да направи големото тркало едно полно завртување?

6. Пресметај, колкава должина има кружен лак, што одговара на централен агол од 3 радијани, во кружница со радиус 5 (*cm*).

7. Тркало, чиј радиус е 1,2 (*m*), прави 300 завртувања во минута. Одреди ја неговата аглова брзина, која се мери со единица мерка $\frac{\text{радијан}}{\text{секунда}}$.

8. Изрази ја аглoвата брзина на ротацијата на Земјата околу својата оска во следниве единици: $\frac{\text{радијан}}{\text{час}}$, $\frac{\text{радијан}}{\text{секунда}}$.

9. Пресметај го радиусот на кружницата, во која на централен агол од 200° му одговара кружен лак, долг 5 (*cm*).

10. Во правоаголен координатен систем *xOy* конструирај агол $\alpha = -60^\circ$, чие теме да е во координатниот почеток, а првиот крак да му се совпаѓа со позитивниот дел на апсцисната оска.

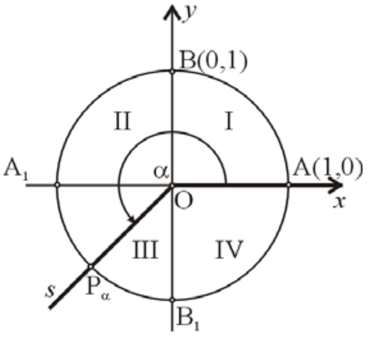
II.3. ТРИГОНОМЕТРИСКА КРУЖНИЦА

Во рамнината нека е даден правоаголен координатен систем *xOy* (црт. 17). Позитивната насока на апсцисната оска *Ox* (надесно од координатниот почеток *O*) и позитивната насока на ординатната оска (нагоре од почетокот *O*), на цртежот, означени се со стрелка.

Аглите во координатната рамнина се нанесуваат така, што нивните темиња се во координатниот почеток *O*, а нивните први краци се совпаѓаат со позитивниот дел од *Ox*-оската. За да се добие вториот крак на даден агол α, потребно е првиот крак да се ротира (во позитивна или негативна насока) за големината (изразена во степени или радијани) на дадениот агол α.

Така, добиениот втор крак на нанесениот агол α, што излегува од координатниот почеток е втор крак на бесконечно множество агли, што се нанесени од *Ox*-оската. Сите тие агли се разликуваат еден од друг за цел број полни завртувања. Големината на произволен агол φ од тоа множество е изразена со бројот

$$\varphi = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$



црт. 17

Така, на пример, вториот крак *OM* на аголот $\alpha = 60^\circ$ (црт. 16) е втор крак на аглите $60^\circ + k \cdot 360^\circ$, т.е. на аголот 60° (за $k = 0$), на 420° (за $k = 1$), на 780° (за $k = 2$), на -300° (за $k = -1$) итн.

Да ја разгледаме кружницата $k(O,\ r = 1)$, чиј центар е во координатниот почеток *O* на правоаголниот координатен систем *xOy*, и има радиус со должина 1. Таа се вика *единична тригонометриска кружница*, или кратко само *тригонометриска кружница*.

Координатните оски ја разделуваат рамнината, а заедно со неа и тригонометриската кружница, на четири еднакви делови, наречени квадранти (црт. 17).

Ако вториот (краен) крак OS на аголот α се содржи, на пример, во III квадрант, тогаш заради краткост на искажувањето велиме, дека тој агол е од III квадрант. Вториот крак на кој било обопштен агол α ќе ја сече единичната кружница во некоја точка, која обично, ќе ја означуваме со **P** или $\mathbf{P}_\alpha$ (црт.17).

Пример 5. Во кој квадрант е аголот: а) $\alpha = -1\,200^\circ$, б) $\beta = \frac{35\pi}{3}$?

Решение. а) $\alpha = -1\,200^\circ = -\,120^\circ - 3 \cdot 360^\circ$.

Бидејќи $-120^\circ \in (-180^\circ, -90^\circ)$, затоа аголот α е во III квадрант.

б) Мерниот број на β го трансформираме: $\beta = \frac{35}{3}\pi = \frac{2+33}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + 11\pi = -\frac{1}{3}\pi + 12\pi$.

Значи, $\beta = -\frac{1}{3}\pi + 12\pi$. Бидејќи $-\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, затоа аголот β е во IV квадрант. ♦

Со A и A_1, а со B и B_1 да ги означиме соодветно пресечните точки на апсцисната и ординатната оска со тригонометриската кружница. Пресечната точка на вториот крак OS и кружницата k во одредени случаи може да биде и една од горните четири точки. Притоа:

а) $P_\alpha \equiv A$ за обопштениот агол $0 + 2k\pi$, односно $2k\pi$,

б) $P_\alpha \equiv A_1$ за обопштениот агол $\pi + 2k\pi$, односно $(2k + 1)\,\pi$,

в) $P_\alpha \equiv B$ за обопштениот агол $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

г) $P_\alpha \equiv B_1$ за обопштениот агол $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, односно $\frac{\pi}{2} + (2k - 1)\pi$.

Оттука заклучуваме:

1°. Точката $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ лежи на апсцисната оска, т.е. $y_\alpha = 0$, ако $\alpha = n\pi$ (каде $n \in \mathbf{Z}$), и тоа: ако $n = 2k$, тогаш $P_\alpha \equiv$ A, а ако $n = 2k + 1$, тогаш $P_\alpha \equiv A_1$.

2°. Точката $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ лежи на ординатната оска, т.е. $x_\alpha = 0$, ако $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (каде $n \in \mathbf{Z}$), и тоа: ако $n = 2k$, тогаш $P_\alpha \equiv$ B, а ако $n = 2k - 1$, тогаш $P_\alpha \equiv B_1$.

Пример 6. Во која точка вториот крак на аголот $\alpha = \frac{27}{2}\pi$ ја сече тригонометриската кружница?

Решение. Мерниот број на аголот α го претставуваме во видот $\alpha = \frac{27}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + 13\pi$. Бидејќи 13 е непарен број, тоа е случајот г). Значи $P_\alpha \equiv B_1$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Нацртај правоаголен координатен систем и на координатната рамнина нанеси ги аглите: –30°, 120° и 300°.

2. Одреди во кој квадрант се наоѓа аголот: а) –1500°, б) 854°, в) $\frac{36}{5}\pi$.

3. Во која точка вториот крак на аголот α ја сече тригонометриската кружница, ако мерниот број на α е: а) -17π, б) $\frac{37}{2}\pi$?

4. Во кој квадрант се наоѓа аголот, чиј мерен број е:

а) –800°, б) 1 000°, в) –3 450°?

5. Во кој квадрант се наоѓа вториот крак на аголот: а) $\frac{45}{8}\pi$, б) $-\frac{25}{6}\pi$, в) $\frac{77}{9}\pi$?

6. Во која точка (црт. 17) вториот крак на аголот: а) $\frac{31}{2}\pi$, б) $-\frac{15}{2}\pi$, в) $\frac{21}{2}\pi$ ја сече тригонометриската кружница?

7. Во која точка (црт. 17) вториот крак на аголот: а) 28π, б) –13π ја сече тригонометриската кружница?

8. Даден е аголот $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Одреди ги координатите на пресечната точка P_α, на неговиот втор крак, со тригонометриската кружница.

II.4. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Нека е дадена тригонометриска кружница $k(O, r = 1)$ во координатната рамнина xOy (црт. 18). Првиот крак на произволен агол α, се совпаѓа со OA, а неговиот втор крак OS секогаш ја сече кружницата k во точно определена точка P_α со координати (x_α, y_α), која може да лежи, зависно од големината на α, во кој било од четирите квадранти (црт. 18).

Значи, на секој агол α му одговара (може да му се придружи) по една единствена точка $P_\alpha \in k$, а на секоја точка P_α ѝ одговара (може да ѝ се придружи) по еден единствен реален број x_α - апсцисата, и y_α - нејзината ордината.

Според тоа, на секој произволен агол α му одговара (може да му се придружи) по точно еден реален број x_α, односно y_α. А при услови $x_\alpha \neq 0$ и $y_\alpha \neq 0$, на секој агол α му одговара и по еден единствен реален број $\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$, односно $\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$.

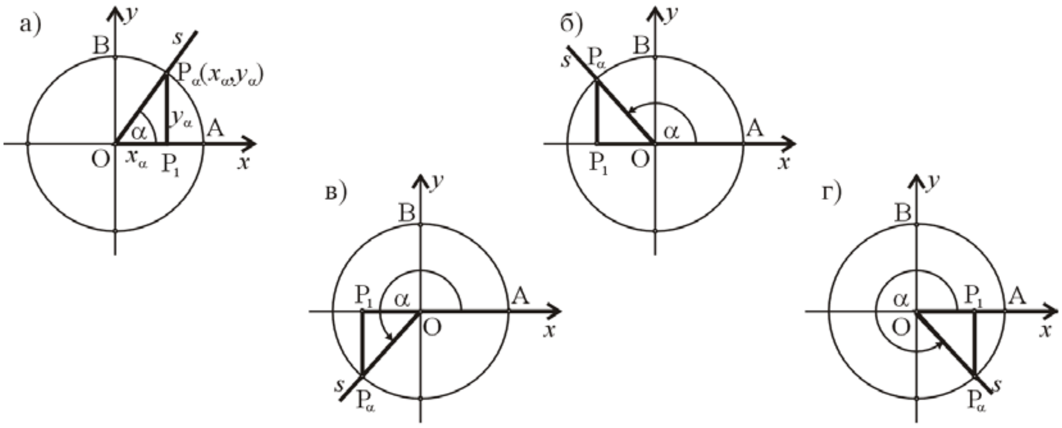
Согласно заклучоците 1° и 2° од претходната лекција, имаме: условот $x_\alpha \neq 0$ е еквивалентен со $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k \in \mathbf{Z})$, а условот $y_\alpha\neq 0$ е еквивалентен со $\alpha\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

Горните размислувања ни овозможуваат да воведеме четири нови функции од множеството на сите агли на множеството реални броеви **R**. Нив ги дефинираме:

Дефиниција 4. Функцијата, при која на секој произволен агол α му се придружува ординатата y_α, на точката P_α, во која вториот крак на α ја сече тригонометриската кружница, се вика *синус* на аголот α (црт. 18), т.е. $\sin\alpha=y_\alpha$ каде $y_\alpha=\overline{P_\alpha P_1}$ или $y_\alpha=-\overline{P_\alpha P_1}$.

Дефиниција 5. Функцијата, при која на секој агол α му се придружува апсцисата x_α, на точката P_α, во која вториот крак на α ја сече тригонометриската кружница, се вика *косинус* на аголот α (црт. 18), т.е. $\cos\alpha=x_\alpha$ каде $x_\alpha=\overline{OP_1}$ или $x_\alpha=-\overline{OP_1}$.

Дефиниција 6. Функцијата, при која на секој агол $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbf{Z})$ му се придружува односот $\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$ од ординатата и апсцисата на точката P_α, во која вториот крак на аголот α ја сече тригонометриската кружница, се вика *тангенс* на аголот α, т.е. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, при $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

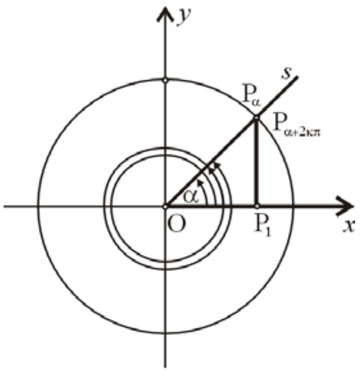


црт. 18

Дефиниција 7. Функцијата, при која на секој агол $\alpha \neq k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$ му се придружува односот $\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$ од апсцисата и ординатата на точката P_α во која вториот крак на аголот α ја сече тригонометриската кружница, се вика *котангенс* на аголот α, т.е. $\text{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$, при $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Функциите, синус, косинус, тангенс и котангенс, имаат заедничко име *тригонометриски функции*. Постојат уште две тригонометриски функции: *секанс* и *косеканс* кои се дефинираат соодветно како $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ и $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, но на нив нема да се задржуваме, бидејќи ретко се користат.

Бидејќи вторите краци на елементарниот агол α и обопштениот агол $\alpha+2k\pi$ се совпаѓаат (црт. 19), тогаш и точките P_α и $P_{\alpha+2k\pi}$ се совпаѓаат. Според тоа,



црт. 19

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,\ k \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in \mathbf{Z}, \quad (2)$$

$$\text{tg}(\alpha + 2k\pi) = \text{tg}\,\alpha,\ \text{при}\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (3)$$

$$\text{ctg}(\alpha + 2k\pi) = \text{ctg}\alpha,\ \text{при}\ \alpha \neq k\pi, \quad (4)$$

Пример 7. $\sin 50^\circ = \sin(50^\circ + k \cdot 360^\circ)$. ♦

Пример 8. $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \text{tg}(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \text{tg}(\frac{\pi}{3} + 4\pi)$. ♦

Бидејќи апсцисите и ординатите на точките од тригонометриската кружница не можат да имаат вредност поголема од 1, ниту помала од –1, затоа за вредностите на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ќе важат неравенствата:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \text{ односно } |\sin\alpha| \leq 1, \tag{5}$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1, \text{ односно } |\cos\alpha| \leq 1. \tag{6}$$

Значи, функциите синус и косинус се ограничени функции, па не можат да добијат кои било реални вредности.

Меѓутоа, функциите тангенс и котангенс не се ограничени, бидејќи количниците: $\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$ при $x_\alpha \neq 0$ и $\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$ при $y_\alpha \neq 0$ можат да добијат кои било реални вредности, ако x_α и y_α се такви, што $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$.

ЗАДАЧИ

1. Испитај дали е точно равенството: а) $\cos 800^\circ = \cos 80^\circ$; б) $\text{tg}\frac{7\pi}{4} = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Може ли да се најде агол α, таков што:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos\alpha = \frac{5}{4}$; в) $\sin\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = -1$; д) $\sin\alpha = 3$?

3. Може ли да се најде агол α, таков што: а) $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$; б) $\text{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; в) $\sin\alpha + \cos\alpha = 2$; г) $\text{tg}\,\alpha = 4$?

4. На тригонометриската кружница, одреди ја точката P_α, ако е: а) $\alpha = 60^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 120^\circ$.

5. Одреди ги координатите на точката P_α за вредности на аголот α од претходната задача.

6. На тригонометриската кружница одреди ја точката P_α, ако е: а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

7. На тригонометриската кружница одреди ја точката P_α, ако $\text{tg}\,\alpha = 1$.

8. Кои од следниве броеви се еднакви:

а) $\sin 70^0$, $\sin(-70^0)$, $\sin(70^0+2\cdot 360^\circ)$, $\sin(-70^0-3\cdot 360^\circ)$, $\sin(70^0-4\cdot 360^\circ)$;

б) $\cos(40^0)$, $\cos(40^0-2\cdot 360^\circ)$, $\cos(-40^0)$, $\cos(-40^0+3\cdot 360^\circ)$?

9. Дали се можни равенствата: а) $2-\sin\alpha = 1{,}65$; б) $1+\cos\alpha = 3$, в) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1{,}4$; г) $3-\cos\alpha = 2$?

10. На кои броеви се еднакви: а) $\cos\frac{\pi}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sin 0$; г) $\cos\pi$; д) $\cos 0$?

11. Кои од следниве броеви се позитивни, а кои негативни:

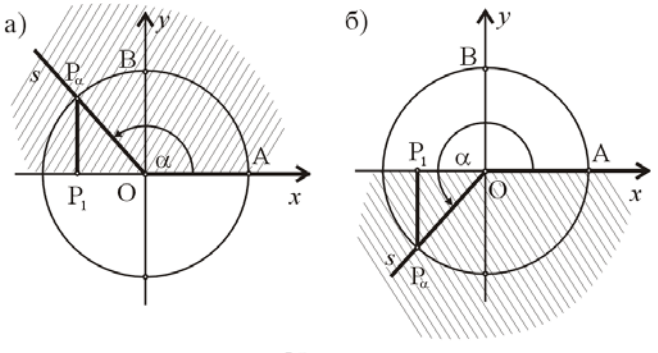
а) $\sin\frac{\pi}{6}$; б) $\sin\frac{2\pi}{3}$; в) $\sin 200^\circ$; г) $\cos 150^\circ$;

д) $\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$; ѓ) $\sin 420^\circ$; е) $\text{tg}120^\circ$; ж) $\text{ctg}210^\circ$?

II.5. ЗНАЦИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ВО ОДДЕЛНИ КВАДРАНТИ

Знаци на тригонометриските функции

1°. Бидејќи sinα и cosα се соодветно ординатата и апсцисата на точката P_α, во која вториот крак на аголот α ја сече тригонометриската кружница, затоа нивните знаци во одделните квадранти се еднакви со знаците на координатите на точката P_α во тие квадранти.



црт. 20

Знаеш дека, позитивни ординати имаат точките во горната полурамнина (I и II квадрант), а негативни ординати имаат точките во долната полурамнина (III и IV квадрант). Според тоа, синусот на аглите што завршуваат во горната полурамнина (I и II квадрант) е позитивен (црт. 20 а), а синусот на аглите што завршуваат во долната полурамнина (III и IV квадрант) е негативен (црт. 20 б). Тоа симболички го запишуваме:

$$\alpha \in (0, \pi) \Rightarrow \sin\alpha > 0,\ \alpha \in (-\pi, 0) \Rightarrow \sin\alpha < 0.$$

Пример 9. Да го утврдиме знакот на броевите:

а) sin 2500°, б) sin $\frac{17}{4}\pi$.

Решение. а) $\sin 2500^\circ = \sin(-20^\circ + 7\cdot 360^\circ) = \sin(-20^\circ) < 0$;

б) $\sin\frac{17}{4}\pi = \sin\frac{16+1}{4}\pi = \sin(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\pi) = \sin\frac{\pi}{4} > 0$. ♦

2°. Познато ти е дека, позитивни апсциси имаат точките од десната полурамнина (I и IV квадрант), а негативни апсциси имаат точките од левата полурамнина (II и III квадрант). Според тоа, косинусот на аглите, чии втори краци се во десната полурамнина (I и IV квадрант) е позитивен (црт. 21 а), а косинусот на аглите, чии втори краци завршуваат во левата полурамнина (II и III квадрант) е негативен (црт. 21 б), т.е.

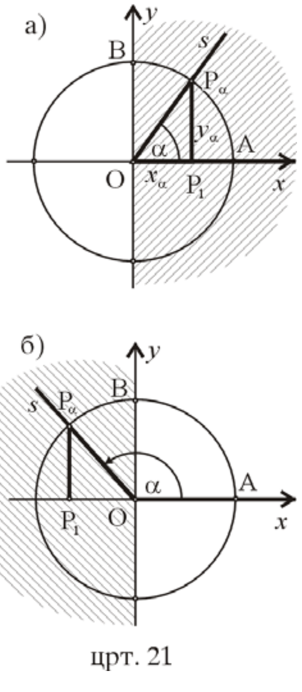
$$\alpha \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\alpha > 0, \quad \alpha \in (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}) \Rightarrow \cos\alpha < 0.$$

Пример 10. Да го одредиме знакот на бројот:

а) cos 1000°; б) cos$\frac{12}{5}\pi$.

Решение. а) $\cos 1000^\circ = \cos(-80^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos(-80^\circ) > 0$;

б) $\cos\frac{12}{5}\pi = \cos\frac{2+10}{5}\pi = \cos(2\pi + \frac{2}{5}\pi) = \cos\frac{2}{5}\pi = \cos 72^\circ > 0$. ♦



црт. 21

3°. Бидејќи tgα и ctgα по дефиниција се количници од координатите на точката P_α, во која вториот крак на α ја сече тригонометриската кружница, тогаш вредностите на tg α

и ctgα ќе бидат позитивни (односно негативни) во оние квадранти во кои координатите на P_α имаат ист знак (односно спротивни знаци). Според тоа, тангенсот и котангенсот на аглите што завршуваат во I или III квадрант се позитивни, а тангенсот и котангенсот на аглите што завршуваат во II или IV квадрант се негативни, т.е.

$$\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\pi, \tfrac{3\pi}{2}) \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} \alpha > 0 \;\wedge\; \operatorname{ctg} \alpha > 0,$$

$$\alpha \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi) \cup (-\tfrac{\pi}{2}, 0) \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} \alpha < 0 \;\wedge\; \operatorname{ctg} \alpha < 0.$$

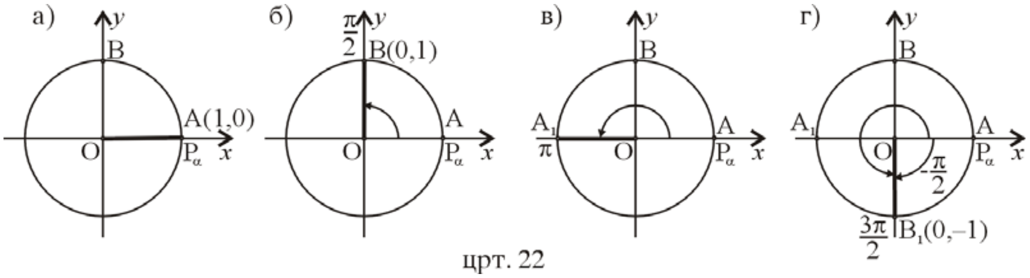
Пример 11. Да го одредиме знакот на бројот: а) $\operatorname{tg} 500^\circ$; б) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$.

Решение. а) $\operatorname{tg} 500^\circ = \operatorname{tg} (140^\circ + 360^\circ) = \operatorname{tg} 140^\circ < 0$, б) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{ctg} 240^\circ > 0$. ♦

Вредности на тригонометриските функции од аглите $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Ако $\alpha = 0$, тогаш и вториот крак на аголот α се совпаѓа со позитивниот дел на Ox-оската, па точката P_α ќе се совпадне со точката А(1,0) (црт. 22 а). Оттука наоѓаме:

$$\sin 0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1,\ \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0, \text{ а } \operatorname{ctg} 0^\circ \text{ не постои.}$$



црт. 22

Ако, пак, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (т.е. $\alpha = 90^\circ$), тогаш вториот крак на аголот се совпаѓа со позитивниот дел на Oy-оската, па точката P_α ќе се совпадне со точката $B(0,1)$ (црт. 22 б). Според тоа, имаме: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не постои, а $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$.

Нека $\alpha = \pi$, (односно $\alpha = 180^\circ$), тогаш точката P_α се совпаѓа со точката A_1, која има координати A_1 (–1,0) (црт. 22, в). Според тоа: $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{tg} \pi = \frac{0}{1} = 0$, а $\operatorname{ctg} \pi$ не постои.

Нека $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, (односно $\alpha = 270^\circ$) (црт. 22 г). Тогаш точката P_α се совпаѓа со точката B_1 (0, –1), па оттука наоѓаме:

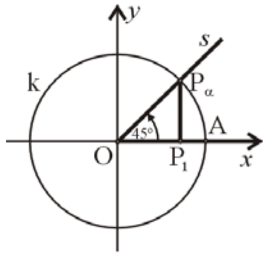
$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1, \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{0} \text{ не постои,} \qquad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Вредности на тригонометриските функции од аголот $\frac{\pi}{4}$.

Да го разгледаме цртежот 23, каде што $\angle AOP_\alpha = \frac{\pi}{4}$ (односно $\angle AOP_\alpha = 45^\circ$).

Бидејќи триаголникот OP_1P_α е рамнокрак правоаголен, затоа $\overline{OP_1} = x_\alpha = y_\alpha = \overline{P_1P_\alpha}$, па со примена на Питагоровата теорема имаме: $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$. А оттука $x_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значи, точката P_α има координати $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Според тоа:

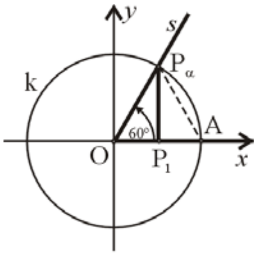


црт. 23

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ и } \mathrm{ctg}\ \frac{\pi}{4} = 1.$$

Вредности на тригонометриските функции од аглите $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$.

Да го разгледаме триаголникот AOP_α на цртежот 24, каде $\angle AOP_\alpha = \frac{\pi}{3}$ (односно 60°). Тој е рамностран триаголник со страна $\overline{OA} = \overline{OP_\alpha} = \overline{AP_\alpha} = 1$. Оттука следува дека нормалата $\overline{P_\alpha P_1} = y_\alpha$, воедно е висина на рамностраниот триаголник AOP_α која, пак, ја преполовува страната $\overline{OA} = 1$. Според тоа, имаме:



црт. 24

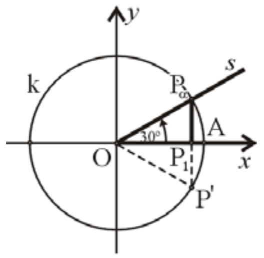
$$y_\alpha = \overline{P_\alpha P_1} = h = \overline{OA} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ а } x_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2}.$$

Следствено: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Да го разгледаме сега триаголникот OP_1P_α на цртежот 25, каде што $\angle P_1OP_\alpha = \frac{\pi}{6}$ (=30°). Тој при осна симетрија со оска Ox-оската се пресликува на триаголникот OP_1P'. Унијата, пак, од триаголниците OP_1P_α и OP_1P' е рамностраниот триаголник $OP_\alpha P'$ со страна $\overline{OP_\alpha} = \overline{OP'} = \overline{P_\alpha P'} = 1$. Во него е $\overline{P_\alpha P_1} = y_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_\alpha P'} = \frac{1}{2}$, а $\overline{OP_1} = x_\alpha$ е висина, па затоа $x_\alpha = h = \overline{OP_\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следствено:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$



црт. 25

Во следнава таблица ги наведуваме сите вредности на тригонометриските функции, што ги знаеме, кога α∈[0,2π].

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

ЗАДАЧИ

1. Утврди го знакот на броевите: а) $\sin(-500^{o})$; б) $\sin\frac{23}{5}\pi$.

2. Утврди го знакот на броевите: а) $\cos 750^{o}$; б) $\cos\frac{10}{3}\pi$.

3. Утврди го знакот на броевите: а) $\mathrm{tg}\,460^{o}$; б) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{5}$.

4. Одреди го знакот на броевите:

а) $\sin 70^{o}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $\sin 135^{o}$, $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{5}$; в) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{8}$, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{6}$.

5. Кои од следниве броеви се позитивни, а кои негативни:

а) $\sin 200^{o}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{5}$, б) $\cos 350^{o}$, $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{5}$, $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{4}$?

6. Каков знак има изразот:

а) $\cos100^{o}+1$; б) $1-\sin100^{o}$; в) $\sin200^{o}\cdot\mathrm{tg}150^{o}$; г) $\cos(-30^{o})\cdot\mathrm{ctg}(-60^{o})$?

7. Во кој квадрант дропката $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ќе биде: а) позитивна, б) негативна?

8. Во кои квадранти:

а) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имаат различни знаци; б) $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha$ имаат исти знаци;

в) $\sin\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ имаат различни знаци; г) $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ имаат исти знаци?

9. Вредностите на кои тригонометриски функции:

а) од аголот 120^{o} се негативни; б) од аголот 200^{o} се позитивни?

10. Постои ли агол α, таков што $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ да имаат различни знаци во некој квадрант?

11. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sin0^{o} + 2\sin30^{o}\cdot\cos60^{o}$; б) $\cos45^{o}\cdot\cos0^{o} - \sin45^{o}\cdot\cos60^{o}$; в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}+1$.

12. Пресметај: а) $6\sin\frac{\pi}{6}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\cos^{2}\frac{\pi}{4}-1$.

13. Пресметај: а) $3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}+2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$; б) $6\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3}-1$.

14. Пресметај: а) $2\sin\frac{\pi}{4}+3\cos2\pi$; б) $4\mathrm{tg}2\pi-2\sin\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}\pi$.

15. Пресметај: а) $\frac{\cos60^{o}}{1+\sin60^{o}}+(\mathrm{ctg}60^{o})^{-1}$; б) $\frac{\cos30^{o}-\cos60^{o}}{\cos30^{o}+\cos60^{o}}$.

16. Пресметај: а) $\frac{3\cos60^{o}}{2\cos\frac{\pi}{6}-1}$; б) $(2\cos\pi+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}):(1+\sin\frac{\pi}{2})$.

17. Пресметај: а) $\frac{\sin90^{o}}{1+tg60^{o}}-\frac{\sin60^{o}}{1+ctg30^{o}}$; б) $\frac{tg45^{o}}{1+2\sin30^{o}}$.

18. Пресметај: $5\sin90^{o} + 2\cos0^{o} - 3\sin270^{o} + 5\cos180^{o}$.

19. Упрости ги изразите: а) $a^{2}\cos\frac{3\pi}{2} + b^{2}\sin0 +2ab\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$; б) $a\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos0+2b\cos\pi\cdot\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}$.

20. Упрости: $a^2\cos 2\pi - b^2\sin\frac{3\pi}{2} + ab\cos\pi - ab\cos 0$.

21. Одреди ја бројната вредност на изразот:

а) $\frac{2\sin 2\alpha}{1-\cos\alpha}$, за $\alpha=\frac{\pi}{6}$;   б) $\frac{tg\alpha\cdot ctg\alpha}{1+\cos\alpha}$, за $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

22. Провери дали се точни равенствата:

а) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3} = 1$;   б) $\sin^2 30^o+\cos^2 30^o = 1$;   в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = 1$.

II.6. ОСНОВНИ ЗАВИСНОСТИ МЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД ЕДЕН ИСТ АГОЛ

Сега ќе се потсетиме од II година на некои основни зависности (врски), што постојат меѓу тригонометриските функции од еден ист агол. Една од најважните од нив е искажана со следнава:

Теорема 1. Збирот од квадратите на синусот и косинусот на еден ист агол е еднаков на единица, т.е. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Доказ. Нека α е произволен агол, чиј втор крак ја сече тригонометриската кружница во точката P_α $(x_\alpha\ ,\ y_\alpha)$ (црт. 26). Од правоаголниот триаголник OP_1P_α согласно Питагоровата теорема важи $|x_\alpha|^2+|y_\alpha|^2 = 1$, односно $(x_\alpha)^2+(y_\alpha)^2 = 1$. Но, по дефиниција е $x_\alpha = \cos\alpha$ и $y_\alpha = \sin\alpha$, па затоа важи: $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$. Поради краткост наместо $(\cos\alpha)^2$ и $(\sin\alpha)^2$ пишуваме: $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$. Така, конечно ја добиваме формулата:

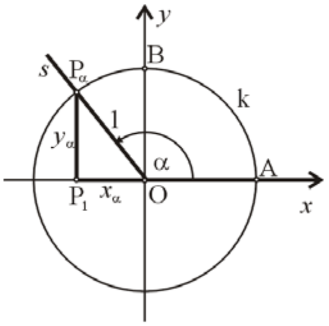
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \blacklozenge \tag{1}$$

Од дефиницијата на тангенсот и котангенсот непосредно следуваат и следниве важни формули:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \text{при}\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z}) \tag{2}$$

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \text{при}\ \ \alpha\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z}) \tag{3}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha\cdot\mathrm{ctg}\ \alpha = 1,\ \ \text{при}\ \ \alpha\neq k\cdot\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}) \tag{4}$$



црт. 26

Формулите (1), (2), (3) и (4) ни ги даваат основните врски на тригонометриските функции од еден ист агол. Тие претставуваат и *основни тригонометриски идентитети*. Со нивна помош се докажуваат и некои посложени идентитети.

Пример 12. Да ги докажеме идентитетите:

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{5}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{6}$$

Решение. Ако двете страни на основниот идентитет (1) ги поделиме со $\cos^2\alpha \neq 0$, а потоа со $\sin^2\alpha\neq 0$, ги добиваме идентитетите:

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ и $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, т.е. $1+\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ и $1+\text{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$. ♦

Забелешка. Секој тригонометриски идентитет е точно равенство за сите вредности на аргументот α, за кои и левата и десната страна имаат смисла. На пример, идентитетот (5) важи за сите вредности на α, за кои $\text{tg}\alpha$ има смисла и $\cos\alpha \neq 0$. Бидејќи условот $\cos\alpha \neq 0$ е содржан во условот $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) (види дефиниција 6), затоа равенството (5) важи при услов $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$).

Пример 13. Да го докажеме идентитетот: $\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\alpha}=\frac{2}{\sin^2\alpha}$.

Решение. Ја трансформираме левата страна сè додека не го добиеме изразот на десната страна:

$$\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha+1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{\sin^2\alpha}. \ ♦$$

Со помош на основните идентитети, ќе покажеме дека, секоја тригонометриска функција може да се изрази преку која било друга од нив.

1°. **Изразување на тригонометриските функции преку синус**.

Од основниот идентитет $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, односно од $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, добиваме:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \vee \quad \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \tag{7}$$

Дисјункцијата (7) обично ја запишуваме вака:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \tag{7'}$$

Потоа, заменувајќи го $\cos\alpha$ од (7) во идентитетите (2) и (3), добиваме:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \quad \text{ctg}\,\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

2°. **Изразување на тригонометриските функции преку косинус**.

Исто, од основниот идентитет $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, односно од $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, добиваме:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

А од идентитетите (2) и (3), заменувајќи го $\sin\alpha$ наоѓаме:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}; \qquad \text{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

3°. **Изразување на тригонометриските функции преку тангенс, односно, котангенс**.

Идентитетите (5) и (2) можеме да ги запишеме и како

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}, \ \sin\alpha=\text{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Од нив добиваме: $\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$ и $\sin\alpha=\frac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$, а од идентитетот (4) имаме $\text{ctg}\alpha=\frac{1}{\text{tg}\alpha}$.

Аналогно од идентитетите (6), (3) и (4) добиваме:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}},\ \cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Со помош на добиените формули можеме, ако е дадена вредноста на една од тригонометриските функции, да ги одредиме вредностите на другите три функции од истиот аргумент.

Во формулите што содржат два знака + и –, при нивното користење го земаме едниот од нив, зависно од тоа, во кој квадрант завршува аголот α и каков знак има бараната функција во тој квадрант.

Пример 14. Дадено е tg $\alpha = -2$, $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. Да ги одредиме вредностите на другите тригонометриски функции од аголот α.

Решение. Од условот, гледаме дека аголот α завршува во II квадрант, во кој косинусот, тангенсот и котангенсот се негативни, затоа:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{+\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},\qquad \cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},\quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{2}.$$ ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди го условот за дефинираност на идентитетот (6).

2. Докажи го идентитетот $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, со трансформација на десната страна, додека се добие левата.

Докажи ги идентитетите:

3. а) $(\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha$; б) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha$.

4. а) $\frac{tg\alpha-\sin\alpha}{tg\alpha} = 1-\cos\alpha$; б) $\frac{\cos\alpha+ctg\alpha}{ctg\alpha} - 1 = tg\alpha\cdot\cos\alpha$.

5. а) $\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{1+ctg^2\alpha}{1-ctg^2\alpha}$.

6. а) $\frac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}\cdot\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = 1$, б) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = 1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

7*. а) $\frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha+2tg\alpha+1}{tg^2\alpha-1}$, б) $\frac{\sin\alpha}{1+ctg\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+tg\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

8. а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$, б) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \mathrm{tg}\alpha = (1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)$.

9*. а) $(1- \sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$; б) $(1+ \sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2(1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$.

10. а) $\frac{\sin\alpha}{1+ctg^2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+tg^2\alpha} = (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cdot\cos\alpha)$; б) $1 - \frac{\sin^2\alpha}{1+ctg\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha} = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

11. Пресметај ја вредноста на функциите: cosα, tgα и ctgα, ако $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ и $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

12. Пресметај ја вредноста на функциите: sinα, tgα и ctgα, ако $\cos\alpha = -\frac{40}{41}$ и $\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$.

13. Дадено е tgα=2$\sqrt{2}$, каде $\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$. Да се одредат вредностите на sinα, cosα и ctgα.

14. Дадено е ctgα=$8\frac{8}{17}$, каде α$\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$. Да се одредат вредностите на tgα, sinα и cosα.

15. Пресметај ја вредноста на производот sinα·cosα, ако tgα=$\frac{1}{3}$ и π<α<$\frac{3\pi}{2}$.

16*. Пресметај ја разликата tgα–ctgα, ако $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

17. Дадено е: а) $\cos\alpha=\frac{a-b}{a+b}$; б) tgα=$\frac{1}{a}$. Одреди ги другите тригонометриски функции на аголот α.

18. Дадено е $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{n}}{n+1}$. Одреди ги cosα, tgα и ctgα.

19. Дадено е tgα=$3\frac{41}{60}$. Пресметај: sinα и cosα, α$\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, ако е tgα=3, α$\in(0,\frac{\pi}{2})$.

21*. Трансформирај го изразот $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, така што, тој да зависи само од cosα.

22. Одреди ја вредноста на изразот $\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}$, при cosα=$\frac{12}{13}$ и 270°<α<360°.

II.7. СВЕДУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

Сведувањето на тригонометриските функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол го вршиме согласно таканаречените *формули за сведување на остар агол*. Тоа се формули со чија помош тригонометриските функции од аргументите: $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ ги изразуваме со функции од аргументот α, при што претпоставуваме дека α е некој остар агол.

1. Тригонометриски функции од аргумент поголем од 2π

Во II.4. видовме дека важат формулите:

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,$$
$$\text{tg}(\alpha+2k\pi)=\text{tg}\,\alpha,\ \text{при}\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\qquad(1)$$
$$\text{ctg}(\alpha+2k\pi)=\text{ctg}\alpha,\ \text{при}\ \alpha\neq k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

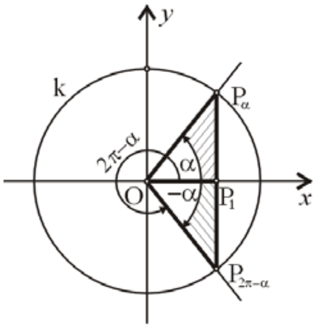
Со нивна примена, која било од тригонометриските функции од позитивен агол поголем од 2π (односно 360°) се изразува преку истоимена функција од соодветен агол, што е помал од 2π.

Пример 15. Имаме:

$$\sin 1266^o = \sin(186^o + 3\cdot 360^o) = \sin 186^o,$$

$$\cos 2800^o = \cos(280^o + 7\cdot 360^o) = \cos 280^o,$$

$$\mathrm{tg}\ 15\tfrac{3}{4}\cdot\pi = \mathrm{tg}(1\tfrac{3}{4}\cdot\pi + 2\pi\cdot 7) = \mathrm{tg}1\tfrac{3}{4}\cdot\pi = \mathrm{tg}\tfrac{7}{4}\cdot\pi\ .\ ♦$$



црт. 27

2. Тригонометриски функции од аргумент $2\pi-\alpha$

Бидејќи $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, т.е. аголот α е во I квадрант, аголот $2\pi - \alpha$ е во IV квадрант. Нивните втори краци ја сечат тригонометриската кружница во точките P_α и $P_{2\pi-\alpha}$, кои, како што гледаш од цртежот 27, се симетрични во однос на Ox-оската, па оттука, триаголниците OP_1P_α и $OP_1P_{2\pi-\alpha}$ се складни. Од нивната складност, од дефинициите на функциите sin и cos, а водејќи сметка за нивните знаци во I и IV квадрант, добиваме:

$$\sin(2\pi-\alpha) = -\overline{P_1P}_{2\pi-\alpha} = -\overline{P_1P}_{\alpha} = -\sin\alpha;\quad \cos(2\pi-\alpha) = \overline{OP_1} = \cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\ \alpha;\quad \mathrm{ctg}(2\pi-\alpha) = \frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\ \alpha.$$

Според тоа, важат равенствата:

$$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha;\qquad \cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha;$$

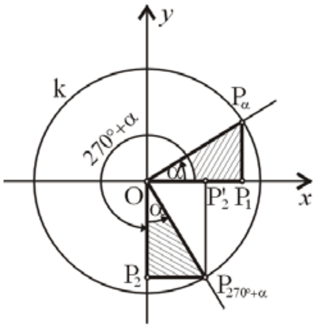
$$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha;\qquad \mathrm{ctg}(2\pi-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha.\qquad (2)$$

Пример 16. Имаме

$$\sin 310^o = \sin(360^o - 50^o) = -\sin 50^o,$$

$$\cos 300^o = \cos(360^o - 60^o) = \cos 60^o = \tfrac{1}{2},$$

$$\mathrm{ctg}\ \tfrac{14}{9}\pi = \mathrm{ctg}\ (2\pi - \tfrac{4}{9}\pi) = -\mathrm{ctg}\tfrac{4}{9}\pi\ .\ ♦$$



црт. 28

3. Тригонометриски функции од аргумент $\frac{3\pi}{2}+\alpha$.

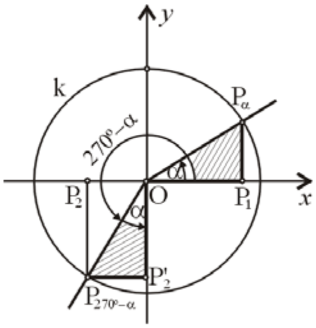
На цртежот 28, претставени се еден остар агол α и аголот $270^o + \alpha$, кој се наоѓа во IV квадрант. Од складноста на триаголниците OP_1P_α и $OP_2P_{270^o+\alpha}$ (зошто?) и дефинициите на функциите синус и косинус, а водејќи сметка и за нивните знаци во I и IV квадрант, наоѓаме:

$$\sin(270^o+\alpha) = -\overline{OP_2} = -\overline{OP_1} = -\cos\alpha\ ,$$

$$\cos(270^o+\alpha) = \overline{P_2P}_{270^o+\alpha} = \overline{P_1P}_{\alpha} = \sin\alpha\ ,$$

$$\mathrm{tg}(270^o+\alpha) = \frac{\sin(270^o+\alpha)}{\cos(270^o+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\ \alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(270^o+\alpha) = \frac{\cos(270^o+\alpha)}{\sin(270^o+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\ \alpha.$$



црт. 29

Следствено, важат равенствата:

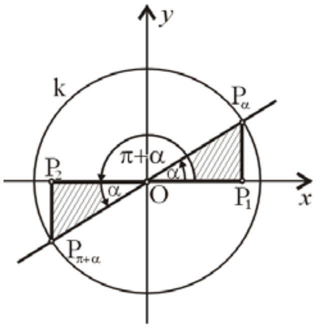
$$\sin(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha\ ;\qquad \cos(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha) = \sin\alpha\ ;$$

$$\mathrm{tg}\,(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha)=-\,\mathrm{ctg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}\,(\tfrac{3\pi}{2}+\alpha)=-\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{3}$$

Пример 17. Имаме:

$\cos 320^{\circ} = \cos\,(270^{\circ} + 50^{\circ}) = \sin 50^{\circ}$,

$\mathrm{tg}\,\frac{7}{4}\pi\; = \mathrm{tg}\;(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi) = -\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = -1$. ♦



црт. 30

4. Тригонометриски функции од аргумент $\frac{3\pi}{2}-\alpha$

Со помош на цртежот 29, покажи дека важат равенствата:

$$\sin\,(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha) = -\cos\alpha; \qquad \cos\,(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha) = \mathrm{ctg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}\,(\tfrac{3\pi}{2}-\alpha) = \mathrm{tg}\alpha \tag{4}$$

Пример 18. Имаме:

$\sin 200^{\circ} = \sin\,(270^{\circ} - 70^{\circ}) = -\cos 70^{\circ}$,

$\cos\frac{5}{4}\cdot\pi = \cos\,(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\mathrm{ctg}210^{\circ} = \mathrm{ctg}\,(270^{\circ} - 60^{\circ}) = \mathrm{tg}60^{\circ} = \sqrt{3}$. ♦

5. Тригонометриски функции од аргумент $\pi + \alpha$

На цртежот 30, нацртани се остар агол α, чиј втор крак ја сече тригонометриската кружница во точката P_α и агол $\pi + \alpha$, чиј втор крак ја сече тригонометриската кружница во точката $P_{\pi+\alpha}$. Точките P_α и $P_{\pi+\alpha}$ се централно симетрични во однос на координатниот почеток O, па според тоа и триаголниците OP_1P_α и $OP_2P_{\pi+\alpha}$ се централно симетрични. Од нивната складност следува:

$$\sin(\pi+\alpha) = -\overline{P_2P}_{\pi+\alpha} = -\overline{P_1P}_{\alpha} = -\sin\alpha\,,$$

$$\cos(\pi+\alpha) = -\overline{OP_2} = -\overline{OP}_1 = -\cos\alpha\,,$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\;\alpha\,,$$

$$\mathrm{ctg}(\pi+\alpha) = \frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\;\alpha\,.$$

Значи, важат равенствата:

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\alpha) = \mathrm{tg}\alpha; \quad \mathrm{ctg}(\pi+\alpha) = \mathrm{ctg}\alpha. \tag{5}$$

Пример 19. Имаме

$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\,(\pi+\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

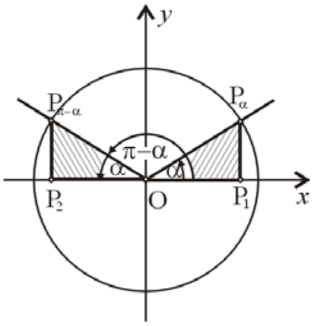
$\cos 255^{\circ} = \cos(180^{\circ}+75^{\circ}) = -\cos 75^{\circ}$, $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6} = \mathrm{tg}\,(\pi+\frac{\pi}{6}) = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. ♦

6. Тригонометриски функции од аргумент $\pi - \alpha$.

Знаеш дека, аглите $\pi - \alpha$ и α се суплементни агли, т.е. нивниот збир е еднаков на π. На цртежот 31, точките P_α и $P_{\pi-\alpha}$, а исто и триаголниците OP_1P_α и $OP_2P_{\pi-\alpha}$ се осно симетрични во однос на Oy-оската. Од цртежот 31, лесно се уверуваме дека важат равенствата:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha.$$



црт. 31

Пример 20. $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$\cos 120^o = \cos(180^o - 60^o) = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$,

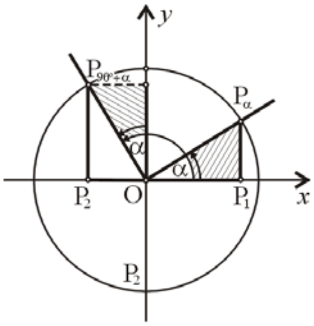
$\mathrm{tg}150^o = \mathrm{tg}(180^o - 30^o) = -\mathrm{tg}30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. ♦

7. Тригонометриски функции од аргумент $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Користејќи се со цртежот 32, покажи дека важат равенствата:

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha; \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha. \qquad (7)$$



црт. 32

Пример 21. $\sin\frac{5}{8}\cdot\pi = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\cdot\pi) = \cos\frac{\pi}{8}$,

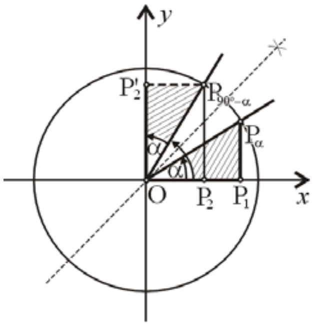
$\cos 150^o = \cos(90^o + 60^o) = -\sin 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\mathrm{ctg}\frac{5}{8}\pi = \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\cdot\pi) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$. ♦

8. Тригонометриски функции од комплементни агли

Знаеш дека, аглите α и $\frac{\pi}{2} - \alpha$ се комплементни.

Нека $\angle P'_2OP_{90^o-\alpha} = \angle P_1OP_\alpha = \alpha$ (црт. 33).



црт. 33

Тогаш $\Delta OP_1P_\alpha \cong \Delta OP'_2P_{90^o-\alpha}$ - како симетрични во однос на симетралата на I квадрант. Потоа $\Delta OP'_2P_{90^o-\alpha} \cong \Delta P_{90^o-\alpha}P_2O$ - (Зошто?). Значи, $\Delta P_{90^o-\alpha}P_2O \cong \Delta OP_1P_\alpha$. Од нивната складност следува дека:

$$\sin(90^o - \alpha) = \overline{P_2P_{90^o-\alpha}} = \overline{OP'_2} = \overline{OP_1} = \cos\alpha ,$$

$$\cos(90^o - \alpha) = \overline{OP_2} = \overline{P'_2P_{90^o-\alpha}} = \overline{P_1P_\alpha} = \sin\alpha .$$

Оттука добиваме:

$$\mathrm{tg}(90^o - \alpha) = \frac{\sin(90^o - \alpha)}{\cos(90^o - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos(90^o - \alpha)}{\sin(90^o - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Според тоа, за тригонометриските функции од комплементни агли важат равенствата:

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha\,; \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha\,;$$

$$\mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha\,. \tag{8}$$

Нив ги искажуваме со следнава важна:

Теорема 2. Синусот (односно тангенсот) на еден од два комплементни агли е еднаков на косинусот (односно котангенсот) од другиот агол, и обратно. ♦

Пример 22. sin40° = cos (90° – 40°) = cos50°, cos70° = sin20°, tg55° = ctg35°. ♦

9. Формулите за сведување покажуваат дека за практични потреби доволно е да се знаат вредностите на тригонометриските функции само на острите агли (па дури и на непоголемите од 45°). Постојат посебни таблици за вредностите на тригонометриските функции на острите агли, но со појавата на дигитрони тие ја немаат улогата што порано ја имаа.

Формулите за сведување не е потребно да се помнат напамет. За нивно припомнување доволно е да се раководиш од следново практично правило.

Правило. *Ако се користат аргументи* $2\pi \pm \alpha$ *или* $\pi \pm \alpha$*, тогаш функцијата го задржува своето име; ако, пак, се користат аргументи* $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$*, или* $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$*, тогаш функцијата преминува во својата конфункција (синус во косинус, и обратно; а тангенс во котангенс, и обратно).*

Тригонометриската функција на десната страна од формулата го зема знакот + или –, што го има тригонометриската функција на левата страна на формулата.

Пример 23. Бројот cos1660° да се изрази преку sin од остар агол.

Решение. Прво од аголот 1660° го исклучуваме целиот број полни агли, па дадениот број го изразуваме преку истоимена функција од аголот α, што е помал од 360° (кој може, но не мора да е остар). Така добиваме: cos1660° = cos (4·360° + 220°) = cos220°.

Потоа бројот cos220° за да го изразиме преку синус од остар агол, аголот 220° (кој е во III квадрант) треба да го претставиме како разлика 270° – 50°, па продолжуваме:

$$\cos 220^\circ = \cos(270^\circ - 50^\circ) = -\sin 50^\circ.$$

Знакот ” – “ е земен, бидејќи функцијата cosα за агли во III квадрант е негативна. Така конечно добиваме:

$$\cos 1660^\circ = \cos(4\cdot 360^\circ + 220^\circ) = \cos 220^\circ = \cos(270^\circ - 50^\circ) = -\sin 50^\circ. \; ♦$$

ЗАДАЧИ

1. Бројот ctg1580° изрази го преку истоимената функција од аргумент помал од 360°.

2. Бројот tg $\frac{15}{9}\cdot\pi$ изрази го преку функција од аргумент помал од $\frac{\pi}{2}$.

3. Бројот $\mathrm{ctg}\frac{16\pi}{9}$ изрази го преку функцијата тангенс од аргумент помал од $\frac{\pi}{2}$.

4. Бројот $\cos\frac{8}{9}\cdot\pi$ изрази го преку функцијата синус од аргумент помал од $\frac{\pi}{2}$.

5. Бројот ctg $1{,}1\pi$ изрази го преку: а) tg, б) ctg од аргумент помал од $\frac{\pi}{2}$.

6. Бројот $\mathrm{tg}\frac{7}{8}\cdot\pi$ изрази го преку тангенс од аргумент помал од $\frac{\pi}{2}$.

7. Бројот $\mathrm{tg}\frac{8}{15}\cdot\pi$ изрази го преку: а) tg, б) ctg од аргумент помал од $\frac{\pi}{2}$.

8. Броевите $\cos 83^{\circ}$ и $\mathrm{tg}72^{\circ}$ изрази ги преку соодветни функции од аргумент помал од 45°.

9. Броевите: а) $\cos 820^{\circ}$, б) $\sin 560^{\circ}$, в) $\mathrm{tg}930^{\circ}$ сведи ги на соодветна тригонометриска функција од остар агол, помал од 45°.

10. Кои од следниве броеви се еднакви: $\cos(150^{\circ} + 3\cdot 360^{\circ})$, $\cos(150^{\circ} - 360^{\circ})$, $-\sin 60^{\circ}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\cos 30^{\circ}$, $\cos 510^{\circ}$?

11*. Бројот $\sin(\alpha - 270^{\circ})$ изрази го како тригонометриска функција од аголот α.

12. Пресметај: $\sin 225^{\circ}$, $\cos 240^{\circ}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\mathrm{tg}210^{\circ}$, $\mathrm{ctg}330^{\circ}$.

13. Пресметај: а) $6\sin 120^{\circ}\cdot\mathrm{tg}300^{\circ}\cdot\mathrm{ctg}225^{\circ}$; б) $\mathrm{tg}27^{\circ}\cdot\mathrm{tg}63^{\circ}$.

14. Пресметај: $\sin^2 120^{\circ} + \cos^2 150^{\circ} + \mathrm{tg}^2 210^{\circ} - \mathrm{ctg}^2 225^{\circ}$.

15. Броевите:

а) $\sin 145^{\circ}$; б) $\mathrm{tg}315^{\circ}$; в) $\cos\frac{7\pi}{5}$

изрази ги преку соодветна функција од остар агол помал од 45°.

16. Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции од аглите:

а) $\frac{4\pi}{3}$, б) $\frac{9\pi}{8}$, в) $\frac{17\pi}{12}$, г) $\frac{19\pi}{2}$.

17*. Упрости го количникот $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) : \cos(2\pi - \alpha)$.

18. Покажи на цртеж, со должината на кои отсечки е изразена вредноста на $\sin 60^{\circ}$ и $\cos 60^{\circ}$ и при која единица мерка.

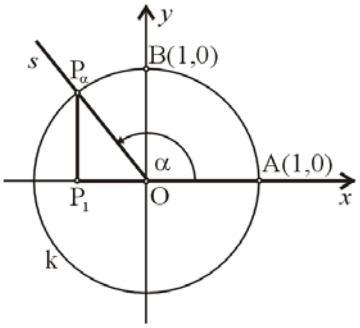
II.8. ГРАФИЧКО ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ВРЕДНОСТИТЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Вредностите на тригонометриските функции за даден агол можат да се определуваат: *нумерички* (преку соодветни пресметувања по дадени формули), *таблички* (со користење на специјално изготвени таблици или дигитрони), или *графички* (преку мерење на должината на одредени отсечки на претходно изготвен цртеж).

Графичкото определување на вредностите на тригонометриските функции на произволен агол го вршиме на тригонометриската кружница (црт. 34).

Првиот крак на кој било агол, секогаш земаме да се совпаѓа со позитивниот дел на Ox-оската, а вториот крак на аголот α ќе ја сече тригонометриската кружница во некоја точно определена точка $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$. Од дефинициите на тригонометриските функции на произволен агол, познато е дека:

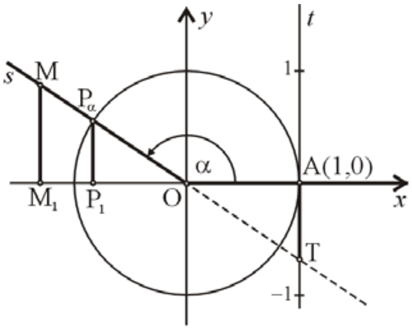
$$\sin\alpha = y_\alpha, \quad \cos\alpha = x_\alpha, \ \text{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}, \quad \text{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}.$$



црт. 34

Според тоа, ординатата y_α, односно, должината на отсечката $\overline{P_1P_\alpha}$, земена со знак + или – зависно од знакот на ординатата y_α, ни ја дава вредноста на синусот на разгледуваниот агол α; а апсцисата x_α, односно, должината на отсечката $\overline{OP_1}$, земена со знак + или – зависно од знакот на апсцисата x_α, ни ја одредува вредноста на косинусот на тој агол. Мерењето на двете отсечки $\overline{P_1P_\alpha}$ и $\overline{OP_1}$ се врши со единицата мерка $\overline{OA} = r = 1$.

Додека синусот и косинусот на даден агол α се изразени со должината на по една отсечка, со тангенсот и котангенсот не е таков случајот.



црт. 35

Нека α е произволен агол, чиј втор крак не лежи на Oy-оската (црт. 35). Ако M е произволна точка од вториот крак на аголот α (различна од O), тогаш сигурно, ќе биде $x_{\text{м}} \neq 0$, па според тоа, односот $\frac{y_M}{x_M}$ е целосно определен.

Од сличноста на триаголниците OP_1P_α и OM_1M, следува дека:

$$\frac{\overline{M_1M}}{-\overline{OM_1}} = \frac{\overline{P_1P_\alpha}}{-\overline{OP_1}} = \text{tg}\ \alpha.$$

Значи, и односот $\frac{y_M}{x_M}$ ни́ ја дава вредноста на tgα. Односот $\frac{y_M}{x_M}$ не зависи од изборот на точката M, доволно е таа да лежи на вториот крак на аголот α.

Да конструираме тангента t на тригонометриската кружница во точката $A(1, 0)$, во која позитивниот дел на Ox-оската ја сече кружницата (црт. 35). Таа тангента ќе ја викаме *тангенсна оска*, која е истонасочена со ординатната оска. Бидејќи вториот крак OS на аголот α не лежи на ординатната оска, тој (или неговото продолжение), сигурно, ќе ја пресече оската t во некоја точка T од нејзиниот позитивен или негативен дел. Ќе ја докажеме следнава:

Теорема 3. Тангенсот на произволен агол α е еднаков на ординатата y_T на точката T, во која вториот крак на α или неговото продолжение, ја сече тангенсната оска t (црт. 35), т.е. $\text{tg}\alpha = y_T$, каде $y_T = \overline{AT}$ или $y_T = -\overline{AT}$.

Доказ. Да ги разгледаме триаголниците: OP_1P_α и OAT. Тие се слични (Зошто?). Од нивната сличност имаме: $\frac{\overline{P_1P_\alpha}}{-\overline{OP_1}} = \frac{-\overline{AT}}{\overline{OA}}$. По заменувањето $\overline{OA} = 1$, добиваме $\frac{\overline{P_1P_\alpha}}{-\overline{OP_1}} = \frac{-\overline{AT}}{1}$, односно $\text{tg}\alpha = -\overline{AT}$. ♦

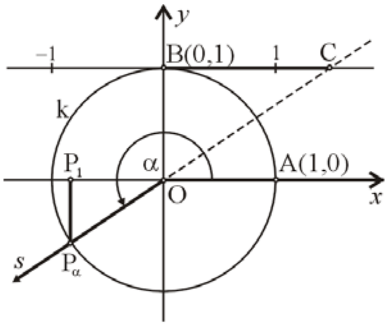
Слично постапуваме и со функцијата котангенс од произволен агол α. За таа цел да конструираме тангента c на тригонометриската кружница во точката $B(0,1)$, во која позитивниот дел на Oy-оската ја сече кружницата (црт. 36). Таа тангента ќе ја викаме *котангенсна оска*, која е истонасочена со Ox-оската.

Нека α е произволен агол, на кој вториот крак OS не лежи на Ox-оската. Во таков случај вториот крак на OS (или неговото продолжение) сигурно ќе ја пресече котангенсната оска c во некоја точка C (од нејзиниот позитивен или негативен дел). Ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 4. Котангенсот на произволен агол α е еднаков на апсцисата x_c на точката C, во која вториот крак на α, или неговото продолжение, ја сече котангенсната оска c (црт. 36), т.е. $\mathrm{ctg}\alpha = x_c$, каде $x_c = \overline{BC}$, или $x_c = -\overline{BC}$.

Доказ. Триаголниците OP_1P_α и CBO на цртежот 36 се слични (Зошто?). Од нивната сличност имаме:

$$\frac{-\overline{OP_1}}{-\overline{P_1P_\alpha}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BC}}{1}\text{, односно } \mathrm{ctg}\ \alpha = \overline{BC}\text{ . } \blacklozenge$$



црт. 36

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги графички вредностите на sin72° и cos72°.

2. Одреди ја графички вредноста на: а) tg54°; б) tg127°.

3. Одреди ја графички вредноста на: а) ctg52°; б) ctg75°.

4. Даден е агол $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Претстави го неговиот тангенс и котангенс на соодветните оски t и c.

5. Даден е агол $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Претстави го графички неговиот тангенс и котангенс на соодветните оски t и c.

6. Одреди го графички тангенсот и котангенсот на аголот $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

7. Одреди го графички тангенсот и котангенсот на аголот $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

8. На милиметарска хартија нацртај тригонометриска кружница и нанеси го со агломер аголот 125°. Одреди ја графички вредноста на четирите тригонометриски функции на аголот $\alpha = 125°$, со точност до 0,1.

9. Одреди ја графички вредноста на тригонометриските функции на аголот $\alpha = 220°$, со точност до 0,1.

II.9. ПЕРИОДИЧНОСТ, ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

1. Периодичност на тригонометриските функции.

Од формулите (1) во II.7. забележуваме, дека вредностите на тригонометриските функции се повторуваат по секоја промена на аголот за 2π, односно по секоја полна ротација на неговиот подвижен крак, т.е. важи:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin(\frac{\pi}{3}+2\pi) = \sin(\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\pi) = \ldots = \sin(\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{3}+2\pi) = \cos(\frac{\pi}{3}+2\cdot 2\pi) = \ldots = \cos(\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi) = \frac{1}{2}.$$

Значи, за тригонометриските функции постои некој број (различен од нула), таков што вредноста на функцијата не се менува кога тој број се додаде (или одземе) на која било вредност на аргументот x. Функциите што го имаат тоа својство, ги викаме *периодични функции.* Поимот периодична функција го воведуваме со следнава:

Дефиниција 8. Функцијата $f(x)$ со дефинициона област D е *периодична,* ако постои реален број $\omega > 0$, таков што $f(x + \omega) = f(\omega)$, за секој $x\in D$. Секој број ω со ова својство се вика период на функцијата $f(x)$.

За дефинициoната област D на периодичната функција, претпоставуваме дека го има следново својство: ако $x \in D$, тогаш е и $(x + \omega)\in D$, а исто така е и $(x-\omega) \in D$.

Теорема 5. 1°. Тригонометриските функции се периодични со заеднички период 2π.

2°. Основен (односно најмал позитивен) период за функциите синус и косинус е 2π.

3°. Основен (односно најмал позитивен) период за функциите тангенс и котангенс е π.

Доказ. Во точноста на 1° се уверивме порано.

Сега ќе докажеме за функцијата $\sin\alpha$ бројот 2π е најмал позитивен период. Навистина, да претпоставиме дека за функцијата $\sin\alpha$ постои друг позитивен број T помал од 2π, така што за секој α важи $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$. Во специјален случај за $\alpha = \frac{\pi}{2}$ добиваме: $\sin(\frac{\pi}{2}+T)=\sin\frac{\pi}{2}$, односно $\cos T=1$. Меѓутоа, не постои таков позитивен број T за кој $\cos T=1$, навистина, 2π е најмалиот позитивен период за $\sin\alpha$. Аналогно се докажува дека 2π е најмалиот позитивен период и за $\cos\alpha$.

Сега ќе покажеме дека π е најмалиот позитивен период за $tg\alpha$. Знаеме дека бројот π е период за функциите $tg\alpha$ и $ctg\alpha$, т.е.

$$tg(\alpha+\pi) = tg\alpha \text{ за секое } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ; и } ctg(\alpha+\pi) = ctg\alpha \text{ за секое } \alpha \neq k\pi .$$

Да претпоставиме дека за функцијата $tg\alpha$ постои друг позитивен број T помал од π, така што за секој α важи $tg(\alpha+T)=tg\alpha$. Во специјален случај за $\alpha=0$ добиваме $tgT=0$. Но ова равенство не е можно бидејќи $0<T<\pi$. Значи навистина, π е најмалиот позитивен период за $tg\alpha$. Аналогно се докажува дека π е најмалиот позитивен период и за $ctg\alpha$. ♦

Својството периодичност, како што ќе видиме понатаму, во голема мера го упростува испитувањето на тригонометриските функции, бидејќи доволно е тоа да се изврши во кој било интервал од дефиниционата област, чија должина е еднаква на основниот период 2π (за функциите синус и косинус), односно на основниот период π (за функциите тангенс и котангенс).

2. Парност и непарност на тригонометриските функции.

Пред да се потсетиме на познатите поими *парност* и *непарност* на функција, ќе го воведеме поимот *симетрична област на дефинираност на функција*, со следнава:

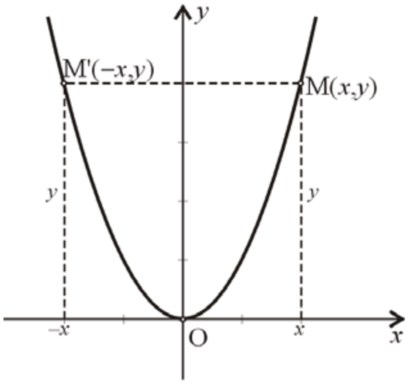
Дефиниција 9. Функцијата $f\,(x)$ велиме, има *симетрична дефинициона област* D, ако за секој $x \in D$ *е и* $-x \in D$.

Тоа својство го има множеството $\mathbf{R}$ на реалните броеви, а исто и интервалите $(-a, a)$ и $(-b, -a) \cup (a, b)$ од него, каде $a, b \in \mathbf{R}^+$ и $a < b$.

Дефиниција 10. Функцијата $f\,(x)$ со симетрична дефинициона област D е *парна* на D, ако за секој $x \in D$ важи $f(-x) = f(x)$.

Пример 24. Функцијата $f\,(x) = x^2$ на $D = \mathbf{R}$ е парна, бидејќи за секој $x \in \mathbf{R}$, важи

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(\,x) \text{ (црт. 37).} \blacklozenge$$



црт. 37

Дефиниција 11. Функцијата $f(x)$ со симетрична дефинициона област D е *непарна* на D, ако за секој $x \in D$ важи $f(-x) = -f(x)$.

Пример 25. Функцијата $f\,(x) = x^3$ *на* $D = \mathbf{R}$ е непарна, бидејќи за секој $x \in \mathbf{R}$ важи $f(-x) = (-\,x)^3 = -x^3 = -f\,(x)$ (црт. 38).♦

Од дефинициите на парна и непарна функција, непосредно, следуваат и нивните важни својства:

1°. Графикот на секоја парна функција е симетричен во однос на ординатната оска (црт. 37).

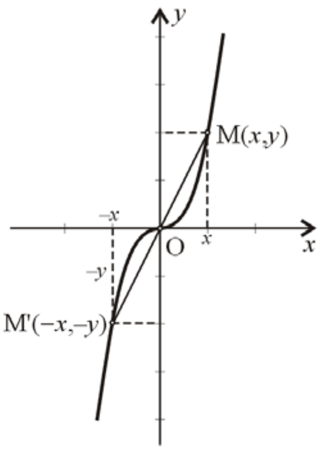
2°. Графикот на секоја непарна функција е централно симетричен во однос на координатниот почеток (црт. 38).

Парноста и непарноста е карактеристика само на одделни функции, што значи, дека постојат многу функции кои не се ниту парни, ниту непарни. На пример, функцијата $f\,(x) = x^2 + x$ не е ниту парна, ниту непарна. Покажи!

Теорема 6. Тригонометриската функција $\cos\alpha$ е парна, а тригонометриските функции $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ *и* $\mathrm{ctg}\alpha$ се непарни функции, т.е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,,\quad \mathrm{tg}(-\alpha) = -\,\mathrm{tg}\alpha\,,\quad \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha. \quad (2)$$

Доказ. На цртежот 39 од позитивниот дел на Ox-оската нанесени се аглите α и $-\alpha$, чии втори краци ја сечат тригонометриската кружница во точките P_α и $P_{-\alpha}$. Забележуваме, дека



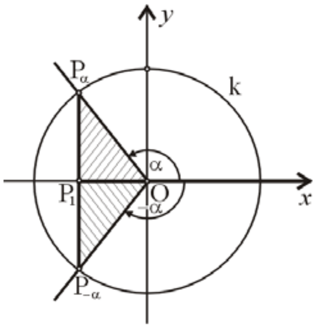
црт. 38

точките P_α *и* $P_{-\alpha}$ се симетрични во однос на *Ох*-оската. Затоа:

$$\sin(-\alpha) = y_{-\alpha} = -y_\alpha = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = x_{-\alpha} = x_\alpha = -\cos\alpha,$$

а оттука:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha\ , \ \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha\ .\ ♦$$



црт. 39

Равенствата (2) може да се докажат и со примена на периодичноста и формулите за сведување. На пример:

$$\sin(-\alpha) = \sin(-\alpha + 2\pi) = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha..$$

Равенствата (2) ги викаме уште и *формули на тригонометриските функции од негативни агли*, и се применуваат за тие да се сведат на тригонометриски функции од позитивни агли.

Пример 26. Бројот sin(–3000°) да го изразиме преку соодветна функција од позитивен аргумент и помал од $\frac{\pi}{2}$.

Решение. Имаме

$$\sin(-3000^\circ) = -\sin 3000^\circ = -\sin(8\cdot 360^\circ + 120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin(90^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\ ♦$$

ЗАДАЧИ

1. Покажи, дека $\sin(\alpha + \pi)$ е периодична функција со основен период 2π.

2. Каква е функцијата (парна или непарна): а) $y = x$, б) $y = -x$? Докажи.

3. Бројот $\cos(-\frac{5\pi}{3})$ изрази го преку тригонометриска функција од позитивен аргумент и помал од $\frac{\pi}{4}\cdot$

4. Следниве тригонометриски функции изрази ги преку функции од позитивни агли, помали од 90°: а) sin (–211°); б) cos (–50°); в) tg (–418°); г) ctg (–600°).

5. Ако е $\sin\alpha < 0$, а $\cos(-\alpha) > 0$, точно ли е дека:

а) $\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha) > 0$; б) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha) < 0$; в) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin(-\alpha) > 0$?

6. Пресметај:

а) tg (–45°); б) sin (–45°) · cos (–30°); в) ctg (–60°)· tg (–60°) + tg (–30°) · ctg30°.

7*. Упрости ги изразите:

а) $\sin(\alpha - 90^\circ) + \cos(\alpha - 180^\circ)$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha - 360^\circ) - \operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ) + \sin(\alpha - 180^\circ)$.

8*. Упрости: $\operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi) + \sin^2(\alpha + \pi) + \sin^2(\frac{3\pi}{2} - \alpha)\cdot$

9. Провери, дали е точно равенството: $\sin(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(\alpha - \pi) - \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

10. Одреди ја бројната вредност на изразот:

а) $\frac{\sin 3\alpha}{ctg 3\alpha - 2\sin\alpha}$, за α=–30°; б) $\frac{2\sin\alpha + \sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{tg 4\alpha\cdot ctg 4\alpha}$, за α=–60°.

11. На тригонометриската кружница одреди ги точките:

$$P_{30^o},\ P_{45^o},P_{60^o}\ ,\ P_{90^o}\ ,\ P_{120^o}\ ,\ P_{135^o}\ ,\ P_{180^o}\ .$$

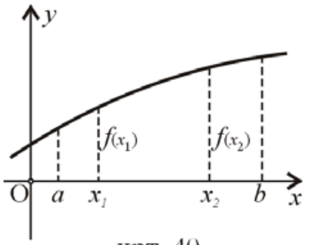
Потоа повлечи ги нивните ординати. Што забележуваш?

II.10. ИНТЕРВАЛИ НА РАСТЕЊЕ И ОПАЃАЊЕ. МЕНУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Тука ќе се запознаеме, како се менуваат одделните тригонометриски функции зависно од промената на нивниот аргумент. Тие промени на функцијата често се викаат *тек* или *поведение на функцијата*. Претходно ќе дефинираме кога една функција монотоно расте а кога монотоно опаѓа.

Дефиниција 12. Функцијата $f(x)$ на интервалот (a,b) од нејзината дефинициона област велиме, дека *монотоно расте,* ако за кои било две различни вредности x_1 и x_2 на аргументот од тој интервал важи импликацијата $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Со други зборови: функцијата на некој интервал $(a,\ b)$ од дефиниционата област монотоно расте, ако за кои било две различни вредности на x од тој интервал, на поголемата вредност на аргументот ѝ одговара и поголема вредност на функцијата (црт. 40).

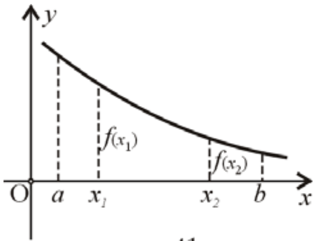


црт. 40

На пример, функцијата $f(x) = 2x - 3$ на целата дефинициона област $D = \mathbf{R}$ монотоно расте. Навистина: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Дефиниција 13. Функцијата $f(x)$ на интервалот $(a,\ b)$ од нејзината дефинициона област велиме, дека *монотоно опаѓа,* ако за кои било две различни вредности x_1 *и* x_2 на аргументот од тој интервал, важи импликацијата $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Или со други зборови: функцијата на некој интервал (a,b) од дефиниционата област монотоно опаѓа, ако за кои било две различни вредности на x од тој интервал, на поголемата вредност на аргументот ѝ одговара помала вредност на функцијата (црт. 41).



црт. 41

На пример, функцијата $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ на секој од интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ е монотоно опаднувачка.

Доказ. Нека $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}^-$ или $x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}^+$ и нека $x_1 < x_2$. Бидејќи двете страни на неравенството $x_1 < x_2$ имаат ист знак, тогаш ќе важи:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{x_1} + 3 > \frac{1}{x_2} + 3 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2).$$

За тригонометриските функции важи следнава:

Теорема 7. На интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$, функциите синус и тангенс монотоно растат, а функциите косинус и котангенс монотоно опаѓаат, т.е.

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha_1<\sin\alpha_2\\ \cos\alpha_1>\cos\alpha_2\\ \mathrm{tg}\,\alpha_1<\mathrm{tg}\,\alpha_2\\ \mathrm{ctg}\,\alpha_1>\mathrm{ctg}\,\alpha_2.\end{cases}$$

Во вистинитоста на оваа теорема ќе се увериш подолу.

Пример 27. Да се утврди кој од броевите е поголем:

а) sin 35° или sin 52°; б) cos 23° или cos 48°.

Решение. а) Бидејќи синусот во I квадрант монотоно расте, ќе биде: $\sin 35^{\circ} < \sin 52^{\circ}$;

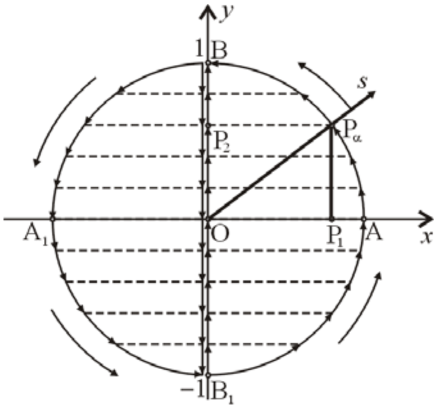
б) а бидејќи косинусот во I квадрант опаѓа, ќе биде: $\cos 23^{\circ} > \cos 48^{\circ}$. ♦

Како се менуваат тригонометриските функции во одделните квадранти, ќе утврдиме од цртежите 42, 43, 44 и 45 за секоја тригонометриска функција одделно.

Менување на функцијата sin α.

Да го разгледаме цртежот 42. На него е прикажана ротацијата на вториот крак OS и соодветната точка P_α на аголот α, од неговата почетна положба OA во позитивна насока за 360°.

Забележуваме дека, при ротацијата на точката P_α во позитивна насока по десната полукружница, нејзината проекција P_2 на ординатната оска ќе го опише вертикалниот дијаметар B_1B оддолу нагоре; а со тоа ординатата на точката P_α, т.е. $\sin\alpha$ расте од –1 до +1 (црт. 42). При ротацијата, пак, на точката P_α по левата полукружница, нејзината проекција P_α ќе го опише вертикалниот дијаметар BB_1 одгоре надолу, а притоа ординатата $y_\alpha = \sin\alpha$ опаѓа од 1 до –1 (црт. 42). Оттука заклучуваме:



црт. 42

Функцијата $\sin\alpha$ на интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (т.е. во IV и I квадрант) расте од –1 до 1; а на интервалот $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ (во II и III квадрант) опаѓа од 1 до –1.

А бидејќи $\sin\alpha$ е периодична функција со период 2π, важи следнава:

Теорема 8. Функцијата синус монотоно расте од –1 до 1 на секој интервал $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$, а монотоно опаѓа од 1 до –1 на секој од интервал $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$. ♦

Пример 28. Кој од броевите е поголем:

а) $\sin 205^{\circ}$ или $\sin 250^{\circ}$; б) $\sin(-\frac{\pi}{6})$ или $\sin(-\frac{\pi}{4})$?

Решение. а) Синусот во III квадрант опаѓа, па затоа од $205^{\circ} < 250^{\circ}$ следува $\sin 205^{\circ} > \sin 250^{\circ}$; б) синусот во IV квадрант расте, па од $-\frac{\pi}{6}>-\frac{\pi}{4}$ следува $\sin(-\frac{\pi}{6})>\sin(-\frac{\pi}{4})\cdot$ ♦

Менување на функцијата $\cos\alpha$

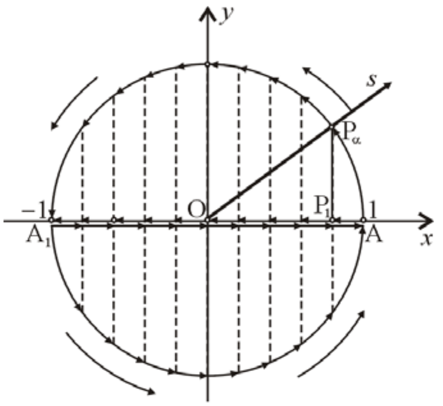
Разгледај го цртежот 43. На него забележуваш дека, при движење на точката P_α во позитивна насока по горната полукружница, нејзината проекција P_1 на апсцисната оска ќе го опише хоризонталниот дијаметар AA_1 оддесно налево, па апсцисата на точката P_α, т.е. $\cos\alpha$, гледаш, опаѓа од 1 до –1 (црт. 43). При движење, пак, на точката P_α во позитивна насока по долната полукружница, нејзината проекција P_1 ќе го опише сега хоризонталниот дијаметар AA_1 одлево надесно, а притоа апсцисата $x_\alpha = \cos\alpha$, гледаш, расте од –1 до 1 (црт. 43).

Оттука заклучуваме: Функцијата $\cos\alpha$ на интервалот $[0,\pi]$ (во I и II квадрант) опаѓа од 1 до –1, а на интервалот $[-\pi, 0]$ (во III и IV квадрант) расте од –1 до 1.

Функцијата $\cos\alpha$ е периодична функција со период 2π, па важи:

Теорема 9. Функцијата косинус монотоно опаѓа од 1 до -1 на секој интервал $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$, а монотоно расте од –1 до 1 на секој од интервалите $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$. ♦

Пример 29. Функцијата $\cos\alpha$ на интервалот $[7\pi, 8\pi]$ расте, а на интервалот $[-6\pi, -5\pi]$ опаѓа. ♦



црт. 43

Менување на функцијата $\mathrm{tg}\alpha$

Функцијата тангенс, знаеш, е периодична со период π. Затоа, доволно е да го испитаме менувањето на тангенс на кој било интервал со должина π, на пример, од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ или од 0 до π. Функцијата $\mathrm{tg}\alpha$ ќе ја разгледаме во интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, бидејќи на него $\mathrm{tg}\alpha$ е дефинирана за секоја вредност на α. Да го разгледаме цртежот 44.

На него е покажана ротацијата на вториот крак OS околу почетокот O, а со тоа и движењето на точката P_α во позитивна насока по десната полукружница. Притоа движење на точката P_α , нејзината централна проекција T_α од координатниот почеток O врз тангенсната оска, ќе се движи по тангенсната оска оддолу нагоре, а нејзината ордината $y = \mathrm{tg}\alpha$ непрекинато и неограничено ќе расте.

Тоа значи: кога α непрекинато ги минува сите негативни агли, кои се поголеми од $-\frac{\pi}{2}$ па сé до 0, $\mathrm{tg}\alpha$ непрекинато ги добива сите негативни реални броеви и за $\alpha = 0$, $\mathrm{tg}\alpha$ добива вредност 0. А потоа, кога α непрекинато расте од 0 до $\frac{\pi}{2}$, точката T_α ќе се движи по позитивниот дел на тангенсната оска нагоре, а нејзината ордината $y_{\text{т}} = \mathrm{tg}\alpha$ непрекинато ќе расте, почнувајќи од 0, и неограничено, така што при вредности на аргументот α, што се доста блиску кон $\frac{\pi}{2}$, но помали од $\frac{\pi}{2}$, вредноста на $\mathrm{tg}\alpha$ станува поголема и од кој било позитивен број.

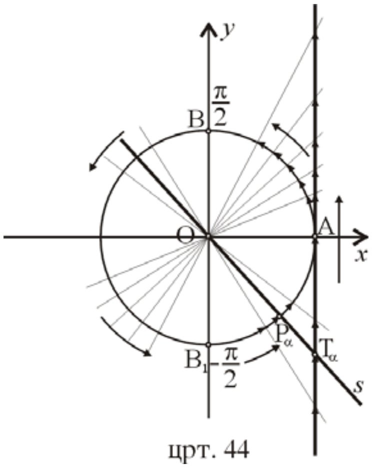
Тоа својство на тангенсот симболички го запишуваме: $\mathrm{tg}\alpha \to \infty$, кога $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ и $\alpha < \frac{\pi}{2}$, а го читаме: $\mathrm{tg}\alpha$ се стреми кон плус бесконечност, кога α се стреми кон $\frac{\pi}{2}$ одлево.

Од погоре изложеното и од цртежот 44, заклучуваме:

Функцијата tgα на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, монотоно расте од -$\infty$ (минус бесконечност) до +∞ (плус бесконечност), а за α=0 добива вредност 0.

Функцијата tgα има период π, па затоа важи следната:

Теорема 10. Функцијата тангенс монотоно расте од $-\infty$ до $+\infty$ на секој интервал $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, од кои и се состои неговата дефинициона област. ♦



црт. 44

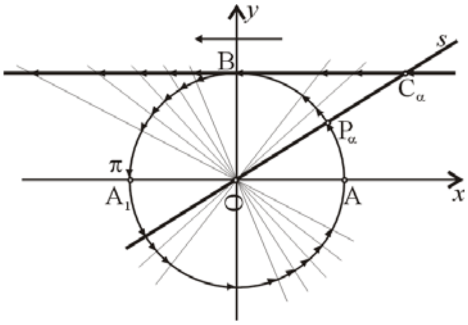
Пример 30. Кој број е поголем:

а) tg125° или tg204°; б) tg (–56°) или tg (–24°)?

Решение. а) Бидејќи 125°, 204°$\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ и 125° < 204°, tg125° < tg204°;

б) бидејќи –56°, –24°$\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и –56° < –24°, tg (–56°) < tg (–24°). ♦

Менување на функцијата ctgα.



црт. 45

Разгледај го цртежот 45. Што можеш да заклучиш од него? Со аналогна постапка на разгледување на менувањето на ctgα, може да се дојде до следниов заклучок:

Функцијата ctgα на основниот интервал (0, π), на кој е дефинирана за секоја вредност на α од него, моното опаѓа од + ∞ до $-\infty$, а за $\alpha=\frac{\pi}{2}$ добива вредност 0. Нејзиниот период е π, па важи

Теорема 11. Функцијата котангенс монотоно опаѓа од + ∞ до $-\infty$ на секој интервал ($k\pi$, ($k\pi$ + 1)π), од кои се состои неговата дефинициона област. ♦

Пример 31. Каков знак има разликата: ctg54° – ctg135°?

Решение. Бидејќи 54°, 135° $\in$ (0, π) и 54° < 135°, согласно Теорема 11 имаме ctg54° > ctg135°, односно ctg54° – ctg135° > 0. ♦

ЗАДАЧИ

1. Кој број е поголем: а) tg33° или tg18°; б) ctg10° или ctg57°?

2. Спореди ги по големина броевите:

а) sin120° и sin208°; б) $\sin\frac{3\pi}{4}$ и $\sin\frac{5\pi}{4}$.

3. Кој број е поголем:

а) $\cos 15\frac{3}{4}\cdot\pi$ или $\cos 15\frac{1}{2}\cdot\pi$; б) $\cos(-10\frac{1}{2}\cdot\pi)$ или $\cos(-10\frac{1}{4}\cdot\pi)$?

4. Спореди ги броевите: а) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$ и $\mathrm{tg}\frac{9\pi}{8}$; б) $\mathrm{tg}\,(-130^o)$ и $\mathrm{tg}\,(-160^o)$.

5. Кој број е поголем: а) $\sin54^o$ или $\sin235^o$; б) $\cos145^o$ или $\sin285^o$?

6. Кој број е поголем: а) $\mathrm{tg}88^o$ или $\mathrm{tg}153^o$; б) $\mathrm{tg}123^o$ или $\mathrm{ctg}48^o$?

7. Одреди го знакот на разликата: а) $\sin84^o - \cos20^o$; б) $\cos124^o - \sin152^o$.

8. Каков знак има разликата:

а) $\mathrm{tg}75^o - \mathrm{tg}100^o$; б) $\mathrm{ctg}37^o - \mathrm{tg}42^o$?

9. Подреди ги броевите по големина да растат:

а) $\sin28^o$, $\sin125^o$, $\cos14^o$, $\sin215^o$, $\cos324^o$, б) $\mathrm{tg}19^o$, $\mathrm{tg}52^o$, $\mathrm{ctg}45^o$, $\mathrm{tg}256^o$, $\mathrm{ctg}152^o$.

10. Одреди го знакот на количникот:

а) $\frac{\cos 65^o-\sin 65^o}{tg58^o-ctg25^o}$; б) $\frac{1-\sin\alpha}{1-tg\alpha}$, $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

II.11. ГРАФИЦИ НА ОСНОВНИТЕ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Тригонометриски функции од броен аргумент

Досега аргументите на тригонометриските функции ги сметавме за насочени агли со произволна големина. Меѓутоа, постојат многу проблеми во разни науки кои, исто така, доведуваат до тригонометриски функции, но чии аргументи се некои други величини (должина, време, температура и др.). Затоа потребно е тригонометриските функции да ги дефинираме и како функции од броен (реален) аргумент.

Знаеш, во процесот на мерењето на големината на аглите, на секој агол му придружуваме по еден единствен реален број – неговиот мерен број при избраната единица мерка. И обратно: секој реален број е придружен на единствен агол, чиј мерен број е дадениот реален број. Притоа, покажавме дека најприродна и најпогодна единица мерка за мерење на големината на аглите е радијанот.

Тоа ни дава за право, аргументот на тригонометриските функции да го сметаме за реален број. На пример, ако x е некој реален број, тогаш нему му одговара аголот, чиј мерен број е x (радијани), а на овој агол му одговара одредена вредност на синусот: $\sin x$. Значи, на секој реален број x му одговара друг точно одреден реален број $f(x) = \sin x$.

Според тоа, за функцијата синус, можеме да кажеме, дека тоа е функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ при која $x \to y = \sin x$, односно за секој $x \in\mathbf{R}$ е $f(x) = \sin x$.

На пример, за $x = \frac{\pi}{6}$ е $\sin\frac{\pi}{6} = 0,5$ за $x = \frac{\pi}{2}$ е $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ итн.

Слично имаме и за другите тригонометриски функции.

Според тоа, ја усвојуваме следнава:

Дефиниција 14. Тригонометриски функции од апстрактен реален аргумент x се едноимените тригонометриски функции, чиј аргумент е обопштен агол x изразен во радијани.

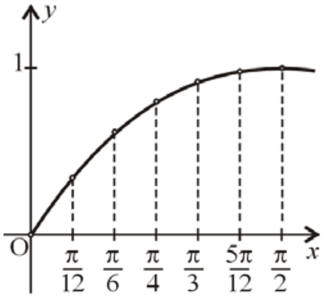
График и својства на функцијата $y = \sin x$

Начинот на графичкото претставување на функциите познат ти е од алгебрата во претходните години. При цртањето на графикот на која било функција, па и на $y = \sin x$, вредностите на аргументот се претставуваат со точки од апсцисната оска (а не од тригонометриската кружница). Затоа, аргументот на тригонометриските функции ќе го означуваме со x (наместо со α).

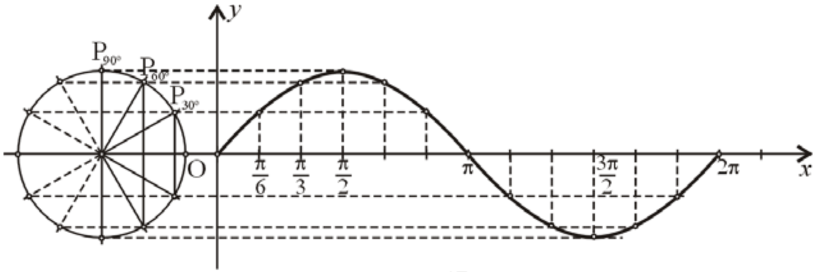
Графикот на функцијата $y = \sin x$ може да се конструира на два начина: со составување и користење на таблица, или со цртање и користење на тригонометриската кружница.

Првиот начин се состои во следново: даваме вредности на аргументот и ги наоѓаме соодветните вредности на $\sin x$. Така, ја составуваме следнава таблица за вредностите на $\sin x$ на интервалот $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$:

x	0	$\frac{\pi}{12} \approx 0{,}26$ (15^o)	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$ (30^o)	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}78$ (45^o)	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ (60^o)	$\frac{5\pi}{12} \approx 0{,}35$ (75^o)	$\frac{\pi}{2} \approx 0{,}57$ (90^o)
$y=\sin x$	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1



црт. 46



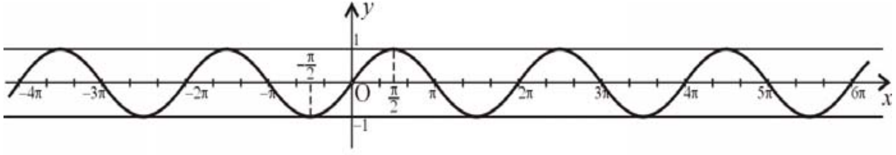
црт. 47

Потоа, во правоаголен координатен систем xOy ги конструираме точките што соодветствуваат на најдените парови вредности (x, $\sin x$) од таблицата (црт. 46).

Другиот начин на цртање на графикот на функцијата $y=\sin x$ е геометриски. Ја разделуваме тригонометриската кружница на произволен број, на пример, на 12 еднакви делови (црт. 47). Потоа, по апсцисната оска од почетокот O ја нанесуваме должината на тригонометриската кружница ($l = 2\pi \approx 6{,}28$) и добиената отсечка ја разделуваме, исто така, на 12 еднакви делови. Потоа, низ разделните точки на тригонометриската кружница повлекуваме паралелни прави со апсцисната оска, а низ разделните точки на Ox-оската повлекуваме нормали кон неа (црт. 47).

Пресечните точки на повлечените паралелни и нормални прави, потоа ги сврзуваме со глатка линија и го добиваме бараниот график на функцијата $y = \sin x$ на интервалот $[0,2\pi]$ (црт. 47).

Должината на интервалот $[0,2\pi]$ е еднаква на должината на периодот на синус. Затоа, за да го добиеме целиот график на функцијата $y=\sin x$, доволно е нацртаниот дел од графикот на интервалот $[0,2\pi]$ едно по друго да го пренесеме и налево и надесно на растојание на по 2π (црт. 48). Од цртежот се гледа дека графикот на функцијата y = sin$x$ е *брановидна крива линија*. Таа крива по името на функцијата се нарекува *синусоида*.



црт. 48

Од сликата на синусоидата можеш да уочиш многу веќе познати својства на функцијата синус. Еве ги тие својства:

1°. Дефинициона област на функцијата y = sin$x$ е множеството на сите реални броеви, т.е. D = **R**..

2°. Синусоидата е сместена меѓу паралелните прави y=1 и y= –1. Затоа,

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \text{ односно } |\sin x| \leq 1.$$

Таа е *ограничена функција* со бројот 1, а множеството вредности на функцијата е $V_f = [-1,1]$.

3°. Графикот е симетричен во однос на координатниот почеток 0, па затоа функцијата синус е непарна, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$.

4°. Синус е периодична функција со основен период 2π.

5°. Синусоидата ја сече Ox-оската во точките 0, π, $-\pi$, 2π, -2π,... Тоа значи, нули на функцијата синус се броевите $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

6°. Функцијата y = sin$x$ на интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ монотоно расте од својата најмала вредност –1 до својата најголема вредност 1, а на интервалот $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$, таа монотоно опаѓа од својата најголема вредност 1 до својата најмала вредност –1.

Поради периодичноста, воопшто, за секој цел број k, функцијата sin$x$ монотоно расте на интервалот $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$, а монотоно опаѓа на интервалот $[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$.

7°. Функцијата y = sin$x$ во точките $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ достигнува максимум y = 1, а во точките $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ таа добива минимум y = –1.

8°. Од цртежот 48, гледаме, функцијата y = sin$x$ на најблискиот интервал до координатниот почеток $(-\pi, 0)$ добива негативни вредности, а на интервалот $(0,\pi)$ таа добива позитивни вредности. Или, воопшто, за секој цел број k на интервалот $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, sin$x$ добива негативни вредности, а на интервалот $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ таа добива позитивни вредности.

Пример 32. Каков знак има бројот: а) $\sin 7{,}7\pi$; б) $\sin 12{,}5\pi$?

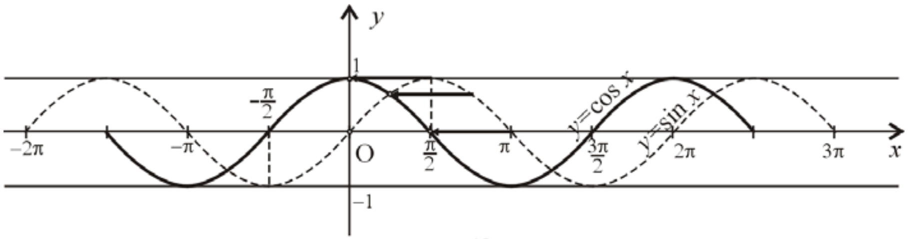
Решение. а) Бидејќи $7\pi < 7{,}7\pi < 8\pi$, затоа согласно својството 8° имаме $\sin 7{,}7\pi < 0$;

б) слично $\sin 12{,}5\pi > 0$. ♦

График и својства на функцијата y = cos$x$.

Формулата за сведување $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ покажува, дека ординатата од графикот на cos$x$ во точката x_o е еднаква со ординатата на обичната синусоида во точката со апсциса $x_o + \frac{\pi}{2}$. Така, на пример: за $x = \frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Оттука заклучуваме дека, графикот на функцијата y = sin$x$ се добива со транслација на синусоидата долж апсцисната оска налево за $\frac{\pi}{2}$ (црт. 49).

Графикот на функцијата косинус се вика *косинусоида*. Тој може да се добие, освен со пренесување на синусоидата долж апсцисната оска налево за $\frac{\pi}{2}$, уште и на опишаните два начина, како што ја цртавме синусоидата, со составување на таблица или со помош на тригонометриската кружница. На цртежот 50, покажано е цртањето на косинусоидата со помош на тригонометриската кружница на интервалот $[-\pi,\pi]$. Забележуваш, дека на цртежот 50, тригонометриската кружница е свртена за 90°, така што *Ox*-оската е насочена вертикално нагоре, а *Oy*-оската е хоризонтално поставена. Тоа е сторено поради поедноставување на цртањето на графикот.



црт. 49

Од косинусоидата и она што ни е познато можеме да ги наведеме следниве својства на функцијата $y = \cos x$:

1°. Дефинициона област на функцијата $y = \cos x$ е множеството на сите реални броеви, т.е. $D = \mathbf{R}$.

2°. Функцијата $\cos x$ е ограничена меѓу –1 и 1:

$$-1 \le \cos x \le 1, \text{ односно } |\cos x| \le 1.$$

Множеството на вредностите на функцијата $y = \cos x$ е $V_f = [-1,1]$.

3°. Косинусот е парна функција, бидејќи $\cos(-x) = \cos x$. Затоа, нејзиниот график е симетричен во однос на *Oy*-оската.

4°. Косинус е периодична функција со основен период 2π.

5°. Косинусоидата ја сече *Ox*-оската во точките $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots$

Тоа значи, нули на функцијата $\cos x$ се броевите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, т.е. за секој $k\in\mathbf{Z}$ важи $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$.

6°. Функцијата $\cos x$ на интервалот $[0,\pi]$ монотоно опаѓа од 1 до –1, а на интервалот $[-\pi, 0]$ таа монотоно расте од –1 до 1.

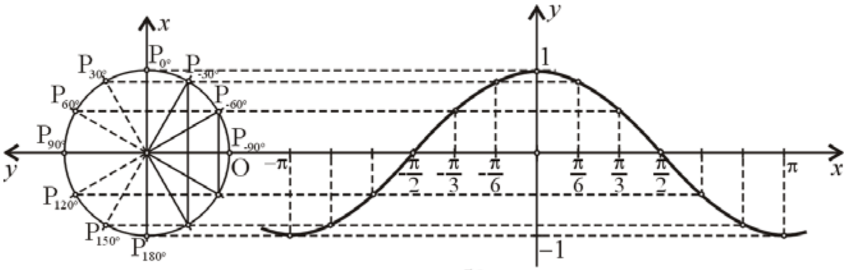
Или воопшто: за секој $k\in\mathbf{Z}$, функцијата $\cos x$ монотоно расте на интервалот $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, а монотоно опаѓа на интервалот $[2k\pi, (2k+1)\pi]$.

7°. Функцијата $\cos x$ во точките $x = 2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ достигнува максимум $y = 1$, а во точките $x = (2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, таа добива минимум $y = -1$, т.е. важи:

$$\cos 2k\pi = 1, \cos(2k+1)\pi = -1 \text{ за } k\in\mathbf{Z}.$$

8°. За секој $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ е $\cos x > 0$, а за секој $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ е $\cos x < 0$.

Или воопшто: за секој $k\in\mathbf{Z}$ на интервалот $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, функцијата косинус добива позитивни вредности, а на интервалот $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ таа добива негативни вредности.



црт. 50

Пример 33. Каков знак има бројот:

а) cos7π; б) cos (–6π)?

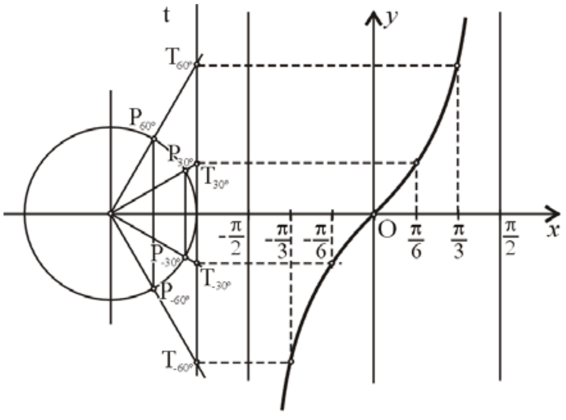
Решение: а) Бидејќи $\frac{\pi}{2}+3\cdot 2\pi<7\pi<\frac{3\pi}{2}+3\cdot 2\pi$, согласно својството 8° имаме cos7π<0;

б) Од $-\frac{\pi}{2}-3\cdot 2\pi<-6\pi<\frac{\pi}{2}-3\cdot 2\pi$ следува cos (–6π) > 0. ♦

График и својства на функцијата *y* = tg*x*.

Ќе покажеме како го цртаме графикот на tg*x* со помош на тригонометриската кружница. Бидејќи tg*x* е периодична функција со основен период π, затоа доволно е да го нацртаме нејзиниот график само за вредности на *x* од интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

За таа цел, ја разделуваме десната полукружница, на пример, на 6 еднакви делови, а на исто толку еднакви делови ја разделуваме и отсечката на *Ox*-оската од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (црт. 51). Потоа, точките на делење $P_{30^o}, P_{60^o}, P_{-30^o}, P_{-60^o}$ од полукружницата, централно ги проектираме од центарот на полукружницата на тангенсната оска *t*. Така ги добиваме точките $T_{30^o}, T_{60^o}, T_{-30^o}, T_{-60^o}$ на тангенсната оска *t*. Низ нив повлекуваме паралелни прави со апсцисната оска, а низ разделните точки на *Ox*-оската повлекуваме нормали кон неа. Пресечните точки на повлечените паралелни и нормални прави потоа ги сврзуваме со глатка линија, па добиената линија ќе ни го даде бараниот график на *y* = tg*x* на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ (црт. 51).



црт. 51

Таа крива претставува само една гранка – дел од целиот график на функцијата tg*x*. За да го добиеме целиот график на tg*x*, потребно е нацртаната гранка да се пренесе и надесно и налево на растојание π, 2π, 3π,… (црт. 52).

Графикот на функцијата се вика *тангенсоида*. Еве кои својства ги има функцијата *y* = tg*x*.

1°. Дефиниционата област на функцијата y = tg$x$ = $\frac{\sin x}{\cos x}$ ја добиваме кога од множеството **R** ќе се изостават нулите на cos*x*, т.е. се исклучат броевите $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Значи, *D*(tg *x*) =

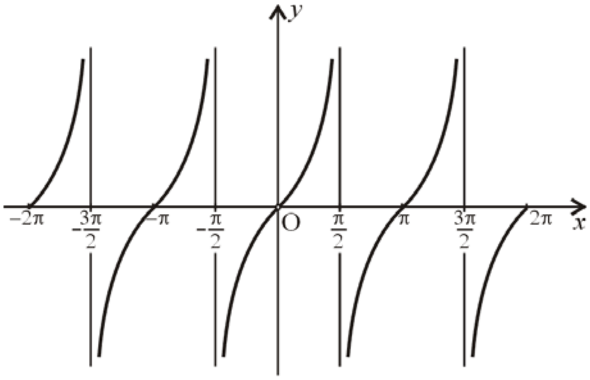
$\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$.

Броевите, односно точките $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ во кои tg$x$ не е дефинирана, се викаат *прекини на функцијата.*

2°. Во секој интервал на дефинираност, tg$x$ ги добива сите реални вредности од $-\infty$ до $+\infty$, т.е. $-\infty < \text{tg}x < \infty$.

Значи, функцијата е неограничена и има множество на вредности V(tg$x$) = **R**.

3°. Правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), кои се повлечени низ точките на прекин и се паралелни со *Oy*-оската, се викаат *вертикални асимптоти* на тангенсоидата. За $k = 0$ и $k = -1$ ги добиваме асимптотите $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$, што се најблизу налево и надесно од *Oy*-оската. Од цртежот 51, забележуваме: кога аргументот x се приближува од 0 кон $\frac{\pi}{2}$, графикот на tg$x$ постепено се издига нагоре и неограничено се приближува кон асимптотата $x = \frac{\pi}{2}$, но постојано останува налево од неа, кога, пак x се намалува од 0 кон $-\frac{\pi}{2}$, графикот на tg$x$ постепено се спушта надолу и неограничено се приближува кон асимптотата $x = -\frac{\pi}{2}$, но тука постојано останува надесно од неа.



црт. 52

4°. Функцијата tg$x$ е непарна. Гледаш, нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

5°. Функцијата тангенс е периодична функција со основен период π.

6°. Тангенсоидата ја сече *Ox*-оската во точките 0, π, $-\pi$, 2π, -2π,... Значи, нули на функцијата tg$x$ се броевите $x = k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

7°. Функцијата tg$x$ на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, а исто и на секој интервал $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$, монотоно расте.

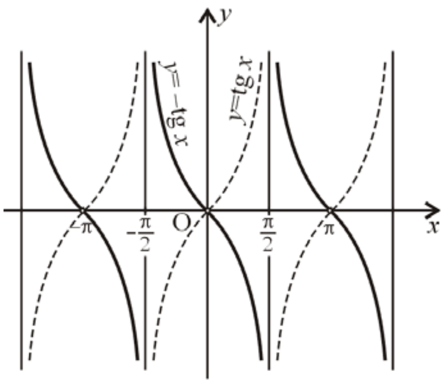
8°. За секој $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ е tg$x$<0, а за секој $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ е tg$x$>0. Или воопшто, за секој $k\in\mathbf{Z}$ на интервалот $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi)$ функцијата тангенс добива негативни вредности, а на интервалот $(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, таа добива позитивни вредности.

Пример 34. Одреди ги нулите и равенките на асимптотите на функцијата $y = \text{tg}\ (x+\frac{\pi}{3})$.

Решение. Видовме дека $\text{tg}(x+\frac{\pi}{3}) = 0$, ако $x+\frac{\pi}{3}=k\pi$. Оттука наоѓаме: $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ се нули на дадената функција. Асимптоти на функцијата $y = \text{tg}x$ се правите $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, а на дадената функција $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{3})$ ќе бидат правите $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$). Оттука наоѓаме дека $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi$, односно $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ се равенките на асимптотите на дадената функција. ♦

График и својства на функцијата y = ctg$x$.

Од формулата за сведување $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+x)=-\operatorname{ctg} x$, наоѓаме дека ctg x = $-\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})$. Тоа покажува, дека графикот на ctg x е ист со графикот на функцијата y = $-\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})$, а овој график го добиваме кога графикот на y = $-$tg x го транслатираме долж апсцисната оска налево за $\frac{\pi}{2}$.



црт. 53

Според тоа, за да го конструираме графикот на функцијата y = ctg$x$, потребно е, прво, графикот на tg$x$ симетрично да го пресликаме во однос на Ox-оската, а потоа, така добиениот график на $-$tg$x$ (црт. 53) паралелно да го пренесеме по апсцисната оска налево за $\frac{\pi}{2}$ (црт. 54).

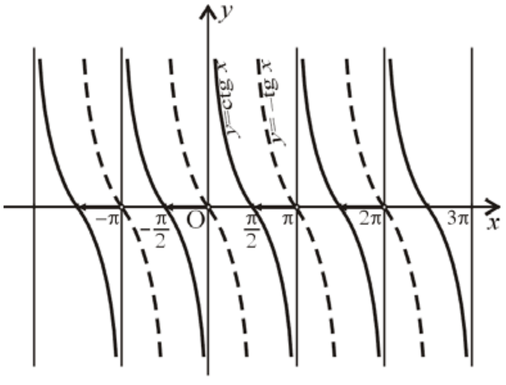
Графикот на функцијата y = ctg$x$ се вика *котангенсоида.*

Гледаме дека и оваа, како и тангенсоидата се состои од бесконечно многу гранки, кои се складни меѓу себе.

Да видиме, сега, кои својства ги има функцијата y = ctg$x$.

1°. Дефиниционата област на y = ctg$x$ = $\frac{\cos x}{\sin x}$ ја добиваме кога од множеството **R** ќе се исклучат нулите на sin$x$, а тоа значи, D (ctg$x$) = $\mathbf{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$.

Броевите $x=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), во кои ctg$x$ не е дефинирана, претставуваат *прекини* на ctg$x$.



црт. 54

2°. Правите $x=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) кои се повлечени низ прекините и се паралелни со Oy-оската, се *вертикални асимптоти* на котангенсоидата.

3°. Функцијата y = ctg x е неограничена, $-\infty <$ ctg $x < +\infty$ и има множество на вредности V(ctg x)=**R**.

4°. ctg $(-x)$ = $-$ctg$x$, т.е. ctg$x$ е непарна функција.

5°. ctg $(x+\pi)$ = ctg$x$, т.е. функцијата y = ctg$x$ е периодична со основен период π.

6°. Котангенсоидата ја сече Ox-оската во точките $\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}$,... Значи, нули на функцијата y = ctg$x$ се броевите $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, т.е. за секој $k\in\mathbf{Z}$ важи: $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$.

7°. Функцијата ctg$x$ на интервалот $(0,\pi)$, а исто и на секој интервал $(k\pi,(k+1)\pi)$, монотоно опаѓа.

8°. За секој $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ е ctg$x > 0$, а за секој $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ е ctg$x < 0$. Или воопшто: за секој $k \in \mathbf{Z}$ на интервалот $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, функцијата котангенс добива позитивни вредности, а на интервалот $(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi)$, таа добива негативни вредности.

Пример 35. Да ги одредиме нулите на функцијата $\mathrm{ctg}\,(5x - \frac{\pi}{3})$.

Решение. Од $5x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ наоѓаме: $x = \frac{1}{5}(\frac{5\pi}{6} + k\pi)$, т.е. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. На милиметарска хартија нацртај го графикот на функцијата $y = \sin x$.

2. Каков знак има бројот: а) $\sin(-4{,}3\pi)$; б) sin6?

3. Нацртај ги графиците на функциите $y = \sin x$ и $y = \sin\,(x + \frac{\pi}{3})$, на еден цртеж.

4. На еден цртеж нацртај ги графиците на функциите $y = \cos x$ и $y = -\cos x$.

5. Каков знак има бројот: а) $\cos\,(-\frac{5\pi}{4})$, б) cos (–3)?

6***.** Кој број е поголем: а) $\mathrm{tg}\,(-\frac{5\pi}{4})$ или tg(-1); б) tg7 или tg2π?

7. На еден цртеж нацртај ги графиците на функциите $y = \mathrm{tg}x$ и $y = -\mathrm{tg}x$ на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

8. Одреди го знакот на бројот: а) $\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}$; б) ctg (–7,5).

9. Нацртај го графикот на функцијата: а) $y = \sin\,(x - \frac{\pi}{6})$; б) $y = \sin\,(x + \frac{\pi}{4})$.

10. Нацртај го графикот на функцијата: а) $y = 1 + \sin x$; б) $y = \sin\,(x - 2)$.

11. На еден цртеж нацртај ги графиците на функциите: $y = \sin x$ и $y = -\sin x$.

12. Нацртај ги графиците на функциите: а) $y = 1 + \cos x$; б) $y = \cos\,(x - \pi)$.

13. Одреди ги вредностите на x од интервалот $(0, 2\pi)$ за кои е:

а) $\sin x = 1$, б) $\cos x = -1$, в) $\sin x = \frac{1}{2}$, г) $\mathrm{ctg}x = 1$.

14*. Одреди ги нулите на функцијата: а) $y = \cos\,(2x - \frac{\pi}{3})$; б) $y = \mathrm{tg}\,(3x + \frac{\pi}{3})$.

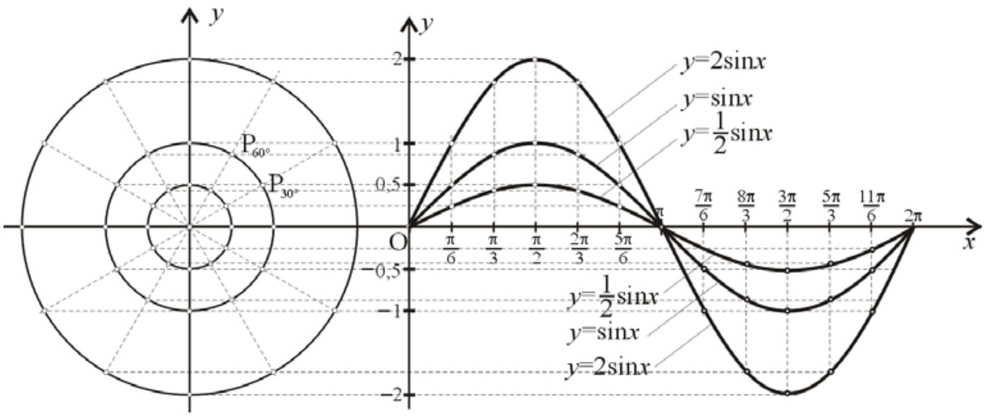
II.12. ГРАФИК И СВОЈСТВА НА ФУНКЦИЈАТА $y = a \cdot \sin\,(bx + c)$

За полесно проучување и цртање на графикот на функцијата $y = a \cdot \sin\,(bx+c)$, претходно по ред ќе ги разгледаме функциите: $y = a \sin x$, $y = \sin\,(x+c)$ и $y = \sin bx$.

1. График на функцијата $y = a \cdot \sin x$. Забележуваме, дека кога функцијата $\sin x$ ќе се помножи со некоја константа a тоа, всушност, значи ординатите на точките од $\sin x$ да ги помножиме со тој број.

Нека $a > 0$. Од $-1 \leq \sin x \leq 1$ го добиваме неравенството:

$$-a \leq a \cdot \sin x \leq a.$$

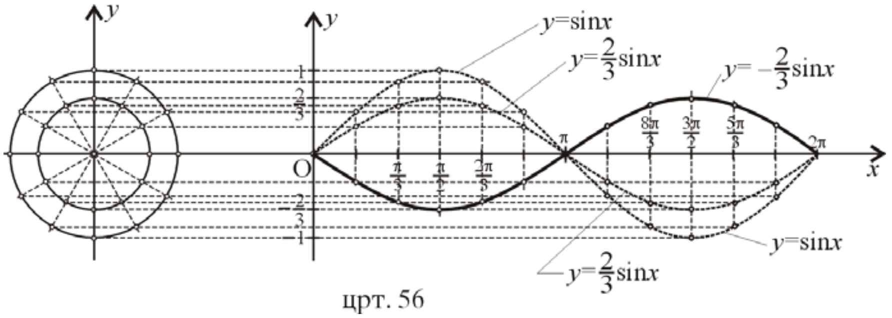


црт. 55

Тоа покажува дека графикот на функцијата $y = a \cdot \sin x$ ќе се наоѓа меѓу правите $y = a$ и $y = -a$. За да го нацртаме графикот на функцијата $y = a \cdot \sin x$, $a > 0$, постапуваме исто како и при цртањето на синусоидата, само што наместо тригонометриска кружница земаме кружница со радиус $r = a$ (црт. 55).

Бројот a се вика *амплитуда* на функцијата $y = a \cdot \sin x$. Таа го покажува растојанието на најоддалечената точка од графикот од апсцисната оска. Ако $a > 1$, тогаш графикот на функцијата $y = a \cdot \sin x$, всушност се добива со растегнување на синусоидата во правец на ординатната оска, а ако е $0 < a < 1$, тогаш тој се добива со збивање на синусоидата долж Oy-оската.

Ако константата a во функцијата $y = a \cdot \sin x$ е негативен број, на пример, $a = -1$, $a = -3$, итн., тогаш прво го цртаме графикот на функцијата $y = |a| \cdot \sin x$, а потоа истиот го пресликуваме симетрично во однос на апсцисната оска (црт. 56).



црт. 56

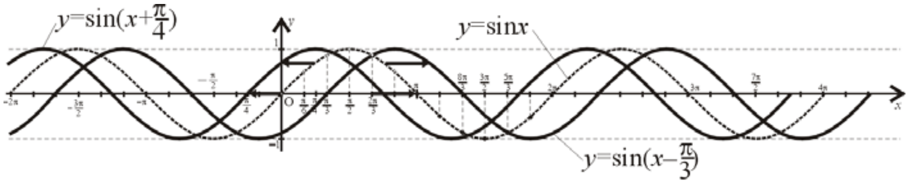
2. График на функцијата $y = \sin(x + c)$.

Бидејќи за секоја вредност на x важи:

$$\sin[(x + c) - c] = \sin x,$$

јасно е дека графикот на функцијата $y = \sin(x + c)$ ќе го добиеме со транслација на синусоидата ($y = \sin x$) долж апсцисната оска налево за c единици (ако $c > 0$), односно надесно за $|c|$ единици (ако $c < 0$).

На црт. 57 нацртани се графиците на $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ со помош на графикот на функцијата $y = \sin x$.



црт. 57

<u>3.</u> График на функцијата $y = \sin bx$.

Ќе покажеме дека функцијата $y = \sin bx$ е периодична со основен период $\frac{2\pi}{|b|}$. Навистина, ако $b > 0$, имаме:

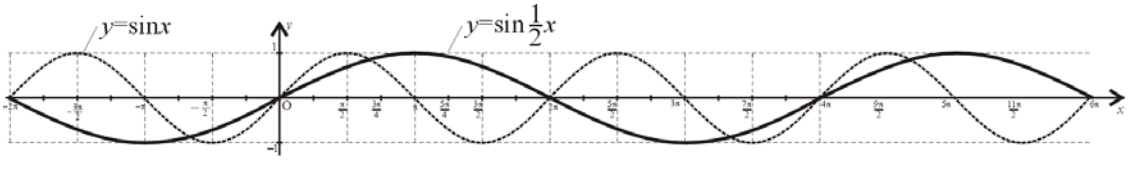
$$\sin b(x+\frac{2\pi}{|b|}) = \sin b(x+\frac{2\pi}{b}) = \sin(bx + b\cdot\frac{2\pi}{b}) = \sin(bx).$$

Ако $b < 0$, тогаш:

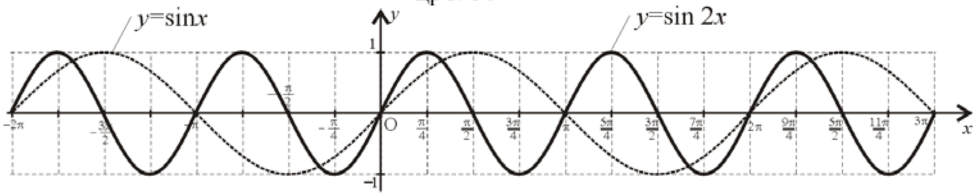
$$\sin b(x+\frac{2\pi}{|b|}) = \sin b(x-\frac{2\pi}{b}) = \sin(bx - b\cdot\frac{2\pi}{b}) = \sin(bx).$$

Значи, целиот тек на функцијата $y = \sin bx$ ќе го знаеме, ако го нацртаме нејзиниот график на интервалот $(0,\frac{2\pi}{|b|})$. Дел од графикот на $y = \sin bx$, што одговара на основниот период се вика *бран,* а бројот $\frac{2\pi}{|b|}$ се вика *бранова должина.* Реципрочната вредност од брановата должина, т.е. бројот $\frac{|b|}{2\pi}$ што покажува колку бранови должини има на отсечката со должина единица, се вика *фреквенција (зачестеност) на функцијата.* Бројот, пак, $|b|$ кој покажува колку бранови должини се содржат во отсечката со должина 2π, се вика *кружна фреквенција* на функцијата $y = \sin bx$.

Ако е $|b| < 1$, тогаш периодот на функцијата $y = \sin bx$, ($\frac{2\pi}{|b|} > 2\pi$) е поголем од основниот период на $\sin x$. Ако, пак, $|b| > 1$, тогаш периодот на $y = \sin bx$ е помал од периодот на $\sin x$. Во првиот случај кога $|b| < 1$, велиме, дека во однос на синусоидата, графикот на $y = \sin bx$ е растргнат во правецот на Ox – оската (црт. 58), а во вториот случај кога $|b| > 1$, велиме, дека тој е збиен во правецот на Ox –оската (црт. 59).



црт. 58



црт. 59

Графикот на функцијата $y = \sin bx$ го добиваме од графикот на функцијата $y = \sin x$ со делење на апсцисите на сите негови точки со бројот b.

4. График на функцијата $y = a \cdot \sin(bx + c)$.

Функцијата

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) \quad (a > 0, b > 0) \tag{1}$$

е периодична функција со основен период $\frac{2\pi}{b}$.

Навистина,

$$f(x+\frac{2\pi}{b}) = a \cdot \sin[b(x+\frac{2\pi}{b})+c] = a \cdot \sin[bx+2\pi+c] = a \cdot \sin(bx+c) = f(x).$$

Величината $bx + c$ се вика *фаза* на функцијата (1), а вредноста на фазата за $x = 0$, т.е. бројот c се вика *почетна фаза*.

Најголемата можна вредност на функцијата (1) е еднаква на a. Бројот a се вика *амплитуда* на функцијата (1). Бидејќи за секоја вредност на $x \in \boldsymbol{R}$ важи:

$$a \cdot \sin b(x+\frac{c}{b}-\frac{c}{b}) = a \cdot \sin bx,$$

јасно е дека графикот на функцијата (1), се добива со транслација на графикот на функцијата $y = a \cdot \sin bx$ по должината на апсцисната оска налево за $\frac{c}{b}$ (ако $\frac{c}{b}>0$), односно надесно за $-\frac{c}{b}$ (ако $\frac{c}{b}<0$). Бројот $-\frac{c}{b}$ се вика *поместување на фазата.*

Од погоре кажаното можеме да заклучиме дека графикот на функцијата $y = a \cdot \sin(bx + c) = a \cdot \sin b(x+\frac{c}{b})$, со помош на синусоидата $y = \sin x$ го цртаме кога претходно ги нацртаме по ред графиците на функциите: $y = \sin x$, $y = \sin bx$, $y = a \cdot \sin bx$, а потоа графикот на $y = a \cdot \sin bx$ го транслатираме долж апсцисната оска налево или надесно за $\left|\frac{c}{b}\right|$.

Пример 36. Да го нацртаме графикот на функцијата $y = 3 \cdot \sin(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4})$.

Решение. Дадената функција има амплитуда 3. Значи, нејзиниот график се наоѓа во координатната рамнина xOy меѓу правите $y = 3$ и $y = -3$. Почетната фаза на функцијата е $-\frac{\pi}{4}$, а поместувањето на фазата е $-(-\frac{\pi}{4}):\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Основен период на функцијата е $2\pi:\frac{1}{2}=4\pi$, што значи, доволно е да го знаеме графикот на функцијата кога x се менува од $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}+4\pi=\frac{9\pi}{2}$.

Нулите на функцијата во интервалот $(\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{2})$, ги наоѓаме од равенките:

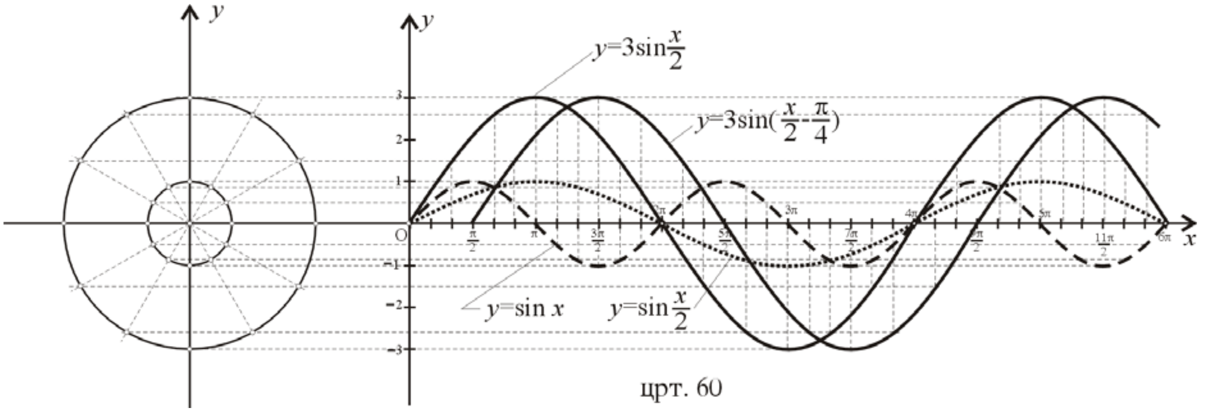
$$\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4} = 0,\ \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4} = \pi \text{ и } \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4} = 2\pi,$$

а тие се: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$ и $x = \frac{9\pi}{2}$.

Екстремни вредности на функцијата се: $y_{max} = 3$, за $\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, односно за $x = \frac{3\pi}{2}$; $y_{min} = -3$, за $\frac{1}{2} \cdot x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, односно за $x = \frac{7\pi}{2}$.

Графикот на дадената функција со помош на синусоидата ($y = \sin x$), нацртан е на црт. 60.

Бараниот график лесно може да се скицира и само врз основа на горе одредените карактеристични точки. ♦



црт. 60

Забелешка. Знаејќи го графикот на функцијата $y = a\cdot\sin(bx + c)$, лесно може да се конструира и графикот на функцијата $y = a\cdot\sin(bx + c) + d$. Тоа се постигнува кога графикот на функцијата $y = a\cdot\sin(bx + c)$ се помести за $|d|$ единици нагоре (ако $d > 0$) или надолу (ако $d < 0$).

5. График на функцијата $y = a \cdot \cos(bx + c)$.

Ако се има предвид равенството:

$$y = a \cdot \cos(bx + c) = a \cdot \sin(bx + c + \frac{\pi}{2}),$$

тогаш јасно е дека цртањето на графикот на функцијата $y = a \cdot \cos(bx + c)$ се сведува на цртање на графикот на функцијата $y = a \cdot \sin(bx + c_1)$, каде $c_1 = c + \frac{\pi}{2}$.

Пример 37. Да го нацртаме графикот на функцијата

$$y = 2\cos(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{6}). \qquad (2)$$

Решение. Бидејќи е $2\cos(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{6}) = 2\sin(\frac{3}{4}\cdot x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})$, функцијата (2) и функцијата

$$y = 2\sin(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{3}) \qquad (3)$$

имаат ист график.

Функцијата (3) има амплитуда 2, почетна фаза $\frac{\pi}{3}$, а поместување на фазата е $-\frac{\pi}{3} : \frac{3}{4} = -\frac{4\pi}{9}$.

Основен период на функцијата (3) е $2\pi : \frac{3}{4} = \frac{8\pi}{3}$.

Значи, доволно е да го знаеме графикот на функцијата (3), кога x се менува од $-\frac{4\pi}{9}$ до $-\frac{4\pi}{9} + \frac{8\pi}{3}$, т.е. во интервалот $(-\frac{4\pi}{9}, \frac{20\pi}{9})$.

Нулите на функцијата во тој интервал ги наоѓаме од равенките:

$$\frac{3}{4}\cdot x+\frac{\pi}{3}=0\,,\quad \frac{3}{4}\cdot x+\frac{\pi}{3}=\pi \quad \text{и} \quad \frac{3}{4}\cdot x+\frac{\pi}{3}=2\pi\,,$$

а оттука наоѓаме:

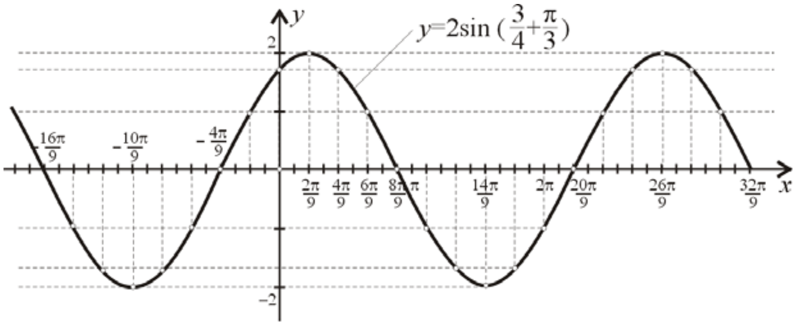
$$x=-\frac{4\pi}{9}\,,\ x=\frac{8\pi}{9}\ \text{и}\ x=\frac{20\pi}{9}\,.$$

Екстремни вредности на функцијата (3) се:

$$y_{max}=2,\ \text{за}\ x=\frac{2\pi}{9};\ y_{min}=-2,\ \text{за}\ x=\frac{14\pi}{9}\,.$$

Пресек со *Oy*-оската: $f(0)=2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Кога ќе ги земаме предвид добиените податоци, лесно го цртаме графикот на функцијата (3), а тоа е и бараниот график на дадената функција (2) во интервалот $(-\frac{4\pi}{9},\frac{20\pi}{9})$ (црт. 61). ♦



црт. 61

Од сето кажано за функциите: $y = a \sin (bx + c)$ и $y = a \cos (bx + c)$, јасно е дека на сличен начин се цртаат графиците и на функциите: $y = a\ \text{tg}\ (bx + c)$ и $y = a\ \text{ctg}\ (bx + c)$. Графиците на овие функции во однос на тангенсоидата и котангенсоидата се збиени или растегнати по должината на координатните оски.

ЗАДАЧИ

1. Нацртај ги графиците на функциите: а) $y = \frac{1}{3}\cdot\sin x$; б) $y = -3 \cdot \sin x$.

2. Нацртај го графикот на функцијата $y = \sin\ (x-\frac{1}{2})$.

3. Нацртај го графикот на функцијата $y = \sin(\frac{2}{3}x)$.

4. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2\cdot\sin(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{2})$.

5. Нацртај го графикот на функцијата: $y=\frac{1}{2}\cdot\cos(2x-\frac{\pi}{3})$.

Нацртај го графикот на следниве функции и испитај го текот:

6. а) $y = 3 \sin 2x$; б) $y = 2 \sin \frac{1}{2}\cdot x$; в) $y = -\sin 3x -1$.

7. а) $y = -2\sin x$; б) $y = \sin(-x)$; в) $y = -\sin x$.

8. а) $y = \frac{1}{2}\sin (-x)$; б) $y = 2\cos(-x)$; в) $y = \text{tg}\ (-x)$.

9. а) $y = -2\cos (-3x)$; б) $y = \text{tg}\ x$; в) $y = \text{ctg}\ (-x)$.

10. а) $y = \sin\ (x-\frac{\pi}{4})$; б) $y = \cos\ (2x-\frac{\pi}{3})$.

11. а) $y = \text{tg}\,(x-\frac{\pi}{4})$; б) $y = \text{tg}\,(x+\frac{\pi}{6})$; в) $y = \text{tg}\,(x+\frac{\pi}{4})$.

12. а) $y = \mathrm{ctg}(x + \pi)$; б) $y = \mathrm{ctg}\,(x - \frac{\pi}{6})$.

13. а) $y = 2\sin(\frac{4x}{3} + \frac{\pi}{3})$; б) $y = \frac{1}{3}\sin(2x - 1)$.

14*. а) $y = \frac{3}{2}\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{3}) + 1$; б) $y = \frac{3}{4}\sin(\frac{x}{2} - 2) - 2$.

15. а) $y = 2\sin(-\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3})$; б) $y = -\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6})$.

16. а) $y = 2\mathrm{tg}\,(-2x + \frac{\pi}{4})$; б) $y = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}(3x+1)$.

17*. Одреди ја дефиниционата област на секоја од функциите:

а) $y = \sqrt{1 - \sin x}$; б) $y = \sqrt{\cos 2x}$; в) $\lg \cos x$.

18. Одреди го најмалиот позитивен период на функциите:

а) $y = 3\sin 2x$; б) $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; в) $y = \cos(-4x + \frac{\pi}{2})$.

II.13. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ЗБИР И РАЗЛИКА НА ДВА АГЛА (Адициони теореми)

Сега ќе се запознаеме со формулите за изразување на тригонометриските функции од аргументи $\alpha \pm \beta$ преку тригонометриски функции, одделно од аргументите α и β.

1. Косинус од збир и разлика на два агла.

Теорема 12. За мерните броеви на кои било два агла α и β важат формулите:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta, \quad (1)$$

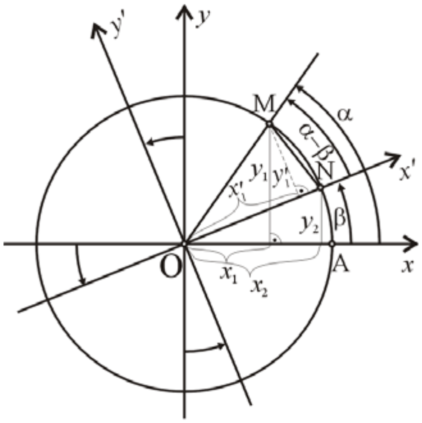
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta. \quad (2)$$

Доказ. Доказот на формулата (1) ќе го основаме врз фактот што при ротација на координатниот систем xOy околу почетокот O, растојанијата меѓу точките во координатната рамнина не се менуваат. За изразување, пак, на растојанието меѓу кои било две различни точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ќе ја користиме формулата

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (3)$$

со која подетално ќе се запознаеме во четвртата тема.

Нека се дадени аглите α и β ($\alpha > \beta$), чиј прв крак им се совпаѓа со позитивниот дел на Ox-оската, а нивните втори краци ја сечат тригонометриската кружница соодветно во точките M и N (црт. 62).



црт. 62

Во координатниот систем xOy точките M и N ги имаат следниве координати:

$$x_1 = \cos\alpha, \quad y_1 = \sin\alpha; \quad x_2 = \cos\beta, \quad y_2 = \sin\beta.$$

Квадратот од растојанието меѓу точките M и N согласно формулата (3) е

$$d^2 = \overline{MN}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2$$
$$= (\cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cos\alpha) + (\sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\beta\sin\alpha)$$
$$= (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2-2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Ако координатните оски на системот *xOy* ги ротираме околу почетокот *O* за позитивен агол β, тогаш новата положба на апсцисната оска *Ox'* ќе се совпадне со вториот крак *ON* на аголот β, а вториот крак *OM* на аголот α во новиот координатен систем *x'Oy'* ќе стане втор крак на аголот $\alpha-\beta$ (црт. 62).

Навистина, од $\angle XOX'+\angle X'OM=\angle XOM$, односно $\beta+\angle X'OM=\alpha$, имаме $\angle X'OM = \alpha-\beta$ (црт. 62).

Точките *M* и *N* во новиот систем *x'Oy'* ќе имаат координати:

$$x'_1 = \cos(\alpha-\beta),\ \ y'_1 = \sin(\alpha-\beta),\ \ x'_2 = 1,\ \ y'_2 = 0.$$

Да го одредиме сега квадратот на растојанието меѓу точките *M* и *N* со помош на нивните координати во системот *x'Oy'*:

$$d^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = [1-\cos(\alpha-\beta)]^2 + [0-\sin(\alpha-\beta)]^2$$
$$= 1 + \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta).$$

Со прирамнување на добиените изрази за d^2 во системите *xOy* и *x'Oy'* добиваме: $2-2\cos(\alpha-\beta) = 2-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)$, а оттука и формулата (1), штд.

За докажување на формулата (2), збирот $\alpha+\beta$ ќе го претставиме во вид на разлика: $\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$, а потоа ќе ја примениме докажаната формула (1). Така добиваме:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) + \sin\alpha\cdot\sin(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

и со тоа ја докажавме и формулата (2). ♦

Пример 38. Да ги докажеме формулите за сведување на остар агол:

а) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = -\sin\alpha$ и б) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$.

Доказ. Со примена на формулите (1) и (2) добиваме:

а) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha + (-1)\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha$;

б) $\cos(\pi+\alpha) = \cos\pi\cdot\cos\alpha - \sin\pi\cdot\sin\alpha = (-1)\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$. ♦

2. Синус од збир и разлика на два агла.

Теорема 13. За мерните броеви на кои било два агла, важат формулите:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{4}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta. \tag{5}$$

Доказ. Согласно формулите за синус и косинус на комплементни агли (II7) и формулата (1), добиваме:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos[\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)] = \cos[(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)-\beta] = \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos\beta + \sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

и со тоа формулата (4) е докажана. Таа важи за кои било агли α и β, па ќе важи и за аглите α и $(-\beta)$:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta\ .$$

Со тоа ја докажавме и формулата (5). ♦

<u>3.</u> Тангенс од збир и разлика на два агла.

Теорема 14. Ако α и β се мерни броеви на кои било агли, такви што α, β, $\alpha\pm\beta\notin\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$, тогаш важат формулите

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}\,, \tag{5}$$

$$\text{tg}\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}\,. \tag{6}$$

Доказ. Од адиционите теореми за синус и косинус, имаме

$$\text{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}\,.$$

Ова изведување е вршено при претпоставка дека $\cos\alpha\neq0$, $\cos\beta\neq0$ и $\cos(\alpha+\beta)\neq0$, т.е. ниту еден од аглите α, β и $\alpha+\beta$ не е од облик $\frac{\pi}{2}+k\pi$ за некој цел број k.

Формулта (6) може да се добие од формулата (5), ако наместо β ставиме $-\beta$. ♦

Пример 39. Да ги одредиме вредностите на тригонометриските функции на аголот од 105^o, без користење на таблици и дигитрон.

Решение. Забележуваме дека $105^o = 60^o + 45^o$. Тогаш

$$\sin105^o = \sin(60^o + 45^o) = \sin60^o\cos45^o + \cos60^o\sin45^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})\,;$$

$$\cos105^o = \cos(60^o + 45^o) = \cos60^o\cos45^o - \sin60^o\sin45^o = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})\,;$$

$$\text{tg}\,105^o = \frac{\sin105^o}{\cos105^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})}\cdot\frac{(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3} = -(2+\sqrt{3})\,;$$

$$\text{ctg}\,105^o = \frac{1}{tg105^o} = \frac{1}{-(2+\sqrt{3})} = -\,(2-\sqrt{3}).\ ♦$$

<u>4.</u> Котангенс од збир и разлика на два агла.

Теорема 15. Ако α и β се мерни броеви на кои било агли, такви што α, β, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta\notin\{k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$, тогаш важат формулите

$$\text{ctg}\,(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}\,, \tag{7}$$

$$\text{ctg}\,(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}\,. \tag{8}$$

Доказот на формулите (7) до (8) следува од формулите (5) и (6) и предлагаме да го изведете сами за вежба.

Формулите (1-8) се викаат *адициони формули (теореми)* на тригонометриските функции.

ЗАДАЧИ

1. Докажи ги формулите за сведување на остар агол:

а) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; б) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos \alpha$.

2. Докажи ги формулите за сведување:

а) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$; б) $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$.

3. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции на аголот од 75^o без користење на таблици или дигитрон.

4. Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции од аголот 15^o.

5. Пресметај $\sin(\alpha+60^o)$, ако $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ $(0^o<\alpha<90^o)$.

6. Пресметај: $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, ако $\sin\alpha=\frac{2}{5}$ $(90^o<\alpha<180^o)$ и $\cos\beta=-\frac{1}{3}$ $(180^o<\beta<270^o)$.

7. Пресметај $\text{tg}(\alpha-\frac{\pi}{4})$, ако $\text{tg}\,\alpha=2$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

8*. Изведи формули за а) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$; б) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

9. Пресметај ја вредноста на $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$ и $\sin\gamma=\frac{2}{5}$, а $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$.

10*. Пресметај ја вредноста на $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$, ако $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$ и $\cos\gamma=\frac{1}{5}$, а $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$.

11. Упрости го изразот $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)$.

12. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$; б) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

13. Докажи ги равенствата:

а) $\sin(250^o+\alpha)+\cos(20^o-\alpha)=0$; б) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$.

14. Докажи ги идентитетите:

а) $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$; б) $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha):\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=(1-\text{tg}\alpha):(1+\text{tg}\alpha)$.

15. Пресметај ја вредноста на $\text{tg}\alpha$, ако $\text{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)=3$.

16. Упрости го изразот: $\sin(30^o+\alpha)+\cos(60^o+\alpha)$.

17. Упрости, а потоа пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sin14^o\cdot\cos16^o+\cos14^o\cdot\sin16^o$; б) $\cos50^o\cdot\cos10^o-\sin50^o\cdot\sin10^o$;

в) $\frac{\text{tg}\,25^o+\text{tg}\,20^o}{1-\text{tg}\,25^o\cdot\text{tg}\,20^o}$; г) $\frac{\text{tg}\,70^o-\text{tg}\,10^o}{1+\text{tg}\,70^o\cdot\text{tg}\,10^o}$.

18. Во формулите за $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ аголот β замени го со α и упрости ги.

19. Во идентитетот: а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; б) $\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, аголот α замени го со $\frac{\alpha}{2}$. Дали важат добиените равенства?

II.14. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ НА УДВОЕН АГОЛ И НА ПОЛОВИНАТА НА ДАДЕН АГОЛ, ИЗРАЗЕНИ ПРЕКУ ФУНКЦИЈА НА ТОЈ АГОЛ

1. Тригонометриски функции на удвоен агол.

Ако во формулите за тригонометриски функции на збир од два агла ставиме $\beta = \alpha$, тогаш тие ќе го добијат видот:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \,, \tag{1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \,, \tag{2}$$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \,, \tag{3}$$

$$\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha} \,. \tag{4}$$

Тоа се *формули за тригонометриски функции на удвоени агли.*

Пример 40. $\sin 120^\circ = \sin 2\cdot 60^\circ = 2\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ♦

Пример 41. Да го изразиме $\sin 3\alpha$ преку $\sin\alpha$.

Решение. Имаме

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha\,(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.. \ ♦$$

Формулите од (1) до (4) важат и за $2\cdot\frac{\alpha}{2}=\alpha$, $2\cdot 3\alpha = 6\alpha$, $2(\alpha-\beta)$, итн. На пример, тие можат да се запишат и вака:

$$\sin\alpha = \sin 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \,, \tag{1'}$$

$$\cos\alpha = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \,, \tag{2'}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\, 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \,, \tag{3'}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\, 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}} \,. \tag{4'}$$

Овие формули, иако по структура се исти со формулите од (1) до (4), носат уште назив тригонометриски функции на даден агол, изразени преку тригонометриските функции на половината од тој агол.

2. Тригонометриски функции од половината на даден агол.

Ако во основниот идентитет $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ и во формулата за косинус на удвоен агол, аголот α го замениме со $\frac{\alpha}{2}$, ги добиваме равенствата:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \,.$$

Со одземање, а потоа со собирање на соодветните страни на овие две равенства, доаѓаме до следниве две важни равенства:

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

Пожелно е овие две равенства да се помнат, бидејќи тие многу често се користат при разните трансформации на тригонометриски изрази. Од нив произлегуваат формулите за $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ а од овие и формулите за $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{7}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{8}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \tag{9}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \tag{10}$$

Знакот пред коренот се избира зависно од тоа во кој квадрант е вториот крак на аголот $\frac{\alpha}{2}$, и каков знак има соодветната функција во тој квадрант.

Формулите (7), (8), (9) и (10) се бараните *формули за изразување на тригонометриските функции од половина на даден агол преку функцијата косинус на тој агол.*

Пример 42. Да ја одредиме вредноста на tg15°.

Решение. Со примена на формулата (9), наоѓаме:

$$\mathrm{tg}\ 15^{\circ} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^{o}}{1+\cos 30^{o}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}} = 2-\sqrt{3}.\ \blacklozenge$$

Ако во формулите (5) и (6) α го замениме со 2α, ги добиваме формулите: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ и $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, кои исто, често ги користиме.

ЗАДАЧИ

1. Формулите (7) и (10) запиши ги така што на левата страна да стојат тригонометриските функции од даден агол α (а не од $\frac{\alpha}{2}$).

2. Пресметај: sin 2α и cos 2α, ако $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ и $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

3. Пресметај ја вредноста на изразите: а) $2\sin 15^{\circ}\cdot\cos 15^{\circ}$; б) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

4. Скрати ги дропките: а) $\frac{\sin 25^{o}}{\sin 50^{o}}$; б) $\frac{\sin 42^{o}}{\sin 84^{o}}$; в) $\frac{\sin 27^{o}}{\cos 36^{o}}$.

5. Упрости: $f(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin 84^{o}}$, каде $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

6. Одреди ги sin2α, cos2α и ctg2α, ако tg$\alpha = 1+\sqrt{3}$.

7*. Изрази го cos3α преку cosα.

8. За кои вредности на $\alpha \in (0,\pi)$ изразот $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ има најмала вредност?

9. Може ли да важи неравенството $|\sin 2\alpha| > |2 \cdot \sin\alpha|$?

10*. Упрости го изразот: $\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 6\alpha \cdot \cos 8\alpha$, ако $\alpha = 10^{\circ}$.

11. Упрости ги изразите:

а) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$; б) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; в) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$.

12*. Докажи: а) $\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ} = \frac{1}{8}$; б) $\sin 18^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} = \frac{1}{4}$.

13. Докажи дека важи $2\sin(45^{\circ}+\alpha)\cdot\sin(45^{\circ}-\alpha) = \cos 2\alpha$.

14. Пресметај: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, ако $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{2},\pi)$.

15. Пресметај: $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, ако $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha \in (\pi,\frac{3\pi}{2})$.

16. Пресметај ги sin15° и cos15°.

17*. Пресметај ја вредноста на изразот: а) $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$; б) $\cos^4 15^{\circ} - \sin^4 15^{\circ}$.

18*. Пресметај: а) $\sin 15^{\circ} \cdot \cos 75^{\circ}$; б) $\cos 36^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ}$.

19. Скрати ја дропката: $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

20. Скрати ги дропките: а) $\frac{1+\cos 80^{o}}{2\sin^2 40^{o}}$; б) $\frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$.

21. Докажи ги равенствата: а) $(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2 = 1+\sin\alpha$; б) $(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2})^2 = 1-\sin\alpha$.

22. Докажи дека важи равенството: $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

23. Докажи ги идентитетите: а) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2 \cdot \mathrm{ctg}2\alpha$, б) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin\alpha}$.

24*. Докажи ги идентитетите: а) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; б) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 2\cdot\sin\alpha$.

II. 15. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА АЛГЕБАРСКИ ЗБИР НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ВО ПРОИЗВОД И ОБРАТНО

1. Поаѓајќи од адиционите формули за синусот и косинусот, покажи дека важат равенствата:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y; \quad (1)$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \cdot \sin y; \quad (2)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y; \quad (3)$$

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\cdot\sin y. \tag{4}$$

Ако во равенствата (1 - 4) ставиме $x+y=\alpha$, $x–y=\beta$, од каде $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$, тогаш тие го добиваат видот:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{5}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{6}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{7}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{8}$$

Изразите $\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta$ и $\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta$ ги трансформираме непосредно:

$$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};\ \alpha,\beta\notin\{\tfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}, \tag{9}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\pm\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta\pm\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};\ \alpha,\beta\notin\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}. \tag{10}$$

Пример 43. Изразот $\frac{1}{2}+\cos\alpha$ да го претставиме во облик на производ.

Решение. $\frac{1}{2}+\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha=2\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}=2\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2})\ \cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2})$. ♦

<u>2.</u> Равенствата (5 – 10) овозможуваат алгебарски збир од две истоимени тригонометриски функции да се трансформира во производ (или дропка) на тригонометриски функции од други аргументи. Од големо значење е и обратната трансформација, имено, трансформацијата на производ на тригонометриските функции во алгебарски збир. Таа трансформација ја вршиме согласно формулите:

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)], \tag{1'}$$

$$\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)], \tag{2'}$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)], \tag{3'}$$

$$\sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)], \tag{4'}$$

а тоа се равенствата (1 – 4), само запишани во друг облик.

Пример 44. Производот $(\sin 2\alpha-\cos 3\alpha)\cdot\cos 5\alpha$ да го трансформираме во облик на алгебарски збир.

Решение. Имаме

$$(\sin 2\alpha-\cos 3\alpha)\cdot\cos 5\alpha=\cos 5\alpha\cdot\sin 2\alpha-\cos 5\alpha\cdot\cos 3\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(5\alpha+2\alpha)-\sin(5\alpha-2\alpha)]-\frac{1}{2}[\cos(5\alpha+3\alpha)+\cos(5\alpha-3\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 7\alpha-\sin 3\alpha)-\frac{1}{2}(\cos 8\alpha+\cos 2\alpha)=\frac{1}{2}[\sin 7\alpha-\sin 3\alpha-\cos 8\alpha-\cos 2\alpha].$$

ЗАДАЧИ

1. Збирот $\sin\alpha + \cos\alpha$**,** трансформирај го во производ.

2. Производот $\cos 27^\circ \cdot \cos 18^\circ$, трансформирај го во алгебарски збир.

3. Пресметај: а) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$.

4*. Трансформирај ги изразите во вид на производ: а) $1 - \sin\alpha$; б) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$.

5. Претстави го изразот во облик на производ: а) $\sin 36^\circ + \sin 18^\circ$; б) $\sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{5}$.

6. Провери дали важат равенствата:

а) $\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha) + \sin(\frac{\pi}{6}-\alpha) = \cos\alpha$;   б) $\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha) + \cos(\frac{\pi}{6}-\alpha) = \cos\alpha$.

7. Упрости го изразот: $\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

8*. Збирот $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$, трансформирај го во производ.

9. Производот $\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, трансформирај го во збир.

10. Докажи го равенството: $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$.

11. Покажи дека важи: $\cos 135^\circ \cdot \cos 75^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$.

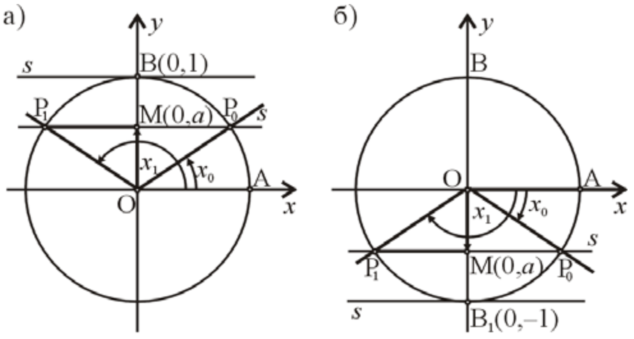
12. Пресметај: $\mathrm{tg}\, 9^\circ - \mathrm{tg}\, 27^\circ - \mathrm{tg}\, 63^\circ + \mathrm{tg}\, 81^\circ$.

II. 16. ГРАФИЧКО ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА АГОЛОТ ПО ДАДЕНА ВРЕДНОСТ НА ЕДНА НЕГОВА ТРИГОНОМЕТРИСКА ФУНКЦИЈА

При графичкото определување на аголот, зависно од вредноста на која тригонометриска функција е дадена, ќе разликуваме четири случаи.

<u>1.</u> Да го определиме аголот $x \in [-\pi, \pi]$, ако $\sin x = a$, каде a е реален број од множеството $[-1, 1]$.

Согласно дефиницијата на функцијата синус, на тригонометриската кружница k треба да се определи онаа точка P, во која вториот крак на бараниот агол x ја сече кружницата, а чија ордината е еднаква на дадениот број a.



црт. 63

За таа цел, на ординатната оска Oy ја наоѓаме точката M со ордината a и низ неа повлекуваме паралелна права s со Ox – оската (црт. 63а,б). Од цртежот станува јасно дека правата s за секоја вредност на $a \in [-1, 1]$ ја сече кружницата во две точки P_o и P_1 со ордината a, од кои P_o лежи во I или IV квадрант, а P_1 – во II или III квадрант. Кога е $a = 1$ или $a = -1$, тогаш тие се совпаѓаат во една точка, и тоа во точката $B(0,1)$ (ако $a = 1$) или во точката $B_1(0, -1)$, (ако $a = -1$).

Според тоа, постојат два агла x на сегментот [–π, π], чиј синус е еднаков на a, каде што $|a\,| < 1$. Од тие два агла, помалиот по апсолутна вредност се наоѓа во интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и се вика *основен агол* x_0, а симболички се означува со arcsin$a$ (читај: аркус синус на бројот a). Тој е остар – позитивен, ако $0 < a < 1$, или остар – негативен, ако $-1 < a < 0$ (црт. 63).

Дефиниција 15. *Основниот агол,* arcsin$a$, е аголот што се содржи во интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ и чиј синус е еднаков на a, т.е.

$$\arcsin a = x_o \iff \sin x_o = a \wedge x_o \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

На пример, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, бидејќи $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, а од $\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, следува дека $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}$.

Другиот агол x_1, поради симетричноста на точките P_o и P_1 во однос на Oy-оската, е еднаков на $x_1 = \pi - x_o = \pi - \arcsin a$.

Ако $a = 1$, тогаш $x_1 = x_o = \frac{\pi}{2}$, а ако $a = -1$, тогаш $x_1 = x_o = -\frac{\pi}{2}$.

Пример 45. Да го одредиме основниот агол x_o и аголот x_1, ако:

а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = \frac{1}{2}$.

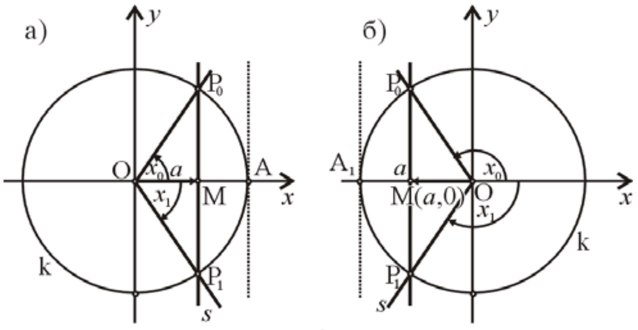
Решение. а) $x_o = \arcsin 0 = 0$, бидејќи $\sin 0 = 0$ и $0\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, а $x_1 = \pi - 0 = \pi$.

б) $x_o = \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, бидејќи $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, а $x_1 = \pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. ♦

2. Нека е даден реален број a. Да го одредиме аголот $x \in [-\pi, \pi]$, таков што $\cos x = a$.

Согласно дефиницијата на косинус, на тригонометриската кружница треба да се одреди точка P, чија апсциса е еднаква на дадениот број a. За таа цел, на апсцисната оска Ox ја одредуваме точката M со апсциса a и низ неа повлекуваме паралелна права s со Oy-оската (црт. 64). Очигледно е дека правата $s||Oy$ за секоја вредност на a ($|a| < 1$) ќе ја сече кружницата k во две точки P_o и P_1 со апсциса a, од кои P_o лежи во I или II квадрант, а P_1 – во III или IV квадрант. Ако е $a = 1$ или $a = -1$, тогаш тие се совпаѓаат во една точка, и тоа во точката A (ако $a = 1$) или во точката A_1 (ако $a = -1$).

Според тоа, постојат два агла на сегментот [–π, π], чиј косинус е еднаков на a, ако $|a| < 1$. Од тие два агла, ненегативниот е заклучен на сегментот [0, π] и се вика **основен агол** x_o, а се означува со arccos$a$ (читај: аркус косинус на бројот a). Тој е остар, ако $0 < a < 1$ или тап, ако $-1 < a < 0$ (црт. 64).



црт. 64

Дефиниција 16. *Основен агол* arccos$a$ е аголот што се содржи во сегментот [0,π] и чиј косинус е еднаков на бројот a, т.е.

$$\arccos a = x_o \iff \cos x_o = a \land x_o \in [0, \pi].$$

На пример, записот $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ е еквивалентен со записот $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$. Од $\cos\frac{\pi}{2}=0$ и $\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$, следува дека $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

Другиот агол x_1, чиј втор крак ја сече кружницата во точката P_1, заради симетричноста на точките P_1 и P_o во однос на Ox-оската е еднаков на $x_1 = -x_o$ (црт. 64). Ако $a = 1$, тогаш $x_1 = x_o = 0$, а ако $a = -1$, тогаш $x_o = \pi$, $x_1 = -\pi$.

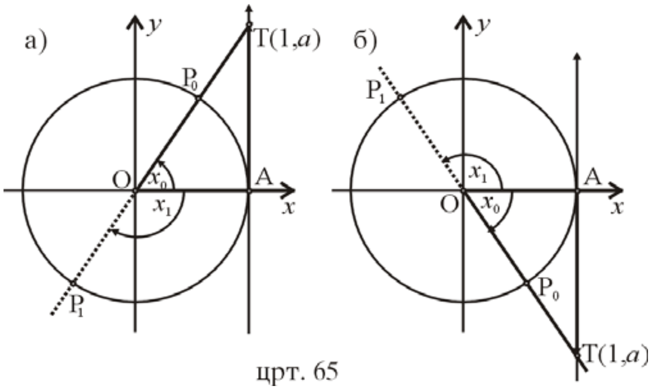
Пример 46. *Да го одредиме основниот агол* x_o *и аголот* x_1 *ако:*

а) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = 1$.

Решение. а) $x_o=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, бидејќи $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6}\in[0,\pi]$, а $x_1=-\frac{\pi}{6}$.

б) $x_o = \arccos 1 = 0$, бидејќи $\cos 0 = 1$ и $0\in[0,\pi]$, а $x_1 = x_o = 0$. ♦

<u>**3.**</u> Нека е даден реален број a. Да се одреди аголот x од интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, таков што $\mathrm{tg}x = a$. Знаеме дека тангенсот на кој било агол го изразивме со алгебарската вредност на векторот $\overrightarrow{AT}$, што вториот крак на аголот (или неговото продолжение) го издвојува од тангенсната оска.



црт. 65

Обратно од тоа, за одредувањето, пак, на аголот x по дадена вредност на тангенсот од него, прво на тангенсната оска ја определуваме точката T со ордината $\pm\,\overline{AT} = a$ (црт. 65), а потоа повлекуваме права OT. Таа права ќе ја сече тригонометриската кружница во две дијаметрално спротивни точки P_o и P_1, од кои едната (P_o) лежи во I или IV квадрант, а другата (P_1) – во II или III квадрант (црт. 65).

Точките P_o и P_1 определуваат два агла x_o и x_1, чиј тангенс е еднаков на дадениот реален број a. Аголот x_o со помала апсолутна вредност се наоѓа во интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и се вика *основен агол,* а симболички се означува со arctg a. Тој е остар – позитивен, ако $a > 0$, или остар – негативен, ако $a < 0$ (црт. 65).

Дефиниција 17. *Основен агол* - arctg$a$, е аголот што се содржи во интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ и чиј тангенс е еднаков на бројот a, т.е.

$$\mathrm{arctg}\, a = x_o \iff \mathrm{tg}\, x_o = a \land x_o\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}).$$

На пример, од $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ следува дека $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; $\mathrm{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}$, бидејќи е $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$ и $\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

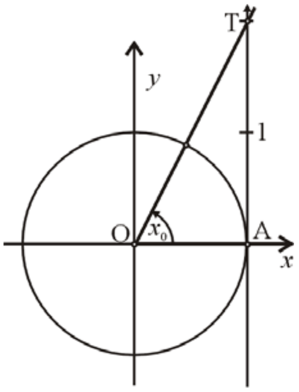
Другиот агол x_1, поради периодичноста на функцијата тангенс со основен период π, ќе биде еднаков на $x_o - \pi$, (ако $a > 0$) или $x_o + \pi$ (ако $a < 0$).

Пример 47. Да го одредиме основниот агол $x_o \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ако:

а) tg$x = -\sqrt{3}$; б) tg$x = 2$.

Решение. а) $x_o = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, бидејќи $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

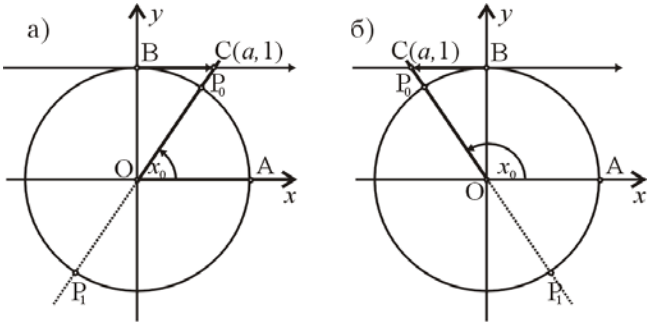
б) основниот агол x_o = arctg2, графички е определен на црт. 66. Со агломер наоѓаме дека x_o = arctg2 ≈ 63°. ♦



црт. 66

4. Нека е даден реален број *a*. Да го одредиме аголот *x* од интервалот (0, π), за кој е ctg$x = a$. Знаеме дека котангенсот на кој било агол го изразуваме со алгебарската вредност на векторот $\overrightarrow{BC}$, што вториот крак на аголот (или неговото продолжение) го издвојува во котангенсната оска.

Обратно од тоа, за одредување, пак, на аголот *x* по дадена вредност на котангенсот од него, ќе треба прво на котангенсната оска да ја одредиме точката *C* со апсциса $\pm\overline{BC} = a$ (црт. 67), а потоа да повлечеме права *OC*, која е определена со координатниот почеток *O* и најдената точка *C*.



црт. 67

Правата *OC* ќе ја пресече тригонометриската кружница *k* во две дијаметрално спротивни точки P_o и P_1, од кои точката P_o лежи во I или II квадрант, а точката P_1 - во III или IV квадрант (црт. 67).

Точките P_o и P_1 определуваат два агла x_o и x_1, чиј котангенс е еднаков на дадениот реален број *a*. Ненегативниот агол , што се наоѓа во интервалот (0, π), се вика *основен агол* и симболички се означува со arcctg*a* (читај: аркус котангенс на бројот *a*). Тој е остар (ако $a > 0$) или тап (ако $a < 0$) (црт. 67).

Дефиниција 18. *Основен агол* arcctg*a*, е аголот што се содржи во интервалот (0, π) чиј котангенс е еднаков на бројот *a*, т.е.

$$\operatorname{arcctg}a = x_o \;\Leftrightarrow\; \operatorname{ctg}x_o = a \;\wedge\; x_o \in (0, \pi).$$

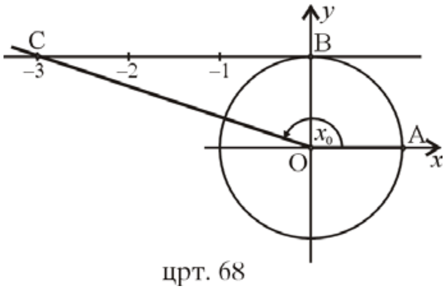
На пример, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, бидејќи $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$; $\operatorname{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}$, бидејќи $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0, \pi)$.

Другиот, пак, агол x_1, поради периодичноста на функцијата котангенс со период π, ќе биде еднаков на $x_o - \pi$ или $x_o + \pi$.

Пример 48. Да се конструира основниот агол arcctg*a*, ако: а) ctg$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) ctg$x = -3$.

Решение. а) Од $\text{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{3}\in(0,\ \pi)$, следува дека $\text{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$;

б) основниот агол x_o, чиј котангенс е еднаков на –3, графички е определен на црт. 68. Со агломер измери ја неговата големина во степени. ♦



црт. 68

ЗАДАЧИ

1. Одреди го основниот агол x_o и аголот x_1, ако: а) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x = 1$; в) $\sin x = -1$.

2. Одреди го основниот агол x_o и аголот x_1, ако: а) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = 0,5$.

3. Конструирај го аголот $x_o\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, за кој е: а) $\text{tg}x_o = -3$; б) $\text{tg}x_o = 1,75$.

4. Конструирај агол $x_o\in(0,\pi)$, за кој е: а) $\text{ctg}x_o = -\sqrt{3}$; б) $\text{ctg}x_o = 1,5$.

5. Конструирај ги аглите x_o и x_1 од интервалот $[-\pi, \pi]$, ако е:

а) $\sin x = \frac{2}{5}$; б) $\sin x = -\frac{3}{5}$.

6. Конструирај ги аглите x_o и x_1 од интервалот $[-\pi, \pi]$, ако е:

а) $\cos x = \frac{3}{4}$; б) $\cos x = -\frac{2}{3}$.

7. Конструирај го аголот $x_o\in(0, \pi)$, ако е: а) $\text{ctg}x_o = \frac{2}{3}$; б) $\text{ctg}x_o = -2$.

8. Конструирај го аголот $x_o\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, ако е: а) $\text{tg}x_o = -\frac{3}{4}$; б) $\text{ctg}x_o = 3$.

9*. Конструирај агли $x \in (-\pi, \pi)$ за кои важи: а) $\sin x = \cos x$; б) $\sin x = -\cos x$.

10*. Конструирај агли $x \in (-\pi, \pi)$ за кои важи: а) $\text{tg}x = \text{ctg}x$; б) $\text{tg}x = -\text{ctg}x$.

11. Дадена е равенката: а) $\sin x=\frac{1}{2}$; б) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Одреди ги нејзините решенија на сегментот $[-\pi, \pi]$.

12. Дадена е равенката: а) $\text{tg}x=\sqrt{3}$; б) $\text{ctg}x = 1$. Кои решенија ги има таа равенка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$?

II.17. ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ

1. Равенката, во која променливата се содржи само во аргументот на тригонометриските функции, се вика *тригонометриска равенка.*

На пример, равенките: $\cos x=\frac{2}{5}$, $\sin^2 x=4\cdot\cos x$, $\text{tg}(x+\frac{\pi}{3})=2\,\text{tg}x$ се тригонометриски равенки. Меѓутоа, равенката $3x + \sin x = 1$ не е тригонометриска равенка, бидејќи променливата x се содржи и во изразот $(3x)$, кој не е аргумент на тригонометриска функција.

Решение (или корен) на дадена тригонометриска равенка се вика секоја вредност на променливата за која равенката е задоволена. Да се реши една тригонометриска равенка значи, да се одреди множеството од сите нејзини решенија. За овие равенки карактеристично е тоа што тие, ако не се воведени некои ограничувања, најчесто имаат бесконечно множество решенија.

На пример, тригонометриската равенка $\cos x = \frac{1}{2}$ на сегментот $[-\pi, \pi]$ има само две решенија $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{3}$, но на целата дефинициона област има бесконечно многу решенија.

Не постои општ метод за решавање на тригонометриските равенки. Се решаваат само некои специјални видови, што можат да се сведат на решавање на најпростите тригонометриски равенки:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} x = a, \tag{1}$$

каде a е даден реален број. Овие равенки се викаат и *основни тригонометриски равенки.*

Тригонометриските, како и алгебарските равенки, можат да се решаваат и *графички.* Во претходниот параграф, го разгледавме графичкото решавање на секоја од основните равенки (1).

2. Решавање на равенката sin*x* = *a*.

Бидејќи функцијата $\sin x$ е ограничена, и тоа $-1 \le \sin x \le 1$, односно $|\sin x| \le 1$, затоа равенката

$$\sin x = a \tag{2}$$

за $a < -1$ како и за $a > 1$ нема смисла, односно нема решение.

Ако $|a| \le 1$, тогаш на сегментот $[-\pi, \pi]$, равенката (2) видовме, има две решенија. Со x_0, односно $\arcsin a$, го означивме решението од интервалот $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Другото решение x_1, видовме дека е еднакво на $x_1 = \pi - x_0 = \pi - \arcsin a$.

Според тоа, равенката (2) при $|a| \le 1$ на сегментот $[-\pi, \pi]$, кој по должина е еднаков на основниот период (2π) на функцијата синус, ги има следните две решенија:

$$x_0 = \arcsin a \quad \text{и} \quad x_1 = \pi - \arcsin a.$$

Множеството на сите решенија на равенката (2) (на интервалот $(-\infty, \infty)$), ќе го добиеме кога кон секое од овие две решенија додадеме $2k\pi$ (k пати периодот 2π). Значи, множеството M од сите решенија на равенката $\sin x = a$, $(-1 \le a \le 1)$, е унија од множествата:

$$M = \{\arcsin a + 2k\pi | \, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi | \, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Множеството M, обично го запишуваме на следниот начин:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2k\pi \\ \pi - \arcsin a + 2k\pi \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2k\pi \\ -\arcsin a + (2k+1)\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbf{Z} \tag{3}$$

и се вика *општо решение* на равенката (2).

Пример 49. Да ја решиме равенката $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Прво наоѓаме $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, бидејќи $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значи, дадената равенка има општо решение:

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \end{array}\right., \quad k\in\mathbf{Z}.$$

Во практиката често пати се сретнуваме со следните равенки

$$\sin x = 0,\ \sin x = 1 \text{ и } \sin x = -1:$$

1°. Равенката $\sin x = 0$ има општо решение $x = 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$).

2°. Равенката $\sin x = 1$ има општо решение $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$).

3°. Равенката $\sin x = -1$ има општо решение $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Пример 50. *Да ја решиме равенкаа̄та* $\sin 2x = 1$.

Решение. Од $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, добиваме $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$). ♦

<u>3.</u> Решавање на равенката $\cos x = a$.

При $|a| > 1$ равенката $\cos x = a$ нема решение (Зошто?). При $|a| \le 1$ на сегментот $[-\pi, \pi]$ видовме постојат два агла:

$$x_0 = \arccos a \text{ и } x_1 = -\arccos a,$$

кои се симетрични во однос на апсцисната оска и чиј косинус е еднаков на дадениот број a.

Бидејќи сегментот $[-\pi, \pi]$ има должина еднаква на должината на основниот период 2π на косинус, општото решение (т.е. множеството од сите решенија) на равенката $\cos x = a$, $(-1 \le a \le 1)$ е:

$$x = \pm\arccos a + 2k\pi = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2k\pi \\ -\arccos a + 2k\pi \end{array}\right., \quad k\in\mathbf{Z}.$$

Пример 51. Да ја решиме равенката: а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. Бидејќи $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, дадената равенка има општо решение $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$).

б) Равенката $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ е еквивалентна со $2\sin x\cdot\cos x = 1$, односно со $\sin 2x = 1$, а од последнава равенка го добиваме општото решение:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ односно } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ (k\in\mathbf{Z}). \ ♦$$

Општите решенија на следниве равенки пожелно е да се помнат посебно:

4°. $\cos x = 0$ има општо решение $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$).

5°. $\cos x = 1$ има општо решение $x = 2k\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$).

6°. $\cos x = -1$ има општо решение $x = (2k + 1)\pi$, ($k\in\mathbf{Z}$).

Пример 52. Да ја решиме равенката $\cos 4x = 1$.

Решение. Од $4x = 2k\pi$, имаме $x = \frac{k\pi}{2}$, ($k\in\mathbf{Z}$). ♦

Забелешка. Согласно формулите cos$x$ = $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ и cos$x$ = $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$, решавањето на равенката cos$x = a$, $(-1 < a < 1)$ може да се сведе на решавање на една од равенките:

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}-x) = a \text{ или } \sin(\tfrac{\pi}{2}+x) = a.$$

Пример 53. Да ја решиме равенката $\cos(2x-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $\sin(2x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$. Од $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ наоѓаме дека $x_0 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Потоа од

$$2x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ и } 2x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2} = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

добиваме: $2x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi$ и $2x = \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, па конечно, општото решение на равенката е

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{5\pi}{12}+k\pi \\ \frac{3\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., \ k\in\mathbf{Z}.\ ♦$$

<u>4.</u> Решавање на равенката tg$x$ = a.

Видовме, за која било вредност на $a \in \boldsymbol{R}$, на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, чија должина е π - еднаква на основниот период на тангенс, постои единствен агол x_0 = arctg$a$, чиј тангенс е еднаков на a. Затоа, општото решение на равенката tg$x$=a, е:

$$x = \text{arctg}\,a + k\pi,\ (k \in \mathbf{Z}). \tag{5}$$

Пример 54. Да ја решиме равенката tg$x$ = $\frac{1}{3}$.

Решение. Општото решение е: $x = \text{arctg}\frac{1}{3}+k\pi = 0{,}32175+k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ♦

Пример 55. Да ја решиме равенката

$$\sin x = \cos x. \tag{6}$$

Решение. Ги делиме двете страни на равенката со cos$x$, па добиваме tg$x$ = 1. Општото решение на оваа равенка е $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$, $(k \in \boldsymbol{Z})$. Се поставува прашањето, дали е тоа општо решение и на дадената равенка (6). При преминот кон равенката tg$x$ = 1, од дефиниционата област D = **Z** на равенката (6) ги исклучуваме броевите $\frac{\pi}{2}+k\pi$, бидејќи за тие броеви левата страна на равенката tg$x$ = 1 нема смисла. Гледаме, тие броеви $\frac{\pi}{2}+k\pi$ не ја задоволуваат равенката (6), а тоа значи, дека со прифаќањето на општото решение на равенката tg$x$ = 1 и за нејзино општо решение, таа нема да изгуби ниту еден корен. Според тоа, $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$ е општо решение и на дадената равенка. ♦

<u>5.</u> Решавање на равенката ctg$x$ = a.

Познато е дека, за која било вредност на $a \in \mathbf{R}$ на интервалот $(0, \pi)$ постои единствен агол x_0 = arcctg$a$, чиј котангенс е еднаков на a. Значи, равенката ctg$x$ = a има општо решение:

$$x = \mathrm{arcctg}\, a + k\pi, \quad (k \in \mathbf{Z}). \qquad (7)$$

Пример 56. Да ја решиме равенката $\mathrm{ctg}x = -1$.

Решение. Бидејќи $\mathrm{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$, добиваме $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $(k\in\mathbf{Z})$ е општото решение на дадената равенка. ♦

Пример 57. Да ја решиме равенката: $\mathrm{ctg}\,(x - 10^{\circ}) = \mathrm{ctg}\,20^{\circ}$.

Решение. Согласно дефиницијата на $\mathrm{arcctg}a$ имаме: $\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{ctg}\,20^{\circ}) = 20^{\circ}$. Според тоа, $x - 10^{\circ} = 20^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$, $x = 30^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$, односно $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$. ♦

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките (1 - 10):

1. а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x = \frac{2}{3}$.

2. а) $\sin 3x = 0$; б) $\sin(-x) = -1$.

3. $\sin x \cdot \cos x = 0$.

4. $\mathrm{tg}\,(x + 20^{\circ}) = 1$.

5. а) $\mathrm{ctg}\,(x + 10^{\circ}) = \mathrm{tg}\,50^{\circ}$; б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

6. а) $2\cdot\sin 2x+\sqrt{3}=0$; б) $4\cdot\cos x - 3 = 0$.

7. а) $5\cdot\sin x = 3$; б) $2\cdot\cos x+\sqrt{3}=0$.

8. а) $3\cdot\mathrm{tg}x=\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\cdot\mathrm{ctg}x - 1 = 0$.

9*. а) $\sin(x - 40^{\circ}) = \sin 20^{\circ}$; б) $\cos(x + 15^{\circ}) = \sin 40^{\circ}$.

10*. а) $\mathrm{tg}\,(x-\frac{\pi}{6}) = \mathrm{tg}\,15^{\circ}$; б) $\mathrm{ctg}\,(x+\frac{\pi}{3}) = \mathrm{tg}\,(-15^{\circ})$.

11. Покажи дека множеството A на сите решенија на равенката $\sin x = 0$ се содржи во множеството B на сите решенија на равенката $\sin 2x = 0$, т.е. $A \subseteq B$.

12. Дали имаат решение равенките: а) $\sin x + \cos x = 2$; б) $\sin x + \mathrm{tg}x = 3$; в) $\sin x + \frac{1}{\cos x} = 5$? Образложи!

13. Дали имаат решение равенките: а) $\sin x\cdot\cos x = 1$; б) $\sin x\cdot\mathrm{ctg}x = 2$; в) $\sin x\cdot\mathrm{tg}x = 3$? Образложи.

14. Реши ја равенката: $2\cdot\cos^2 x - 3\cdot\cos x + 1 = 0$, со внесување на нова променлива $\cos x = t$.

II.18. РЕШАВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ ШТО СОДРЖАТ САМО ЕДНА ТРИГОНОМЕТРИСКА ФУНКЦИЈА ОД ВТОР СТЕПЕН ВО ОДНОС НА ИСТАТА ФУНКЦИЈА

Еден од методите на решавање на тригонометриските равенки се состои во тоа што различните тригонометриски функции, што влегуваат во дадената равенка, да се изразат преку една од нив. Потоа, добиената равенка, во однос на функцијата што ја содржи, ја решаваме според правилата за решавање на алгебарските равенки.

Тука ќе се задржиме на решавање на тригонометриски равенки, кои се сведуваат на равенка што содржи само една тригонометриска функција од прв или втор степен, во однос на таа функција.

Во процесот на решавањето на тригонометриските равенки, треба да се избегнуваат оние трансформации, што доведуваат до нарушување на еквивалентноста на равенките. Ако, пак, таквите трансформации се неизбежни, тогаш потребно е испитување: кои корени би можело да бидат изгубени, а кои придобиени. Придобиените корени лесно се откриваат со проверката, дали добиените корени на последната равенка се корени и на дадената равенка или не. Меѓутоа, проблемот со изгубените корени е далеку посложен и потежок.

Да го илустрираме напред кажаното на неколку примери на решавање на тригонометриските равенки.

Пример 58. Да ја решиме равенката $\frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x$.

Решение. Дадената равенка содржи две тригонометриски функции.

Ако замениме $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, ќе ја добиеме равенката: $\frac{1}{2} \cdot \cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. што содржи само една тригонометриска функција $\cos 2x$ и тоа линеарно по однос на неа. Решавајќи ја оваа равенка по $\cos 2x$ како непозната, добиваме $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Оттука, е $2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi$ $= \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ па дадената равенка има општо решение: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$). ♦

Пример 59. Да ја решиме равенката $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решение. Оваа равенка со смената $\cos x = y$ преминува во квадратната равенка $2y^2 + y - 1 = 0$. Нејзиното решение е $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = -1$.

Значи, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста од две основни тригонометриски равенки:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \quad \text{чие општо решение е:} \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = (2k+1)\pi \end{array}\right. . ♦$$

Пример 60. Да ја решиме равенката $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x = -1$.

Решение. $\cos^2 x$ го изразуваме преку синус, и последователно добиваме:

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 3 \cdot \sin x + 2 = 0, \quad 2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0,$$

од каде $(\sin x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$, т.е. $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Оттука,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{или} \quad x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, па општото решение е } x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbf{Z}. ♦$$

Пример 61. Да ја решиме равенката: $\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cdot \cos^2 x = 0$.

Решение. Гледаме, дадената равенка е хомогена по однос на $\sin x$ и $\cos x$. Ако неа ја поделиме со $\cos^2 x \neq 0$, добиваме квадратна равенка по однос на $\mathrm{tg} x$:

$$\mathrm{tg}^2x - (1-\sqrt{3})\cdot \mathrm{tg}x - \sqrt{3} = 0.$$

Ја решаваме добиената равенка:

$$(\mathrm{tg}\,x)_{1,2} = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\pm\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}}) = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}) = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3}))\,.$$

Значи, $(\mathrm{tg}x)_1 = 1$, $(\mathrm{tg}x)_2 = -\sqrt{3}$. Оттука $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{3}+k\pi$. Добиените решенија го задоволуваат условот $\cos^2x \neq 0$. ♦

Да претпоставиме сега дека постои и некое решение x за кое $\cos x = 0$. Заменувајќи го тоа во дадената равенка добиваме, дека и $\sin x = 0$, а тоа противречи на нашата претпоставка дека $\cos x = 0$. Значи претходно добиените решенија се единствени.

Пример 62. Да ја решиме равенката: $2\cdot\cos x + \frac{3-7\cdot\sin x}{2+\cos x} = \frac{2}{2+\cos x}$.

Решение. Бидејќи $2+\cos x\neq0$, дадената равенка е еквивалентна со равенката:

$$2\cdot\cos x\,(2+\cos x) + 3 - 7\cdot\cos x = 2, \text{ односно со } 2\cdot\cos^2x - 3\cdot\cos x + 1 = 0.$$

Квадратната равенка има решенија $(\cos x)_1 = 1$, $(\cos x)_2 = \frac{1}{2}$. Според тоа, последната равенка, а исто и дадената равенка имаат општо решение:

$$x = \left[\begin{array}{l} 2k\pi \\ \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right.,\quad k\in \mathbf{Z}.\ ♦$$

Во продолжение ќе ја разгледаме тригонометриската равенка

$$a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = c.$$

Ако ставиме смена $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, тогаш знаеме дека $\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Ако во дадената равенка ги замениме овие вредности на $\sin x$ и $\cos x$, добиваме:

$$a\cdot\frac{2t}{1+t^2} + b\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = c\,, \text{ т.е. } (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0.$$

Бидејќи дискриминантата е $D = 4(a^2+b^2-c^2)$, гледаме дека добиената квадратна равенка има реални решенија само ако $a^2+b^2\geq c^2$. Во тој случај и дадената тригонометриска равенка има (реални) решенија. Ако пак $a^2+b^2<c^2$, тогаш дадената тригонометриска равенка нема решение. До истата оваа дискусија се доаѓа и на следниот начин. Дадената тригонометриска равенка ја делиме со $\sqrt{a^2+b^2}$ и добиваме $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Постои единствен агол φ, така што $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (Зошто?). Така добиената тригонометриска равенка се запишува како

$$\cos\varphi\cdot\sin x + \sin\varphi\cdot\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ т.е. } \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Од овде непосредно следува дека дадената тригонометриска равенка има решение, ако и само ако $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq1$, т.е. ако и само ако $a^2+b^2\geq c^2$. Освен тоа, трансформираната равенка може и лесно да се реши, бидејќи се сведува на веќе позната равенка.

Пример 63. Да ја решиме равенката: $5 \cdot \sin x - \cos x = 2$.

Решение. Со смената $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ дадената равенка станува: $t^2 - 10t + 3 = 0$. Од неа добиваме: $t_1 = 5 + \sqrt{22} \approx 9{,}69$, $t_2 = 5 - \sqrt{22} \approx 0{,}31$, а од смената $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_1 \approx 9{,}69$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t_2 \approx 0{,}31$ наоѓаме:

$$x = \left[\begin{array}{l} 2(arctg 9{,}69 + k\pi) \\ 2(arctg 0{,}31 + k\pi) \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 2 \cdot 1{,}468 + 2k\pi \\ 2 \cdot 0{,}301 + 2k\pi \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 2{,}936 + 2k\pi \\ 0{,}602 + 2k\pi \end{array}\right. . \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките (1 – 14):

1. а) $2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 = 0$; б) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \cdot \operatorname{tg} x + 2 = 0$.

2. а) $2 \cdot \sin^2 x = 3 \cdot \cos x$; б) $2 \cdot \operatorname{tg} x + 3 \cdot \operatorname{ctg} x = 5$.

3. а) $\cos^2 x + \sin x = \frac{1}{4}$; б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

4. а) $\cos^2 x - 2 \cdot \sin x + 2 = 0$; б) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$.

5. а) $\sin^2(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\pi + x) + 1 = 0$; б) $2 - 3 \cdot \sin x = \cos 2x$.

6. а) $2 \cdot \cos^2 x + 7 \cdot \sin x = 5$; б) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos^2 x = \frac{1}{4}$.

7. а) $1 + \cos x = 2 \cdot (1 - \sin^2 x)$; б) $\cos x - \cos\frac{x}{2} = -1$.

8. а) $6 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \sin x - 7 = 0$; б) $\sin x - 2 \cdot \cos 2x = 1$.

9*. а) $\sin^2(\frac{3\pi}{2} - x) + 2 \cdot \sin x = 1$; б) $\cos 2x = \sin x$.

10. а) $-3 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 2$; б) $\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x = \frac{\pi}{4}$.

11. а) $4 \cdot \sin x + \cos x = 4$; б) $15 \cdot \sin x + 10 \cdot \cos x = 12$.

12. а) $8 \cdot \sin x - \cos x = 4$; б) $3 \cdot \sin 2x - \cos 2x = 1$.

13. а) $12 \cdot \sin x - \cos x = 9$; б) $2 \cdot \cos 3x + 1 = 3 \cdot \sin 3x$.

14. а) $2 \cdot \sin x + 7 \cdot \cos x = 6$; б) $3 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \cos(x + \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}$.

15. Реши ја равенката $\sin^2 x - \sin x = 0$, кога нејзината лева страна ќе ја разложиш на множители.

II.19. РЕШАВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ ПО МЕТОДОТ РАЗЛОЖУВАЊЕ НА МНОЖИТЕЛИ

По пренесувањето на сите членови на левата страна на равенката, ако успееме левата страна да ја разложиме на два или повеќе множители, тогаш таа е еквивалентна на вкупноста (дисјункцијата) од две или повеќе равенки, што ги добиваме кога секој множител ставаме да е еднаков на нула.

Да го илустрираме тоа преку неколку примери.

Пример 64. Да ја решиме равенката: $2 \cdot \sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x = 0$.

Решение. Ако $\sin 2x$ го замениме со $2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, потоа добиваме:

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos 2x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot \sin x\,(\cos 2x + \cos x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot \sin x \cdot 2 \cdot \cos\tfrac{3x}{2} \cdot \cos\tfrac{x}{2} = 0,$$

а последната равенка е еквивалентна на вкупноста (дисјункцијата) од три основни тригонометриски равенки:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right., \text{ чие општо решение е: } x = \left[\begin{array}{l} k\pi \\ \frac{2k+1}{3} \cdot \pi \\ (2k+1)\pi \end{array}\right. . \ ♦$$

Пример 65. Да ја решиме равенката $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Решение. Дадената равенка може да се запише во видот:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

од каде $\sin^2 x\,(1 - \sin x) + \cos^2 x\,(1 - \cos x) = 0$. Бидејќи збирот на два ненегативни собирока е еднаков на нула, ако и само ако и двата собирока се еднакви на нула, тогаш добиената равенка е еквивалентна со системот равенки:

$$\begin{cases} \sin^2 x(1 - \sin x) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos x) = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Ако во првата равенка на системот (1) ставиме да е $\sin x = 0$, тогаш $\cos x \neq 0$, па од втората равенка треба да е $1 - \cos x = 0$, односно $\cos x = 1$. Така го добиваме системот:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}. \qquad (2)$$

Ако, пак, во првата равенка на системот (1) ставиме: $1 - \sin x = 0$, т.е. $\sin x = 1$, тогаш $\cos x \neq 1$, па за да биде втората равенка задоволена треба да е $\cos x = 0$. Така доаѓаме до системот:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Значи, системот равенки (1) ќе биде еквивалентен на вкупноста од системите (2) и (3).

Првата равенка $\sin x = 0$ во системот (2) има општо решение: $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, а втората равенка $\cos x = 1$ има општо решение $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

За да го одредиме општото решение на системот (2) треба да го одредиме пресекот $\{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \cap \{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, а тој е еднаков на множеството $\{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Значи, системот (2) има општо решение: $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Аналогно, го наоѓаме и општото решение на системот (3): $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Според тоа, дадената равенка има општо решение:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., \ (k \in \mathbf{Z}). \ ♦$$

Пример 66. Да ја решиме равенката: $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$.

Решение. Со користење на формулата за разлика на синуси и други трансформации, по ред добиваме:

$$2\cdot\cos x\, 3x \cdot\sin x = \sin x \;\Leftrightarrow\; \sin x\,(2\cdot\cos 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cdot\cos 3x - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Првата равенка во вкупноста има решение $x = k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, а втората равенка $\cos 3x = \frac{1}{2}$ има решение $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Значи, дадената равенка има општо решение:

$$\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right. ,\quad k \in \mathbf{Z}. \ \blacklozenge$$

Пример 67. Да ја решиме равенката: $\cos(x - 30^{o}) = \cos(x + 30^{o})$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките:

$$\cos(x - 30^{o}) - \cos(x + 30^{o}) = 0, \quad -2\cdot\sin\frac{x-30^{o}+x+30^{o}}{2}\cdot\sin\frac{x-30^{o}-x-30^{o}}{2} = 0,$$

$$-2\cdot\sin x\cdot\cos(-30^{o}) = 0,\ \sin x = 0.$$

Последната равенка има општо решение $x = k\cdot 180^{o}$, $k\in\mathbf{Z}$, а тоа е и општо решение на дадената равенка. ♦

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките (1 – 14):

1. $\cos(x + \alpha)\cdot\cos\alpha + \sin(x + \alpha)\cdot\sin\alpha = 0$.

2. а) $\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$.

3. а) $\cos 3x\cdot\cos(1 - x) = 0$; б) $\cos^3 x - \cos x = 0$.

4. а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; б) $\sin^3 x + \sin x = 0$.

5. а) $3\cdot\mathrm{tg}^2 x - \sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}x = 0$; б) $\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x = 1$.

6. а) $2\cdot\sin^3 x - 3\cdot\sin x\cdot\cos x = 0$; б) $\sin 2x\cdot\mathrm{tg}x = 1$.

7. а) $2\cdot\mathrm{tg}x\cdot\cos x + 1 = 2\cdot\cos x + \mathrm{tg}x$; б) $1 - 4\sin^2 x = 0$.

8. а) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$; б) $\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}2x = 0$.

9*. $\sin x\cdot\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$. **10*.** $1 - \sin x\cdot\cos x + \sin x - \cos x = 0$.

11. а) $\cos(2x+30^{o}) = \cos(x+15^{o})$; б) $\sin 2x = -\sin x$.

12. а) $\mathrm{tg}(3x+45^{o}) = \mathrm{tg}(2x-45^{o})$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$.

13. а) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin x = 0$; б) $1 - \cos x = \sin x$.

14. а) $\cos x + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0$; б) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0$.

II.20. СИНУСНА ТЕОРЕМА

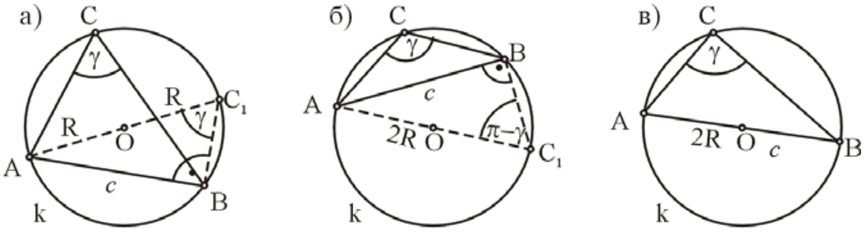
Познато ти е уште од основното училиште дека за внатрешните агли, α, β и γ на кој било триаголник важи равенството:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}, \text{ односно } \alpha + \beta + \gamma = \pi. \qquad (1)$$

Сега ќе се запознаеме со некои важни релации меѓу страните и аглите на кој било триаголник. Една од нив е искажана со следната таканаречена:

Теорема 16 (синусна теорема). Во секој триаголник страните се пропорционални со синусите на спротивните агли, т.е.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (2)$$



црт. 69

Доказ. Околу триаголникот ABC да опишеме кружница $k(O,R)$. Нека $\overline{AB} = c$ и $\angle ACB$ = γ (црт. 69). За внатрешниот агол γ можни се три случаи: тој да е остар, тап или прав. И во трите случаи ќе покажеме дека важи равенството:

$$c = 2R \cdot \sin\gamma, \text{ односно } \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \qquad (3)$$

Во случаите кога $\gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\gamma > \frac{\pi}{2}$ (црт 69 а,б) низ темето A да повлечеме дијаметар AC_1 на опишаната кружница k. Триаголникот ABC_1 е правоаголен, бидејќи аголот ABC_1, како периферни агол над дијаметарот AC_1, е прав.

Ако $\gamma < \frac{\pi}{2}$ (црт. 69 а), тогаш $\angle AC_1B = \angle ACB = \gamma$ (како периферни агли над ист кружен лак AB). Од помошниот (правоаголен) триаголник ABC_1 имаме: $\frac{c}{2R} = \sin\gamma$, односно $c=2R \cdot \sin\gamma$.

Ако, пак, $\gamma > \frac{\pi}{2}$ (црт. 69 б), тогаш аглите γ и $\angle AC_1B$, како спротивни агли во тетивен четириаголник $ACBC_1$, се суплементни, т.е. $\angle AC_1B = \pi - \gamma$. Од правоаголниот триаголник ABC_1 пак, следува дека $\frac{c}{2R} = \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma$, односно $c = 2R \cdot \sin\gamma$.

Ако, пак, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, тогаш $c = 2R$, а $\sin\gamma = 1$, па равенството (3) пак е задоволено: $2R = 2R \cdot 1$.

Со тоа равенството (3) е докажано.

Аналогни равенства можат да се докажат и за страната a и аголот α, како и за страната b и аголот β:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \qquad (4)$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R. \qquad (5)$$

Според тоа, од (3), (4) и (5) добиваме: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. ♦

Од синусната теорема и нејзиниот доказ следува следнава:

Последица. Кај секој триаголник, односот на која било страна и синусот на спротивниот агол е еднаков на дијаметарот на опишаната кружница околу триаголникот.

_Синусната теорема важи и за правоаголните триаголници. Забележуваме дека за $\gamma = \frac{\pi}{2}$ од равенството (2) добиваме: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1}$, бидејќи $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Оттука $a = c \cdot \sin\alpha$ и $b = c \cdot \sin\beta$. Но, бидејќи $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, односно $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, па $\sin\beta = \cos\alpha$, и тогаш ги добиваме формулите $a = c \cdot \sin\alpha$, и $b = c \cdot \cos\alpha$.

Синусната теорема овозможува решавање на разновидни задачи врзани за произволен триаголник.

Пример 68. Два од аглите на триаголникот се однесуваат како 1 : 2, а нивните спротивни страни - како $1:\sqrt{3}$. Да ги одредиме аглите на триаголникот.

Решение. Согласно условот на задачата имаме: $\alpha:\beta=1:2$ и $a:b=1:\sqrt{3}$, односно и $\beta = 2\alpha$ и $b = a\sqrt{3}$. Ако тоа го внесеме во равенството $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, добиваме: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin 2\alpha}$. А кога замениме $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ наоѓаме $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Оттука $\alpha = 30^\circ$, а $\beta = 2\alpha = 60^\circ$, па аглите на триаголникот се: 30°, 60° и 90°. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди го радиусот на опишаната кружница околу триаголник ABC, ако е позната една негова страна $b = 7{,}5$ *cm* и нејзиниот спротивен агол $\beta = 32^\circ 30'$.

2. Со синусната теорема, докажи дека радиусот на опишаната кружница околу кој било правоаголен триаголник е еднаков на половина од неговата хипотенуза.

3. Со синусната теорема, докажи ја теоремата за бисектрисата на внатрешен агол на триаголникот.

4. Докажи дека во секој триаголник страната што лежи спроти агол 30°, е еднаква на радиусот на опишаната кружница околу тој триаголник.

5*. Основата на еден рамнокрак триаголник е a, а аголот при основата е 2α. Одреди ја должината на бисектрисата на аголот при основата на тој триаголник.

6. Во еден триаголник е $a = 2b$. Точно ли е дека и $\alpha = 2\beta$?

II.21. РЕШАВАЊЕ НА ОСНОВНИ ЗАДАЧИ ЗА ТРИАГОЛНИК СО СИНУСНАТА ТЕОРЕМА

Системот равенки

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \qquad (1)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (2)$$

овозможува решавање на следниве две основни задачи за произволен триаголник.

Задача I. Да се реши триаголник според дадени два агла и една негова страна.

Решение. Нека за триаголникот *ABC* се дадени аглите α и β, и страната c, а треба да се одредат аголот γ и страните a и b.

Третиот агол е $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, а страните a и b ги наоѓаме од равенствата: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ и $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, од каде е: $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. ♦

Пример 69. Нека $\alpha = 54^o30'$; $\beta = 108^o30'$ и $c = 7{,}5$ (*cm*). Да се одредат: γ, a и b.

Решение. $\gamma = 180^o - (\alpha + \beta) = 180^o - (54^o30' + 108^o30') = 17^o$;

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{7{,}5\cdot\sin 54^o30'}{\sin 17^o} \approx \frac{7{,}5\cdot 0{,}814}{0{,}292} \approx 20{,}9\ (cm) \text{ и}$$

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{7{,}5\cdot\sin 108^o30'}{\sin 17^o} \approx \frac{7{,}5\cdot 0{,}948}{0{,}292} \approx 24{,}4\ (cm)\ . ♦$$

Задача II. Да се реши триаголник според дадени две страни и аголот што лежи спроти едната од нив.

Решение. За триаголникот *ABC* нека се дадени страните a и b, и аголот α (што лежи спроти дадената страна a), а треба да се одредат страната c и аглите β и γ.

Од $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, добиваме $\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a}$ од каде го одредуваме аголот β, потоа $\gamma = \pi-(\alpha+\beta)$. На крајот од $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$ ја одредуваме и страната c: $c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$. ♦

Да го продискутираме решението на оваа задача. Видовме, аголот β го одредуваме од равенката

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha\ . \tag{3}$$

Од планиметријата знаеш дека:

1°. Ако се дадени две страни на триаголникот и аголот што лежи спроти поголемата од нив, тогаш задачата секогаш има решение и тоа само едно. Велиме, дека во тој случај *триаголникот е еднозначно определен.*

Пример 70. Да се реши триаголник според дадени две страни $b = 4{,}8$ *(cm)*, $c = 7{,}2$ *(cm)* и аголот $\gamma = 85^o45'$, што лежи спроти поголемата дадена страна c.

Решение. Од $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ добиваме:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c} = \frac{4{,}8\cdot\sin 85^o45'}{7{,}2} \approx \frac{4{,}8\cdot 0{,}997}{7{,}2} \approx 0{,}6648,$$

т.е. $\sin\beta \approx 0{,}6648$. Оттука $\beta \approx 41^o40'$ или $\beta_1 \approx 180^o - \beta = 138^o20'$, но $\alpha_1 = 180^o - (\gamma + \beta_1) = 180^o - 224^o05' < 0$. Затоа останува само $\beta \approx 41^o40'$. Од $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ наоѓаме, $\alpha = 180^o - (\beta + \gamma) = 180^o - 127^o25' = 52^o35'$, а од $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ наоѓаме:

$$a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{7{,}2\cdot\sin 52^o35'}{\sin 85^o45'} \approx \frac{7{,}2\cdot 0{,}792}{0{,}997} \approx 5{,}7\ (cm).\ ♦$$

2^o. Ако, пак, се дадени две страни на триаголникот и остриот агол што лежи спроти помалата страна од нив, тогаш постојат три можности:

а) задачата нема решение. Тоа значи дека, не постои триаголник со дадените елементи; или

б) задачата има едно решение (само ако триаголникот е правоаголен), или

в) задачата има две различни решенија, поради што велиме – задачата со дадените елементи *е неопределена*, или поточно – *задачата е нееднозначно определена.*

Кој од наведените случаи ќе биде, тешко можеме да утврдиме од дадените елементи, сè додека не ја определиме вредноста на $\sin\beta$ од равенката (3). Потоа заклучуваме:

Ако $\sin\beta > 1$, тогаш задачата нема решение; ако $\sin\beta = 1$, тогаш задачата има едно решение, и притоа, триаголникот е правоаголен ($\beta = 90^o$); а ако $\sin\beta < 1$, тогаш задачата има две различни решенија.

Пример 71. Да се реши триаголникот, ако се дадени: две страни $a = 15$, $b = 10$ и аголот спроти помалата страна $\beta = 75^o$.

Решение. Бидејќи дадениот агол β лежи спроти помалата од дадените две страни, неизвесно е дали задачата ќе има или ќе нема решение. За утврдување на тоа, потребно е да ја одредиме вредноста на $\sin\alpha$. Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ наоѓаме $\sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\beta}{b}=\frac{15\cdot\sin 75^o}{10}=1{,}5\cdot 0{,}9659$ $\approx 1{,}45$. Бидејќи $\sin\alpha = 1{,}45 > 1$, тоа значи дека задачата нема решение. ♦

Пример 72. Да се реши триаголник, ако се дадени: $a = 167{,}9$, $c = 246{,}2$ и $\alpha = 43^o$.

Решение. Од $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$ имаме $\sin\gamma=\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{246{,}2\cdot 0{,}6820}{167{,}9}\approx 1{,}000$. Значи, $\gamma = 90^o$, $\beta = 90^o - \alpha = 47^o$. Потоа добиваме $b = c\cdot\cos\alpha = 246{,}2\cdot 0{,}7314 = 180{,}1$.

Триаголникот е правоаголен. Задачата има само едно решение. ♦

Пример 73. За триаголникот *ABC* дадени се: $a = 16$, $c = 9{,}53$ и $\gamma = 23^o30'$. Да ги одредиме елементите: b, α и β.

Решение: Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$, добиваме $\sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\gamma}{c}\approx\frac{16\cdot 0{,}3987}{9{,}53}\approx 0{,}6694$. Оттука $\alpha_1 \approx 42^o$ или $\alpha_2 = 180^o - 42^o = 138^o$. Значи, задачата има две решенија. Првото е

$$\beta_1 = 180^o - (\alpha_1 + \gamma) = 180^o - 65^o30' = 114^o30',\ b_1 = \frac{c\cdot\sin\beta_1}{\sin\gamma} = \frac{9{,}53\cdot\sin 114^o30'}{\sin 23^o30'} \approx \frac{9{,}53\cdot 0{,}91}{0{,}3987} \approx 21{,}75\ ,$$

а второто е

$$\beta_2 = 180^o - (\alpha_2 + \gamma) = 180^o - 161^o30' = 18^o30',\ b_2 = \frac{c\cdot\sin\beta_2}{\sin\gamma} = \frac{9{,}53\cdot\sin 18^o30'}{\sin 23^o30'} \approx \frac{9{,}53\cdot 0{,}3173}{0{,}3987} \approx 7{,}58\ .\ ♦$$

ЗАДАЧИ

Реши го триаголникот *ABC*, ако се дадени (1 – 7):

1. $b = 5{,}2$, $\alpha = 37^o$, $\gamma = 84^o$. **2.** $a = 14{,}2$, $\beta = 63^o$, $\gamma = 58^o$.

3. а) $b = 8{,}8$, $c = 5{,}5$ и $\beta = 45^o$; б) $a = 5{,}7$, $c = 9{,}5$ и $\alpha = 72^o$.

4. а) $\alpha = 54^o15'$, $\beta = 75^o$ и $b = 11{,}5$; б) $\beta = 122^o$, $\gamma = 45^o$, $c = 7{,}8$.

5. а) $\beta = 28^{\circ}40'$, $\gamma = 115^{\circ}$ и $a = 12$; б) $\alpha = 42^{\circ}45'$, $\gamma = 58^{\circ}$, $b = 15{,}8$.

6. а) $\alpha = 75^{\circ}30'$, $a = 12$ и $b = 9{,}4$; б) $b = 25{,}4$, $c = 15{,}8$ и $\gamma = 74^{\circ}$.

7. а) $a = 14{,}5$, $b = 18$ и $\alpha = 48^{\circ}30'$; б) $b = 8{,}4$, $c = 10{,}5$ и $\beta = 37^{\circ}15'$.

8. Реши го триаголникот по дадени два агла $\alpha = 48^{\circ}$, $\beta = 72^{\circ}$ и радиусот на опишаната кружница околу него $R = 15$.

9. Дали е точно тврдењето: Односот на кои било две страни во триаголникот е еднаков на односот на синусите на нивните спротивни агли?

10. Реши го рамнокракиот триаголник *ABC*, ако се дадени: неговата основа $a = 7{,}8$ и аголот при основата $\alpha = 70^{\circ}$.

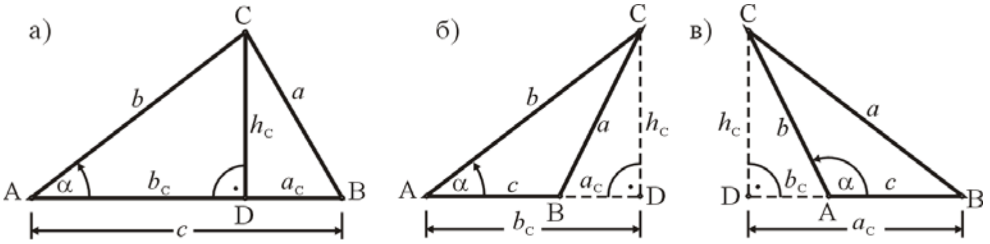
II.22. КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

Да ја докажеме следнава теорема.

Теорема 17 (косинусна теорема). Квадратот на која било страна на триаголникот е еднаков на збирот од квадратите на другите две страни минус удвоениот производ на тие две страни и косинусот на аголот што е заклучен меѓу нив, т.е.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

Доказ. Случај а) Аголот α е остар. Нека $\overline{CD} = h_c$ е висина на триаголникот *ABC* спуштена од темето *C* кон страната *c*. Висината *CD* го дели триаголникот *ABC* на два правоаголни триаголника *ACD* и *BDC* (црт. 70).



црт. 70

Од правоаголниот триаголник *BDC*, согласно Питагоровата теорема, имаме:

$$a^2 = h_c^{\,2} + a_c^{\,2}. \tag{2}$$

Да ги одредиме одделно $h_c^{\,2}$ и $a_c^{\,2}$. Од правоаголниот триаголник *ACD*, наоѓаме $h_c^{\,2} = b^2 - b_c^{\,2}$. За одредување, пак, на $a_c^{\,2}$ се јавуваат два случаја:

а) $a_c = c - b_c$ (црт. 70 а); б) $a_c = b_c - c$ (црт. 70 б).

Меѓутоа, и во двата случаја добиваме:

$$a_c^{\,2} = (c - b_c)^2 = (b_c - c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^{\,2}.$$

Ако најдените изрази за $h_c{}^2$ и $a_c{}^2$ ги внесеме во равенството (2), добиваме:

$$a^2 = h_c{}^2 + a_c{}^2 = b^2 - b_c{}^2 + c^2 - 2cb_c + b_c{}^2 = b^2 + c^2 - 2\ cb_c.$$

Меѓутоа, од триаголникот ACD (црт. 70 а) имаме $b_c = b \cdot \cos\alpha$.

Така, конечно, добиваме: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Случај б). Аголот α е тап (црт. 70 в). Од правоаголниот триаголник BCD согласно Питагоровата теорема, наоѓаме:

$$a^2 = h_c{}^2 + a_c{}^2. \tag{3}$$

Да ги одредиме одделно $h_c{}^2$ и $a_c{}^2$. Од триаголникот ACD имаме: $h_c{}^2 = b^2 - b_c{}^2$, а за $a_c{}^2$ добиваме: $a_c{}^2 = (b_c + c)^2 = b_c{}^2 + 2cb_c + c^2$. Со внесувањето на најдените изрази за $h_c{}^2$ и $a_c{}^2$ во (2), добиваме:

$$a^2 = h_c{}^2 + a_c{}^2 = b^2 - b_c{}^2 + b_c{}^2 + 2cb_c + c^2 = b^2 + 2\ cb_c + c^2.$$

Но, од триаголникот ACD наоѓаме: $b_c = b\cdot\cos\,(180^\circ - \alpha) = -b\cdot\cos\alpha$.

Така и во овој случај добиваме: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Косинусната теорема важи и кога аголот α е прав, бидејќи во тој случај равенството (1) преминува во Питагоровата теорема $a^2 = b^2 + c^2$. ♦

Оттука заклучуваме, дека косинусната теорема е генерализација на Питагоровата теорема за произволен триаголник.

Косинусната теорема, како и синусната теорема, овозможува решавање на разновидни задачи врзани за произволен триаголник.

Пример 74. Дадени се двете страни на паралелограмот $ABCD$, $a = 6$ и $b = 4{,}5$, како и аголот $\alpha = 75^\circ$ меѓу нив. Да ги одредиме неговите дијагонали $d_1 = \overline{BD}$ *и* $d_2 = \overline{AC}$.

Решение. Од триаголниците ABD и ABC, согласно косинусната теорема, наоѓаме:

$$d_1{}^2 = \overline{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 6^2 + 4{,}5^2 - 2\cdot6\cdot4{,}5\cdot\cos75^\circ =$$

$$= 36 + 20{,}25 + 54\cdot0{,}2588 = 56{,}25 - 13{,}9752 = 42{,}2748$$

а оттука $d_1 = \overline{BD} = \sqrt{42{,}2748} \approx 6{,}5$. Потоа,

$$d_2{}^2 = \overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\,(180^\circ - \alpha) = 6^2 + 4{,}5^2 - 2ab\,(-\cos\alpha)$$

$$= 36 + 20{,}25 + 2\cdot6\cdot4{,}5 \cdot 0{,}2588 = 56{,}25 + 13{,}9752 = 70{,}2252,$$

а оттука $d_2 = \overline{AC} = \sqrt{70{,}2252} \approx 8{,}4$.

Значи, бараните дијагонали на паралелограмот $ABCD$ се: $d_1 \approx 6{,}5$ и $d_2 \approx 8{,}4$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја должината b на страната AC на триаголникот ABC, ако: а) $a = 12$, $c = 7$ и $\beta = \frac{\pi}{3}$; б) $a = 9{,}2$, $c = 15$ и $\beta = 120^\circ$.

2. Докажи дека – ако за еден триаголник *ABC* важи:

а) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, тогаш $\alpha = 60^o$; б) $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, тогаш $\alpha = 120^o$.

3. Пресметај ја должината на страната *AD* на тетивен четириаголник *ABCD*, ако $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 8$ и $\angle BCD=60^o$.

4. Докажи, ако во еден триаголник важи равенството $\frac{a-b}{a} = 1 - 2\cos\gamma$, тогаш триаголникот е рамнокрак.

5. Од една иста точка, истовремено, започнуваат да се движат две тела рамномерно праволиниски, едното со брзина 9 *m/s*, а другото со брзина 15 *m/s*. На колкаво растојание ќе бидат едно од друго по 7 секунди од тргнувањето, ако нивните насоки на движење зафаќаат агол од 60^o?

6. Одреди го аголот α на триаголникот *ABC*, чии страни се: $a = 4$, $b = 7$ и $c = 9$.

7. Пресметај го најголемиот внатрешен агол на триаголникот *ABC*, ако се дадени неговите страни: а) $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$; б) $a = 20$, $b = 7$, $c = 13$.

II.23. РЕШАВАЊЕ НА ОСНОВНИ ЗАДАЧИ ЗА КОЈ БИЛО ТРИАГОЛНИК

Со примена на косинусната теорема многу лесно се решаваат следниве две основни задачи за решавање на произволен триаголник:

Задача III. Да се реши триаголник по дадени две страни и аголот меѓу нив.

Решение. Нека се дадени страните *a*, *b* и аголот γ меѓу нив. Прво ја наоѓаме третата страна *c*. Од равенството $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$, имаме

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}\,.$$

За пресметување на аглите α и β, исто, може да се користи косинусната теорема. Така од $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos a$, наоѓаме $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, а $\beta = 180^o - (\alpha + \gamma)$.

Меѓутоа, за одредување на аголот α може да се користи и синусната теорема, имено од $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, имаме $\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$. ♦

Пример 75. За ΔABC *дадени се:* $b = 7$, $c = 12$ *и* $\alpha = 110^o$. *Да ги одредиме елементите:* a, β *и* γ.

Решение. Од $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, добиваме

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha} = \sqrt{49 + 144 - 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \cos 110^o} = \sqrt{250{,}456} \approx 15{,}8.$$

Потоа од $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$, односно од

$$\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{144+250{,}456-49}{24 \cdot 15{,}18} = 0{,}9110\text{, добиваме } \beta = 24^o21'.$$

Тогаш $\gamma = 180^o - (\alpha + \beta) = 180^o - (110^o + 24^o21') = 180^o - 134^o21' = 45^o39'$. ♦

Задача IV. Да се реши триаголникот *ABC*, кога се дадени трите негови страни *a*, *b* и *c*.

Решение. Аглите α и β може да се пресметаат од равенствата:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta,$$

односно од $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$. Бидејќи α, $\beta \in (0,\pi)$, тогаш од нив ги добиваме α и β, а третиот агол γ ќе биде $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. ♦

Пример 76. Да го решиме триаголникот *ABC*, чии страни се: $a = 38$, $b = 52$, $c = 74$.

Решение. Од равенството $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ добиваме: $\cos\alpha = \frac{52^2+74^2-38^2}{2\cdot 52\cdot 74} = 0{,}8753$, а од $\cos\alpha = 0{,}8753$, наоѓаме $\alpha = 28^\circ 55'$.

Аналогно од $\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{74^2+38^2-52^2}{2\cdot 74\cdot 38} = 0{,}7496$, добиваме $\beta = 41^\circ 27'$, а третиот агол γ ќе биде: $\gamma = 180^\circ - (28^\circ 55' + 41^\circ 27') = 180^\circ - 70^\circ 22' = 109^\circ 38'$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Реши го триаголникот *ABC* според дадените:

а) $b = 8$, $c = 11$ и $\gamma = 75^\circ$; б) $a = 15$, $c = 18$ и $\beta = 58^\circ 30'$.

2. За триаголникот *ABC* дадено е: $a = 105$, $b = 84$ и $\gamma = 48^\circ 30'$. Одреди ја третата страна на триаголникот *ABC*.

3. Реши го триаголникот *ABC* по трите негови страни: $a = 40$, $b = 55$, $c = 70$.

4. Одреди ги аглите на триаголникот, ако се познати трите негови страни:

$$a = 24{,}5,\ b = 18 \text{ и } c = 35{,}4.$$

Реши го триаголникот *ABC* ако се дадени следниве негови елементи (5 – 8):

5. а) $a = 4{,}5$, $b = 7$, $\gamma = 72^\circ$; б) $a = 14{,}5$, $c = 18$, $\beta = 54^\circ$.

6. а) $c = 0{,}48$, $b = 0{,}72$, $\alpha = 35^\circ$; б) $a = 4{,}3$, $c = 3$, $\beta = 60^\circ$.

7. а) $a = 20$, $b = 9{,}5$, $c = 20{,}8$; б) $a = 3$, $b = 5$, $c = 3{,}8$.

8. а) $a = 12$, $b = 8$, $c = 10$; б) $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$.

9. Во триаголникот *ABC* дадени се аглите $\beta = 23^\circ 35'$ и $\gamma = 53^\circ 08'$. Колку пати страната b е помала од страната c?

10. Во триаголникот *ABC* познати се аглите $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$. Одреди го односот на страната a кон страната c.

11. Во триаголникот *ABC* дадени се страните $b = \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$ и аголот $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Одреди го аголот γ на триаголникот.

12. За триаголникот *ABC* дадено е: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ и $b = 10\sqrt{2}$. Одреди ја страната a на триаголникот.

13. Во ΔABC дадено е: $\alpha = 30^\circ$, $b = 75^\circ$ и $a = \sqrt{18}$. Одреди ја најголемата страна на триаголникот.

14. За ΔABC дадено е: $\alpha = 100^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ и $b = 8{,}2$. Одреди ја најмалата страна на триаголникот.

II.24. ФОРМУЛИ ЗА ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

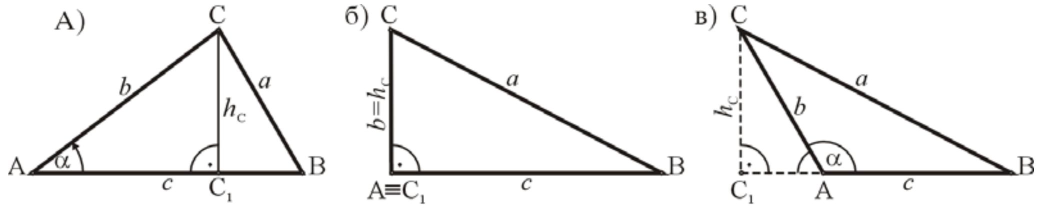
(за оние што сакаат да знаат повеќе)

Од основното училиште знаеш дека: плоштината на триаголникот е еднаква на полупроизводот од која било негова страна и соодветната висина, т.е. $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$. Сега ќе изведеме и други формули за одредување на плоштината на триаголникот.

Теорема 18. Плоштината на триаголникот е еднаква на полупроизводот од кои било две негови страни и синусот на аголот меѓу нив, т.е.

$$P=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot ac\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin\gamma\,. \tag{1}$$

Доказ. Да го разгледаме триаголникот *ABC*, во кој $\overline{CC_1}=h_c$ е висина спуштена од темето *C* кон страната *AB* (црт. 71).



црт. 71

За аголот α постојат три можности:

1°. $\alpha<\frac{\pi}{2}$. Од правоаголниот триаголник ACC_1 (црт. 71 а) имаме $\frac{h_c}{b}=\sin\alpha$ од каде $h_c=b\cdot\sin\alpha$. Тогаш $P=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$.

2°. $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Тогаш $P=\frac{1}{2}cb=\frac{1}{2}cb\cdot\sin\frac{\pi}{2}$, бидејќи $\sin\frac{\pi}{2}=1$. Значи, важи $P=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$.

3°. $\alpha>\frac{\pi}{2}$. Од правоаголниот триаголник ACC_1 (црт. 71 в) имаме: $\frac{h_c}{b}=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, од каде $h_c=b\sin\alpha$. Значи, и во тој случај $P=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$.

Аналогно, важат и формулите $P=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$ и $P=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$, и со тоа теоремата е докажана. ♦

Од синусната теорема имаме: $b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$ и $c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Ако овие изрази за *b* и *c* ги замениме во формулата (1), ја добиваме следнава нова формула за плоштина на триаголник:

$$P=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}\,. \tag{2}$$

Аналогно, важат и формулите: $P=\frac{b^2\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{2\sin\beta}$ и $P=\frac{c^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\gamma}$.

Овие формули ги користиме, кога се дадени една страна и кои било два агла на триаголникот.

Пример 77. Во триаголникот *ABC,* дадени се страните $b=26{,}4$, $c=18{,}5$ и аголот меѓу нив $\alpha=115^{\circ}30$. Да ја пресметаме неговата плоштина.

Решение: Од формулата (1), добиваме:

$$P=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot26{,}4\cdot18{,}5\cdot\sin115^{\circ}30'\approx244{,}2\cdot0{,}9026\approx220{,}4. \ ♦$$

Пример 78. Да ја пресметаме плоштината на триаголникот ABC, ако се дадени: страна $a=7{,}5$ и аглите $\alpha=65^{\circ}$ и $\beta=82^{\circ}$.

Решение. Третиот агол е $\gamma = 180^o - (65^o + 82^o) = 33^o$. Од формулата (2) наоѓаме:

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{7{,}5^2 \cdot \sin 82^o \cdot \sin 33^o}{2\sin 65^o} \approx \frac{56{,}25 \cdot 0{,}9903 \cdot 0{,}5446}{2 \cdot 0{,}9063} \approx 16{,}74. \ \blacklozenge$$

Сега ќе се запознаеме како ја одредуваме плоштината на триаголник, кога се дадени неговите три страни.

Теорема 19. Ако a, b и c се должини на страните на триаголникот, а s – полупериметар на триаголникот, тогаш важи Хероновата формула за плоштина на триаголникот:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ . \tag{3}$$

Доказ. Од косинусната теорема $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, имаме $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, а оттука

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}} = \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)[2bc-(b^2+c^2-a^2)]} = \frac{1}{2bc}\sqrt{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}\ .$$

Ако земеме предвид дека: $a + b + c = 2s$, $a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s - c)$, $a - b + c = 2(s - b)$, $-a + b + c = 2(s - a)$, тогаш наоѓаме:

$$\sin\alpha = \frac{4}{2bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

Ако сега изразот за $\sin\alpha$ го замениме во формулата за плоштина (1), тогаш од неа добиваме:

$$P = \frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin\alpha = \frac{bc}{2}\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ . \ \blacklozenge$$

Пример 79. Да ја пресметаме плоштината на триаголник, чии страни се: $a = 18$, $b = 22$, $c = 32$.

Решение. Имаме: $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+22+32}{2} = 36$, па е

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{36(36-18)(36-22)(36-32)} = 72\sqrt{7}\ .$$

Теорема 20. За плоштината на триаголник важат формулите:

$$P = \frac{abc}{4R}, \tag{4}$$

$$P = sr, \tag{5}$$

каде R е радиусот на опишаната кружница, а r е радиусот на впишаната кружница.

Доказ. Користејќи ги формулата (1) и синусната теорема, добиваме:

$$P = \frac{1}{2}\cdot bc\sin\alpha = \frac{abc}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{abc}{2}\cdot\frac{1}{\frac{a}{\sin\alpha}} = \frac{abc}{2}\cdot\frac{1}{2R} = \frac{abc}{4R}\ .$$

Нека O е центарот на впишаната кружница. Тогаш

$$P = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{2sr}{2} = sr\ . \ \blacklozenge$$

З А Д А Ч И

1. Со зборови искажи ја формулата (2).

2. Пресметај ја плоштината на триаголникот, според неговите основни елементи: $a = 4{,}8$ $b = 8$ и $\gamma = 52^o$.

3. Пресметај ја плоштината на триаголникот, според неговите основни елементи: $\alpha = 25^o$, $b = 59^o$ и $c = 28$.

4. Пресметај ја плоштината на триаголник, чии страни се: $a = 25$, $b = 30$, $c = 43$.

5. Пресметај ја плоштината на триаголник, ако се дадени аглите $\alpha = 48^o$, $\beta = 75^o$ и радиусот на впишаната кружница $r = 5$.

Пресметај ја плоштината на триаголник, ако се дадени:

6. а) $a = 9$, $b = 12$ и $\gamma = 58^o$; б) $b = 4{,}5$, $c = 8$ и $\alpha = 120^o$.

7. а) $a = 9$, $\alpha = 54^o$ и $\beta = 75^o$; б) $b = 15$, $\alpha = 34^o30'$ и $\gamma = 70^o$.

8. а) $a = 18$, $b = 14$ и $c = 25$; б) $a = 9{,}5$, $b = 14{,}5$ и $c = 20$.

9. а) $R = 12$, $b = 8$ и $\alpha = 48^o$; б) $R = 7{,}5$, $c = 6$ и $\beta = 62^o$.

10. Определи ја плоштината на паралелограм, според дадени две страни a и b и аголот α меѓу нив.

11. Докажи дека плоштината на триаголник со страни a и b и агол меѓу нив 120^o е еднаква на $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

12. Упрости ја Хероновата формула за случај на рамностран триаголник.

II.25. ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИЈАТА

Тригонометријата наоѓа широка примена во решавањето на разни задачи од геометрија, физика, геодезија и практичниот живот. Преку конкретни примери да се запознаеме со некои поважни примени.

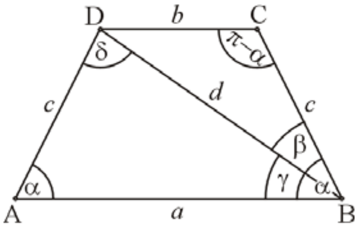
Примена во геометријата. При одредувањето на елементите на геометриските фигури, истите ги разделуваме на триаголници, преку чие последователно решавање ги пресметуваме и бараните елементи на соодветната фигура.

Пример 80. Да се пресмета плоштината на рамнокрак трапез *ABCD,* што е зададен со дијагоналата $d = 7{,}5$ *(cm),* малата основа $b = 2{,}5$ *(cm)* и остриот агол $\alpha = 54^o$.

Решение. Дијагоналата *BD* го разделува аголот α на два дела β и γ, а трапезот на два триаголника *ABD* и *BCD* (црт. 72). За пресметување на плоштината потребно е претходно да ги одредиме долната основа a и кракот c на трапезот.

Од триаголникот *BCD*, согласно синусната теорема $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin(\pi-\alpha)}$, имаме:

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin(\pi-\alpha)}{d} = \frac{2{,}5\cdot 0{,}809}{7{,}5} = 0{,}2697 .$$



црт. 72

Оттука $\beta=15^o39'$. Потоа добиваме:

$\gamma = \alpha-\beta=54^o-15^o39' = 38^o21'$, $\delta = 180^o-(\alpha+\gamma)=180^o-92^o21'=87^o39'$.

Сега од триаголникот *ABD*, пак, од синусната теорема добиваме:

$$\frac{a}{\sin\delta} = \frac{d}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\alpha} .$$

Од нив наоѓаме:

$$a = \frac{d\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{7{,}5\cdot 0{,}9992}{0{,}8090} \approx 9{,}3(cm)\,, \quad c = \frac{d\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{7{,}5\cdot 0{,}6203}{0{,}8090} \approx 5{,}8(cm)\,.$$

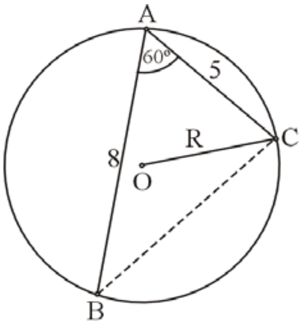
Плоштината на трапезот е еднаква на збирот на плоштините на триаголниците *ABD* и *BCD*, односно

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot ac\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot bc\sin(\pi-\alpha) = \frac{1}{2}\cdot(a+b)c\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(9{,}3+2{,}5)7{,}5\cdot 0{,}8090 = 35{,}8(cm^2). \ \blacklozenge$$

Пример 81. Во кружницата *k* дадени се две тетиви $\overline{AB} = 8(cm)$ и $\overline{AC} = 5\ (cm)$, кои меѓусебе зафаќаат агол 60°. Да го пресметаме радиусот на кружницата.

Решение. Со примена на косинусната теорема ја одредуваме должината на тетивата *BC* – трета страна на триаголникот *ABC*, што е впишан во кружницата *k* (црт. 73).



црт. 73

$\overline{BC}^2 = 8^2+5^2 - 2\cdot8\cdot5\cdot\cos60^2 = 64+25 - 80\cdot\frac{1}{2} = 49$, однсоно $\overline{BC} = 7\ (cm)$.

Триаголникот *ABC* има плоштина: $P = \frac{1}{2}\cdot8\cdot5\cdot\sin60^o = 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

На крајот од формулата $P = \frac{abc}{4R}$, односно $R = \frac{abc}{4P}$ добиваме:

$$R = \frac{8\cdot5\cdot7}{4\cdot10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}04(cm).$$

Значи, кружницата има радиус $R \approx 4\ (cm)$. ♦

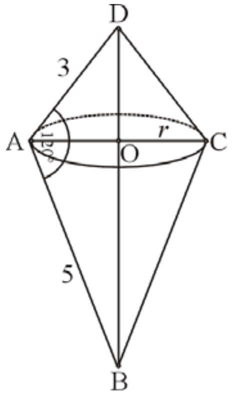
Пример 82. Делтоид со страни *a* = 3 *и b* = 5, и агол меѓу нив 120°, ротира околу својата оска. Да го пресметаме волуменот на ротационото тело.

Решение. Ротационото тело е составено од два слепени конуса со заеднички радиус $r = \overline{OA}$ и висини $H_1 = \overline{OB}$ и $H_2 = \overline{OD}$ (црт. 74). Според тоа:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2 H_1 + \frac{1}{3}\cdot\pi r^2 H_2 = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2(H_1+H_2)\,.$$

Значи, за одредување на волуменот на добиеното ротационо тело, потребно е да ги одредиме дијагоналите $\overline{AC}$ и $\overline{BD} = H_1 + H_2$. Од конусната теорема за триаголникот *BCD*, добиваме:

$\overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cos120^o = 24 + 9 + 30\cdot\frac{1}{2} = 49$, т.е. $\overline{BD} = 7$.



црт. 74

Плоштината на триаголникот *BCD* може да се одреди на два начина $P = \frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{OC}$ и $P = \frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin120^o = \frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

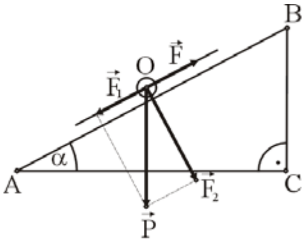
Оттука $\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{OC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, односно $\frac{1}{2}\cdot7\cdot r = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, од каде $r = \frac{15\sqrt{3}}{14}$.

На крајот за волуменот добиваме:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2(H_1+H_2) = \frac{1}{3}\cdot\pi(\frac{15\sqrt{3}}{14})^2\cdot7 \approx 25{,}235\,. \ \blacklozenge$$

Примена во физиката. Тригонометријата има голема примена во разни делови од физиката.

Пример 83. Метална топка со тежина $\vec{P}$, поставена е на стрмна рамнина *AB*, чиј наклон е α. Со каква сила $\vec{F}$ (во правец на рамнината) може да се задржи топката на рамнината?

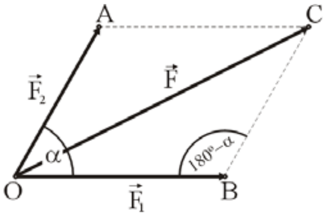


црт. 75

Решение. Тежината на топката $\vec{P}$ ја разложуваме на две компоненти $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, од кои $\vec{F}_1$ да има правец паралелен со стрмната рамнина, а $\vec{F}_2$ правец нормален на рамнината (црт. 75). За да се задржи топката на рамнината треба да се дејствува со сила $\vec{F}$, која ќе има иста големина со силата $\vec{F}_1$, но спротивна насока од нејзината. Од цртежот 75 гледаме $\angle OPF_1 = \angle BAC = \alpha$ (како агли со заемно нормални краци).

Од правоаголниот триаголник OPF_1 имаме:

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|P|} = \sin\alpha \text{, значи: } |\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{P}| \cdot \sin\alpha \text{ . } \blacklozenge$$



црт. 76

Пример 84. Да ја одредиме големината (интензитетот) на резултантата $\vec{F}$ на две сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, чии насоки градат агол α.

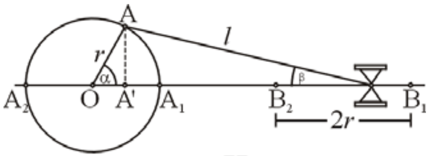
Решение. За да се одреди големината на резултантата $\vec{F}$, доволно е да се пресмета должината на страната *OC* на триаголникот *OBC* (црт. 76). Од косинусната теорема имаме:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{OB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\pi - \alpha)\text{ ,}$$

односно $\left|\vec{F}\right|^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2 + 2\left|\vec{F}_1\right| \cdot \left|\vec{F}_2\right| \cdot \cos\alpha$. ♦

Пример 85. Вртењето на коленото *OA* во накрсната глава се пренесува преку моторниот лост $\overline{AB} = l$ на клипот *B*, кој се лизга (движи) по правата B_1B_2 (црт. 77). Да ги одредиме:

а) аголот β, што лостот *AB* *го* зафаќа со неговата хоризонтална положба, ако коленото $\overline{OA} = r$ се свртело за агол α,



црт. 77

б) растојанието $\overline{OB}$ при тоа свртување и

в) оддалеченоста на клипот *B* од неговата мртва точка B_1.

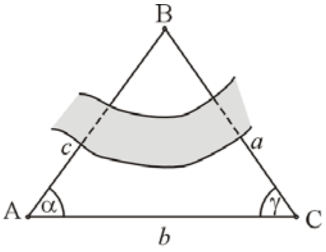
Решение. Од триаголникот *AOB* имаме: а) $\frac{r}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\alpha}$, од каде $\sin\beta = \frac{r}{l} \cdot \sin\alpha$. Во многу механизми е $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$. Тогаш $\sin\beta = \frac{1}{5} \cdot \sin\alpha$.

б) $\overline{OB} = \overline{OA'} + \overline{A'B} = r\cos\alpha + l\cos\beta$.

в) $\overline{BB_1} = \overline{OA_1} + \overline{A_1B_1} - \overline{OB} = r + l - (r\cos\alpha + l\cos\beta) = r\,(1 - \cos\alpha) + l(1 - \cos\beta)$. ♦

Примена во практичниот живот. Со примена на тригонометријата се решаваат и многу задачи од практиката.

Пример 86. Треба да се одреди растојанието од достапната точка *A* до недостапната точка *B*, но која е видлива од *A*, а и двете точки лежат во иста хоризонтална рамнина (црт. 78).



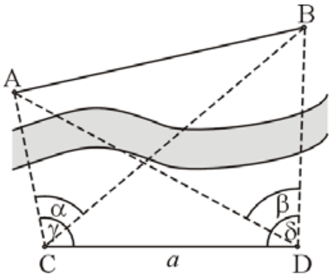
црт. 78

Решение. Во близина на точката *A* избираме достапна точка *C*, од која е видлива точката *B*. Растојанието $\overline{AC}=b$ и аглите α и γ ги мериме непосредно на теренот (црт. 78).

Бараното растојание $\overline{AB}=c$ го наоѓаме, според синусната теорема од триаголникот *ABC*: $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}$ од каде

$$c=\frac{b\sin\gamma}{\sin[\pi-(\alpha+\gamma)]}=\frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\text{ . ♦}$$

Пример 87. Треба да се одреди растојанието меѓу две недостапни точки *A* и *B* од пунктовите *C и D*, но, да се видливи од нив. Распоредот на точките е даден на цртежот 79.



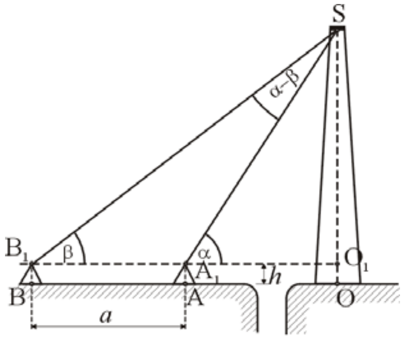
црт. 79

Решение. На теренот, непосредно, го мериме растојанието $\overline{CD}=a$ меѓу достапните точки *C* и *D*, а ги мериме и аглите: ∠*ACB* = α, ∠*ACD* = γ, ∠*BDA* = β и ∠*BDC* = δ (црт. 79). Од триаголникот *ACD* го одредуваме растојанието $\overline{AC}$, а од триаголникот *BCD* го одредуваме растојанието $\overline{BC}$, на начин како во претходниот пример:

$$\overline{AC}=\frac{a\cdot\sin(\delta-\beta)}{\sin(\gamma+\delta-\beta)},\quad \overline{BC}=\frac{a\cdot\sin\delta}{\sin(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

Сега за триаголникот *ABC* знаеме две страни $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, и аголот меѓу нив α (црт. 79). Врз основа на косинусната теорема ја пресметуваме третата страна $\overline{AB}$ – бараното растојание меѓу точките *A* и *B*: $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\alpha}$. ♦

Пример 88. Треба да се одреди висината на фабрички оџак, чија основа е недостапна, а се наоѓа на хоризонтална рамнина.



црт. 80

Решение. Во хоризонтална рамнина избираме две точки *A* и *B*, кои со врвот на оџакот лежат во една вертикална рамнина и од нив се гледа врвот *S* (црт. 80). Го мериме растојанието $\overline{AB}$, а исто и аглите α и β на триаголникот SA_1B_1. Врз основа на синусната теорема од ΔSA_1B_1, имаме:

$$\overline{A_1S}:\sin\beta=a:\sin(\alpha-\beta)\text{ , од каде }\overline{A_1S}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Ако h е висината на мерниот инструмент за аглите – теоделитот, тогаш бараната висина на оџакот, ќе биде: $\overline{OS}=\overline{OO_1}+\overline{O_1S}=h+\overline{A_1S}\cdot\sin\alpha=h+\frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

ЗАДАЧИ

1. Во правоаголник *ABCD* дадена е дијагоналата *d* и аголот α меѓу дијагоналите. Одреди ги плоштината и периметарот на правоаголникот.

2. Аголот меѓу бочниот раб на правилна четириаголна пирамида и рамнината на основата изнесува 72°. Пресметај ја плоштината и волуменот на пирамидата, ако нејзината висина е 12.

3. На една жичарница со должина 1500 *m* и висинска разлика 75 *m* се движат вагонетки со тежина 1800 *N*. Колкава сила е потребна за движење – искачување на една вагонетка, ако се занемари триењето?

4. Една лотка ја влечат со две јажиња, кои зафаќаат агол 50° со сили 15 *N* и 18 *N*. Одреди ја нивната резултанта.

5. Одреди го растојанието меѓу точките *A* и *B* на земјината површина, ако меѓу нив има некој рид.

6. Одреди ја висината на едно дрво, што се наоѓа на хоризонтална рамнина и подножјето му е достапно.

7. Во четириаголникот *ABCD*, два од спротивните агла се прави, а дијагоналата d = 8, што ги сврзува другите два агла, го разделува едниот од нив на делови α_1 = 15° и α_2 = 35°. Да се одреди другата дијагонала и плоштината на четириаголникот.

8*. Паралелограмот *ABCD* со периметар 2*s* има висини h_1 и h_2. Одреди ги неговите агли.

9. Докажи дека плоштината на четириаголникот е еднаква на полупроизводот од дијагоналите и синусот на аголот меѓу нив.

10*. Трапез со основи a и b и агли α и β, што лежат на големата основа, се врти околу големата основа. Одреди го волуменот на добиеното ротационо тело.

11. Основата на една триаголна пирамида е правоаголен триаголник со остар агол α = 40°. Секој од бочните рабови на пирамидата s = 7 (*cm*) со основата гради агол β = 50°. Пресметај го волуменот на пирамидата.

12*. Во топка со радиус *R*, впишана е правилна триаголна пирамида, кај која аголот меѓу два бочни раба е α. Одреди го бочниот раб на пирамидата.

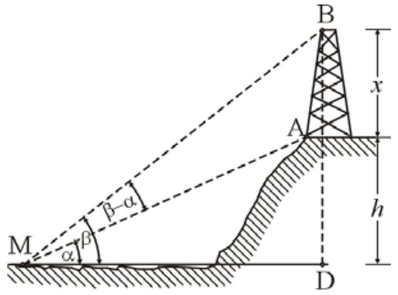
13. Вагон со тежина $9{,}8\cdot10^7$ *N* поставен е на железничка линија, која има наклон 3°. Со каква сила може да се задржи вагонот во мирување?

14. Каков агол на стрмнина има железничка линија, чиј наклон е 2,5%?

15. Две сили F_1 = 12 *N* и F_2 = 18 *N* дејствуваат на точка *A* под агол меѓу себе α = 24°30’. Одреди ја големината на нивната резултанта.

16. На една страна од реката обележани се две точки *A* и *B*, чие растојание е $\overline{AB}$ = a = 120 *m*. Пресметај го растојанието меѓу точките *C* и *D*, кои се наоѓаат на спротивната страна на реката, ако $\angle BAC = \alpha$ = 82°30’, $\angle BAD = \beta$ = 38°20’, $\angle ABD = \gamma$ = 34°40’ и $\angle ABC = \delta$ = 40°30’.

17. На рид со висина *h* се наоѓа телевизиска антена (црт. 81). Од точката *M* во подножјето на ридот, основата на антената *A* се гледа под агол α, а нејзиниот врв *B* – под агол β. Одреди ја висината на антената.



црт. 81

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Две сврзани запчести тркала имаат соодветно 40 и 96 запци. Вртењето на малото тркало се пренесува на големото. За кој агол треба да се заврти малото тркало, за да направи големото едно полно завртување?

2. Во кој квадрант производот $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ ќе биде негативен?

3. Одреди ги најголемата и најмалата вредност на функцијата: а) $1 + \sin\alpha$; б) $1 - \cos\alpha$; в) $\cos\alpha - 3$.

4*. Упрости го изразот: а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha$; б) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ и одреди ја неговата дефинициона област.

5. Дадено е $\text{tg}\alpha = n$, каде $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Одреди ги $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

6. Упрости го изразот: $(a\cdot \sin\alpha + b\cdot\cos\alpha)^2 + (a\cdot \cos\alpha - b\cdot\sin\alpha)^2$.

Докажи ги идентитетите (зад. 8-10):

7. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta = 1$.

8*. $\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha} = \text{ctg}\ \alpha$.

9. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = 2\text{tg}\ \alpha$.

10. Пресметај ја вредноста на изразот, без употреба на дигитрон:

а) $\cos^2 25^{o} + \cos^2 35^{o} + \cos^2 45^{o} + \cos^2 55^{o} + \cos^2 65^{o}$;

б) $\text{tg}42^{o} \cdot \text{tg}43^{o} \cdot \text{tg}44^{o} \cdot \text{tg}45^{o} \cdot \text{tg}46^{o} \cdot \text{tg}47^{o} \cdot \text{tg}48^{o}$.

11. Дадено е $\sin\alpha + \text{tg}\alpha = m$, $\text{tg}\alpha - \sin\alpha = n$. Докажи дека $\cos\alpha = \frac{m-n}{m+n}$.

12. Докажи: ако $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, тогаш важи $\alpha + \beta = 90^{o}$.

13. Упрости го изразот: а) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$; б) $\frac{\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})-\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})}$.

14*. Покажи дека важат равенствата:

а) $\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \text{tg}\frac{\alpha}{2}$, б) $\text{tg}\,(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$.

15. Ако $\sin\alpha = c$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, изрази ги преку c изразите: а) $\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$; б) $\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$.

16. Пресметај: а) $\sin55^{o}\cdot\cos10^{o} - \cos55^{o}\cdot\sin10^{o}$; б) $\cos42^{o}\cdot\cos12^{o} + \sin42^{o}\cdot\sin12^{o}$.

Нацртај ги графиците на функциите (зад. 17-20):

17. а) $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})$; б) $y = \sin(3x - \pi)$.

18. а) $y = -\cos(2x + \frac{\pi}{2})$; б) $y = 1 + \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

19. а) $y = \text{tg}\ |x|$; б) $y = |\text{tg}\ x|$.

20. а) $y = \text{ctg}(\frac{\pi}{3} - x)$; б) $y = \text{ctg}(x+1)$.

21. Упрости го изразот: $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Реши ги равенките (зад. 22-29):

22. а) $\sin(\frac{\pi}{6}+x) + \sin(\frac{\pi}{6}-x) = \frac{1}{2}$, б) $\mathrm{tg}\, x \cdot \cos 3x = 0$.

23. а) $\cos x - \sin x = \cos 2x$, б) $(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$.

24. а) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x) = 1$, б) $1-\cos x = \mathrm{tg}\, x - \sin x$.

25. а) $\cos(x+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$, б) $\sin 2x + \sin x = 0$.

26*. а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$, б) $3\cdot\sin 2x = 2\cdot\cos x$.

27. а) $\sin(x + 70^{\circ}) - \cos(x - 70^{\circ}) = 0$, б) $\cos 3x + \cos x = 0$.

28. а) $\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) = 1 - \sin x$, б) $\cos^2\frac{x}{2} = \sin x\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

29*. а) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$, б) $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$.

30*. Одреди ги аглите на правоаголен триаголник, за кој важи $c^2 = 4ab$.

31. Страната на правилен петаголник е долга $a = 9$ *cm*. Одреди го радиусот R на опишаната кружница околу него.

32. Одреди ги дијагоналите на ромбот $ABCD$, ако се дадени страната a и аголот α.

33. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC (со прав агол во темето C) земена е точка T, така што $\angle CAT = \angle ABT = \angle BCT = \varphi$. Докажи дека $\mathrm{tg}\varphi = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

34*. Бисектрисата на внатрешен агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови, што се пропорционални на другите две страни на триаголникот. Докажи.

35. Триаголникот ABC има страни $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$ и $c = 3+\sqrt{3}$. Одреди го аголот α на триаголникот.

36. Пресметај го радиусот R на опишаната кружница и плоштината на триаголникот, според дадените страни: $a = 12$, $b = 15$ и $c = 19$.

37. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на триаголник, ако се дадени неговите страни: $a = 8$, $b = 12$, $c = 15$.

38. Пресметај ја плоштината на ромб, ако се дадени: неговата страна $a = 8{,}5$ и остриот агол $\alpha = 28^{\circ}30'$.

39. Од набљудувачка кула висока 50 *m*, која се наоѓа на морскиот брег, во иста вертикална рамнина се гледаат два брода под агли на депресија $\alpha = 22^{\circ}30'$ и $\beta = 4^{\circ}$. Колкаво е растојанието меѓу тие бродови?

40. Одреди ги страните на еден паралелограм, ако се познати двете негови висини h_a и h_b и остриот агол α.

41. Два воза тргнуваат истовремено од иста железничка станица по два колосека, коишто образуваат агол од 53° и се движат со брзина од 35 *km* на час. По колку минути од тргнувањето, тие ќе бидат на растојание 10 *km* еден од друг?

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. Запчесто тркало има 72 запца. Изрази го во степени аголот, што ќе го образува тркалото, ако тоа се заврти за а) 1 забец, б) 20 запци, в) 30 запци.

2. Во кои квадранти дропката: а) $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$; б) $\frac{ctg\alpha}{\cos\alpha}$ е негативна?

3. Докажи го идентитетот: $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$.

4. Докажи: ако $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$ и $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, тогаш $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

5. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})+1$.

6. Реши ги равенките: а) $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$, б) $\mathrm{tg}\, 2x = 3 \cdot \mathrm{tg}\, x$.

7. За кои вредности на параметарот λ, равенката $2 \cdot \sin x + \cos x = \lambda$, има решение?

8. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, ако се дадени една негова страна $b = 4{,}8$ и аголот спроти неа $\beta = 45^\circ$.

9. Според аглите, одреди од каков вид е триаголникот ABC, ако:

а) $a = 14$, $b = 16$, $c = 24$; б) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$; в) $a = 6{,}5$, $b = 7$, $c = 7{,}5$.

10. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако се дадени: дијагоналите $d_1 = 14{,}2$, $d_2 = 21{,}5$ и аголот меѓу нив $\varphi = 52^\circ 30'$.

ГЛАВА III

ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *формулите за скратено множење,*
- *степените и операциите со степените,*
- *поимот множество и операциите со множествата.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го усвоиш принципот на математичка индукција,
- да се оспособиш да го применуваш принципот на математичка индукција при докажување на елементарни равенства и неравенства, решавање задачи со деливост,
- да ги усвоиш поимите пермутација, варијација и комбинација без повторување,
- да ги усвоиш поимите пермутација, варијација и комбинација со повторување,
- да ги усвоиш формулите за пресметување на бројот на пермутациите, варијациите и комбинациите без повторување,
- да ги усвоиш формулите за пресметување на бројот на пермутациите, варијациите и комбинациите со повторување,
- да ја усвоиш биномната формула,
- да се оспособиш да ја применуваш биномната формула при решавање на елементарни задачи,
- да ги усвоиш поимите детерминиран и недетерминиран експеримент,
- да го усвоиш поимот статистичка дефиниција на веројатност,
- користејќи ја статистичката дефиниција на веројатност да ги изведуваш основните својства на веројатноста,
- да ги усвоиш поимите елементарен настан, сигурен настан и невозможен настан,
- да ја усвоиш класичната дефиниција на веројатност, и
- да се оспособиш да ја применуваш класичната дефинција на веројатност при решавање на едноставни задачи.

Во прва година се запозна со примената на логичките закони при докажување на теоремите. Овде ќе го разгледаме принципот на математичка индукција, кој е еден од основните математички принципи и кој има широка примена при докажување на математичките тврдења кои се поврзани со множеството природни броеви.

Често пати, во практиката, за дадено множество A треба да го определиме бројот на некои подмножества на множеството $A^k, k \in \mathbf{N}$. Ваквите и слични на нив задачи се предмет на проучување на комбинаториката со чии основи ќе се запознаеме во овој дел.

При крајот на XIX век и почетокот на XX век, развојот на природните науки, посебно на биологијата и физиката, овозможил да се осознае дека дека при набљудување на природните појави и процеси се јавуваат слични задачи на оние кои ги среќаваме кај игрите на среќа. Ова сознание, како и претходните согледувања за економските појави и процеси довело до забрзан развој на Теоријата на веројатноста, со чии основи ќе се запознаеме на крајот од овој дел.

III.1. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Во прва година се запозна со множеството природни броеви $\mathbf{N} = \{1,2,3,4,...,n,...\}$, операциите собирање, одземање, множење и делење во $\mathbf{N}$ и подредувањето на елементите на $\mathbf{N}$. Меѓутоа, воведувањето на природните броеви го усвои интуитивно, т.е. не ги разгледуваше Пеановите аксиоми со кои множеството природни броеви $\mathbf{N}$ се дефинира како што следува: множеството $\mathbf{N}$ е непразно и важи:

1. $1 \in \mathbf{N}$.
2. За секој природен број k, постои единствен природен број k^+, кој го нарекуваме *следбеник* на k.
3. Ако $k^+ = n^+$, тогаш $k = n$.
4. $1 \neq k^+$, за секој $k \in \mathbf{N}$.
5. Ако $S \subseteq \mathbf{N}, 1 \in S$ и од $k \in S$ следува дека $k^+ \in S$, тогаш $S = \mathbf{N}$.

На значењето на Пеановите аксиоми нема посебно да се задржуваме, меѓутоа да забележиме дека со првата и четвртата аксиома се обезбедува бројот 1 да припаѓа на множеството природни броеви и тој всушност да е "првиот" природен број. Понатаму, со втората аксиома се задаваат броевите $2 = 1^+$, $3 = 2^+$ итн., а нивната единственост ја овозможуваат третата и четвртата аксиома. За нашите разгледувања, од посебно значење е петтата аксиома, која уште е позната како *аксиома за индукција* и која всушност обезбедува единственост на множеството природни броеви. Всушност, единственоста на множеството природни броеви лежи во основата на *принципот на математичка индукција* (ПМИ), кој е еден од основните методи за докажување на математички тврдења и кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T, кое зависи од природниот број n, и ако за T знаеме дека:

i) T е точно за природниот број 1;
ii) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq 1$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење T е точно за секој природен број n.

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Непосредно следува од петтата Пеанова аксиома за индукција Навистина, ако со S го означиме множеството природни броеви за кои е точно тврдењето T, тогаш од *i*) следува дека $1 \in S$. Но, од *ii*) добиваме дека од $k \in S$ следува $k+1 \in S$, што според аксиомата за индукција следува дека $S = \mathbf{N}$ т.е. тврдењето T е точно за секој природен број n. ♦

ПМИ симболички може да се искаже со формулата

$$T(1) \wedge (\text{за секој } k \in \mathbf{N})[T(k) \Rightarrow T(k+1)] \Rightarrow (\text{за секој } n \in \mathbf{N})[T(n)].$$

Да разгледаме еден пример.

Пример 1. Докажи дека збирот на првите n природни броеви е еднаков на

$$\tfrac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. Да означиме $S_1 = 1;\ S_2 = 1+2; ..., S_n = 1+2+...+n$ т.е. S_n е збирот на првите n природни броеви. Треба да докажеме дека

$$S_n = \tfrac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Прв чекор. Да провериме дека оваа формула е точна за бројот 1. Навистина $S_1 = 1$, а од (1) добиваме дека $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Втор чекор. Да претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 1$ формулата (1) е точна, т.е. за збирот на првите k природни броеви знаеме дека $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Ќе докажеме дека формулата (1) важи и за следниот природен број $k+1$, т.е. дека $S_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Имаме:

$$S_{k+1} = \underbrace{(1+2+...+k)}_{S_k} + (k+1) = S_k + (k+1).$$

Сега од претпоставката во вториот чекор следува

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)[\tfrac{k}{2}+1] = (k+1)\tfrac{k+2}{2} = \tfrac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според тоа, во првиот чекор докажавме дека условот *i*) од ПМИ е исполнет, а во вториот чекор дека условот *ii*) од ПМИ е исто така исполнет. Следствено, согласно со ПМИ формулата (1) важи за секој природен број $n \geq 1$. ♦

Забелешка 1. Често пати проверката во првиот чекор се нарекува *база на индукцијата* (БИ), а претпоставката во вториот чекор *индуктивна претпоставка* (ИП).

Забелешка 2 (за оние што сакаат да знаат повеќе). За да бидеме сигурни дека при примената на ПМИ добиваме точни резултати, мораме последователно да ги реализираме двата чекора во доказот. Имено, БИ и ИП се подеднакво важни етапи при примената на ПМИ. Ако не појдеме од БИ, тогаш можеме да добиеме погрешен резултат, како што може да се види од следниот “пример”.

Да се докаже дека секој природен број е еднаков на својот следбеник, т.е.

$$n = n+1 \qquad (*)$$

за секој природен број n.

“Доказ”. Да претпоставиме дека равенството (*) е точно за некој природен број k, т.е. $k = k+1$. Ако во последното равенство, на двете страни додадеме по 1 добиваме $k+1 = k+2$, што значи дека равенството (*) е точно и за природниот број $k+1$, така што од ПМИ треба да следува дека равенството (*) е точно за секој природен број $n \geq k$.

Знаеме дека претходното тврдење не е точно. Каде е грешката? Дали ПМИ не е добар? Проблемот е во тоа што ние се обидовме да распространиме едно тврдење на сите природни броеви, без да докажеме дека тоа е точно за еден природен број. Имено, прескокнувањето на БИ е причината за "доказот" на едно апсурдно тврдење, а на прв поглед ни изгледа дека овој доказ е коректен. ♦

Пример 2. Докажи, дека за секој природен број n, бројот $A_n = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ се дели со 25.

Решение. Прв чекор. БИ: Ќе провериме дали бројот A_1 се дели со 25. Имаме $A_1 = 2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \cdot 1 - 4 = 2^3 \cdot 3^1 + 5 - 4 = 25$ што значи дека $25 \mid A_1$.

Втор чекор. ИП: Да претпоставиме дека за некој природен број k важи $25 \mid A_k = 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4$.

Ќе докажеме дека $25 \mid A_{k+1} = 2^{(k+1)+2} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4$. Од својствата на степените добиваме

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 3 \cdot 3^k + 5k + 5 - 4 \\ &= 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4 + 5(2^{k+2} \cdot 3^k + 1) = A_k + 5(4 \cdot 6^k + 1). \end{aligned}$$

За секој природен број k бројот $4 \cdot 6^k$ завршува на цифрата 4, па затоа за секој природен број k бројот $4 \cdot 6^k + 1$ завршува на цифрата 5, па тој е делив со 5. Според тоа, за секој природен број k важи $25 \mid [5(6^k + 1)]$ и бидејќи според ИП важи $25 \mid A_k$ добиваме дека

$$25 \mid [A_k + 5(6^k + 1)] = A_{k+1}.$$

Според тоа, во првиот чекор докажавме дека условот *i*) од ПМИ е исполнет, а во вториот чекор дека условот *ii*) од ПМИ е исто така исполнет. Следствено, согласно со ПМИ тврдењето важи за секој природен број $n \geq 1$. ♦

Забелешка 3 (за оние што сакаат да знаат повеќе). Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже и *вториот принцип на математичка индукција*, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T, кое зависи од природниот број n, и ако за T знаеме дека:

iii) T е точно за некој конкретен природен број m;
iv) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq m$, следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$. ♦

Пример 3. За секој природен број m означуваме $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m$ и по дефиниција ставаме $0! = 1$. Докажи дека $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, за $n > 1$.

Решение. Чекор 1. БИ: За $n = 2$ имаме $(2 \cdot 2)! = 4! = 24 < 64 = 2^{2 \cdot 2}(2!)^2$, т.е. неравенството важи.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 2$ важи $(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$. Од ИП за $k+1$ имаме

$$[2(k+1)]! = (2k)!(2k+1)(2k+2) < 2^{2k}(k!)^2(2k+1)2(k+1) < 2^{2k+1}k!(k+1)k!2(k+1) = 2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2,$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, што значи важи за секој $n > 1$. ♦

Забелешка 4 (за оние што сакаат да знаат повеќе). При докажувањето на некои тврдења се користи и таканаречената *индукција со двојна основа*, која симболички е искажана со формулата

$$[T(m)\wedge T(m+1)]\wedge(\text{за секој } k,\, k\geq m)[T(k)\wedge T(k+1)\Rightarrow T(k+2)]\Rightarrow(\text{за секој } n,\, n\geq m)[T(n)].$$

Пример 4. Броевите a_n, $n=0,1,2,3,...$ се зададени со формулите $a_0=2$, $a_1=\frac{5}{2}$ и

$$a_n=\tfrac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}\text{, за } n>1. \tag{2}$$

Докажи дека за секој $n=0,1,2,3,...$ важи

$$a_n=2^n+2^{-n}. \tag{3}$$

Решение. Чекор 1. БИ: За $n=0$ и $n=1$ имаме

$$a_0=2=1+1=2^0+2^{-0} \text{ и } a_1=\tfrac{5}{2}=2+\tfrac{1}{2}=2^1+2^{-1}$$

што значи дека формулата (3) важи за $n=0$ и $n=1$.

Чекор 2. ИП: Нека претпоставиме дека формулата (3) важи за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. дека важи $a_k=2^k+2^{-k}$ и $a_{k+1}=2^{k+1}+2^{-(k+1)}$. Ако ја искористиме релацијата (2) и индуктивната претпоставка, тогаш за $n=k+2$ добоваме

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=\tfrac{5}{2}a_{k+2-1}-a_{k+2-2}=\tfrac{5}{2}a_{k+1}-a_k=\tfrac{5}{2}(2^{k+1}+2^{-(k+1)})-(2^k+2^{-k})=5\cdot2^k+5\cdot2^{-k-2}-2^k-2^{-k}\\&=4\cdot2^k+2^{-k-2}+4\cdot2^{-k-2}-2^{-k}=2^2 2^k+2^{-(k+2)}+2^2 2^{-k-2}-2^{-k}=2^{k+2}+2^{-(k+2)}+2^{-k}-2^{-k}\\&=2^{k+2}+2^{-(k+2)},\end{aligned}$$

т.е. формулата (3) важи за $n=k+2$, па од забелешка 4 следува дека формулата (3) важи за секој $n=0,1,2,3,...$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Докажи, дека за секој $n\in\mathbf{N}$ се точни равенствата:

а) $1+3+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2$,

б) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

в) $1^3+2^3+...+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$,

г) $1\cdot2+2\cdot3+...+(n-1)n=\frac{n(n^2-1)}{3}$,

д) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$,

ѓ) $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{(n+1)^2})=\frac{n+2}{2n+2}$.

2. Докажи дека за секој $n\in\mathbf{N}$ важи:

а) бројот $n(2n^2-3n+1)$ се дели со бројот 6,

б) бројот $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ се дели со бројот 11,

в) бројот $11^{n+1}+12^{2n-1}$ се дели со бројот 133,

г) бројот $5\cdot2^{3n-2}+3^{3n-1}$ се дели со бројот 19.

3. Докажи дека $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ корени}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

4. Докажи дека $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$, за секој $n\in\mathbf{N}$.

5. Докажи дека за секој $n>1$ се исполнети неравенствата:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

б) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}<n$.

6. Докажи дека за секој природен број $n > 3$ важи $n! > 2^n$.

7. Броевите $a_n, n = 1,2,3,...$ се зададени со $a_1 = 1, a_2 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, за $n > 2$. Докажи дека $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$, за секој $n = 1,2,3,...$.

III.2. ВАРИЈАЦИИ

На еден тениски турнир учествуваат четири тенисери A, B, C и D, а се доделува само прва и втора награда. Природно е да се запрашаме: на колку различни начини можат да се поделат наградите? Одговорот на поставеното прашање можеме да го побараме ако ги испишеме сите можности и потоа ги изброиме. Притоа добиваме:

прва награда	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
втора награда	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

Јасно, освен испишаните 12 можности дадени во горната табела, други не постојат. Имено, ако тенисерот A ја освои првата награда, тогаш втората награда може да ја освои еден од тенисерите B, C или D, а ист е случајот кога првата награда ја освојува еден од тенисерите B, C или D. Според тоа, првата и втората награда можат да се поделат на 12 начини.

Да означиме $M = \{A, B, C, D\}$ и да ги запишеме податоците од табелата како подредени парови, при што првата компонента во подредениот пар ќе ни означува освојување на првата награда, а втората компонента освојување на втората награда. Притоа го добиваме множеството

$$N = \{(A,B),(A,C),(A,D),(B,A),(B,C),(B,D),(C,A),(C,B),(C,D),(D,A),(D,B),(D,C)\} = \{(x,y) \mid x,y \in M \text{ и } x \neq y\},$$

што значи дека за да одговориме на поставеното прашање, треба да најдеме колку елементи има множеството N кое е подмножеството M^2 и за кои важи $(x,y) \in N$ ако и само ако $x \neq y$. Очигледно, за x имаме 4 можности и за секоја од овие можности за y имаме 3 можности, па без да го испишуваме множеството N можеме да заклучиме дека тоа има $4 \cdot 3 = 12$ елементи, што значи дека првата и втората награда можат да се поделат на 12 начини.

Во претходните разгледувања всушност се запознавме со варијациите без повторување од 4 елементи од класа 2 и пресметавме дека нивниот број, кој го означуваме со V_4^2, е $V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Во општ случај, ако имаме множество од n елементи, тогаш за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ можеме да определиме варијации без повторување од n елементи од класа k. Така, ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 1. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A = \{a_1,...,a_n\}$ и нека $k \in \{1,2,...,n\}$. Секоја подредена k – торка од облик

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}), \text{ каде што } a_{i_p} \neq a_{i_t}, \text{ за } p \neq t \text{ и } a_{i_p} \in A, \text{ за } p = 1,2,...,k$$

ја нарекуваме *варијација без повторување од* n *елементи од класа* k.

Според тоа, варијација без повторување од n елементи од класа k е подредена k – торка составена од елементи од множеството $A = \{a_1,...,a_n\}$ во која сите елементи се различни.

При разгледувањето на проблемот на поделбата на наградите си поставивме прашање да се најде бројот на различните начини на кои можат да се поделат првата и втората награда. Во практиката, скоро сите проблеми поврзани со варијациите без повторување се сведуваат на определување на нивниот број, па затоа во следната теорема ќе ја докажеме формулата за определување на бројот на варијациите без повторување од n елементи од класа k, кој го означуваме со V_n^k, $n=1,2,...;\ k=1,2,...,n$.

Теорема 1. а) Ако $k<n$, тогаш

$$V_n^{k+1}=(n-k)V_n^k. \tag{1}$$

б) Ако $n\in\mathbf{N}$, тогаш

$$V_n^k=n(n-1)...(n-k+1), \text{ за } k=1,2,...,n. \tag{2}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). а) Од секоја варијација без повторување од n елементи од класа k, т.е. од секоја подредена k – ка од облик $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$, со додавење на уште еден елемент $a_{i_{k+1}}\neq a_{i_p}$, за $p\neq k+1,\ p=1,2,...,k$, кои вкупно ги има $n-k$, може да се добијат $n-k$ варијации без повторување од n елементи од класа $k+1$ од облик $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k},a_{i_{k+1}})$. Притоа се добиваат сите варијации од n елементи од класа $k+1$ и секоја од новодобиените варијациии се добива само по еднаш, па затоа важи формулата (1).

б) Очигледно е дека $V_n^1=n$. Нека за $k=i<n$ важи формулата (2), т.е.

$$V_n^i=n(n-1)...(n-i+1).$$

Сега, од (1) и од претпоставката добиваме

$$V_n^{i+1}=(n-i)V_n^i=n(n-1)...(n-i+1)(n-i),$$

т.е. формулата важи и за $k=i+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за $k=1,2,...,n$. ♦

Пример 5. Колку трицифрени броеви, кај кои цифрите не се повторуваат, можат да се состават од цифрите $1,2,3,4,5$ и 7?

Решение. Очигледно, бидејќи сите цифри се различни од цифрата 0, за да го определиме бројот на трицифрените броеви, кај кои цифрите не се повторуваат и кои можат да се состават од цифрите $1,2,3,4,5$ и 7, треба да го најдеме бројот на варијациите без повторување од 6 елементи од класа 3 (зошто?). Ако ја искористиме формулата (2), за бараниот број добиваме

$$V_6^3=6\cdot5\cdot4=120.♦$$

Пример 6. Реши ја равенката

а) $V_n^2=380$, **б)** $V_{2n+4}^3:V_{n+4}^4=2:3$

Решение. а) Од формулата (2) следува дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$n(n-1)=380,\ n\in\mathbf{N}.$$

Решенија на квадратната равенка

$$n^2-n-380=0$$

се $n_1=20$ и $n_2=-19$. Но, $n\in\mathbf{N}$, па затоа решение на дадената равенка е само $n_1=20$.

б) Од формулата (2) следува дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(2n+4)(2n+3)(2n+2):(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)=2:3,\ n\in\mathbf{N}$$

т.е. на равенката

$$n^2-5n-6=0,\ n\in\mathbf{N}.$$

Решенија на квадратната равенка $n^2-5n-6=0$ се $n_1=6$ и $n_2=-1$. Но, $n\in\mathbf{N}$, па затоа решение на дадената равенка е само $n_1=6$. ♦

Во пример 1 го определивме бројот на сите трицифрени броеви составени од цифрите $1,2,3,4,5$ и 7, кај кои цифрите не се повторуваат. Природно се наметнува прашањето, колкав е бројот на сите трицифрени броеви кои можат да се состават од наведените цифри. Очигледно, бидејќи сите цифри се различни од цифрата 0, секоја од нив може да биде и цифра на едниците, и цифра на десетките и цифра на стотките. Притоа, за местото на цифрата на единиците имаме можности колку што имаме цифри, т.е. 6 можности, а исто толку и за цифрата на десетките и за цифрата на стотките. Според тоа, бројот на сите трицифрени броеви запишани со цифрите $1,2,3,4,5$ и 7 е еднаков на $6\cdot 6\cdot 6=6^3=216$.

Во случајов станува збор за варијации со повторување од 6 елементи од класа 3 и пресметавме дека нивниот број, кој го означуваме со $\overline{V}_6^3$, е $\overline{V}_6^3=6^3=216$. Во општ случај, ако имаме множество од n елементи, тогаш за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ можеме да определиме варијации со повторување од n елементи од класа k. Така, ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 2. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,...,a_n\}$ и нека $k\in\mathbf{N}$. Секоја подредена k – ка од облик

$$(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k}),\text{ каде што } a_{i_p}\in A,\text{ за } p=1,2,...,k$$

ја нарекуваме *варијација со повторување од* n *елементи од класа* k.

Според тоа, варијација со повторување од n елементи од класа k е подредена k – ка составена од елементи од множеството $A=\{a_1,...,a_n\}$.

Во практиката, скоро сите проблеми поврзани со варијациите со повторување се сведуваат на определување на нивниот број, па затоа во следната теорема ќе ја докажеме формулата за определување на бројот на варијациите со повторување од n елементи од класа k, кој го означуваме со $\overline{V}_n^k$, $n,k\in\mathbf{N}$.

Теорема 2. Ако $n,k\in\mathbf{N}$, тогаш

$$\overline{V}_n^k=n^k. \tag{3}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_n\}$ и нека $(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k})$ е произволна варијација со повторување од класа k од неговите елементи. Тогаш, на местото на првата координата може да се запише секој од елементите на множеството A, т.е. имаме n можности. За секоја од овие можности за местото на втората координата имаме n можности, па затоа за првите две координати имаме $n\cdot n=n^2$ можности. Продолжувајќи ја постапката со секоја нова координата бројот на можностите се зголемува n пати и како имаме k координати добиваме дека $\overline{V}_n^k=n^k$, т.е. точна е формулата (3). ♦

Пример 7. Колку Морзеови знаци може да се формираат од двата елементарни знака $-$ и $\bullet$ ако еден знак се состои од најмногу четири елементарни знаци?

Решение. Имаме множество $A=\{-,\bullet\}$ од два елементи и можеме да формираме Морзеови знаци од $1,2,3$ и 4 елементарни знаци. Според тоа, елементарните знаци ќе бидат варијации со повторување од 2 елемента од класа $1,2,3$ и 4, соодветно. Значи, бројот на Морзеовите знаци кои во случајот можеме да ги формираме е:

$$\overline{V}_2^1+\overline{V}_2^2+\overline{V}_2^3+\overline{V}_2^4=2^1+2^2+2^3+2^4=30\,. \ \blacklozenge$$

Пример 8. Реши ја равенката

$$9V_n^3=5\overline{V}_n^3\,.$$

Решение. Ако ги искористиме формулите (2) и (3) добиваме дека дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$9n(n-1)(n-2)=5n^3,\ n\in\mathbf{N}$$

т.е. на равенката

$$4n^2-27n+18=0\,,\ n\in\mathbf{N}\,.$$

Решенијата на равенката $4n^2-27n+18=0$ се $n_1=6$ и $n_2=\frac{3}{4}$ и како $n\in\mathbf{N}$ добиваме дека решение на почетната равенка е $n_1=6$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Бројот на елементите спрема бројот на варијациите од класа 3 се однесува како $1:20$. Најди го бројот на елментите!

2. Најди го бројот на елементите, ако бројот на варијациите од четврта класа без повторување е 1680.

3. Реши ја равенката

а) $V_n^2=72$, б) $V_n^2=56n$, в) $V_n^4:V_{n-1}^5=1:3$.

4. Колку елементи има основното множество, ако бројот на елементите од четврта класа со повторување е 50625?

5. При потполнување на талонот за спортска прогноза за означување на нершен резултат, победа на домаќинот и победа на гостинот се користат знаците $0,1$ и 2, соодветно. На талонот се наоѓаат 12 натпревари.

а) Колку различно пополнети колони треба да имаме за да со сигурност добиеме 12 погодоци?

б) Колку колони треба да се пополнат, ако се "знае" резултатот на 3 натпревари?

в) Колку колони треба да се пополнат, ако се "знае" дека 7 натпревари ќе завршат нерешено?

6. Колку петцифрени броеви може да се формираат од цифрите $0,1,3,5,7$ и 9 такви, што цифрата 0 да не се наоѓа ниту на првото ниту на последното место и цифрите да не се повторуваат?

III.3. ПЕРМУТАЦИИ И КОМБИНАЦИИ БЕЗ ПОВТОРУВАЊЕ

Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,...,a_n\}$. Како што знаеме, секоја подредена n – торка од облик

$$(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n})\text{, каде што } a_{i_p}\neq a_{i_t}\text{, за } p\neq t \text{ и } a_{i_p}\in A\text{, за } p=1,2,...,n$$

ја нарекуваме варијација без повторување од n елементи од класа n. Варијациите без повторување од n елементи од класа n имаат посебно значење како во математиката така и во нејзината примена, па затоа за истите ќе користиме посебно име и ќе ги наречеме пермутации без повторување од n елементи. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 3. Нека е дадено конечното множество од n елементи $A=\{a_1,...,a_n\}$. Секоја варијација без повторување од n елементи од класа n ја нарекуваме *пермутација без повторување од n елементи.*

Според тоа, пермутација без повторување од n елементи на множеството $A=\{a_1,...,a_n\}$ е подредена n – торка во која сите елементи се различни меѓу себе. Понатаму, бројот на пермутациите без повторување од n елементи го означуваме со P_n. Од теорема 1 б) добиваме

$$P_n=V_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot(n-n+1)=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 1=n!$$

т.е. точна е следнава теорема.

Теорема 3. Бројот на пермутациите без повторување од n елементи е

$$P_n=n!\text{. ♦} \qquad (1)$$

Пример 9. Колку петцифрени броеви можат да се формираат од цифрите $1,3,5,7$ и 9?

Решение. Бидејќи секоја од цифрите $1,3,5,7$ и 9 е различна од 0, бројот на петцифрените броеви е еднаков на бројот на пермутациите од 5 елементи, т.е. тој е еднаков на

$$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120\text{. ♦}$$

Пример 10. На колку начини можат да се распоредат броевите $1,2,3,...,2n-1,2n$, така што секој парен број се наоѓа на непарно место?

Решение. Меѓу дадените броеви има n парни и n непарни броеви. Според тоа, треба да распоредиме n парни броеви на n непарни места, па затоа секое вакво распоредување е пермутација без повторување од n елементи и нивниот број $P_n=n!$. Понатаму, при секое распоредување на парните броеви на непарните места ни остануваат празни парните места, кои ги има n и на нив треба да распоредиме n непарни броеви, па затоа секое вакво распоредување е пермутација без повторување од n елементи и нивниот број $P_n=n!$. Конечно, бидејќи распоредувањето на парните и распоредувањето на непарните броеви не зависи едно од друго добиваме дека вкупниот број на распоредувања на броевите

$$1,2,3,...,2n-1,2n,$$

така што секој парен број се наоѓа на непарно место е еднаков на $P_n\cdot P_n=n!\cdot n!=(n!)^2$. ♦

Пример 11. Колку пермутации без повторување од елементите $1,2,3,4,5,6,7$ и 8 почнуваат со:

а) 5, **б)** 123, **в)** 8642.

Решение. а) Бидејќи пермутациите треба да почнуваат со цифрата 5, секоја од бараните пермутации може да се добие ако останатите седум цифри произволно се распоредат на останатите седум места. Според тоа, бројот на бараните пермутации е еднаков на бројот на пермутациите од 7 елементи, т.е. тој е еднаков на $P_7 = 7! = 5040$.

На потполно ист начин наоѓаме: **б)** $P_5 = 5! = 120$ и **в)** $P_4 = 4! = 24$. ♦

При разгледувањето на варијациите без повторување од n елементи од класа k, $k \leq n$ од посебна важност беше распоредот на елементите. Но, ако подредената $k-$ка ја разгледуваме како множество, т.е. ако не ни е важен редоследот по кој се запишани елементите, тогаш имаме потполно нова ситуација, т.е. станува збор за нов поим во комбинаториката. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 4. Нека е дадено множеството $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Секое подмножество од k елементи, $k \leq n$ на множеството A го нарекуваме *комбинација без повторување од n елементи од класа k*.

Бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k го означуваме со C_n^k, $n = 1,2,3,4,...$, $k = 1,2,...,n$.

Забелешка. Од дефиницијата следува дека две комбинации без повторување од n елементи од иста класа се сметаат за различни кога постои барем еден елемент од едната комбинација кој не е елемент на другата комбинација. Така, на пример, за множеството $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ комбинациите $\{a,b,c,d\}$ и $\{a,b,c,e\}$ се од $4-$та класа и тие се различни бидејќи $e \notin \{a,b,c,d\}$, односно $d \notin \{a,b,c,e\}$.

Во врска со бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k точна е следнава теорема.

Теорема 4. За бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k точна е формулата

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}, \tag{2}$$

каде што $n = 1,2,3,4,...$, $k = 1,2,...,n$, т.е. формулата

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \tag{3}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е една комбинација без повторување од n елементи од класа k. Ако оваа комбинација ја пермутираме, ќе добиеме $P_k = k!$ пермутации, кои воедно се и сите варијации без повторување од n елементи од класа k кои се составени од елеменитите $a_1, a_2, ..., a_k$. Понатаму, од сите варијации без повторување на n елементи од класа k кои се составени од елеменитите $a_1, a_2, ..., a_k$ со занемарување на редоследот на елементите се добива единствената комбинација без повторување $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ од n елементи од класа k. Според тоа, бројот на варијациите без повторување V_n^k од n елементи од класа k е $P_k = k!$ пати поголем од бројот C_n^k на комбинациите без повторување на n елементи од класа k, па затоа важи формулата $V_n^k = C_n^k P_k$, која е еквивалентна на формулата (2).

Точноста на формулата (3) непосредно следува од формулите (1) и (2) и фактот дека

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\ .\ \blacklozenge$$

Забелешка. Ако броителот и именителот на десната страна во формулата (3) го помножиме со $(n-k)!$, ја добиваме формулата

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1}{k!\cdot(n-k)(n-k-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ . \qquad (4)$$

Понатаму, за секој $k = 0,1,2,...,n$ од формулата (4) имаме

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k\ , \qquad (5)$$

што значи дека за секој $k = 0,1,2,...,n$ бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k е еднаков на бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа $n-k$.

Пример 12. Во една паралелка има 35 ученици. На колку начини може да се избере нејзиното раководство кое брои 3 члена?

Решение. Јасно, секое раководство на паралелката е подмножество од множеството ученици, па затоа вкупниот број на начини на избори на раководството на паралелката е еднаков на бројот на комбинациите без повторување од 35 елементи од класа 3, т.е. тој е еднаков на

$$C_{35}^3 = \frac{35\cdot 34\cdot 33}{3\cdot 2\cdot 1} = 6545\ .\ \blacklozenge$$

Пример 13. Во еден сад се наоѓаат 7 топчиња означени со броевите од 1 до 7. На колку начини можат да се извлечат 5 топчиња, ако топчињата се влечат одеднаш и без гледање?

Решение. Имаме 7 топчиња и одеднаш без гледање влечеме 5. Очигледно станува збор за комбинации без повторување од 7 елементи од класа 5, па затоа тоа може да се направи на $C_7^5 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 21$ начини. ♦

Пример 14. а) Докажи дека $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbf{N}$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

б) Пресметај ги n и k ако $C_n^k = 4$ и $V_n^k = 24$.

Решение. а) Нека $n \in \mathbf{N}$ и да разгледаме произволно множеството A со $2n$ елементи. Јасно, бројот на сите $n-$елементни подмножества на множеството A е природен број и ако ја искористиме формулата (4) добиваме $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = C_{2n}^n \in \mathbf{N}$.

б) Од формулата (2) наоѓаме

$$P_k = \frac{V_n^k}{C_n^k} = \frac{24}{4} = 6\ ,$$

што значи $6 = P_k = k!$ и како $1\cdot 2\cdot 3 = 6$ добиваме дека $k = 3$. Понатаму,

$$24 = V_n^3 = n(n-1)(n-2)$$

и како бројот 24 како производ на три последователни природни броја може да се запише на единствен начин и тоа $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$, добиваме дека $n = 4$. ♦

ЗАДАЧИ

1. На колку различни начини можат да седнат 12 особи на маса, околу која се распоредени 12 столици така, што на секоја столица седи по една особа?

2. Колку пермутации почнуваат со цифрата 5 меѓу сите пермутации кои можат да се формираат од елементите 3, 4, 5 и 6?

3. Во колку пермутации на елементите 1, 2, 3, 4 и 5 цифрите 4 и 5 се наоѓаат на првото и последното место?

4. Бројот на пермутациите без повторување од n елементи спрема бројот на пермутациите без повторување од $n+2$ елемента се однесува како $1:30$. Најди го бројот n.

5. Бројот на пермутациите без повторување од $n+2$ елемента е 56 пати поголем од бројот на пермутациите без повторување од n елементи. Најди го бројот n.

6. Во колку пермутации без повторување на елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, елементите 2, 4, 5 и 6 стојат еден до друг и тоа:

а) во дадениот редослед,

б) во произволен редослед?

7. Реши ги равенките

а) $C_n^2 = 15n$, б) $6C_n^2 = C_n^4$, в) $30C_n^2 = C_{n+2}^3$.

8. Ако $C_n^8 = C_n^{12}$, пресметај C_n^{17}.

9. Најди ги n и k, ако $C_{n+1}^{k+1} : C_{n+1}^{k} : C_{n+1}^{k-1} = 5:5:3$.

10. На кружница $k(O,r)$ произволно се избрани n точки. Колку отсечки постојат чии крајни точки се избраните n точки?

11. Најди го бројот на различните триаголници кои можат да се добијат со поврзување на темиња на конвексен шестаголник!

12. Кои класи даваат еднаков број комбинации без повторување од 12 елементи? За секоја класа најди го бројот на комбинациите.

13. Во даден правоаголник се повлечени m отсечки кои се паралелни на едниот пар страни и n отсечки кои се паралелни на другиот пар страни. Колку правоаголници се добиени со повлекувањето на отсечките?

14. Во рамнината се дадени 11 точки од кои 5 се наоѓаат на иста кружница и освен нив ниедни други четири точки не лежат на една кружница. Колку кружници можат да се повлечат низ дадените точки така, што секоја кружница да минува барем низ 3 од дадените точки?

III.4. ПЕРМУТАЦИИ И КОМБИНАЦИИ СО ПОВТОРУВАЊЕ

Во претходните разгледувања се запознавме со варијациите без повторување, варијациите со повторување, пермутациите без повторување и комбинациите без повторување. Од основните комбинаторни поими ќе се запознаеме уште со пермутациите со повторување и комбинациите со повторување.

Дефиниција 5. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_m\}$, $k_i\in\mathbf{N}$, за $i=1,2,...,m$ и $n=k_1+k_2+...+k_m$. Подредената $n-$торка елементи на множеството A во која за секој $i\in\{1,2,...,m\}$ елементот a_i се јавува точно k_i пати, ја нарекуваме *пермутација од* n *елементи од тип* $(k_1,k_2,...,k_m)$ или *пермутација со повторување.*

За бројот на пермутациите од n елементи од тип $(k_1,k_2,...,k_m)$, кој го означуваме со $P_n^{k_1,k_2,...,k_m}$ точна е следнава теорема.

Теорема 5. Ако $k_i\in\mathbf{N}$, за $i=1,2,...,m$ и $n=k_1+k_2+...+k_m$, тогаш

$$P_n^{k_1,k_2,...,k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}. \quad \blacklozenge \tag{1}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Од $n-$те места во подредената $n-$торка избираме k_1 места, што може да се направи на

$$C_n^{k_1}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_1, потоа од преостанатите $n-k_1$ места избираме k_2 места, што може да се направи на

$$C_{n-k_1}^{k_2}=\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_2 итн., во $(m-1)-$от чекор од преостанатите $n-k_1-k_2-...-k_{m-2}$ места избираме k_{m-1}, што може да се направи на

$$C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}}=\frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!(n-k_1-k_2-...-k_{m-2}-k_{m-1})!}=\frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!}$$

начини и на нив го ставаме елементот a_{m-1}, за да на крајот на преостанатите k_m места го ставиме елементот a_m. Од досега изнесеното следува дека

$$\begin{aligned}P_n^{k_1,k_2,...,k_m}&=C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}C_{n-k_1-k_2}^{k_3}...C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}}\\&=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdot...\cdot\frac{(n-k_1-k_2-...-k_{m-2})!}{k_{m-1}!k_m!}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!},\end{aligned}$$

т.е. точна е формулата (1). ♦

Пример 15. На колку начини може да се разместат 8 гости во три хотелски соби: еднокреветна, трикреветна и четирикреветна.

Решение. Сместувањето во еднокреветната соба да го означиме со a, во трикреветната со b и во четирикреветната со c. Според тоа, секое сместување определува подредена $8-$торка во која a се јавува еднаш, b се јавува трипати и c се јавува четири пати, на пример со (a,b,b,b,c,c,c,c) и обратно. Значи станува збор за пермутации од 8 елементи од тип $(1,3,4)$, па од теорема 5 следува дека бројот на сместувањата е еднаков на

$$P_8^{1,3,4}=\frac{8!}{1!3!4!}=280.\ \blacklozenge$$

Пример 16. Колку различни низи од букви може да се направат со разместување на буквите на зборот "*математика*"? (Низити не мора да имаат значење.)

Решение. Во зборот математика вкупно има 10, при што буквата *м* се повторува двапати и $k_1=2$, буквата *а* се повторува трипати и $k_2=3$, буквата *т* се повторува двапати и $k_3=2$ пати, буквата *е* се повторува еднаш и $k_4=1$, буквата *и* се повторува еднаш и $k_5=1$ и буквата *к* се повторува еднаш и $k_6=1$. Затоа бројот на низите од букви кои можат да се направат од зборот "*математика*" е еднаков на $P_{10}^{3,2,2,1,1,1}=\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!}=151200$. ♦

Пример 17. Колку пермутации од елементите $1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4$ почнуваат со:

а) 22, б) 313, в) 1234?

Решение. а) Имаме пермутации од 11 елементи од тип $(1,3,4,3)$ и како елементите 2 и 2 се фиксирани на првите две места, за да го определиме бараниот број на пермутации потребно е да го определиме бројот на пермутациите од 9 елементи од тип $(1,1,4,3)$ и тој е еднаков на $P_9^{1,1,4,3}=\frac{9!}{1!1!4!3!}=2520$.

Аналогно на решението под а) наоѓаме:

б) $P_8^{3,2,3}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$ и **в)** $P_7^{2,3,2}=\frac{7!}{2!3!2!}=210$. ♦

Пример 18. На колку различни начини, без да се користат загради, може да се запише $a^3b^2c^3$ како производ од 8 множители?

Решение. Очигледно станува збор за пермутации од 8 елементи од тип $(3,2,3)$, па затоа бараниот број на запишувања е $P_8^{3,2,3}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$. ♦

Нека е дадено множеството $A=\{a,b,c\}$. Тогаш множеството

$$\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$$

го нарекуваме множество комбинации комбинации со повторување од 3 елементи од класа 2. Во практиката често пати записот на комбинациите со повторување може да се сретне во скратен облик, при што комбинациите со повторување во примерот се запишуваат во облик aa, ab, ac, bb, bc, cc. Да забележиме дека во дадениот случај за елементите на множеството A треба да знаеме кој е прв, кој е втор итн. и тоа го означуваме со $a<b<c$. Во општ случај ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 6. Нека е дадено множеството $A=\{a_1,...,a_n\}$ и нека за неговите елементи знаеме кој е прв, кој е втор итн., т.е. нека $a_1<a_2<...<a_n$. За подредената $k-$торка $(b_1,b_2,...,b_k)$, $b_i\in A$ ќе велиме дека е *комбинација со повторување од* n *елементи од класа* k ако $b_i\le b_j$, за $i<j$. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k ќе го означуваме со $\overline{C}_n^k$.

Теорема 6. Бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k е

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k . \tag{2}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Да земеме една комбинација со повторување од n елементи од класа k и на истата да и ја придружиме низата од нули и единици формирана со следната постапка: запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_1, потоа запишуваме една 0, па запишуваме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_2, па запишуваме една 0 итн., за на крајот да запишеме онолку единици колку што во комбинацијата се јавува елементот a_n, а во случај кога во комбинацијата не се јавува некој елемент a_i наместо единици запишуваме една нула. На овој начин на секоја комбинација ќе и соодветствува единствена низа составена од k единици и $n-1$ нула и обратно, на секоја ваква низа ќе и соодвествува единствена комбинација со повторување од n елементи од класа k.

Секоја од конструираните низи е со должина $n+k-1$ и истата е определена со распоредот на $n-1$ нула на $n+k-1$ место, односно со распоредот на k единици на $n+k-1$ место. Според тоа, бројот на сите низи од разгледуваниот вид е еднаков на $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$ и како тој е еднаков на бројот на комбинациите со повторување од n елементи од класа k, добиваме дека важи формулата (2). ♦

Пример 19. На колку начини може да се изберат три од дванаесетте букви

$$a, a, a, t, t, t, g, g, g, c, c, c\,?$$

Решение. Во случајов имаме множество $A = \{a, t, g, c\}$ со четири елементи. Според условот на задачата, секој елемент на множеството A може да биде избран најмногу три пати, па затоа бројот на начините на избор на три од наведените дванаесет булви е еднаков на бројот на комбинациите со повторување од 4 елементи од класа 3, т.е. е еднаков на

$$\overline{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20 \text{ . ♦}$$

Пример 20. Колку елементи се потребни за да се добијат 276 комбинации од втора класа со повторување?

Решение. Од условот на задачата ја добиваме равенката $\overline{C}_n^2 = 276$, која е еквивалентна на равенката $C_{n+2-1}^2 = 276$ т.е. на равенката $\frac{n(n+1)}{2} = 276, n \in \mathbf{N}$. Решенијата на равенката $\frac{n(n+1)}{2} = 276$ се $n_1 = 23$ и $n_2 = -24$ и како $n \in \mathbf{N}$ добиваме дека за да се добијат 276 комбинации од втора класа со повторување се потребни 23 елементи. ♦

ЗАДАЧИ

1. На колку начини може да се разместат 9 гости во три хотелски соби: двокреветна, трикреветна и четирикреветна.

2. Колку различни низи од букви може да се направат со разместување на буквите на зборот "*статистика*"? (Низити не мора да имаат значење.)

3. Колку пермутации од елементите $a, a, a, a, a, b, b, b, c$ почнуваат со буквата:

а) a, б) b, в) c?

4. На колку различни начини, без да се користат загради може да се запише a^5b^3 како производ од 8 множители?

5. Најди го бројот на седумцифрените броеви запишани со цифрите $0,0,0,0,1,2,3$ не земајќи ги во предвид броевите кои почнуваат со цифрата 0.

6. На колку начини можат да се изберат четири од следниве дванаесет букви

$$a,a,a,a,b,b,b,b,c,c,c,c?$$

7. Колку елементи се потребни за да се добијат 2600 комбинации од трета класа со повторување?

8. Колку решенија во множеството цели ненегативни броеви има равенката

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k ?$$

III.5. БИНОМНА ФОРМУЛА

Нека $a,b \in \mathbf{R}$ и да ги разгледаме степените на биномот $a+b$. Во претходните учебни години научи дека

$$(a+b)^0 = 1,$$
$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ и}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ако ги пресметаме четвртиот и петтиот степен на $a+b$ ќе добиеме

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ и}$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Коефициентите на првите шест степени на биномот $a+b$ ќе ги запишеме во следнава шема

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

која во литературата е позната како Паскалов триаголник. Забележуваме дека сите редови во Паскаловиот триаголник започнуваат и завршуваат со бројот 1, но останатите броеви се различни и некако неповрзани. Меѓутоа, ако добро погледнеме ќе забележиме дека, на пример, за броевите во четвртиот и петтиот ред важи $4=1+3, 6=3+3, 4=3+1$, а за броевите во петтиот и шестиот ред важи $5 = 1+4$, $10 = 4+6$, $10 = 6+4$, $5 = 4+1$. Логично е да се запрашаме дали на ист начин од броевите во шестиот ред можеме да ги добиеме броевите во седмиот ред. Ако последното е точно, тогаш броевите во седмиот ред на Паскаловиот триаголник треба да бидат

$$1, 1+5=6, 5+10=15, 10+10=20, 10+5=15, 5+1=6 \text{ и } 1,$$

па затоа треба да важи формулата

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

во чија точност можеме да се убедиме со непосредна проверка.

Претходно изнесеното ни дава за право да претпоставиме дека за пресметување на степените на биномот $a+b$ постои формула која треба да ја најдеме. За таа цел прво ќе се потсетиме на комбинациите без повторување. Имено, за комбинациите без повторување од 2 елемента од класа $0,1$ и 2 соодветно имаме:

$$C_2^0 = \tfrac{2!}{0!2!} = 1,\ C_2^1 = \tfrac{2!}{1!1!} = 2 \text{ и } C_2^2 = \tfrac{2!}{2!0!} = 1,$$

а за комбинациите без повторување од 3 елементи од класа $0,1,2$ и 3 соодветно имаме:

$$C_3^0 = \tfrac{3!}{0!3!} = 1,\ C_3^1 = \tfrac{3!}{1!2!} = 3,\ C_3^2 = \tfrac{3!}{2!1!} = 3 \text{ и } C_3^3 = \tfrac{3!}{3!0!} = 1,$$

па затоа ако ја воведеме ознаката $C_n^k = \binom{n}{k}$, тогаш за вториот и третиот степен на биномот $a+b$ имаме

$$(a+b)^2 = \tbinom{2}{0}a^2 + \tbinom{2}{1}ab + \tbinom{2}{2}b^2 \text{ и}$$
$$(a+b)^3 = \tbinom{3}{0}a^3 + \tbinom{3}{1}a^2b + \tbinom{3}{2}ab^2 + \tbinom{3}{3}b^3.$$

Следејќи ја оваа идеја, логично е да претпоставиме дека формулата за наоѓање на $n-$от степен на биномот $a+b$ е

$$(a+b)^n = \tbinom{n}{0}a^n + \tbinom{n}{1}a^{n-1}b + \tbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \tbinom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \tbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + \tbinom{n}{n}b^n. \qquad (1)$$

Пред да преминеме на доказот на оваа формула повторно да се навратиме на коефициентите во Паскаловиот триаголник. Од претходно изнесеното за коефициентот C_3^2 имаме

$$C_3^2 = 3 = 2+1 = C_2^1 + C_2^2 \text{ т.е. } \tbinom{3}{2} = \tbinom{2}{1} + \tbinom{2}{2}.$$

Ќе докажеме дека за дел од коефициентите во Паскаловиот триаголник важи формула аналогна на формулата најдена за C_3^2, т.е. ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 7. За секој $k \geq 2$ и за секој $i \in \{2,3,...,k\}$ важи

$$\tbinom{k}{i-1} + \tbinom{k}{i} = \tbinom{k+1}{i}. \qquad (2)$$

Доказ. Нека $k \geq 1$. Тогаш, за секој $i \in \{1,2,3,...,k\}$ имаме

$$\tbinom{k}{i-1} + \tbinom{k}{i} = \tfrac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!} + \tfrac{k!}{i!(k-i)!} = \tfrac{k!}{(i-1)!(k-i)!}[\tfrac{1}{k-i+1} + \tfrac{1}{i}] = \tfrac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \cdot \tfrac{i+k-i+1}{i(k+1-i)} = \tfrac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} = \tbinom{k+1}{i}. \ \blacklozenge$$

Сега користејќи ја претходната теорема, принципот на математичка индукција и фактот дека за секој $k \in \mathbf{N}$ важи $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1 = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, (провери!), ќе ја докажеме формулата (1), т.е ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 8. За секои $a,b \in \mathbf{R}$ и секој $n \in \mathbf{N}$ точна е формулата (1).

Доказ. За $n=1$ имаме $(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$, т.е. формулата (1) е точна.

Нека претпоставиме дека формулата (1) е точна за $n=k$, т.е. дека важи

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k . \quad (3)$$

Тогаш, од индуктивната претпоставка и од равенството (2) за $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b)\\ &= [\tbinom{k}{0}a^k + \tbinom{k}{1}a^{k-1}b + \tbinom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \tbinom{k}{i}a^{k-i}b^i + ... + \tbinom{k}{k-1}ab^{k-1} + \tbinom{k}{k}b^k](a+b)\\ &= a^{k+1} + \tbinom{k}{1}a^k b + \tbinom{k}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \tbinom{k}{i}a^{k+1-i}b^i + ... + \tbinom{k}{k}ab^k +\\ &\qquad + \tbinom{k}{0}a^k b + \tbinom{k}{1}a^{k-1}b^2 + ... + \tbinom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^i + ... + \tbinom{k}{k-1}ab^k + b^{k+1}\\ &= \tbinom{k+1}{0}a^{k+1} + \tbinom{k+1}{1}a^k b + \tbinom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \tbinom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + ... + \tbinom{k+1}{k}ab^k + \tbinom{k+1}{k+1}b^{k+1}\end{aligned}$$

т.е. формулата (1) важи и за $n=k+1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека биномната формула е точна за секои $a,b \in \mathbf{R}$ и секој $n \in \mathbf{N}$. ♦

Забелешка. Формулата (1) во литературата е позната како *биномна формула* или *Њутнова биномна формула*, а коефициентите $\binom{n}{k}, k = 0,1,2,...,n$ како *биномни коефициенти*.

Пример 21. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи:

а) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, **б)** $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$.

Решение. а) Равенството непосредно следува од биномната формула при $a=b=1$.

б) Непосредно следува од биномната формула при $a=1, b=-1$. ♦

Пример 22. а) Степенувај го биномот $(2x+5)^4$.

б) Користејќи ја биномната формула пресметај $1{,}03^{10}$ со точност до четвртото децимално место.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}(2x+5)^4 &= \tbinom{4}{0}(2x)^4 + \tbinom{4}{1}(2x)^3 5 + \tbinom{4}{2}(2x)^2 5^2 + \tbinom{4}{3}(2x)5^3 + \tbinom{4}{4}5^4\\ &= 16x^4 + 160x^3 + 600x^2 + 1000x + 625.\end{aligned}$$

б) Имаме

$$\begin{aligned}1{,}03^{10} &= (1+0{,}03)^{10} = 1 + \tbinom{10}{1}\cdot 0{,}03 + \tbinom{10}{2}\cdot 0{,}03^2 + \tbinom{10}{3}\cdot 0{,}03^3 + \tbinom{10}{4}\cdot 0{,}03^4 + \tbinom{10}{5}\cdot 0{,}03^5 + \tbinom{10}{6}\cdot 0{,}03^6 + ...\\ &= 1 + 0{,}3 + 0{,}0405 + 0{,}00324 + 0{,}0001701 + 0{,}0000061236 + ... \approx 1{,}3439162236\end{aligned}$$

т.е. со точност до четири децимални места важи $1{,}03^{10} = 1{,}3439$. Обиди се да објасниш зошто е доволно да се соберат само првите шест членови во развојот. ♦

Пример 23. Определи го членот кој не го содржи x во развојот на степенот

$$(x^2 - \tfrac{1}{x})^9 .$$

Решение. Имаме

$$T_{k+1} = \tbinom{9}{k}(x^2)^{9-k}(-\tfrac{1}{x})^k = \tbinom{9}{k} \cdot x^{18-2k}(-1)^k x^{-k} = \tbinom{9}{k} \cdot (-1)^k x^{18-3k}$$

па за да не се содржи x потребно е $18-3k=0$. Според тоа, $k=6$ и значи седмиот член не го содржи x и $T_{6+1} = \tbinom{9}{6} \cdot (-1)^6 = 84$. ♦

Пример 24. Најди го средниот член во развојот на биномот $(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^n$ ако коефициентот на петтиот член спрема коефициентот на третиот член се однесува како $14:3$.

Решение. Бидејќи биномот на содржи константи добиваме дека коефициентот на петтиот член е $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ а коефициентот на третиот член е $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Од условот на задачата ја добиваме равенката $\binom{n}{4} : \binom{n}{2} = 14:3$, која е еквивалентна на равенката

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} : \frac{n(n-1)}{2} = 14:3, \quad n \in \mathbf{N},$$

т.е. на равенката

$$n^2 - 5n - 50 = 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Решенијата на равенката $n^2 - 5n - 50 = 0$ се $n_1 = -5$ и $n_2 = 10$ и како $n \in \mathbf{N}$ добиваме дека степенот на биномот е $n = 10$. Според тоа, развојот содржи 11 члена и треба да го определиме шестиот. Значи, бараниот член е

$$T_{5+1} = \tbinom{10}{5}(a^{-2}\sqrt{a})^5(-\sqrt[5]{\tfrac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^5 = -252a^{-10}. \ ♦$$

ЗАДАЧИ

1. Развиј ги биномите

а) $(a^{-2} + b^{3/2})^4$, б) $(x + \frac{1}{x})^5$.

2. Користејќи ја биномната формула, пресметај со точност до петтото децимално место:

а) $0{,}98^6$, б) $2{,}1^6$, в) $1{,}005^6$.

3. Најди го тринаесеттиот член во развојот на биномот $(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}})^n$, ако биномниот коефициент на неговиот трет член е еднаков на 105.

4. Во развојот на биномот $(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a})^{12}$ определи го членот кој содржи a^7.

5. На железничка станица треба од ист правец да стигнат n особи. На колку можни начини, според времето на доаѓање, можат да стигнат на станицата?

6. Пресметај го збирот

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{3}^2+...+\binom{n}{n}^2.$$

7. Колку рационални членови има во развојот на биномот $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^{100}$?

III.6. ЕКСПЕРИМЕНТ И НАСТАН. СТАТИСТИЧКА ВЕРОЈАТНОСТ

Често пати во природата појавите и настаните се случуваат по точно определени закони и секогаш кога е исполнето определено множество услови. Законите од ваков тип ги нарекуваме *детерминистички*. Луѓето со векови ги набљудувале и анализирале појавите и настаните, а потоа врз основа на научните сознанија ги формулирале законите. Типични примери за детерминистички закони се Њутновите закони во механиката и Њутновиот закон за гравитација. Врз основа на овие закони можат да се објаснат настани од минатото и да се предвидуваат идни настани. На пример, може да се предвиди кога во иднина ќе имаме помрачување на Месечината или Сонцето, како и да се пресмета кога во минатото такви помрачувања се случиле.

Меѓутоа, покрај појавите и настаните кои се реализираат по детерминистички закони во природата и општеството има појави и настани за кои не важат законите од овој тип. Поточно, постојат појави и настани, кои при одредени услови некогаш се реализираат, а некогаш не се реализираат. Да разгледаме еден пример.

Пример 25. Правилна и хомогена монета повеќе пати ја фрламе на рамна површина, при што монетата ротира околу својата оска која не е нормална на рамнината. Во секое посебно фрлање може да "падне" една од двете страни на монетата: писмо P или грб G. Еден од можните начини на појавување на писмо и грб во 12 фрлања е следниов:

$$P\,P\,G\,P\,G\,G\,P\,P\,P\,G\,P\,G.\ \blacklozenge$$

Во претходниот пример зададовме множество услови S и тоа:

- монетата е правилна и хомогена,
- монетата се фрла на рамна површина и
- при фрлањето монетата ротира околу својата оска која не е нормална на површината,

и истите ги реализиравме 12 пати. Во врска со претходно изнесеното ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 7. Нека е дадено множество услови S. Секоја реализација на ова множество услови ја нарекуваме *опит* или *експеримент* S. Секој резултат на експериментот S го нарекуваме *настан* што е во врска со експериментот S.

Настаните ги означуваме со буквите $A,B,C,D,E,F,...$.

Според определеноста на настаните со условите S разликуваме два типа на експерименти. Едни, кај кои што множеството услови еднозначно определува настан и овие експерименти ги нарекуваме *детерминирани*, и други, кај кои исходот не е еднозначно определен, т.е. постојат повеќе различни исходи и овие експерименти ги нарекуваме *недетерминирани*.

Како што можеме да видиме, при реализирањето на експериментот од пример 25 можни се два различни исхода: писмо или грб, што значи дека станува збор за недерминиран експеримент. Притоа појавата на писмо или грб во низата 12 фрлања е исклучително неправилна, т.е. таа е случајна и не може однапред да се предвиди. На прв поглед изгледа дека не постои никаква законитост која можеме да ја доведеме во врска со резултатите добиени во низата на фрлања на монетата. Меѓутоа, изведувањето на голем број фрлања на монетата и разгледувањето на добиените резултати ни овозможуваат подобро да ја опишеме случајноста на појавување на писмо или грб. За таа цел ќе ги искористиме резултатите на експериментите во врска со паѓањето на писмо или грб реализирани од научниците Бифон, Пирсон, де Морган, Фелер и Романовски и кои се дадени во следната табела:

научник	број на фрлања	број на паѓања на грб
Бифон	4040	2048
де Морган	4092	2048
Романовски	80640	39699
Пирсон	24000	12012
Фелер	10000	4979

Ако ги анализираме презентираните податоци, ќе забележиме дека во сите пет серии при фрлањето на монетата приближно половина од вкупниот број фрлања паѓа грб. Попрецизно, ако со A го означиме настанот "паднал грб", со n го означиме вкупниот број на фрлања на монетата и со $n(A)$ бројот на реализации на настанот A, тогаш за количникот $\frac{n(A)}{n}$ добиваме: *Бифон*: $\frac{n(A)}{n}=0{,}50693$, *де Морган*: $\frac{n(A)}{n}0{,}50048875$, *Романовски*: $\frac{n(A)}{n}=0{,}492299$, *Пирсон*: $\frac{n(A)}{n}=0{,}5005$ и *Фелер*: $\frac{n(A)}{n}=0{,}4979$. Со други зборови количникот $\frac{n(A)}{n}$ на настанот A "многу не се разликува" од бројот $0{,}5=\frac{1}{2}$. Според тоа, при едно фрлање не може да се предвиди што ќе се случи, но за голем број експерименти постои законитост во појавувањето на настанот A и бројот $0{,}5$, за кој може да се каже дека е објективна мерка на можноста за појавување на настанот A. Законитост од овој тип постои за голем број експерименти и настани во врска со нив. Во смисол на претходно изнесеното, ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 8. Нека при n повторувања на експериментот S го разгледуваме настанот A. Бројот на реализации на настанот A го нарекуваме *фрекфенција (честота) на настанот* A и го означуваме со $n(A)$. Количникот $\frac{n(A)}{n}$ го нарекуваме *релативна фрекфенција (честота) на настанот* A во n експерименти.

Во претходните разгледувања поимот настан го воведовме како резултат на експериментот S. Меѓутоа, за нашите разгледувања од посебна важност се случајните настани, т.е. настаните кои задоволуваат определени услови. Поимот случаен настан е во непосредна врска со поимот релативна честота и истиот се дефинира на следниов начин.

Дефиниција 9. Настанот A во врска со експериментот S, кој може да се повтори произволен број пати, го нарекуваме *случаен настан,* ако релативните честоти на настанот A, на секоја од повеќе реализирани серии на експериментот S, се броеви кои се приближно еднакви меѓу себе.

Од дефиниција 9 следува дека настанот "паднал грб" е случаен настан. Понатаму, релативните фрекфренции во сериите експерименти на Бифон, де Морган, Романовкси, Пирсон и Фелер се натрупуваат во околина на бројот $0,5$. Ваквото својство на релативните честоти на случајните настани го нарекуваме *стабилност на релативните честоти*. Стабилноста на релативните честоти е објективно својство на масовните случајни појави и е основна причина за постанокот и развојот на теоријата на веројатноста. Во врска со стабилноста на релативните честоти на случајниот настан A ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 10. Реалниот број околу кој се натрупуваат релативните честоти на случајниот настан A и кој го означуваме со $P(A)$ го нарекуваме *веројатност на настанот* A.

Оваа дефиниција за веројатност на случаен настан во литературата е позната како *статистичка дефиниција* на веројатноста, а веројатноста определена на овој начин ја нарекуваме *статистичка веројатност*.

Пример 26. Хомогена коцка за играње повеќе пати ја фрламе на рамна површина, при што коцката ротира околу некоја оска. Во секое посебно фрлање може да "паднат" $1, 2, 3, 4, 5$ или 6 точки. Еден од можните начини на појавување на бројот на точките 1 до 6 во 60 фрлања е следниов:

$$5, 3, 1, 5, 6, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 5, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 5, 4, 5, 1, 2, 6, 5, 2,$$

$$3, 1, 6, 4, 2, 1, 1, 5, 3, 5, 5, 6, 3, 3, 6, 5, 5, 2, 3, 1, 2, 2, 6, 1, 3, 5, 2, 2, 1, 2.$$

Според тоа, имаме множество услови S и тоа:

- коцката за играње е хомогена,
- коцката се фрла на рамна површина и
- при фрлањето коцката ротира околу некоја оска.

а) Јасно, станува збор за недерминиран експеримент во кој за секој $i = 1,2,3,4,5,6$ можеме да го разгледуваме настанот A_i: паднале i точки. Х. Штолер направил четири серии на експериментот S и ги добил податоците дадени во следнава табела:

	Број на паѓања на број точки					
Број на фрлања на коцката	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6 000	953	1 053	1 027	1 028	982	957
60 000	9 880	9 989	9 888	10 206	10 190	9 847
120 000	19 759	20 065	19 795	20 232	20 213	19 936

Табела 1

Од податоците во горната табела ја составуваме следнава табела на релативните честоти на настаните A_i, $i = 1,2,3,4,5,6$.

	Број на паѓања на бројот					
Број на фрлања на коцката	1	2	3	4	5	6
600	0,1366667	0,2166667	0,1766667	0,1533333	0,1766667	0,14
6 000	0,1588333	0,1755	0,1711667	0,1713333	0,1636667	0,1595
60 000	0,1646667	0,1664833	0,1648	0,1701	0,1698333	0,164117
120 000	0,1646583	0,1672083	0,1649583	0,1686	0,1684417	0,166133

Табела 2

Како што можеме да видиме релативните честоти на секој од настаните A_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ при различните серии од $6000, 60000$ и 120000 повторувања на експериментот се приближно исти броеви, па затоа за секој $i=1,2,3,4,5,6$ настанот A_i е случаен. Понатаму, релативните честоти на секој од настаните A_i, $i=1,2,3,4,5,6$ се натрупуваат околу еден ист број и тоа $\frac{1}{6}\approx 0,166$, од што согласно статистичката дефиниција на веројатноста можеме да заклучиме дека $P(A_i)=\frac{1}{6}$, за $i=1,2,3,4,5,6$.

б) Ако ги искористиме податоците од табела 1, за настанот B: *паднатиот број точки е помал од* 3, при серии од $600, 6000, 60000$ и 120000 повторувања на експериментот, неговата честота ја добиваме ако ги собереме честотите на настаните A_1 и A_2 (зошто?). Во следната табела се дадени честотите и релативните честоти на настанот B, за наведените серии од $600, 6000, 60000$ и 120000 повторувања на експериментот.

Број на фрлања на коцката	Честота на настанот B	Релативна честота на настанот B
600	212	0,3533333
6 000	2 006	0,3343333
60 000	19 769	0,3294833
120 000	39 824	0,3318667

Табела 3

Од податоците во табела 3 заклучуваме дека настанот B е случаен и дека согласно дефиниција 9 статистичката веројатност е $P(B)=\frac{1}{3}$ (зошто?).

в) Во врска со разгледуваниот експеримент да го разгледаме настаните C: *паднатиот број точки е помал од* 1 и D: *паднатиот број точки е помал или еднаков на* 6.

Лесно се воочува, дека настанот C не се случува при ниту една реализација на експериментот S, а настанот D се случува при секоја реализација на експериментот S (зошто?). ♦

Во врска со настаните C и D од пример 26 ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 11. *Сигурен настан* за експериментот S е настанот што се појавува при секоја реализација на S. *Невозможен настан* за експериментот S е настанот што не се појавува при реализација на S.

Нека се изведени n експерименти S. Од дефиницијата на сигурниот настан следува дека тој ќе се појави n пати, а од дефиницијата на невозможниот настан следува дека тој нема да се појави ниту еднаш, т.е. ќе се појави 0 пати. Според тоа, релативната честота на сигурниот настан е $\frac{n}{n}=1$, а релативната честота на невозможниот настан е $\frac{0}{n}=0$ и последното важи за серија со произволен број експерименти S. Сега од дефиниција 9 следува дека сигурниот и невозможниот настан се случајни настани, а од дефиниција 10 следува дека нивните статистички веројатности се 1 и 0, соодветно.

ЗАДАЧИ

1. Според податоците од табела 2, релативните честоти на настаните A_i, $i=1,2,3,$ $4,5,6$, во случај кога имаме серија од 600 фрлања на коцката значително отстапуваат од релативните честоти во случај кога имаме серија од $6000, 60000$ или 120000 фрлања на коцката. Зошто е тоа така?

2. Користејќи ги податоците од табела 1 најди ги честотите на настаните

а) A: паднатиот број точки е парен,

б) B: паднатиот број точки е поголем од 3.

Дали настаните A и B се случајни? Во случај на потврден одговор најди $P(A)$ и $P(B)$!

3. За експериментот од пример 25 искажи ги со зборови сигурниот и невозможниот настан.

III.7. ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ. ОПЕРАЦИИ СО НАСТАНИ

а) ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ

Во примерот 26 при експериментот во кој хомогена коцка фрламе на рамна површина видовме дека во секое посебно фрлање, т.е. при секоја реализација на експериментот може да "паднат" $1, 2, 3, 4, 5$ или 6 точки. Јасно, при секое изведување на овој експеримент се појавува еден и само еден од настаните "*бројот на паднатите точки е* i", каде $i=1,2,3,4,5,6$. Слична е состојбата со експериментот во пример 25, каде при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните *паѓа грб* или *паѓа писмо*.

Претходно изнесеното може да се направи за секој експеримент, т.е. за секој експеримент, што можеме да го замислиме или реализираме, постои едно множество Ω на поединечни настани, со особината при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од тие настани. Множеството Ω го нарекуваме *простор (множество) елементарни настани*, а неговите елементи ги нарекуваме *елементарни настани*. Во натамошните разгледувања за елементарен настан ќе ја користиме ознаката ω.

Пример 27. а) Во експериментот на фрлање монета просторот елементарни настани е $\Omega=\{P,G\}$.

б) Во експериментот на фрлање коцка за играње просторот елементарни настани е $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ♦

Пример 28. Монета се фрла два пати. За елементарни настани можеме да ги земеме следниве резултати на експериментот:

ω_1 - во двете фрлања паднало писмо,

ω_2 - во двете фрлања паднал грб,

ω_3 - паднало едно писмо и еден грб.

Забележуваме дека вака избраните елементарни настани не се појавуваат на "симетричен" начин. Имено, елементарниот настан ω_1 означува дека и во првото и во второто фрлање паднало писмо, т.е. еднозначно е определен резулатот и на првото и на второто фрлање. Слично, елементарниот настан ω_2 еднозначно го определува резулатот и на првото и на второто фрлање. Наспроти тоа, елементарниот настан ω_3 допушта две можности: во првото фрлање паднало писмо а во другото грб или, во првото фрлање паднал грб а во второто писмо. Заради оваа "несиметрија" која постои во наведените елементарни настани подобро е во овој случај за множество (простор) елементарни настани да се земе множеството

$$\Omega=\{PP, PG, GP, GG\}.$$

Јасно, при ваков избор на множеството Ω со секој елементарен настан еднозначно е определен резултатот и во првото и во второто фрлање на монетата, т.е. меѓу елементарните настани "постои симетрија". ♦

Пример 29. Монета се фрла n пати. Просторот на елементарни настани е множеството од сите варијации со повторување од елементите P и G од класа n, т.е.

$$\Omega=\{\omega=(c_1,c_2,...,c_n)\,|\,c_k=P \text{ или } c_k=G, k=1,2,...,n\}.$$

Според тоа, бројот на елементите на Ω е $|\Omega|=2^n$. ♦

Пример 30. а) Коцка за играње се фрла два пати. Просторот елементарни настани е множеството Ω кое се состои од следните 36 исходи:

11, 12, 13, 14, 15, 16,
21, 22, 23, 24, 25, 26,
31, 32, 33, 34, 35, 36,
41, 42, 43, 44, 45, 46,
51, 52, 53, 54, 55, 56,
61, 62, 63, 64, 65, 66.

Запишаните елементарни настани всушност се варијациите со повторување од елементите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 од класа 2.

б) Коцка за играње се фрла два пати. Ако не интересира само збирот на паднатите броеви точки, тогаш на овој експеримент можеме да му го придружиме следниов простор елементарни настани:

$$\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$ ♦

Во примерите 30 а) и 30 б) на еден ист експеримент му придруживме различни простори елементарни настани. Меѓутоа, на експериментот кој се состои од две фрлања на коцка за играње обично му се придружува просторот елементрани настани кој е даден во пример 30 а), со слично образложение на она од пример 28. Меѓу елементарните настани од пример 30 а) постои симетрија во смисол што со секој од нив еднозначно е определен резултатот во првото и во второто фрлање на коцката. Кај елементарните настани во пример 30 б) таква симетрија нема: со елементарните настани 2 и 12 еднозначно е определен резултатот во секое од двете фрлања, но тоа не е случај со останатите елементарни настани.

Пример 31. Се фрлаат монета и коцка за играње. Множеството елементарни настани е

$$\Omega=\{P1,P2,P3,P4,P5,P6,G1,G2,G3,G4,G5,G6\}.$$ ♦

Пример 32. Коцка за играње прво се фрла еднаш, па ако паднатиот број точки е помал од 3, тогаш коцката се фрла уште еднаш. Просторот елементарни настани е одреден со следните исходи: 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25 и 26, при што запишаните исходи ги сметаме за варијации на цифрите. ♦

Пример 33. Коцка за играње се фрла се додека збирот на регистрираните броеви точки не стане поголем од 2. Просторот елементарни настани е одреден со следниве исходи:

$$3, 4, 5, 6, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 111, 112, 113, 114, 115, 116.$$ ♦

Во претходните примери просторот елементарни настани се состоеше од конечно многу елементи. Следниов пример покажува дека истиот не мора да биде конечен.

Пример 34. Монета се фрла се до првото појавување на грб. Просторот елементарни настани е множеството

$$\Omega = \{P, PG, PPG, PPPG, PPPPG, ...\} \cup \{\omega_0\}$$

каде $\omega_0 = PPP...P...$ е логички можниот резултат дека грб нема никогаш да падне. Јасно ова множество е бесконечно, т.е. множеството Ω содржи бесконечно многу елементарни настани. ♦

Иако ќе разгледуваме само експерименти со конечно многу исходи, сепак ќе наведеме еден пример на експеримент кај кој множеството исходи е бесконечно и не е преброиво.

Пример 35. Да претпоставиме дека двајца луѓе независно и еднакво можно доаѓаат на местото на договорениот состанок во временски интервал $[0,1]$. Ако со x го означиме моментот на доаѓање на едниот, а со y моментот на доаѓање на состанокот на другиот човек, тогаш множеството елементарни настани е единечниот квадрат

$$\Omega = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$ ♦

б) ОПЕРАЦИИ СО НАСТАНИ

Во претходно разгледаните примери, а и за секој друг експеримент што може да се замисли или изведе, воочуваме дека, секој настан што е во врска со експериментот е определен со некое подмножество на множеството елементарни настани Ω. Затоа, *случајните настани* ги идентификуваме со подмножества на множеството (просторот) елементарни настани Ω. Притоа ќе велиме дека *се реализирал настанот* A, ако се појавил некој од елементарните настани со кои тој е определен, т.е. ако се реализирал елементарен настан ω за кој важи $\omega \in A$ и притоа за исходот ω ќе велиме дека е *поволен за настанот* A.

Бидејќи при секое изведување на еден експеримент се појавува еден од елементарните настани, а сите се елементи на Ω, логично е сигурниот настан да го означиме со Ω. Слично, не постои елементарен настан кој е поволен за невозможниот настан, па затоа овој настан ќе го означуваме со $\varnothing$.

Бидејќи настаните ги идентификувавме со подмножества на просторот елементарни настани, на нив можеме да ги применуваме операциите со множествата и да ги разгледуваме релациите меѓу множествата. Притоа ќе ја користиме следнава терминологија:

Ако $A \subset B$, тогаш ќе велиме дека настанот A *го повлекува настанот* B.

Ако $A = B$, тогаш ќе велиме дека настаните A и B *се еквивалентни*.

За настанот

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \,|\, \omega \in A\}$$

ќе велиме дека е *спротивен* (*комплементарен*) на настанот A. Јасно, настанот $\overline{A}$ се реализира, ако не се реализира настанот A, т.е. ако експериментот заврши со исход ω за кој важи $\omega \notin A$.

Настанот

$$A \cup B = \{\omega \,|\, \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$$

го нарекуваме *унија* на настаните A и B. Јасно, настанот $A \cup B$ се реализира ако се реализира барем еден од настаните A и B.

Настанот

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$$

го нарекуваме *пресек* на настаните A и B. Јасно, настанот $A \cap B$ се реализира ако истовремено се реализираат и двата настани A и B. Во натамошните разгледувања наместо $A \cap B$ ќе пишуваме AB.

За настаните A и B ќе велиме дека се *дисјункти* (*заемно се исклучуваат*) ако $AB = \varnothing$.

Пример 36. Монета се фрла три пати. Просторот на елементарни настани е

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG\}.$$

Со A да го означиме настанот дека ќе паднат барем две писма, а со B настанот дека ќе падне само една страна. Имаме $A = \{PPP, PPG, PGP, GPP\}$ и $B = \{PPP, GGG\}$. Понатаму добиваме $\overline{A} = \{PGG, GPG, GGP, GGG\}$ и тоа е настанот дека во трите фрлања ќе падне најмногу едно писмо,

$$A \cup B = \{PPP, PPG, PGP, GPP, GGG\}$$

и тоа е настанот дека во трите фрлања бројот на паднатите писма ќе биде 0, 2 или 3, а $AB = \{PPP\}$ и тоа е настанот дека во секое од трите фрлања ќе падне писмо. ♦

ЗАДАЧИ

1. Се фрлаат две монети и една коцка. Најди го просторот елементарни настани.

2. Коцка за играње се фрла n пати. Најди го просторот елементарни настани Ω. Колку елементи има Ω?

3. Од множеството $\{1,2,...,n\}$ се избираат k броеви. Најди го просторот елементарни настани и бројот на елементарните настани,

а) ако изборот на броевите се врши со враќање, т.е. еднаш извлечениот број може повторно да се избере, а редоследот на избирањето е важен,

б) ако изборот на броевите се врши без враќање, редоследот на избирањето на броевите е важен и $k \leq n$,

в) ако се врши избор без враќање, важи $k \leq n$, а редоследот на избирањето не е важен, и

г) ако се врши избор со враќање, а редоследот на избирањето не е важен.

4. Коцка за играње се фрла два пати. Определи ги настаните:

а) во двете фрлања паднал број поголем од четири,

б) паднала барем една шестка,

в) и збирот на паднатите броеви е поголем од пет.

5. Монета се фрла два пати. Ако и двата пати падне иста страна, тогаш монетата се фрлат и трет пат, а ако паднале различни страни, тогаш еднаш се фрла коцка за играње. Определи го просторот елементарни настани и настанот A дека во третото фрлање не е регистриран број.

6. Монета се фрла се додека два пати последователно не падне иста страна. Одреди го просторот елементарни настани и настанот дека експериментот ќе заврши после шестото фрлање.

7. Докажи дека за настаните A, B и C се исполнети равенствата:

а) $(A \cup B)C = AC \cup BC$, б) $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$,

в) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$, г) $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

III.8. КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Да разгледаме експеримент кој под исти услови може да се повторува неограничен број пати. Нека

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

е просторот елементарни настани кој соодветствува на експериментот. Да претпоставиме дека експериментот е повторен N пати и дека при тоа елементарните настани $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ се реализирале $N_1, N_2, ..., N_n$ пати. Тогаш очигледно важи $N_1 + N_2 + ... + N_n = N$, т.е.

$$\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} + ... + \frac{N_n}{N} = 1.$$

Според тоа, збирот на релативните честоти на елементарните настани $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ во N изведени експерименти е еднаков на 1. Претходните разгледувања се непосреден повод за следнава дефиниција.

Дефиниција 12. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ е простор од елементарни настани на некој експеримент. За секој $j \in \{1,2,...,n\}$ на настанот ω_j, му придружуваме број $p(\omega_j) = p_j$ така да се исполнети следниве услови:

1) ненегативност: $p_j \geq 0$, за секој $j \in \{1,2,...,n\}$ и
2) нормираност: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Бројот p_j го нарекуваме *веројатност на елементарниот настан* ω_j. Нека

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}, \text{ каде } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n.$$

Бројот $P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_k}$ го нарекуваме *веројатност на настанот* A.

Според дефиниција 12 веројатноста на настанот A е еднаква на збирот на веројатностите кои се поволни за настанот A. Понатаму, ако со $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ го означиме партитивното множество на просторот елементарни настани Ω, тогаш со дефиниција 12 е определена функција $P : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \mathbf{R}$ која на секое подмножество A од Ω му ја придружува неговата веројатност $P(A)$. Подредената тројка $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, P)$ ја нарекуваме *простор на веројатност* или *веројатносен модел на експеримент со* (во овој случај) *конечно многу исходи*.

За нашите разгледувања од посебен интерес е случајот кога на сите елементарни настани (исходи) $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ им е придружена еднаква веројатност, т.е. кога важи $p_1 = p_2 = ... = p_n$. Притоа, со замена во $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ добиваме $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$.

Во овој случај ќе велиме дека елементарните настани се еднакво веројатни и тогаш веројатноста на настанот $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_k}\}$ е дадена со

$$P(A)=\frac{k}{n}. \qquad (1)$$

Според тоа, *во случај на еднаквоверојатни елементарни настани веројатноста на произволен настан A е еднаква на количникот на бројот на елементарните настани поволни за настанот A и вкупниот број елементарни настани.* Ваквото определување на веројатноста на настаните во случај на експеримент со еднакво веројатни исходи го нарекуваме *класична дефинција на веројатноста.*

Природно е да се запрашаме кога елементарните настани можеме да ги сметаме еднакво веројатни? Основната идеја е следнава: Ако сакаме реално да опишеме експеримент (кој под приближно еднакви услови може да се повтори повеќе пати), тогаш на исходите на тој експеримент треба како веројатности да им се придружат оние броеви од кои многу не отстапуваат релативните честоти на појавување на тие исходи. Во многу практични ситуации, а од причини на симетрија, немаме основ да претпоставиме дека некој исход има поголеми шанси да се реализира од другите исходи. Исто така, во многу ситуации искуството не ни дава повод да сметаме дека некој исход е привилегиран во однос на другите исходи, во смисла да постои поголема можност тој исход да се реализира. Во вакви ситуации изгледа разумно на сите можни елементарни настани да им придружиме еднаква веројатност.

Понатаму, од (1) следува: ако просторот елементарни настани Ω е конечен и ако елементарните настани се еднакво веројатни, тогаш пресметувањето на веројатноста на настанот $A\subseteq\Omega$ се сведува на определување на бројот на елементите на множествата A и Ω, т.е. на определување на бројот на исходите поволни за настанот A и на бројот на сите можни исходи. Да разгледаме неколку примери.

Пример 37. Четири карти кои се нумерирани со броевите $1,2,3,4$ случајно се наредени една по друга. Јасно просторот елементарни настани е множеството Ω од сите пермутации на броевите $1,2,3,4$ и нив ги има вкупно $4!=24$, т.е. во формулата (1) имаме $|\Omega|=n=24$. Да го разгледаме настанот A: на првото и второто место стојат непарни броеви, т.е.

$$A=\{1324,1342,3124,3142\}.$$

Според тоа, во формулата (1) имаме $k=|A|=4$, па затоа $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$. ♦

Пример 38. Дадени се 10 топчиња нумерирани со броевите $1,2,...,10$. Случајно, без гледање одеднаш се избираат три топчиња. Колкава е веројатноста на настанот A дека точно едно од избраните топчиња е означено со парен број?

Бидејќи од 10 топчиња избираме 3, бројот на можните избори е $n=C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!7!}=120$, што значи просторот на елементарни настани има $n=120$ елементи.

Понатаму, 5 од топчиња се означени со парен број и како едно од трите избрани топчиња треба да биде означено со парен број тоа може да се направи на $C_5^1=5$ начини. Останатите две извлечени топчиња треба да бидат означени со непарен број и како имаме

5 топчиња означени со непарен број нивниот избор може да се направи на $C_5^2 = 10$ начини. Бидејќи на секој избор на едно топче означено со парен број соодветствува еден избор на две топчиња означени со непарен број добиваме дека бројот на елементарните настани поволни за настанот A е $k = C_5^1 C_5^2 = 5 \cdot 10 = 50$.

Конечно, од (1) за веројатноста на настанот A добиваме

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}. \blacklozenge$$

Пример 39. Коцка за играње се фрла три пати и во секое фрлање се бележи паднатиот број точки. Која веројатност е поголема: збирот на паднатите броеви да е еднаков на 11 или збирот на паднатите броеви да е еднаков на 12 ?

Бидејќи коцката се фрла три пати и во секое фрлање се бележи паднатиот број точки добиваме дека бројот на сите елементарни настани е еднаков на бројот на варијациите со повторување од трета класа од елементите $1,2,3,4,5,6$, што значи тој е еднаков на $\overline{V}_6^3 = 6^3 = 216$.

Бројот 11 може да се запише како збир на три собирци, од кои секој припаѓа на множеството $\{1,2,3,4,56\}$ и притоа редот на собирците не е важен, на следниве шест начини

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3.$$

Збировите $6+4+1, 6+3+2$ и $5+4+2$ можат да се добијат на $3! = 6$ начини, а секој од останатите три збира може да се добие на три начини. Затоа веројатноста на збирот 11 е дадена со

$$P(11) = \frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216}.$$

Аналогно добиваме,

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4,$$

и веројатноста на збирот е

$$P(12) = \frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216}.$$

Според тоа, ако коцката за играње се фрла три пати, тогаш веројатноста збирот на регистрираните броеви да е еднаков на 11 е поголема од веројатноста збирот на регистрираните броеви да е еднаков на 12. ♦

Пример 40. Неписмено дете составува зборови од следниве букви: *а, а, а, е, и, к, м, м, т, т*. Колкава е веројатноста да се состави зборот *математика*?

Секој елементарен настан е пермутација со повторување од 10 елементи од тип $(3,2,2,1,1,1)$, па затоа нивниот број е $n = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$. Бројот на поволни случаи е $k = 1$, па затоа веројатноста на настанот A: се појавил зборот *математика* е

$$P(A) = \frac{1}{151200}. \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Се фрла коцка за играње. Колкава е веројатноста дека:

а) паднатиот број точки ќе биде делив со 3,

б) паднатиот број точки ќе биде делив со 2?

2. Коцка за играње се фрла два пати и при секое фрлање се бележи паднатиот број точки. Колкава е веројатноста дека збирот на паднатите броеви ќе биде еднаков на 8?

3. Во сад се наоѓаат 3 бели, 7 црвени и 8 безбојни по форма еднакви топчиња. Одеднаш, без гледање извлекуваме две топчиња. Колкава е веројатноста дека топчињата ќе бидат 1 бело и 1 црвено?

4. Без гледање во еден ред ставаме 5 бели, 4 црвени и 3 црни топчиња. Колкава е веројатноста дека на првите три места ќе имаме бели топчиња?

5. Од a бели и b црни по форма еднакви топчиња одеднаш и без гледање избираме m топчиња. Колкава е веројатноста дека меѓу избраните топчиња имаме p бели и q црни?

6. Од шпил кој содржи 32 карти (по 8 карти од секоја боја) случајно и одеднаш се избираат 10 карти. Колкава е веројатноста меѓу избраните карти да има 2 пика, 4 трефа, 3 каро и 1 срце?

7. Во една клас има 34 ученици и ниту еден од нив не е роден на $29.$февруари. Пресметај ја веројатноста на настанот A: барем два ученика се родени во ист ден.

8. Секретарката адресирала n коверти, при што сите адреси се различни. Потоа n различни писма (од кои секое треба да стигне на точно една од наведените адреси) на случаен начин ги распоредила во пликата, во секое плико по едно писмо. Колкава е веројатноста дека ниту едно писмо нема да стигне на вистинската адреса?

III.9. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ВЕРОЈАТНОСТА

Со $\boldsymbol{A}$ го означиме партитивното множество на просторот елементарни настани Ω. Видовме дека со дефиниција 12 е определена функција $P:\boldsymbol{A}\to\mathbf{R}$ која на секое подмножество A од Ω му ја придружува неговата веројатност $P(A)$. Во следнава теорема ќе ги формулираме и докажеме основните својства на функцијата P.

Теорема 9. а) За секој настан A важи $0\le P(A)\le 1$.

б) веројатноста на сигурниот настан е $P(\Omega)=1$.

в) Ако $AB=\varnothing$, тогаш $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

г) За секој настан A, точно е равенството $P(\overline{A})=1-P(A)$.

д) Веројатноста на невозможниот настан $\varnothing$ е $P(\varnothing)=0$.

ѓ) Ако $A\subset B$, тогаш $P(A)\le P(B)$.

Доказ. Својствата а) и б) непосредно елдуваат од фактот дека веројатноста на настанот A е определена како збир на веројатностите на поволните исходи за настанот A и условот дека збирот на веројатностите на сите елементарни настани е еднаков на 1.

в) Нека $A=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k\}$ и $B=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$ се произволни дисјунктни настани, т.е. такви што $AB=\emptyset$. Тогаш, $\omega_i\neq\sigma_j$ за секои $i\in\{1,2,...,k\}$ и $j\in\{1,2,...,m\}$, па затоа

$$A\cup B=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k,\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}.$$

Ако со $p(\varepsilon)$ ја означиме веројатноста на елементарниот настан ε, тогаш од дефинција 12 имаме

$$P(A\cup B)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+...+p(\omega_k)+p(\sigma_1)+p(\sigma_2)+...+p(\sigma_m)=P(A)+P(B).$$

г) Од дефиницијата на спротивниот настан $\overline{A}$ следува дека настаните A и $\overline{A}$ се дисјунктни и притоа важи $A\cup\overline{A}=\Omega$. Сега од својствата б) и в) следува

$$1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A}),$$

па затоа $P(\overline{A})=1-P(A)$.

д) Од дефинција на невозможниот настан следува $\emptyset=\overline{\Omega}$, од што користејќи го својството г) добиваме $P(\emptyset)=P(\overline{\Omega})=1-P(\Omega)=1-1=0$.

ѓ) Ако $A\subset B$, тогаш $B=A\cup\overline{A}B$, при што настаните A и $\overline{A}B$ се дисјунктни. Сега, користејќи ги својствата а) и в) добиваме $P(B)=P(A)+P(\overline{A}B)\geq P(A)$. ♦

Пример 41. Коцка за играње се фрла четири пати. Колкава е веројатноста дека меѓу паднатите броеви точки има барем два различни броја?

Просторот на елементарни настани е составен од сите варијации со повторување од елементите $1,2,3,4,5,6$ од класа 4, па затоа $n=6^4$ и јасно сите елементарни настани се еднаквоверојатни, т.е. можеме да ја примениме класичната дефинција на веројатност. Со A да го означиме настанот: сите паднати броеви се еднакви. Бројот на поволни исходи за A е еднаков на 6 (зошто?). Според тоа, $P(A)=\frac{6}{6^4}=\frac{1}{6^3}$.

Спротивниот настан на A е настанот $\overline{A}$: меѓу паднатите броеви точки има барем два различни броја. Сега од теорема 9 г) добиваме $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{6^3}=\frac{215}{216}$. ♦

Пример 42. Пресметај $P(A)$ ако $P(AB)=0{,}15$ и $P(A\overline{B})=0{,}25$.

Ако го искористиме равенството $A=A\Omega=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$, тогаш користејќи дека настаните AB и $A\overline{B}$ се дисјунктни, од теорема 9 в) добиваме

$$P(A)=P(AB\cup A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})=0{,}15+0{,}25=0{,}40\ .\ ♦$$

Својството в) од претходната теорема можеме да го обопштиме на повеќе настани. За таа цел прво ќе го воведеме поимот по парови дисјунктни настани.

Дефиниција 13. За настаните $A_1, A_2, ..., A_k$, кои се подмножества од ист простор Ω, ќе велиме дека се *по парови дисјунктни*, ако $A_i A_j = \varnothing$, за $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,...,k\}$.

Пример 43. Коцка се фрла два пати и се бележи паднатиот број точки. За секој $k \in \{2,3,...,12\}$ со A_k да го означиме настанот збирот на паднатиот број точки е еднаков на k. Јасно, настаните A_k, $k = 2,3,...,12$ се по парови дисјунктни. ♦

Последица 1. Ако $k \geq 2$ и ако настаните $A_1, A_2, ..., A_k$ се по парови дисјунктни, т.е ако важи $A_i A_j = \varnothing$, за $i \neq j$, тогаш

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на настаните k.

За $k = 2$ тврдењето е докажано во теорема 9 в).

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k = m - 1$, т.е. дека ако настаните A_1, $A_2, ..., A_{m-1}$ се по парови дисјунктни, тогаш важи

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{m-1}) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_{m-1}). \qquad (2)$$

Понатаму, ако настаните $A_1, A_2, ..., A_m$ се дисјунктни по парови, тогаш од $A_i A_m = \varnothing$, за $i = 1,...,m-1$ следува

$$(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{m-1}) A_m = \varnothing,$$

па од теорема 9 в) и равенството (2) имаме

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{m-1} \cup A_m) = P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{m-1}) + P(A_m) = P(A_1) + ... + P(A_{m-1}) + P(A_m)$$

т.е. равенството (1) важи за $k = m$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството (1) важи за секој $k \geq 2$. ♦

Пример 44. Од еден шпил од 52 карти произволно одеднаш се извлекуваат три карти. Пресметај ја веројатноста на настанот B: во извлечените три карти има барем еден ас.

Да ги разгледаме настаните:

A_1 - во извлечените три карти има точно еден ас,

A_2 - во извлечените три карти има точно два аса, и

A_3 - во извлечените три карти има точно три аса,

Просторот елементарни настани се состои од множеството комбинации без повторување од 52 елементи од класа 3, па затоа $n = C_{52}^3$ и сите елементарни настани се еднакверојатни. За случајниот настан A_1, бидејќи од 4 аса треба да имаме еден ас, а другите карти можат да бидат било кои две од останатите 48 карти, бројот на поволните исходи е $k_1 = C_4^1 C_{48}^2$. Аналогно, за случајниот настан A_2 бројот на поволните исходи е $k_2 = C_4^2 C_{48}^1$ и за случајниот настан A_3 бројот на поволните исходи е $k_3 = C_4^3 C_{48}^0$. Бидејќи настаните A_1, A_2 и A_3 се независни и $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ од последица 1 следува

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{n}+\frac{k_3}{n}=\frac{k_1+k_2+k_3}{n}=\frac{C_4^1C_{48}^2+C_4^2C_{48}^1+C_4^3C_{48}^0}{C_{52}^3}.$$

Да забележиме дека во дадениот случај настанот $\overline{B}$ означува дека меѓу избраните карти нема ниту еден ас и неговата веројатност е $P(\overline{B})=\frac{C_4^0C_{48}^3}{C_{52}^3}$, па затоа веројатноста на настанот B може да се пресмета и користејќи ја теорема 9 г), при што добиваме

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_4^0C_{48}^3}{C_{52}^3}. \ ♦$$

Со помош на тврдењето од теорема 9 в) можеме да пресметаме веројатност на збир на два дисјунктни настани. Но, дали тоа може да се направи за произволни настани A и B? Одговор на ова прашање дава следниов пример.

Пример 45. Докажи дека, за секои настани A и B важи равенството

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (3)$$

Решение. За настаните A и B важи $A=AB\cup A\overline{B}$ и $B=AB\cup\overline{A}B$. Притоа настаните AB, $\overline{A}B$ и $A\overline{B}$ се по парови дисјунктни (зошто?). Според тоа,

$$A\cup B=(AB\cup\overline{A}B)\cup(A\overline{B}\cup AB)=AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}$$

каде настаните AB, $\overline{A}B$ и $A\overline{B}$ се по парови дисјунктни. Конечно, од последица 1 следува

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})\\&=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 46. Коцка за играње се фрла n пати и се бележат паднатите броеви точки. Пресметај ја веројатноста дека меѓу паднатите броеви

а) нема единица,
б) нема единица и нема двојка,
в) нема единици или нема двојка.

Нека A е настанот дека меѓу паднатите броеви нема единица, а B е настанот дека меѓу паднатите броеви нема двојка. Треба да ги определиме веројатностите на настаните A, AB и $A\cup B$. Просторот елементарни настани се состои од сите варијации со повторување од елементите 1,2,3,4,5,6 од класа n, па затоа истиот има 6^n елементи. Бројот на поволните исходи за секој од настаните A и B е 5^n, а бројот на поволните исходи на настанот AB е 4^n. Затоа

$$P(A)=P(B)=\frac{5^n}{6^n} \text{ и } P(AB)=\frac{4^n}{6^n}.$$

Конечно, од равенството (3) добиваме

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2\cdot 5^n-4^n}{6^n}. \ ♦$$

ЗАДАЧИ

1. Пресметај $P(B)$ ако $P(AB) = 0{,}26$ и $P(B\overline{A}) = 0{,}33$.

2. Од 30 ученици во еден клас, меѓу кои има 12 момчиња, на случаен начин се избира екипа од 6 ученици. Пресметај ја веројатноста на настаните, екипата има: A- точно три ученици, B- најмалку 5 ученици, C - само ученички.

3. Во една кутија има топчиња на коишто се запишани броевите $1,2,3,4,5$ и 6. На случаен начин се извлекува едно топче, се забележува бројот и потоа се враќа во кутијата. Забележано е дека бројот k, $k = 2,3,4,5,6$ се јавува 2^{k-1} пати почесто од бројот 1. Пресметај ја веројатноста на настаните:

а) извлечено е топче со непарен број;

б) бројот запишан на извлеченото топче е делив со 3.

4. Шест семејства составени од татко, мајка и три деца се нашле на исто место. Произволно се избрани: еден татко, една мајка и едно дете. Колкава е веројатноста сите да припаѓаат на исто семејство?

5. Лотарија се состои од 250 лозови и се добиваат вкупно 10 награди. Киро купил 10 лоза. Колкава е веројатноста на настаните:

а) A: Киро добил 2 награди,

б) B: Киро добил најмалку 4 награди,

в) C: Киро не добил ниту една награда.

6. Во еден сад се наоѓаат 9 бели, 8 црвени и 7 жолти топчиња. Извлекуваме две топчиња одеднаш. Колкава е веројатноста дека извлечени точиња нема да бидат и двете жолти.

7. Двајца стрелци гаѓаат иста цел. Првиот стрелец целта ја погаѓа со веројатност $0{,}7$, а вториот со веројатност $0{,}5$. Колкава е веројатноста дека целта ќе биде погодена ако стрелците кон неа стрелаат истовремено?

III.10. ГЕОМЕТРИСКА ВЕРОЈАТНОСТ

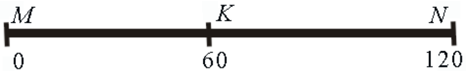
Во пример 35 видовме дека постојат експерименти, чиишто простори од елементарни настани можат да се претставaт со рамнински фигури. Во таков случај случајните настани се определени како подмножества на просторот елементарни настани Ω. Меѓутоа, нивните веројатности не можат да се определат преку веројатностите на елементарните настани, бидејќи истите ги има непреброиво многу. Во овој дел ќе покажеме како може да се пресметуваат веројатностите на некои едноставни примери од овој тип.

Нека сите елементарни, според условите на експериментот, се еднакво можни и нека просторот Ω може да се претстави со фигура од рамнината или просторот, која има конечна должина, плоштина односно волумен. Тогаш секој случаен настан $A \subseteq \Omega$ се претставува со фигура којашто исто така има конечна должина, плоштина односно волумен. Ако со $m(\Omega)$ ја означиме мерата (должина, плоштина или волумен) на фигурата за просторот Ω, а со $m(A)$ мерката на фигурата за настанот A, тогаш веројатноста на настанот A можеме да ја пресметаме според формулата

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}\,. \tag{1}$$

Формулата (1) ја дава таканаречената *геометриска веројатност*.

Пример 47. Пристигнувањето на некој брод во пристаништето е еднакво можно во време 11 до 13 часот. Пресметај ја веројатноста бродот да пристигне до 12^{30} часот!



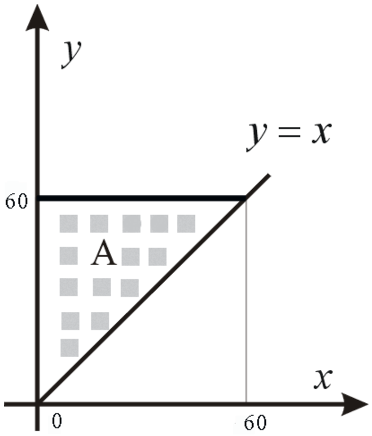
Просторот елементарни настани е определен со интервалот од 11 до 13 часот, што изразено во минути е интервалот $[0,120]$ и му соодветствува отсечка MN таква, што $\overline{MN}=120$. Бидејќи множеството елементарни настани е со конечна должина, можеме да ја користиме формулата (1), ако и на настанот A: бродот пристигнува до 12^{30} часот му соодвествува отсечка со конечна должина. Меѓутоа, бидејќи од 11 до 12^{30} часот имаме 90 минути добиваме дека на настанот A му соодвествува отсечка MK таква, што $\overline{MK}=90$. Конечно од формулата (1) имаме

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{90}{120}=\frac{3}{4}\,.\blacklozenge$$

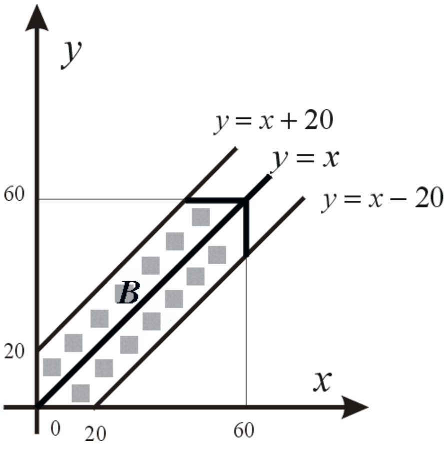
Пример 48. Двајца пријатели M и K се договориле да се сретнат на одредено место од 11 до 12 часот. Пристигнувањето на пријателите е независно и еднакво можно во текот на договореното време.

а) Најди ја веројатноста дека M ќе стигне пред K !

б) Колку изнесува веројатноста дека пријателите ќе се сретнат, ако се договориле оној што ќе стигне прв да го чека другиот најмногу 20 минути?



Ако со x и y го означиме времето на пристигнување на M и K соодветно, тогаш секој елемнтарен настан е претставен со подреден пар (x,y), каде $0\le x,y\le 60$, т.е.



$$\Omega=\{(x,y)\,|\,x,y\in[0,60]\}\,,$$

па затоа $m(\Omega)=60^2=3600$.

а) Ако со A го означиме настанот M стигнува пред K, тогаш

$$A=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in\Omega,\ x<y\}\,,$$

(цртеж горе), па затоа $m(A)=\frac{60\cdot 60}{2}=1800$. Конечно, од (1) добиваме

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1800}{3600}=\frac{1}{2}\,.$$

б) Настанот B ќе се реализира ако $|x-y|\leq 20$, т.е. тој е определен со

$$B=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in\Omega, |x-y|\leq 20\}.$$

За настанот B имаме

$$m(B)=2\cdot(\tfrac{60^2}{2}-\tfrac{40^2}{2})=2000,$$

па затоа

$$P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=\frac{2000}{3600}=\frac{5}{9}.$$

♦

ЗАДАЧИ

1. На отсечка $\overline{AB}=12cm$ случајно се фрла точка M. Да се најде веројатноста дека плоштината на квадратот со страна AM е меѓу $36cm^2$ и $91cm^2$.

2. На отсечка $\overline{AB}=l$ случајно се фрла точка M. Да се најде веројатноста дека распојанието од M до средните на отсечката AB не е поголемо од a.

3. Отсечка $\overline{AB}=l$ се дели на три дела. Да се најде веројатноста дека од трите добиени отсечки може да се конструира триаголник.

4. Во круг со радиус R случајно е фрлена точка. Да се најде веројатноста дека таа точка паднала во рамностраниот триаголник впишан во кругот.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Докажи ги равенствата

а) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$,

б) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$,

в) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$,

г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$,

д) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+...+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2. Докажи дека за секој природен број n бројот

а) $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ е делив со 17,

б) $2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ е делив со 54, в) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ е делив со 57,

г) $2^{3n}-7n-1$ е делив со 64,

д) $2^{3n+2}-28n-4$ е делив со 196.

3. Докажи дека за секој природен број $n \geq 5$ важи $2^n > n^2$.

4. Докажи дека за секои $p,q>0$ и за секој природен број $n \geq 2$ точно е неравенството $\sqrt{p^n}+\sqrt{q^n} \leq \sqrt{(p+q)^n}$.

5. Ако $a_0=2, a_1=3$ и $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$ докажи дека $a_k=2^k+1$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

6. Ако $a_0=0, a_1=1$ и $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$, за секој $n \in \mathbf{N}$ докажи дека $a_k=2^k-1$, за секој $k \in \mathbf{N}$.

7. Во колку пермутации без повторување од n елементи стојат едноподруго m фиксирани елементи и тоа:

а) во некој даден редослед;

б) во произволен редослед.

8. По пет различно нумерирани бели, сини, црвени и црни топчиња треба да се наредат едно до друго така што секои четири последователни топчиња имаат различна боја. На колку начини тоа може да се направи?

9. Колку петцифрени броеви можат да се формираат од цифрите $0,2,4,6$ и 8?

10. Колку различни низи од знаци можат да се формираат од зборот "*паралелопипед*"?

11. Реши ја равенката $7V_n^3=6V_{n+1}^3$.

12. Бројот на варијациите од втора класа без повторување спрема бројот на варијациите од трета класа без повторување како $1:20$. Колку елементи има множеството?

13. Колку трицифрени броеви може да се формираат од цифрите $3,4,5,6,7$?

14. Реши ја равенката $C_n^2=136$.

15. Определи ги m и n, ако $C_{n+2}^{m}:C_{n+2}^{m+1}:C_{n+2}^{m+2}=0,6:1:1$.

16. Бројот на варијациите без повторување од n елементи од класа k спрема бројот на варијациите без повторување од n елементи од класа $k-1$ се однесува како $10:1$, а бројот на комбинациите без повторување од n елементи од класа k спрема бројот на комбинациите од n елементи од класа $k-1$ се однесува како $5:3$. Најди ги n и k!

17. На еден шаховски турнир учествуваат дванаесет шахисти. Секој треба да одигра по една партија со секого. Колку вкупно партии ќе се одиграат?

18. Колку триаголници ќе се добијат со повлекувањето на сите дијагонали во правилен дванесетаголник, ако темињата на триаголниците се поклопуваат со темињата на шестаголникот?

19. Најди го збирот на коефициентите во развиениот облик на биномот:

а) $(1+x)^{10}$, б) $(1-x)^{10}$.

20. Најди го средниот член во развиениот облик на степенот $(\frac{a}{x}-\sqrt{x})^{16}$.

21. Во развиениот облик на степенот $(x^2+\frac{a}{x})^n$ коефициентите на четвртиот и тринаесеттиот член се еднакви. Најди го членот што не го содржи x!

22. Најди ги рационалните собирци во развиениот облик на степенот $(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x})^{10}$.

23. Определи ги члeновите кои не содржат ирационални броеви во развојот на степенот $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$.

24. Во една лотарија се продадени 10000 тикети, а се делат 150 стокови и 50 парични награди. Колкава е веројатноста еден тикет да добие награда (без разлика дали стокова или парична)?

25. Во еден сад имаме 5 бели и 7 црвени топчиња. Одеднаш и без гледање извлекуваме 8 топчиња. Колкава е веројатноста дека ќе извлечеме 2 бели и 6 црвени топчиња?

26. Хомогена коцка за играње се фрла два пати.

а) Колкава е веројатноста дека збирот на паднатите броеви ќе биде помал од 4?

б) Колкава е веројатноста дека збирот на паднатите броеви ќе биде поголем или еднаков на 5, но помал или еднаков на 8?

27. Правилна хомогена монета се фрла 50 пати. Колкава е веројатноста дека ќе паднат точно 25 писма?

28. Цифрите $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ се наредени во низа. Колкава е веројатноста дека цифрите 0 и 1 не се соседни?

29. Четири ученици и осум ученички случајно се поделени во четири екипи од по три члена. Пресметај ја веројатноста дека барем два ученика се во иста екипа?

30. Пресметај $P(A)$, ако $P(AB)=0{,}72$ и $P(A\overline{B})=0{,}08$.

31. Колкава е веројатноста дека од 32 карти (од шпилот се исфрлени картите од со бројки $2,3,4,5,6$) ќе извлечиме три аса, ако:

а) влечиме по една карта и потоа ја враќаме во шпилот,

б) извлечената карта не ја враќаме во шпилот.

32. Во круг со радиус R случајно е фрлена точка. Да се најде веројатноста дека таа точка паднала во квадратот впишан во кругот.

33. На отсечка $\overline{AB}=l$ случајно се фрлаат две точки M и N. Да се најде веројатноста точката M да е поблиску до точката A отколку до точката N.

34. На отсечка $\overline{AB}=l$ случајно се фрлаат две точки M и N. Да се најде веројатноста точката M да е поблиску до точката N, отколку A до N.

35. Од интервалот [0,1] случајно и независно еден од друг се избрани броевите x, y и z. Колкава е веројатноста дека за вака избраните броеви важи неравенството $x^2+y^2+z^2 \le 1$?

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. Докажете го равенството

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

2. Во колку пермутации без повторување на цифрите 1,2,3,4,5,...,9 цифрите 2,4 и 6 стојат една до друга и тоа:

а) во дадениот редослед,

б) во произволен редослед.

3. На тикет за спортска прогноза се наоѓаат 12 натпревари. Ако за победа на домаќинот се става знак 1, за победа на гостинот занк 2, а за нерешен резултат знак 0, да се најде:

а) Колку различно пополнети колони обезбудуваат 12 точни погодоци?

б) Колку колони треба да се поплнат ако се "знаат" резултатите на пет средби?

в) Колку колони треба да се пополнат ако се "знае" дека 7 средби ќе завршат нерешено?

4. а) Докажи дека

$$C_{n-2}^{m}+C_{n-2}^{m-2}+2C_{n-2}^{m-1}=C_{n}^{m}.$$

б) Пресметај ги m и n ако

$$C_{n}^{m-1}:(C_{n-2}^{m}+C_{n-2}^{m-2}+2C_{n-2}^{m-1}):C_{n}^{m+1}=3:5:5.$$

5. Определи го оној член во развојот на биномот

$$(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}})^{12}$$

во кој a и b имаат еднакви степенови показатели.

6. Во кутија се наоѓаат 12 бели, 23 црвени и 27 црни по големина еднакви топчиња. Колкава е веројатноста дека ќе извлечеме црвено топче?

7. Фрламе две коцкиза играње. Пресметај ја веројатноста на настанот:

а) збир на паднатите броеви е еднаков на 7,

б) збирот на паднатите броеви е еднаков на 9.

8. Во еден сад имаме 12 бели и 9 црвени топчиња. Одеднаш и без гледање извлекуваме 9 топчиња. Колкава е веројатноста дека ќе извлечеме 4 бели и 5 црвени топчиња?

9. Колкава е веројатноста дека од 32 карти (од шпилот се исфрлени картите од со бројки $2,3,4,5,6$) ќе извлечиме два аса, ако:

а) влечиме по една карта и потоа ја враќаме во шпилот,

б) извлечената карта не ја враќаме во шпилот.

10. Во круг со радиус R случајно е фрлена точка. Да се најде веројатноста дека таа точка паднала во правилниот шестаголник впишан во кругот.

ГЛАВА IV

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА ВО РАМНИНА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Правоаголен координатен систем**
2. **Координати на точки и на вектори**
3. **Растојание меѓу две точки**
4. **Делење на отсечка во даден однос**
5. **Различни видови равенка на права**
    - **5.1. Општ вид равенка на права**
    - **5.2. Експлицитен вид равенка на права**
    - **5.3. Равенка на права што минува низ една или две точки**
    - **5.4. Сегментен вид равенка на права**
    - **5.5. Нормален вид равенка на права**
6. **Агол меѓу две прави. Услови за паралелност и нормалност на две прави**
7. **Заемна положба на две прави**
8. **Растојание од точка до права**
9. **Кружница, равенка на кружница**
10. **Заемна полжба на права и кружница**
11. **Равенка на тангента на кружница**
12. **Елипса, централна равенка на елипса**
13. **Испитување форма на елипса. Ексцентритет на елипса**
14. **Заемна полжба на права и елипса**
15. **Равенка на тангента на елипса**
16. **Хипербола, централна равенка на хипербола**
17. **Испитување форма на хипербола. Ексцентритет на хипербола**
18. **Асимптоти на хипербола**
19. **Заемна положба на права и хипербола**
20. **Равенка на тангента на хипербола**
21. **Парабола, равенка на параболата**
22. **Заемна полжба на права и парабола**
23. **Равенка на тангента на параболата**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *линеарната функција и нејзиниот график,*
- *квадратната функција и нејзиниот график, и*
- *решавањето на линеарните и квадратните равенки.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го усвоиш претставувањето на векторите во рамнина со помош на координати,
- да ја усвоиш формулата за растојание меѓу две точки и нејзината примена,
- да ја усвоиш формулата за определување на координати на точка, која дадена отсечка дели во даден однос и нејзината примена,
- да ги усвоиш различните видови равенка на права и да научиш да трансформираш еден вид во друг,
- да ја усвоиш формулата за пресметување агол меѓу две прави, како и условите за паралелност и нормалност на две прави, и да научиш да ги пртименува при решавање на практични задачи,
- да ја усвоиш формулата за пресметување растојание меѓу точка и права и истата да ја применуваш при решавање на практични задачи,
- да ги усвоиш дефинициите на кружница, елипса, хипербола и парабола и нивните равенки во правоаголен координатен систем,
- да ги научиш да елементите на кружницата, елипсата, хиперболата и параболата и да можеш да ги составуваш нивите равенки при дадени услови,
- да научиш да ја испитуваш заемната положба на права со секоја од кривите: кружница, елипса, хипербола и парабола, и
- да научиш да составуваш равенка на тангента на секоја од кривите: кружница, елипса, хипербола и парабола, при дадени услови на задачата.

Предмет на аналитичката геометрија е проучување на геометриските објекти (точки, линии, рамнини и др.) и нивните заемни положби во рамнината со помош на методите на алгебрата.

Прв најважен чекор на аналитичката геометрија е направен со воведувањето на координатниот систем и определувањето на положбата на која било точка во рамнината (и просторот) со помош на броеви – наречени *координати* на таа точка.

Тоа отвора можност за изразување со помош на броеви и бројни соодноси и на посложените геометриски објекти, како што се линиите (прави и криви), рамнините, површините и др. Тоа го постигнуваме преку методот на аналитичката геометрија – наречен *метод на координати*.

Неговото огромно значење е во тоа што секоја линија (права или крива), која претставува одредено множество од точки, кои исполнуваат еден ист геометриски услов, може да се изрази аналитички преку некоја точно одредена равенка со две променливи.

Равенка на една линија, се вика зависноста меѓу дадените величини и координатите на една која било точка од таа линија, а која е задоволена од координатите на секоја нејзина точка. Тие координати се викаат *променливи* или *тековни координати* и се означуваат со x и y.

Основен принцип на аналитичката геометрија е што: кога една дадена точка (со познати координати) лежи на една линија, нејзините координати ја задоволуваат равенката на линијата, и обратно, ако координатите на дадена точка ја задоволуваат равенката на една линија, тогаш таа точка лежи на линијата.

На пример, точката $M(3,-1)$ лежи на линијата, чија равенка е $x - 2y = 5$, бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката.

Аналитичката геометрија има две основни задачи, тоа се:

1°. Да ја одреди равенката на дадена линија (множество од точки) во рамнината или просторот, што е определена со своите геометриски својства, и

2°. Да ги проучи и систематизира сите геометриски својства на една линија, што е зададена со својата равенка.

Ќе видиме дека составувањето на равенката на дадена линија, определена со нејзините геометриски својства не е едноставна задача. Да го истакнеме и тоа, дека равенката на дадена линија не зависи само од нејзините својства, туку зависи уште и од изборот на координатниот систем и положбата на линијата во однос на него.

IV.1. ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Под производ на скалар k и вектор $\vec{a}$ (симболички $k\vec{a}$), подразбираме вектор, што е колинеарен со $\vec{a}$ и има должина $|k|\cdot|\vec{a}|$, а истонасочен е или спротивнонасочен со $\vec{a}$ зависно од тоа дали е $k > 0$ или $k < 0$.

Вектор кој има должина (модул) 1, се вика *единичен вектор*, и обично се обележува со $\vec{e}$. Ако единичниот вектор $\vec{e}$ е истонасочен со векторот $\vec{a}$, тогаш врз основа на дефиницијата на производ на вектор со скалар, имаме $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$, а ако $\vec{e}$ е спротивнонасочен со $\vec{a}$, тогаш е $\vec{a} = -|\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Според тоа, секој вектор може да се изрази како производ од неговата должина и единичниот вектор, кој е колинеарен со него, и со знак + или –, зависно од тоа дали земениот единичен вектор има иста или спротивна насока со него.

Единичниот вектор $\vec{e}$, кој е истонасочен со векторот $\vec{a}$, се вика *орт* на векторот $\vec{a}$.

Ако единичните вектори $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ се нормални еден на друг, односно нивните правци се нормални, тогаш вообичаено е нив да ги означуваме со $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

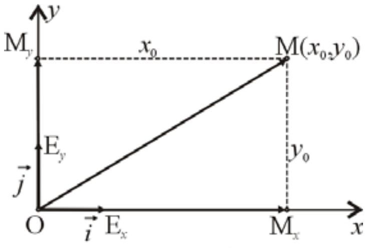
Во рамнината нека се дадени две произволни точки *O* и *M*. Ако една од тие точки, на пример *O*, е фиксна во смисла на почетна, тогаш векторот $\overrightarrow{OM}$, како што е познато, го викаме *радиус-вектор* на точката *M* во однос на точката *O*.

Поимот правоаголен координатен систем во рамнината, кој се учи уште во основното училиште, сега ќе го воведеме со помош на единичните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вака:

Дефиниција 1. Подредената тројка: од една произволна точка *O* и два заемно нормални единични вектора $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$, симболички $(O, \vec{i}, \vec{j})$, се вика *правоаголен координатен систем* во рамнината *П*.

Точката *O* се вика негов *координатен почеток*, а правите определени со векторите и $\vec{i} = \overrightarrow{OE}_x$, и $\vec{j} = \overrightarrow{OE}_y$, се викаат *координатни оски* (црт. 1). Правата OE_x или Ox се вика *апсцисна оска*, а правата OE_y или Oy – *ординатна оска* на правоаголниот координатен систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Да уочиме една произволна точка *M* во рамнината П, во која е зададен правоаголен координатен систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Потоа, радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$ да го проектираме на координатните оски $\overrightarrow{OE}_x$ и $\overrightarrow{OE}_y$. Така ги добиваме неговите проекции – векторите $\overrightarrow{OM}_x$ и $\overrightarrow{OM}_y$, чии должини да ги означиме со $|\overrightarrow{OM}_x| = \overline{OM}_x = x_0$ и $|\overrightarrow{OM}_y| = \overline{OM}_y = y_0$ (црт. 1).



црт. 1

Бидејќи $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y$ и $\overrightarrow{OM}_x = \overline{OM}_x \cdot \vec{i} = x_0\vec{i}$, $\overrightarrow{OM}_y = \overline{OM}_y \cdot \vec{j} = y_0\vec{j}$, тогаш радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$ на точката *M*, можеме да го запишеме вака:

$$\overrightarrow{OM} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j}, \qquad (1)$$

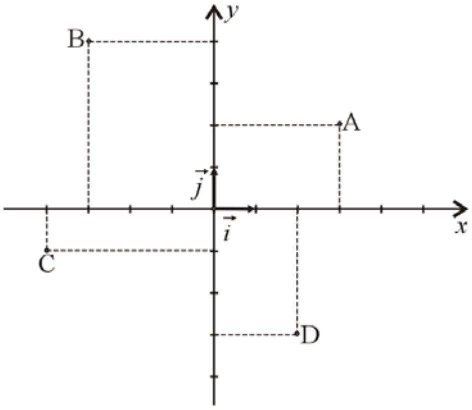
Во тој случај велиме дека радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$ е *разложен* по единичните вектори (ортовите) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ во правоаголниот координатен систем.

Може да се покаже дека таквото разложување на радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$, секогаш е можно и единствено. За реалните броеви x_0, y_0 велиме, дека се *координати* на радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$ и пишуваме:

$$\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0). \qquad (2)$$

Но, тие се во исто време и *координати* на точката M, што симболички го запишуваме како $M(x_0,y_0)$. Првата координата x_0 на точката M, односно на радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$, се вика *апсциса*, а втората координата y_0 – *ордината* на точката M.

Со записот (2) велиме дека радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$ е зададен или изразен со своите координати (x_0,y_0).



црт. 2

Кога знаеме дека координатните оски се реални прави, односно геометриски репрезенти на множеството R на реалните броеви, тогаш станува очигледно дека: Со правоаголниот координатен систем $(O,\vec{i},\vec{j})$ и релацијата (1) е воспоставена биекција:

$$M \to (x_0,y_0) \qquad (3)$$

од рамнината Π (како множество точки) на множеството $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ на сите подредени парови реални броеви.

На пример, на точката A и соодветствува подреден пар реални броеви (3,2), а на точката C – подреден пар броеви (–4, –1) (црт. 2). Подредениот, пак, пар реални броеви (–3, 4) при таа биекција е слика на единствената точка B, а подредениот пар броеви (2, –3) е слика на точката D (црт. 2).

Имајќи ја предвид биекцијата (3), често точката M ја идентификуваме со нејзиниот придружен подреден пар реални броеви (x_0,y_0), а рамнината Π со множеството $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ на сите подредени парови реални броеви (x,y). Затоа, рамнината Π на која е зададен правоаголен координатен систем $(O,\vec{i},\vec{j})$ ја викаме уште *координатна рамнина*.

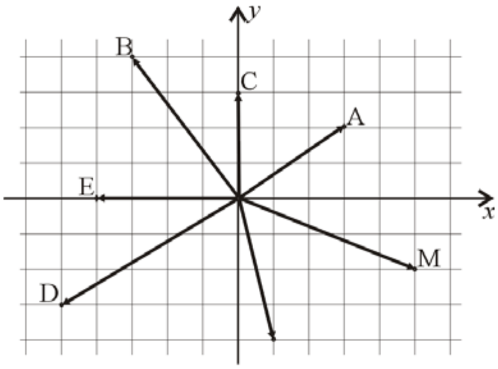
Пример 1. Во правоаголниот координатен систем $(O,\vec{i},\vec{j})$ дадени се точките: A (–2, 5), B(1, –3) *и* C(0,4). Да ги изразиме радиус-векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *и* $\overrightarrow{OC}$ со нивните координати, а потоа да ги разложиме по координатните оски (ортовите).

Решение. Тоа го правиме вака:

$\overrightarrow{OA} = (-2, 5) = -2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = (1,-3) = \vec{i} - 3\vec{j}$ и

$\overrightarrow{OC} = (1,4) = 0\,\vec{i} + 4\vec{j} = 4\vec{j}$. ♦

Пример 2. Ортовите имаат координати: $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$. ♦



црт. 3

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги координатите на радиус-векторите: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OM}$ што се дадени на црт. 3.

2. Векторите на црт. 3 разложи ги по координатните оски, односно изрази ги со ортовите $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

3. Дадени се радиус-векторите со нивните координати: $\overrightarrow{OA} = (–1,3)$; $\overrightarrow{OB} = (0,–3)$; $\overrightarrow{OC} = (4,–2)$ и $\overrightarrow{OD} = (–2,–5)$. Нанеси ги на координатната рамнина.

4. Векторите: $\overrightarrow{OM} = (4, –1)$; $\overrightarrow{ON} = (0,–3)$ и $\overrightarrow{OR} = (–3,2)$ разложи ги по координатните оски.

5. Дадени се радиус-векторите: $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} –3\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = –2\vec{i} + \vec{j}$ и $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} –4\vec{j}$. Одреди ги координатите на нивните крајни точки.

6. Одреди ги реалните броеви x и y од релациите:

а) $3\vec{i} + 2\vec{j} = (x + 1)\,\vec{i} + y\vec{j}$;   б) $x\vec{i} + 5\vec{j} = –3\vec{i} + (y – 2)\vec{j}$.

7*. Одреди ги реалните броеви x и y од релациите:

а) $(2 – x)\,\vec{i} + (x + y – 4)\,\vec{j} = 0$;   б) $(x – y)\,\vec{i} + (2x + y –1)\,\vec{j} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

8. Радиус-векторот $\overrightarrow{OM}$, зададен е со неговите координати:

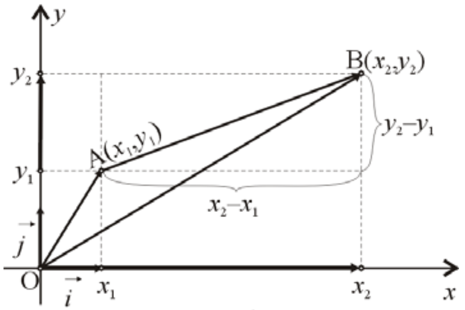
а) $\overrightarrow{OM} = (–3,0)$;   б) $\overrightarrow{OM} = (0,4)$. Одреди ја неговата должина.

IV.2. КООРДИНАТИ НА ТОЧКИ И НА ВЕКТОРИ

Во правоаголниот координатен систем $(O,\vec{i},\vec{j})$ нека е зададен векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ чии крајни точки имаат координати: $A\,(x_1, y_1)$ и $B\,(x_2, y_2)$ (црт. 4).

Координатите на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, да ги означиме со (a_x, a_y). Тогаш

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}. \qquad (1)$$



црт. 4

Сега ќе видиме како ги одредуваме координатите на дадениот вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Гледаме, дадениот вектор $\overrightarrow{AB}$ не е радиус-вектор. Но, согласно дефиницијата за разлика на два вектора, тој може да се претстави како разлика од два радиус-вектора, т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} – \overrightarrow{OA}.$$

Бидејќи координатите на овие два радиус-вектора ги знаеме $\overrightarrow{OB} = (x_2,y_2)$ и $\overrightarrow{OA} = (x_1,y_1)$, за векторот $\overrightarrow{AB}$ добиваме:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} – \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) – (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 – x_1)\,\vec{i} + (y_2 – y_1)\,\vec{j}.$$

Оттука:

$$a_x = x_2 – x_1,\ a_y = y_2 – y_1, \qquad (2)$$

т.е. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Според тоа, за да ги одредиме координатите на некој вектор, доволно е од координатите на неговата крајна точка да ги одземеме координатите на неговата почетна точка.

Пример 3. Да ги одредиме координатите на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, ако неговиот почеток M_1 и крајот M_2 имаат координати $M_1(2, -3)$ и $M_2\,(-1, 5)$ и да го разложиме по ортовите $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Решение. Според (2) имаме: $a_x = x_2 - x_1 = -1 - 2 = -3$, $a_y = y_2 - y_1 = 5 - (-3) = 8$.

Значи, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3{,}8)$, односно $\overrightarrow{M_1M_2} = -3\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$. ♦

Пример 4. Векторот $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ има почеток во точката $A(-1{,}4)$. Да ги одредиме координатите на неговиот крај B.

Решение. Според (1) имаме: $a_x = 2$, $a_y = -3$. Оттука и од (2) добиваме $2 = x_2 - (-1)$ и $-3 = y_2 - 4$, а од нив $x_2 = 1$, $y_2 = 1$. Според тоа, $B\,(1, 1)$. ♦

Во први клас се запозна со операциите: собирање на два (или повеќе) вектора, одземање на вектори и множење на вектор со број (скалар). Тие операции тогаш ги изведувавме геометриски, бидејќи и самите вектори беа задавани геометриски (како отсечки).

Познато е, исто така, дека собирањето на вектори е комутативна и асоцијативна операција, т.е. важат равенствата:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,,\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

А за множењето на вектор со број, познато е дека важат: асоцијативниот закон

$$(k \cdot m) \cdot \vec{a} = k \cdot (m \cdot \vec{a}),$$

и дистрибутивните закони на множењето во однос на собирањето (на броеви, односно на вектори)

$$(k + m) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a}),\quad k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}.$$

Ако векторите се зададени со своите координати во правоаголниот координатен систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$, тогаш операциите со нив, како што ќе следува, знатно се поедноставуваат и се извршуваат согласно следниве правила:

1°. При собирањето на два (или повеќе) вектора, се собираат нивните соодветни координати, т.е.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (a_x, a_y) + (b_x, b_y) + (c_x, c_y) = (a_x + b_x + c_x\,, a_y + b_y + c_y). \tag{3}$$

Доказ. Навистина

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (a_x, a_y) + (b_x, b_y) + (c_x, c_y) = (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}\,) + (b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j}\,) + (c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j}\,)$$

$$= (a_x + b_x + c_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y + c_y)\,\vec{j} = (a_x + b_x + c_x, a_y + b_y + c_y).\ ♦$$

2°. При одземање на вектори, ги одземаме нивните соодветни координати, т.е.

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x, a_y) - (b_x, b_y) = (\alpha_x - b_x\,, a_y - b_y).$$

Доказ. Навистина:

$\vec{a}-\vec{b}=(a_x, a_y)-(b_x, b_y)=(\alpha_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j})-(b_x\,\vec{i}+b_y\,\vec{j})=(a_x-b_x)\,\vec{i}+(a_y-b_y)\,\vec{j}=(a_x-b_x\,,\,a_y-b_y)$. ♦

Пример 5. Дадени се векторите $\vec{a}=(-2,1)$ и $\vec{b}=(3,4)$. Да ги одредиме нивниот збир и разлика.

Решение. Согласно (3) и (4) имаме:

$\vec{a}+\vec{b}=(-2,1)+(3,4)=(-2+3,\,1+4)=(1,5)$, $\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)-(3,4)=(-2-3,\,1-4)=(-5,-3)$. ♦

3°. При множењето на вектор со број (скалар), секоја координата на векторот се множи со тој број, т.е. $\lambda\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(a_x, a_y)=(\lambda\cdot a_x, \lambda\cdot a_y)$.

Доказ. Навистина: $\lambda\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(a_x, a_y)=\lambda\,(a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j})=(\lambda a_x)\,\vec{i}+(\lambda a_y)\,\vec{j}$. ♦

Пример 6. Дадени се векторите: $\vec{a}=(3,-2)$ и $\vec{b}=(-2,-6)$. Треба да ги одредиме векторите: а) $4\cdot\vec{a}$; б) $3\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$.

Решение. б) $3\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot\vec{b}=3\,(3,-2)-\frac{1}{2}(-2,-6)=(9,-6)-(-1,-3)=(9+1,-6+3)=(10,-3)=10\,\vec{i}-3\,\vec{j}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Векторот $\vec{a}$ има почеток во точката $M_1\,(2,-1)$ и крај во точката $M_2\,(-3,-5)$. Одреди ги координатите на векторот $\vec{a}$ и разложи го по векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2. Одреди ги координатите на векторот $\overrightarrow{CD}$, ако $C\,(2,-4)$, $D\,(1,3)$.

3. Одреди го збирот на векторите:

а) $\vec{a}=(4,-1)$, $\vec{b}=(3,0)$ и $\vec{c}=(-2,4)$; б) $\vec{a}=(-3,-2)$ и $\vec{c}=(4,-3)$.

4. Најди ја разликата на векторите:

а) $\vec{a}=(-5,-1)$ и $\vec{b}=(0,-3)$; б) $\vec{b}=(4,-1)$ и $\vec{c}=(-2,-2)$.

5. Дадени се векторите: $\vec{a}=(-1,5)$ и $\vec{b}=(\frac{1}{2},-2)$. Одреди ги векторите:

а) $3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $-\vec{a}+4\vec{b}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a}-6\vec{b}$.

6. Одреди ги координатите на векторот $\vec{a}$, ако неговиот почеток има координати $A_1(-\frac{3}{2},4)$, а неговиот крај $A_2(\frac{1}{2},-3)$.

7. Даден е векторот: $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$. Неговиот почеток има координати $A_1(1,-2)$. Одреди ги координатите на крајот A_2.

8. Векторот $\vec{b}=\frac{3}{4}\vec{i}-2\vec{j}$ има крај во точката $B_2(-1,3)$. Одреди ги координатите на неговиот почеток B_1.

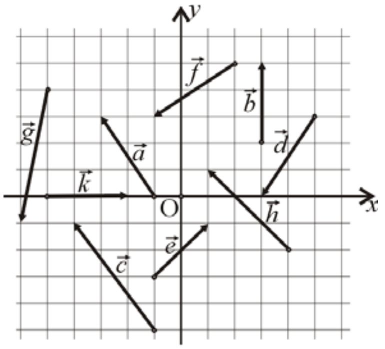
9. Дадени се векторите: $\vec{a}=2\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$; $\vec{b}=-3\vec{i}-\frac{3}{4}\vec{j}$ и $\vec{c}=4\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}$. Одреди ги координатите на векторите: а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; г) $\vec{b}-(\vec{a}+\vec{c})$.

10. Дадени се векторите: $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$. Одреди ги векторите:

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}$; в) $3\vec{a}-2\vec{b}$.

11. Одреди ги координатите на векторите, што се дадени на црт. 5.

12. Даден е вектор $\vec{a}$, чиј почеток A и крајот B имаат координати A (0,2) и B(4,5). Нанеси го во координатната рамнина и одреди ја неговата должина.

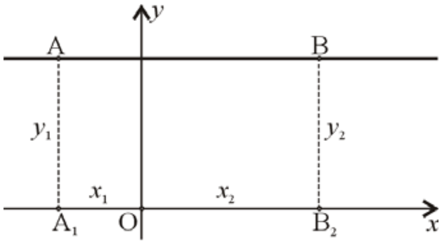


црт. 5

IV.3. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

Нека се дадени точките A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) во рамнината Π, а се бара да се одреди растојанието меѓу нив, кое симболички го означуваме со d (A, B), односно должината на отсечката AB, која пак, ја означуваме со $\overline{AB}$.

Прво ќе го разгледаме случајот кога точките A и B лежат на права паралелна со апсцисната оска (или на самата Ox-оска), т.е. кога $y_1 = y_2$.



црт. 6

На цртежот 6, претставен е случај кога точката A има негативна апсциса x_1, а точката B има позитивна апсциса x_2. Од цртежот 6, имаме:

$$\overline{AB}=\overline{A_1B_1}=\overline{A_1O}+\overline{OB_1}.$$

Бидејќи: $x_1 < 0$, тогаш $-x_1 > 0$. Значи, $\overline{A_1O}=-x_1$, а $\overline{OB_1}=x_2$.

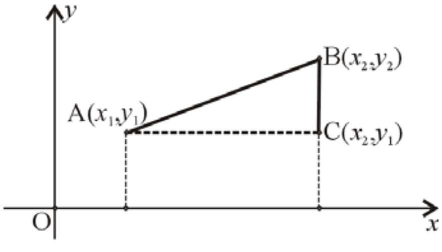
Според тоа, $\overline{AB}=-x_1+x_2=x_2-x_1$.

Ако точките A и B си ги сменат местата, тогаш апсцисата x_2 станува негативна, а апсцисата x_1 – позитивна, додека разликата $x_2 - x_1$ - негативна (но со иста апсолутна вредност). Според тоа, независно од тоа, дали разликата $x_2 - x_1$ е позитивен или негативен број, имаме:

$$d\,(A,B)=\overline{AB}=|x_2-x_1|. \tag{1}$$

Ако точките A и B лежат на права паралелна со ординатната оска (или на самата Oy-оска), т.е., ако $x_1 = x_2$, на ист начин наоѓаме дека:

$$d\,(A,B)=\overline{AB}=|y_2-y_1|. \tag{2}$$



црт. 7

Сега да претпоставиме дека правата AB, што минува низ точките A и B не е паралелна ниту со Ox-оската, ниту со Oy-оската, т.е. дека е $x_1 \neq x_2$ и $y_2 \neq y_1$. Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни, соодветно, со оските Ox и Oy (црт. 7). Од црт. 7 гледаме дека, пресек на тие прави е точката C (x_2, y_1).

Од правоаголниот триаголник *ABC*, согласно Питагоровата теорема имаме:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 .$$

Но, бидејќи: $\overline{AC} = |x_2 - x_1|$ и $\overline{BC} = |y_2 - y_1|$, добиваме:

$$\overline{AB}^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Според тоа, важи следнава формула за растојание меѓу две точки:

$$d\,(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

Таа е изведена при услов да е $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, бидејќи во спротивно црт. 7 не би бил применлив. Меѓутоа, лесно се уверуваме дека таа важи и во случаите кога $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ и тоа: ако $x_1 = x_2$, тогаш таа преминува во формулата (2), а ако $y_1 = y_2$, таа преминува во формулата (1).

Пример 7. Да се одреди ратојанието меѓу точките $M(-3,1)$ *и* $S(4,2)$.

Решение. Од формулата (3) наоѓаме: $d(M,S) = \overline{MS} = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. ♦

Со формулата (3), всушност, даден е аналитички облик на Питагоровата теорема. Оттука нејзиното големо значење и примена. Таа овозможува да се пресмета и должината на кој било вектор:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\,, \tag{4}$$

ако тој е изразен со неговите координати.

Да се потсетиме дека должината на векторот $\vec{a}$, симболички $|\vec{a}|$, ја определуваме како должина на отсечката $\overrightarrow{M_1M_2}$, односно како растојание $d(M_1,M_2)$ меѓу точките M_1 и M_2, за кои е: $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Бидејќи: $d(M_1,M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, а координатите на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, кога тој е зададен со неговиот почеток $M_1(x_1, y_1)$ и крај $M_2(x_2, y_2)$, се еднакви на

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1. \tag{5}$$

Тогаш од (3) и (5) добиваме: $|\vec{a}| = d\,(M_1,M_2) = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$. Значи со:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,, \tag{6}$$

изразена е должината на векторот (4) со помош на неговите координати во правоаголен координатен систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Пример 8. Да ја одредиме должината на векторот $\vec{a} = (\sqrt{3}, -1)$.

Решение. Од (6) добиваме: $|\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. ♦

Пример 9. Да ја одредиме должината на векторот $\overrightarrow{AB}$, ако $A\,(2, -3)$, $B\,(-1, -5)$.

Решение. Од (3) имаме: $|\overrightarrow{AB}| = d\,(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди го растојанието меѓу точките: $P = (\frac{3}{2},-2)$ и $T = (-\frac{1}{2},3)$.

2. Триаголникот *ABC* зададен е со координатите на неговите темиња: A(0,4), B(–3,1), C(2,–2). Одреди го неговиот периметар.

3. Одреди ја должината на векторот $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

4. Одреди го растојанието меѓу точките:

а) $A(1,-1)$, $B(-1,1)$; б) $C(2,6)$, $D(-4,3)$; в) $M(a,b)$, $N(b,a)$.

5. Одреди го периметарот на триаголникот *ABC*, ако:

а) $A(-2,1)$, $B(0,3)$ и $C(4,-1)$; б) $A(-1,1)$, $B(2,1)$ и $C(4,0)$.

6*. Одреди точка од *Ox* - оската, која е на еднакво растојание од точките: $A(0,5)$ и $B(4,2)$.

7. Одреди точка, која е еднакво оддалечена од точките: $O(0,0)$, $A(3,0)$ и $B(0,4)$.

8. Докажи дека триаголникот *ABC* со темиња: $A(-1,1)$, $B(1,3)$ и $C(-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ е рамностран.

9*. Докажи дека триаголникот *ABC* со темиња: $A(1,2)$, $B(-1,4)$ и $C(3,4)$ е правоаголен.

10. Одреди ја должината на векторот $\vec{a} = (-2,1)$, $\vec{b} = (4,-3)$.

11. Одреди ја должината на векторот $\overrightarrow{AB}$, ако: а) $A(0,2)$, $B(-1,4)$; б) $A(\frac{3}{2},1)$, $B(\frac{3}{2},\frac{4}{5})$.

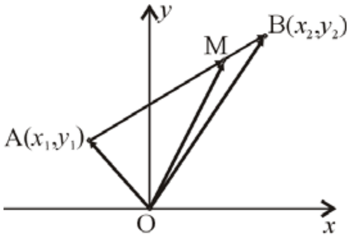
12*. Дадени се два вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Одреди ги координатите на векторот: а) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, б) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, а потоа и неговата должина.

IV.4. ДЕЛЕЊЕ НА ОТСЕЧКИ ВО ДАДЕН ОДНОС

Под овој наслов ја подразбираме следнава задача: Дадени се координатите на крајните точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на отсечката *AB*. Треба да се одреди третата точка $M(x,y)$, чии координати се непознати и треба да се најдат, така што односот $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$ да е еднаков на даден број λ.

Очигледно е дека точката $M \in AB$ ќе ја раздели отсечката *AB* во даден однос $\lambda = \frac{m}{n}$, т.е.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda, \text{ ако и само ако } \overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}. \qquad (1)$$



црт. 8

Ако точките *A*, *B* и *M* се зададени со своите радиус-вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OM}$ (црт. 8), тогаш $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, па од (1) добиваме: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda\ (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, односно

$(1 + \lambda) \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$. Така ја добиваме формулата:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\lambda} \tag{2}$$

со која радиус-векторот на бараната точка M е изразен преку радиус-векторите на дадените точки A и B и бројот λ.

Равенството (2) за апсцисите и ординатите на точките A, B и M го добива видот:

$$x = \frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

Тоа се координатите на бараната точка M.

Во специјален случај, ако точката M е средина на отсечката AB, тогаш $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 1 : 1 = 1$, т.е. $\lambda = 1$, па формулите (3) го добиваат видот:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2} \tag{4}$$

Пример 10. Да ја одредиме точката $M(x,y)$, која ја дели отсечката $AB : A(-5,2)$, $B(1,5)$ во однос $\lambda = 1 : 4 = \frac{1}{4}$.

Решение. Од равенството (3) ги наоѓаме координатите на M:

$$x = \frac{-5+\frac{1}{4}\cdot 1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-19}{5} = -3\frac{4}{5}, \quad y = \frac{2+\frac{1}{4}\cdot 5}{1+\frac{1}{4}} = 2\frac{3}{5}.$$

Значи, бараната точка е $M(-3\frac{4}{5}, 2\frac{3}{5})$. ♦

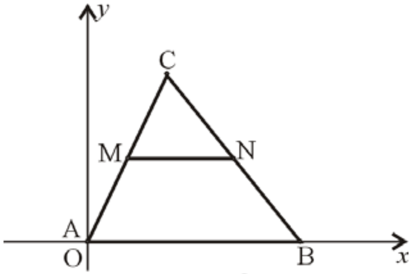
Пример 11. Да се докаже дека правата што минува низ средините на две страни на триаголникот е паралелна со третата страна.

Доказ. Произволен триаголник ABC да го поставиме во правоаголниот координатен систем како на црт. 9. Тогаш темињата на триаголникот ќе имаат координати: $A(0,0)$, $B(x_1,0)$ и $C(x_2,y_2)$.

Нека M и N се средини соодсветно на страните AC и AB. Треба да докажеме дека $MN \parallel AB$, односно $MN \parallel Ox$. За да го докажеме тоа, доволно е да докажеме дека точките M и N имаат еднакви ординати. Од (4) добиваме:

$$y_M = \frac{0+y_2}{2} = \frac{y_2}{2}, \quad y_N = \frac{0+y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Според тоа, $y_M = y_N$. Значи, $MN \parallel Ox$. ♦



црт. 9

ЗАДАЧИ

1. Дадени се точките: $A(-4, 3)$ и $B(0,7)$.

Најди точка $M \in AB$, која ја дели отсечката AB во однос на $\lambda = 3 : 5$.

2. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A(2,-4)$, $B(2,-5)$ и $C(-4,7)$. Одреди ги средините на неговите страни.

3. Отсечка, со крајни точки $A(1,-3)$ и $B(4,3)$, со точките M и S разделена е на три еднакви делови. Одреди ги координатите на точките M и S.

4. Средина на отсечката AB е точката $S(-2,3)$. Одреди ги координатите на точката A, ако $B(2,0)$.

5. Точката $T(1,1)$ е средина на отсечката заклучена меѓу точките: $A(x,5)$ и $B(-2,y)$. Одреди ги координатите на точките A и B.

6. Одреди ја точката C, која отсечката со крајни точки: $C\ (-3,\ 1)$ и $D\ (1,\ 5)$ ја дели во однос 3 : 2.

7*. Дадени се две соседни темиња на паралелограмот: $A(-6,10)$ и $B(2,14)$ и пресекот на неговите дијагонали $S(2,2)$. Одреди ги координатите на другите две темиња на паралелограмот.

8*. Познато е дека растојанието од тежиштето T на триаголникот до секое негово теме е еднакво на $\frac{2}{3}$ од соодветната тежишна линија. Одреди ги координатите на тежиштето T на триаголникот ABC, ако: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

9. Одреди го тежиштето на триаголникот ABC, ако: $A(3,-4)$, $B(1,2)$ и $C(5,5)$.

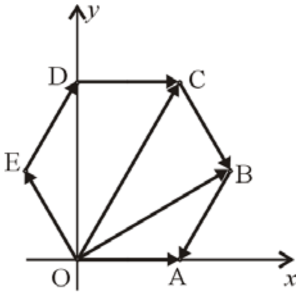
10. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A(1,2)$, $B(5,6)$ и $C(3,-2)$. Одреди ги должините на неговите тежишни линии и координатите на тежиштето.

11. Одреди ги координатите на крајните точки на отсечката AB, ако таа со точките: $M(2,2)$ и $S(1,5)$ е разделена на три еднакви делови.

12. Познато е дека $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ и $\vec{a} = (-3,7)$.

Одреди ја ординатата на векторот $\vec{b}$, ако неговата апсциса е $b_x = 6$.

13*. Во рамнина дадени се точките: $A(1,7)$, $B(5,6)$ и $C(5,0)$. Изрази ги преку ортовите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следниве вектори: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$.



црт. 10

14. Нека е: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ и λ број. Одреди ги координатите на векторот $\lambda\cdot\vec{a}$.

15. На цртежот 10 нацртан е правилен шестаголник. Разложи ги по ортовите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ сите претставени вектори на цртежот, ако $|\overrightarrow{OA}| = 4$.

IV.5. РАЗЛИЧНИ ВИДОВИ НА РАВЕНКА НА ПРАВА

IV.5.1. Општ вид на равенката на права

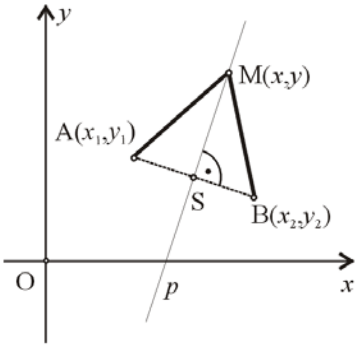
Од геометријата е познато дека, сите точки во рамнината, што се еднакво оддалечени од точките A и B од таа рамнина, лежат на правата p, која е нормална на отсечката AB и минува низ нејзината средина S.

Велиме уште, дека правата p е множество на сите точки (или геометриско место на точки) во рамнината, што се еднакво оддалечени од точките A и B ($A \neq B$) од таа рамнина.

Да ја составиме равенката на правата p, која е множество на точки во рамнината што се еднакво оддалечени од точките со координати: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (црт. 11).

Да земеме една произволна точка со тековни координати $M(x,y)$ на правата p. Условот, една точка M (x, y) да лежи на правата p го изразуваме со равенството:

$$\overline{AM} = \overline{MB}. \qquad (1)$$



црт. 11

Применувајќи ја формулата за растојание меѓу две точки, за да ги избегнеме корените во неа, равенството (1) го заменуваме со равенството:

$$\overline{AM}^2 = \overline{MB}^2. \qquad (2)$$

Тоа е дозволено, бидејќи и двете страни на равенството (1) се позитивни броеви.

Од (2) согласно формулата за растојание меѓу две точки, добиваме:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 ,$$

кое по упростувањето го добива видот:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2. \qquad (3)$$

Ако, поради краткост замениме:

$$2(x_2 - x_1) = A, \quad 2(y_2 - y_1) = B, \quad \text{и} \quad x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = -C$$

конечно ја добиваме равенката: $Ax + By = -C$, односно

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4)$$

Таа го изразува условот, дека точката $M(x,y)$ лежи на правата p. Значи, координатите на секоја точка $M(x, y)$ што лежи на правата p, ќе ја задоволуваат равенката (4), а координатите на ниедна точка што не лежи на правата p, нема да ја задоволуваат добиената равенка (4). Затоа, таа равенка е *равенка на правата p*.

Равенката (4), гледаме, е од прв степен по однос на координатите x и y на точките од правата p. Бидејќи секоја права може да се разгледува како множество на точки во рамнината, што се еднакво оддалечени од некои две точки, затоа со одредувањето на равенката (4) на правата p, заклучуваме дека важи следнава:

Теорема 1. Секоја права во координатната рамнина може да се изрази со равенка од прв степен, по однос на координатите x и y, на произволна точка од правата. ♦

Равенката (4) се вика *општ вид на равенката на права.*

Пример 12. Дадени се координатите на темињата на триаголникот *ABC: A(2,4), B(6, –2)* и *C(10,5).* Да ја одредиме равенката на симетралата на страната AB и да покажеме дека тој е рамнокрак триаголник со врв во темето C (црт. 12).

Решение. Познато е дека, симетрала на страната AB - тоа е правата s, чии точки се еднакво оддалечени од темињата A и B. Значи, за произволна точка $M(x,y)$ од симетралата s треба да важи:

$$\overline{MA} = \overline{MB} \text{, односно } \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2.$$

Оттука согласно формулата за растојание меѓу две точки добиваме:

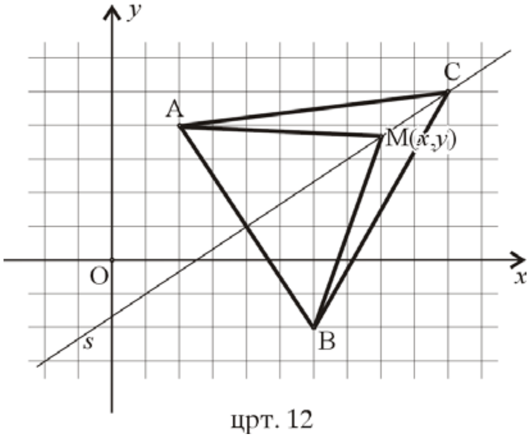
$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2 .$$

По квадрирањето на биномите и средувањето, ја добиваме равенката:

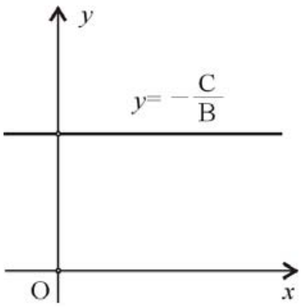
$$2x - 3y - 5 = 0. \qquad (5)$$

Тоа е бараната равенка на симетралата s на страната AB на триаголникот ABC.

Дали дадениот триаголник ABC е рамнокрак со врв $C(10,5)$ или не зависи од тоа дали темето C лежи на симетралата s, или не.



црт. 12



црт. 13

Бидејќи координатите на $C(10,5)$, ја задоволуваат равенката (5):

$2 \cdot 10 - 3 \cdot 5 - 5 = 0$, затоа $\overline{AC} = \overline{BC}$.

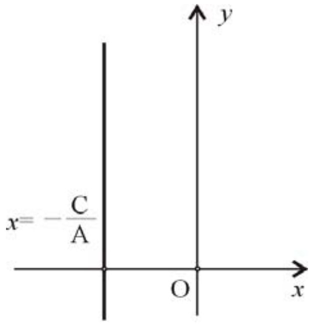
Значи, триаголникот ABC е рамнокрак. ♦

Да разгледаме како е поставена правата во координатниот систем зависно од вредностите на A, B и C во општиот вид на равенката на правата:

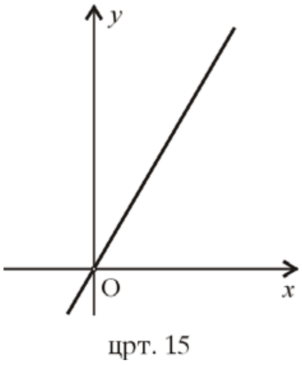
$$Ax + By + C = 0.$$

1°. Нека $A = 0$, $B \neq 0$. Тогаш равенката (4) може да се запише во видот $By + C = 0$ односно $y = -\frac{C}{B}$. Тоа значи, дека сите точки на правата (4) имаат иста ордината $-\frac{C}{B}$. Според тоа, таа е паралелна со Ox-оската (црт. 13).

2°. Нека В = О, $A \neq 0$. Тогаш равенката (4) го добива видот $Ax + C = 0$, односно $x = -\frac{C}{A}$. Тоа значи, дека сите точки на правата (4) имаат иста апсциса $-\frac{C}{A}$. Според тоа, во тој случај, правата е паралелна со Oy-оската (црт. 14).



црт. 14



црт. 15

3°. Нека $C = 0$. Тогаш равенката (4) го добива видот $Ax + By = 0$.

Бидејќи координатите на почетокот $O(0,0)$ ја задоволуваат равенката, затоа правата определена со оваа равенка минува низ координатниот почеток (црт. 15).

4°. Нека $A = 0$ и $C = 0$. Тогаш равенката може да се запише $By = 0$, односно $y = 0$. Бидејќи $A = 0$, правата е паралелна со Ox-оската, а бидејќи $C = 0$, затоа таа минува и низ координатниот почеток. Според тоа, правата се совпаѓа со Ox-оската.

5°. Нека $B = 0$ и $C = 0$. Тогаш равенката на правата го добива видот $Ax = 0$, односно $x = 0$. Бидејќи $B = 0$, затоа правата е паралелна со Oy-оската, а бидејќи и $C = 0$, таа треба да минува и низ координатниот почеток. Според тоа, правата се совпаѓа со ординатната оска.

6°. Ако $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$, тогаш правата не е паралелна со апсцисната, ниту со ординатната оска, а и не минува низ координатниот почеток. Тогаш правата, чија равенка е (4) ги сече координатните оски, и тоа: апсцисната оска во точката $(-\frac{C}{A},0)$, а ординатната оска во точката $(0, -\frac{C}{B})$.

Пример 13. Како се поставени во координатната рамнина правите, чии равенки се:

а) $2x + 4 = 0$; б) $3y - 1 = 0$; в) $x - 2y = 0$?

Решение: а) Правата е паралелна со Oy-оската, а Ox – ја сече во точката со апсциса –2;

б) Правата е паралелна со Ox-оската, а Oy-оската ја сече во точката со ордината $y = \frac{1}{3}$;

в) Бидејќи равенката на правата не го содржи слободниот член, затоа правата минува низ координатниот почеток. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги равенките на симетралите на краците AC и BC на триаголникот ABC во примерот 1.

2. Провери кои од точките: $A(-2,3)$, $B(0,3)$, $C(1,5)$, $D(3,2)$ лежат на правата чија равенка е $2x - y + 3 = 0$.

3. Дали правата $3x - 2y + 5 = 0$ минува низ точката:

а) $A(2, -1)$; б) $B(-1,1)$; в) $C(0,4)$; г) $D(-3,-2)$?

4. Дадени се точките: а) $A(4,-2)$, $B(-3,-4)$; б) $A(-5,1)$, $B(-5,7)$.

Одреди ја равенката на симетралата на отсечката AB.

5*. Даден е триаголник со темиња: $A(-5, -5)$, $B(1,7)$ и $C(5, -1)$.

Состави ги равенките на симетралите на неговите страни.

6. Даден е правоаголен триаголник со темиња: $A(4,0)$, $B(0,8)$, $C(0,0)$. Одреди ги равенките на симетралите на неговите страни.

7. Даден е општиот вид на равенката на правата: $3x - 2y + 6 = 0$. Одреди во кои точки правата ги сече координатните оски.

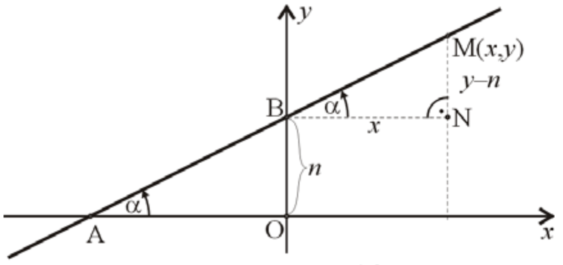
IV.5.2. Експлицитен вид на равенка на права

Положбата на правата во координатната рамнина може да биде определена, односно зададена, на повеќе начини со помош на разни елементи, од што зависи, како што ќе видиме, и видот на соодветната равенка.

Нека p е произволна права во правоаголниот координатен систем, која ја сече Ox-оската во точката $A(m,0)$, а ординатната оска во точката $B(0,n)$. Аголот $\alpha \in (0,\pi)$, што го гради правата p со позитивната насока на Ox-оската, се вика *йаден (наклонеш) аīол* на правата p спрема Ox-оската. Ако правата p е паралелна со Ox-оската, сметаме дека нејзинииот паден агол кон Ox-оската е еднаков на нула.

Прво да го разгледаме случајот кога $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Тогаш правата p е еднозначно определена на рамнината, ако се познати: нејзиниот паден агол α спрема Ox-оската и ординатата n на нејзината пресечна точка $B(0,n)$ со Oy-оската (црт. 16).

Нека $M(x,y)$ е произволна точка на правата p. Тогаш при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ од правоаголниот триаголник BMN (црт. 16), имаме:



црт. 16

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-n}{x} \qquad (1)$$

Оттука

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + n \qquad (1')$$

Заменувајќи

$$\operatorname{tg}\alpha = k, \qquad (2)$$

равенката (1) ја запишуваме во видот:

$$y = k \cdot x + n \qquad (3)$$

Значи, координатите на една произволно избрана точка M од правата p ја задоволуваат равенката (3).

Ако точката M не лежи на правата p, тогаш јасно е дека релацијата (1) не важи, па затоа и равенката (3) нема да биде задоволена. Според тоа, равенката (3) е равенка на правата p, што е определена со елементите, α и n (црт. 16).

Елементите k и n, односно α и n, за иста права се константни, а се викаат *параметри* на равенката на права.

Бројот $k = \operatorname{tg}\alpha$, поточно тангенсот на падниот агол на правата p спрема Ox-оската, се вика *коефициент на правецот* на правата p, или *аглов коефициент* на правата p.

Равенката на правата од видот $y = kx + n$ се вика *експлицитен вид на равенката на права*.

Пример 14. Правата р е наклонета кон Ox-оската под агол $\alpha = 60^{\circ}$, а Oy-оската ја сече во точката $B(0, -3)$. Да се одреди нејзината равенка.

Решение. За $\alpha = 60^{\circ}$ е $k = \operatorname{tg}60^{\circ} = \sqrt{3}$. Од (3) за $k = \sqrt{3}$ и $n = -3$, добиваме $y = \sqrt{3}\,x - 3$. Тоа е бараната равенка на правата p во експлицитен вид. ♦

Сега да го разгледаме случајот кога $\alpha = \frac{\pi}{2}$, односно кога правата p е нормална на апсцисната оска, или паралелна со Oy-оската.

Бидејќи $k = \operatorname{tg}\alpha$ за $\alpha = \frac{\pi}{2}$ е неопределен, тоа значи, дека правата што е паралелна со Oy-оската не може да биде зададена со равенка во експлицитен вид.

Меѓутоа, знаеш, сите точки на правата што е паралелна со Oy-оската, имаат иста апсциса, која е еднаква на апсцисата на пресечната точка A на таа права со Ox-оската. Затоа равенката на правата p во тој случај ќе гласи:

$$x = m. \qquad (4)$$

Ако е $m = 0$, тогаш правата се совпаѓа со Oy-оската, па и на овој начин согласно (4) наоѓаме дека равенката на ординатната оска е

$$x = 0. \qquad (4')$$

Од равенката (3) непосредно се изведуваат и равенките на правите, кои имаат други специјални положби во координатната рамнина:

а) Ако дадената права минува низ координатниот почеток, тогаш е $n = 0$, па од (3) следува дека равенката на таква права ќе гласи:

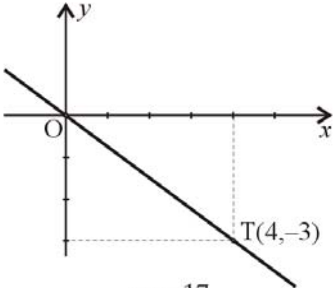
$$y = k\cdot x. \qquad (5)$$

Пример 15. Од (5) за $\alpha = 45^{\circ}$, односно за $k = \mathrm{tg}45^{\circ} = 1$ ја добиваме равенката на бисектрисата на I и III квадрант $y = x$, а за $\alpha = 135^{\circ}$, односно за $k = \mathrm{tg}135^{\circ} = -1$, ја добиваме равенката, пак, на бисектрисата на II и IV квадрант $y = -x$. ♦

б) Ако дадената права е паралелна со Ox-оската, тогаш е $\alpha = 0$, а исто така и $k = \mathrm{tg}0 = 0$, па нејзината равенка ќе гласи:

$$y = 0\cdot x + n\,, \quad \text{односно} \quad y = n. \qquad (6)$$

Равенката (6) не ја содржи променливата x, но забележуваш, таа го искажува фактот дека за секоја вредност на x, променливата y добива константна иста вредност n. Тоа со други зборови значи: сите точки на правата, што е паралелна со Ox-оската, имаат иста ордината, која е еднаква на ординатата n на пресечната точка B на таа права со Oy-оската.



црт. 17

Ако е $n = 0$, тогаш правата се совпаѓа со Ox-оската, па согласно (6) имаме дека равенката на апсцисната оска е

$$y = 0. \qquad (6')$$

Пример 16. Да ја конструираме правата чија равенка во експлицитен вид е

$$y = -\frac{3}{4}\cdot x\,.$$

Решение. Согласно (5) правата, што треба да ја конструираме, минува низ координатниот почеток $O(0,0)$. Значи, за нејзината конструкција доволно е да најдеме уште една нејзина точка. Така, за $x = 4$, од дадената равенка наоѓаме: $y = -\frac{3}{4}\cdot 4 = -3$. Значи, $T(4, -3)$ е друга точка на бараната права OT (црт. 17). ♦

Со теоремата 1 утврдивме дека секоја права во координатната рамнина може да се определи (зададе) со равенката од прв степен по однос на тековните координати x и y на произволна точка од неа.

На пример, правата, која со позитивната насока на Ox-оската гради агол $\alpha = 30^{\circ}$ и Oy-оската ја сече во точката $B(0,-2)$, целосно е определена со равенката од прв степен $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x - 2$.

Сега ќе покажеме дека важи и обратната теорема.

Теорема 2. Секоја равенка од прв степен со две променливи

$$Ax + By + C = 0, \ \text{при} \ A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (7)$$

во координатната рамнина определува права, и тоа единствена.

Доказ. Условот $A^2 + B^2 \neq 0$ означува дека барем еден од коефициентите A или B е различен од 0. Тој секогаш е исполнет, бидејќи ако $A = B = 0$, тогаш равенството (7) не би било равенка.

Ако $B \neq 0$, тогаш равенката (7) може да се запише како

$$y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}. \tag{8}$$

Ако ставиме $k = -\frac{A}{B}$ и $n = -\frac{C}{B}$, тогаш таа преминува во равенката (3).

Според тоа, равенката (7) при услов $B \neq 0$, претставува права со коефициент на правецот $k = -\frac{A}{B}$, а Oy-оската ја сече во точката $B(0,-\frac{C}{B})$ и таа права е единствена.

Ако $B = 0$, тогаш $A \neq 0$, па равенката (7) е еквивалентна на $x = -\frac{C}{B}$.

Значи, и во тој случај равенката (7) определува права – паралелна со Oy-оската, и тоа единствена. Со тоа теоремата е докажана. ♦

Пример 17. Со равенката $x - y + 4 = 0$, односно $y = x + 4$ е определена (зададена) права, која со позитивната насока на Ox-оската гради агол $\alpha = 45^\circ$ ($k = \text{tg}45^\circ = 1$) и Oy-оската ја сече во точката (0,4).

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на права, која е наклонета кон Ox-оската под агол 30°, а Oy-оската ја сече во точката $B(0, -5)$.

2. Одреди ја равенката на права, која со позитивната насока на Ox-оската зафаќа агол $\alpha = 60^\circ$, а Oy-оската ја сече во точката: а) $E(0, -3)$, б) $F(0,4)$.

3. Конструирај ја правата: а) $y = x - 2$; б) $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 5$.

4. Одреди го коефициентот на правецот на правата $2x - 5y + 3 = 0$ и конструирај ја.

5. Равенката на правата од општ вид $2x - 3y + 6 = 0$, доведи ја во експлицитен вид.

6. Дадена е равенката на правата $3x - 2y + 6 = 0$. Одреди во кои точки правата ги сече координатните оски.

IV.5.3. Равенка на права што минува низ една или две точки

1. Равенка на права што минува низ две дадени точки.

Знаеш, низ две дадени различни точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ минува една единствена права AB (по аксиома).

Да избереме која било точка $M(x,y)$ од таа права, и од точките A, B и M да спуштиме нормали на Ox-оската, чии подножја да ги означиме соодветно со A', B' и M' (црт. 18).

Ако низ точката A повлечеме права паралелна со Ox-оската, тогаш таа со повлечените нормали и дадената права AB, ќе образува два правоаголни триаголника AMN и ABC. Тие се слични, бидејќи имаат еден заеднички остар агол α. Од нивната сличност имаме

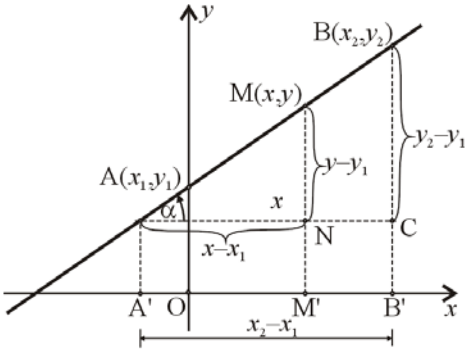
$$\frac{\overline{AN}}{NC}=\frac{\overline{MN}}{BC} \qquad (1)$$

односно

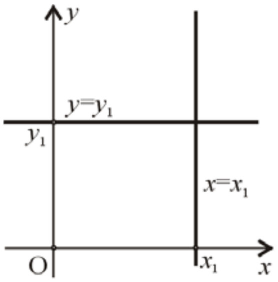
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2)$$

Тоа е бараната *равенка на правата што минува низ две точки.*

Равенката (2) нема смисла, само ако $x_2 - x_1 = 0$ или $y_2 - y_1 = 0$. Ако $x_2 - x_1 = 0$, тогаш правата е паралелна со Oy-оската, па нејзината равенка ќе биде $x = x_1$ (црт. 19). Ако, пак, $y_2 - y_1 = 0$, тогаш правата е паралелна со Ox-оската, па во тој случај нејзината равенка ќе гласи $y = y_1$ (црт. 19).



црт. 18



црт. 19

Равенката (2) вообичаено е да се запишува во видот:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) \qquad (3)$$

Пример 18. Да ја составиме равенката на права што минува низ точките $A(2, -3)$ и $B(4,1)$.

Решение. Ги заменуваме координатите на точките A и B во равенката (3), па добиваме:

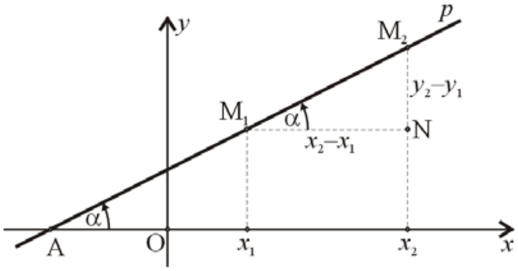
$$y-(-3)=\frac{1-(-3)}{4-2}(x-2)$$

$y + 3 = 2(x - 2)$, односно $2x - y - 7 = 0$.

2. Равенка на права што минува низ една дадена точка и има коефициент на правецот *k*.

Коефициентот на правецот на една права може да се одреди, ако се дадени координатите на кои било две точки од неа. На пример, нека се дадени две произволни различни точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ од правата p. Тогаш од правоаголниот триаголник M_1NM_2 (црт. 20), имаме:

$$k=\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$



црт. 20

Формулата (4) нема смисла, ако $x_2 - x_1 = 0$. Но, тоа значи, дека правата е нормална на Ox-оската.

Пример 19. Да го одредиме коефициентот на правецот на правата AB, ако $A(-5,2)$ и $B(3,1)$.

Решение. Со замена на координатите на точките A и B во формулата (4), добиваме:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-5}{2+3}=-\frac{4}{5}.$$

Правата p нека минува низ точката $A(x_1, y_1)$ и нека има коефициент на правец k. На правата p да земеме една произволна точка M со координати x и y. Избраната точка M можеме да ја сметаме како втора точка од правата p. Тогаш согласно формулата (4), ќе важи:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k. \qquad (5)$$

Ако точката M не лежи на правата, тогаш јасно е дека и равенството (5) нема да важи. Според тоа, равенството (5) е *равенка на правата што минува низ точката* $A(x_1,y_1)$ и има коефициент на правец k.

Вообичаено е равенката (5) да ја запишеме во видот:

$$y-y_1=k\,(x-x_1) \qquad (6)$$

Пример 20. Да ја составиме равенката на правата што минува низ точката $T(-1,3)$ и има коефициент на правецот $k=\frac{2}{3}$.

Решение. Со замена на дадените елементи во (6), добиваме:

$$y-3=\frac{2}{3}(x+1) \text{ однсоно, } 2x-3y+11=0. \blacklozenge$$

Познато е дека, низ една точка во рамнината минуваат бесконечно многу различни прави. Множеството од сите прави во рамнината, кои минуваат низ една точка, се вика *прамен прави,* а заедничката точка на сите прави се вика *центар на праменот.*

Очигледно е дека равенката (6), во која коефициентот на правецот k има произволна вредност, ги претставува сите прави што минуваат низ точката $A(x_1,y_1)$, а тоа значи, дека равенката (6) е и *равенка на праменот прави со центар во* $A(x_1,y_1)$.

Пример 21. Да ја составиме равенката на права, што минува низ точката $S(2,-2)$, а со позитивната насока на Ox-оската зафаќа агол $\alpha=30^{\circ}$.

Решение. $k=\operatorname{tg}30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, па од (6) добиваме: $y+2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$, односно

$$\sqrt{3}\cdot x-3y-(6+2\sqrt{3})=0. \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Даден е триаголник, чии темиња се: $A(0,4)$, $B(-2,1)$ и $C(4,-6)$. Состави ги равенките на неговите страни.

2. Одреди го коефициентот на правецот на права, која минува низ координатниот почеток O и низ точката $T\,(2,3)$.

3. Одреди ја равенката на права, што минува низ точката $T(4,-1)$ и со позитивна насока на Ox-оската гради агол од 135°.

4. Одреди ја равенката на права, што минува низ точките:

а) $A(-1,-4)$ и $B(0,5)$; б) $A(2,-1)$ и $B(2,3)$.

5. Состави ја равенката на права, што минува низ координатниот почеток и низ точката $T(3,-2)$.

6. Покажи дека правата што минува низ точките $A(-3,6)$ и $B(2,-4)$, минува и низ координатниот почеток.

7. Состави ја равенката на права што минува низ точката $M(1,3)$ и со позитивната насока на Ox-оската гради агол од 45°.

8. Состави ја равенката на права, што минува низ точката $S(2, -3)$ и со Ox-оската гради ист агол како и правата $4x - 3y + 5 = 0$ со Ox-оската.

9*. Дадена е отсечка AB. Состави равенка на права што минува низ точката B и е нормална на отсечката AB, ако $A(4,5)$ и $B(2, -1)$.

IV.5.4. Сегментен вид на равенката на права

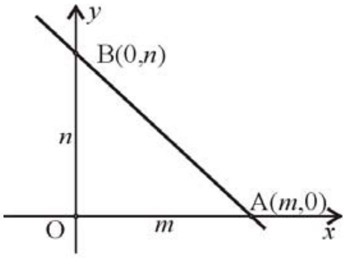
Нека се дадени две точки, по една на апсцисната и ординатната оска $A(m,0)$ и $B(0,n)$ (црт. 21).

Равенката на правата што минува низ точката A и B, ќе гласи:

$$y - 0 = \tfrac{n-0}{0-m} \cdot (x - m)\ ,$$

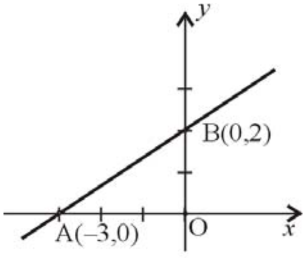
која по средувањето ја доведуваме во видот:

$$\tfrac{x}{m} + \tfrac{y}{n} = 1 \qquad (1)$$



црт. 21

Оваа равенка се вика *сегментен вид на равенката на права,* бидејќи броевите m и n покажуваат кои сегменти (делови) ги отсекува правата од координатните оски. Овој вид равенка ни овозможува и брза конструкција на правата.



црт. 22

Пример 22. Да ја конструираме правата $2x - 3y + 6 = 0$.

Решение. Прво, равенката на правата ја доведуваме од општ во сегментен вид. Тоа го правиме вака:

$$2x - 3y = -6 \ /\!: (-6), \qquad \tfrac{2x}{-6} + \tfrac{-3y}{-6} = 1, \qquad \tfrac{x}{-3} + \tfrac{y}{2} = 1.$$

Потоа на координатните оски ги наоѓаме точките $A(-3,0)$ и $B(0,2)$, па низ нив повлекуваме права. Тоа е бараната права (црт. 22).

Очигледно е дека сегментниот вид на равенката на права нема смисла, само кога правата минува низ координатниот почеток, т.е. кога е $m = 0$ или $n = 0$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на правата, која координатните оски ги сече во точките: а) $A(-2,0)$ и $B(0,3)$, б) $A(4,0)$ и $B(0,-3)$.

2. Состави ја равенката на права, што ја сече Ox-оската во точката $(3,0)$, а Oy-оската – во точката $(0, -3)$.

3. Одреди ги точките во кои правата $3x - 4y - 12 = 0$ ги сече координатните оски, а потоа конструирај ја правата.

4. Дадени се равенките на правите во општ вид: а) $3x + 2y - 6 = 0$ б) $4x + 3y - 12 = 0$, в) $4x - 3y + 8 = 0$. Изрази ги нивните равенки во сегментен вид.

5. Дијагоналите на еден ромб, што се еднакви на 12 (cm) и 8 (cm) земени се за координатни оски. Одреди ги равенките на страните на тој ромб.

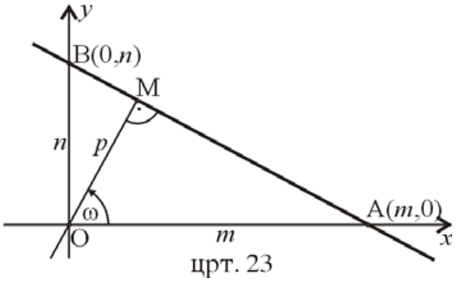
6. Одреди ја плоштината на триаголникот образуван од координатните оски и правата $4x + 3y - 12 = 0$.

IV.5.5. Нормален вид на равенката на права

Нека е дадена правата a во сегментен вид

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1, \tag{1}$$

која ги сече координатните оски во точките $A(m,\ 0)$ и $B(0,\ n)$ (црт. 23).



црт. 23

Од координатниот почеток да повлечеме нормала кон правата a, чие подножје нека е точката $M\in a$. Со p да го означиме растојанието од координатниот почеток до дадената права a, т.е. $p=\overline{OM}$, а со ω да го означиме аголот AOM (црт. 23). Тогаш од правоаголниот триаголник AOM имаме: $\cos\omega=\frac{p}{m}$, $\sin\omega=\frac{p}{n}$, односно $m=\frac{p}{\cos\omega}$, $n=\frac{p}{\sin\omega}$, па равенката (1) го добива видот:

$$x\cdot\cos\omega+y\cdot\sin\omega-p=0. \tag{2}$$

Тоа е *нормален* или *Хесов вид на равенката на права.*

Да забележиме, дека овој вид на права ги содржи и специјалните случаи кога дадената права е паралелна со една од координатните оски. Така, ако $\omega = 0$ или $\omega = \pi$, тогаш имаме $\cos\omega = \pm1$, $\sin\omega = 0$, па ја добиваме равенката $x = \pm p$ на права паралелна со Oy-оската. Ако пак, $\omega=\frac{\pi}{2}$ или $\omega=\frac{3\pi}{2}$, тогаш имаме $\cos\omega = 0$, $\sin\omega = \pm1$, па добиваме $y = \pm p$, која претставува права паралелна со Ox-оската.

Коефициентите пред променливите x и y во равенката (2) се карактеризираат со тоа што збирот од нивните квадрати е еднаков на единица: $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$.

Општиот вид на равенката на права:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (A^2 + B^2 \neq 0) \tag{3}$$

во исто време би бил и нормален вид на равенката на права доколку коефициентите A, B и C би ги исполнувале условите:

$$A^2 + B^2 = 1 \text{ и } C < 0. \tag{4}$$

Но, ако коефициентите A и B не ги исполнуваат условите (4), тогаш за да го доведеме во нормален вид општиот вид на равенката на права, потребно е левата страна на равенката (3) да ја помножиме со така избраниот број λ: $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$, при што да важи,

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1 \ \wedge\ \lambda C < 0. \tag{4'}$$

Од равенството (4´) лесно наоѓаме дека за λ треба да се избере бројот

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

а за да биде исполнето и неравенството во (4), бројот λ треба да се земе со знак, што е спротивен од знакот на коефициентот C.

Значи, нормалниот вид на равенката на права, што е зададена во општ вид (3), е:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0, \tag{5}$$

каде што пред коренот се зема знак, што е спротивен на знакот на коефициентот C.

Пример 23. Да ја составиме во равенката на права во нормален вид, ако се дадени: аголот $\omega = 30^o$ и растојанието $p = 3$.

Решение. Со замена на ω и p во (2) добиваме:

$$x \cdot \cos30^o + y \cdot \sin30^o - 3 = 0,$$

односно $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-3=0$, или во општ вид: $x\sqrt{3} + y - 6 = 0$. ♦

Пример 24. Општиот вид на равенката на права $4x - 3y + 5 = 0$ да го приведеме во нормален вид и да го одредиме растојанието p од координатниот почеток до неа.

Решение. Равенката во општиот вид $4x - 3y + 5 = 0$ ја множиме со бројот

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{25}} = -\frac{1}{5},$$

па добиваме $-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{3}{5}\cdot y-1=0$, од каде $p = 1$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на права што е определена со елементите:

а) $\omega = 45^o$ и $p = \frac{3}{4}$,

б) $\omega = 60^o$ и $p = 5$.

2. Трансформирај го општиот вид на равенката на права: $x - 2y + 3 = 0$, во нормален вид и одреди ги елементите ω и p.

3. Испитај, кои од следниве равенки на права се во нормален вид:

а) $\frac{4}{5}\cdot x-\frac{3}{5}\cdot y+3=0$, б) $\frac{1}{2}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y+4=0$, в) $x - 5 = 0$,

г) $-y - 2 = 0$, д) $2x - y + 3 = 0$.

4. Дадена е правата $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$. Одреди го нејзиното растојание од координатниот почеток.

5. Две прави во координатната рамнина се паралелни. Какви коефициенти на правец имаат тие? Образложи.

IV.6. АГОЛ МЕЃУ ДВЕ ПРАВИ. УСЛОВИ ЗА ПАРАЛЕЛНОСТ И НОРМАЛНОСТ НА ДВЕ ПРАВИ

1. Агол меѓу две прави. Во аналитичката геометрија често се среќаваат задачи за одредување агли меѓу правите.

Нека се дадени две прави p_1 и p_2 што се сечат и ниедна од нив не е паралелна со Oy-оската (црт. 24). Нивните равенки во експлицитен вид нека се соодветно $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$.

Под агол меѓу правата p_2 и правата p_1 ќе го подразбираме *аголот за кој треба да се заврти правата* p_1 *околу пресечната точка S, во позитивна насока, до нејзиното совпаѓање со правата* p_2.

На цртежот 24 тој агол е φ. Аналогно се дефинира и аголот меѓу правата p_1 и правата p_2. Во нашиот случај тој агол е $\pi - \varphi$.

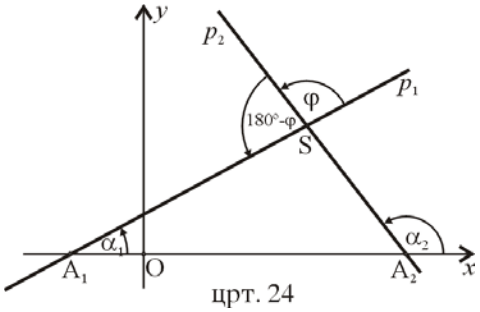
Ако со α_1 и α_2 ги означиме соодветно падните агли на правите p_1 и p_2 спрема Ox-оската, тогаш од триаголникот A_1A_2S на цртеж 24 имаме: $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$, односно $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Според тоа,

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}\,. \qquad (1)$$

Но, бидејќи $\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1$, а $\mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$, затоа равенството (1) може да се запише и вака:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\,. \qquad (2)$$

Тоа е формулата за пресметување на аголот меѓу две прави.



црт. 24

Зависно од знакот на tg φ, ќе го добиеме остриот или тапиот агол меѓу правите p_1 и p_2.

Пример 25. Да го одредиме аголот меѓу правите, чии равенки се

$$x + 7y + 3 = 0 \text{ и } 3x - 4y + 12 = 0.$$

Решение. Равенките на правите ги изразуваме од општ во експлицитен вид:

$$y = -\frac{1}{7}\cdot x - \frac{3}{7} \text{ и } y = \frac{3}{4}\cdot x + 3\,.$$

Оттука $k_1 = -\frac{1}{7}$, а $k_2 = \frac{3}{4}$. Потоа од формулата (2) имаме:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = \frac{(21+4)\cdot 28}{(28-3)\cdot 28} = 1.$$

Според тоа, аголот меѓу правите е $\varphi = 45^\circ$. ♦

2. Услови за паралелност и нормалност на две прави.

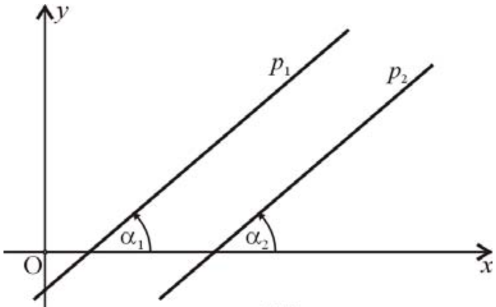
Ако правите p_1 и p_2 се паралелни, тогаш $\alpha_1 = \alpha_2$ (црт. 25) (како согласни), а исто така ќе биде и $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$. Бидејќи $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = k_2$ и $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = k_1$, условот за паралелност на две прави ќе гласи:

$$k_2 = k_1. \tag{3}$$

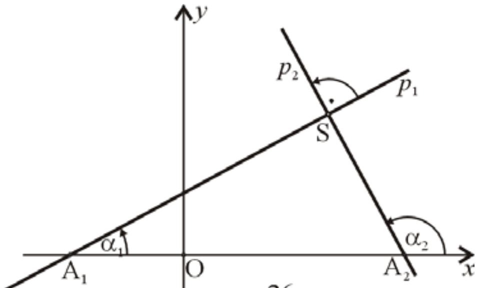
Обратно, ако е $k_2 = k_1$, тогаш е tg α_2 = tg α_1, односно $\alpha_2 = \alpha_1$, а оттука следува дека правите p_1 и p_2 се паралелни.

Значи, *две прави се паралелни, ако и само ако тие имаат еднакви коефициенти на правец.*

Ако пак, правите p_1 и p_2 се заемно нормални (црт. 26), тогаш е $\alpha_2 = 90^o + \alpha_1$, а $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(90^o + \alpha_1) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$.



црт. 25



црт. 26

Бидејќи е tg $\alpha_2 = k_2$ и tg $\alpha_1 = k_1$, затоа условот за нормалност на две прави ќе гласи

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{4}$$

Обратно, ако е $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, тогаш ќе важи:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_1} = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(90^o + \alpha_1).$$

а оттука $\alpha_2 = 90^o + \alpha_1$, т.е. правите p_1 и p_2 се заемно нормални.

Значи, *две прави се заемно нормални, ако и само ако коефициентите на правците им се реципрочни со спротивен знак.*

Забелешка. Условите за паралелност и нормалност на две прави можат да се добијат и директно од формулата (2). Покажи го тоа.

Пример 26. Дадени се равенките на пет прави: $p_1 : 2x - y - 3 = 0$; $p_2 : 3x + 2y - 1 = 0$; $p_3 : 4x - 2y + 5 = 0$; $p_4 : x + 2y - 3 = 0$; $p_5 : 2x - 3y + 4 = 0$. Да се испита, кои меѓу нив се паралелни, а кои нормални.

Решение. Дадените прави имаат соодветно коефициент на правец: $k_1 = 2$; $k_2 = -\frac{3}{2}$; $k_3 = 2$; $k_4 = -\frac{1}{2}$; $k_5 = \frac{2}{3}$. Од нив заклучуваме: $p_1 || p_3$; $p_1 \perp p_4$; $p_3 \perp p_4$ и $p_2 \perp p_5$.. ♦

Пример 27. Да составиме равенка на права, која минува низ точката $T(-2,1)$ и паралелна со правата: $x - 3y + 5 = 0$.

Решение. Дадената права има коефициент на правец $k = \frac{1}{3}$. Тој ќе биде коефициент на правец и на правата, чија равенка треба да се состави. Затоа, равенката на правата што минува низ точката $T(-2,1)$ и има коефициент на правец $k = \frac{1}{3}$ ќе гласи:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x+2), \quad \text{односно} \quad x - 3y + 5 = 0.$$ ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди го аголот меѓу правите:

а) $2x + y + 1 = 0$ и $3x + 2y - 5 = 0$; б) $3x - y - 3 = 0$ и $2x - 3y + 6 = 0$.

2. Состави ја равенката на права, која минува низ точката $A(-5,1)$ и е нормална на правата $2x - 7y + 5 = 0$.

3. Одреди го остриот агол меѓу правите: $x - y + 5 = 0$ и $3x - y + 3 = 0$.

4. Одреди под кој агол се сечат правите: $2x - y = 4 = 0$ и $2x + y + 1 = 0$.

5*. Одреди го аголот меѓу правата: $2x - 3y + 5 = 0$ и правата што минува низ точките $A(4, -5)$ и $B(-3,2)$.

6. Одреди ја равенката на права што минува низ точката $A(-3,2)$, а со Ox-оската гради агол 0°.

7. Равенките на страните на триаголникот се: AB: $x + 2y - 3 = 0$; BC: $2x + y - 8 = 0$; AC: $x - 2y + 6 = 0$. Покажи дека тој е правоаголен триаголник.

8*. Одреди го аголот меѓу правите: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ и $\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=1$.

9. Дадени се три точки: $A(-3,4)$, $B(3,5)$, $C(1,7)$. Одреди ја равенката на правата што минува низ точката C и е паралелна со правата AB.

10. Состави ја равенката на права што минува низ точките $M(2,-3)$ и е нормална на правата $3x - 2y + 4 = 0$.

11. Одреди ја равенката на права што минува низ координатниот почеток и е нормална на правата $3x + 4y - 3 = 0$.

12. Одреди ја равенката на симетралата на отсечката AB, ако: $A(-5, -1)$ и $B(-3,4)$.

13. Одреди ја равенката на права што минува низ точката $M(4,-3)$, а со правата $3x + 4y = 0$ гради агол од 45°.

14. Дадена е правата p со равенката $3x - 4y + 5 = 0$. Низ координатниот почеток O повлечи нормала на правата p и одреди ја нејзината равенка.

15. Одреди ги координатите на пресечните точки на правата $3x - 4y - 12 = 0$ со координатните оски.

IV.7. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ

Нека се дадени две прави чии равенки се:

$$A_1x + B_1x + C_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2x + C_2 = 0, \tag{2}$$

Ако правите се сечат, тогаш постои точка, која е заедничка за двете прави, т.е. точка што лежи на едната и на другата права. Таа точка се вика *пресек* (или пресечна точка) на двете прави. Јасно е дека координатите на пресекот ќе ја задоволуваат секоја од равенките (1) и (2).

Според тоа, за наоѓање на координатите на пресекот на две прави потребно е да се реши системот од равенките (1) и (2).

Меѓутоа, при решавањето на систем линеарни равенки со две променливи, се знае, дека возможни се три случаи:

1^o. Системот има едно решение (x_0, y_o). Во тој случај правите (1) и (2) се сечат во точка $S(x_0,y_o)$.

2^o. Системот нема ниту едно решение. Во тој случај правите (1) и (2) се паралелни и различни.

3^o. Системот е неопределен, т.е. има бесконечно множество решенија. Значи, правите (1) и (2) имаат бесконечно множество заеднички точки, т.е. тие се паралелни и се совпаѓаат.

За да видиме при кои услови настанува секој од горните три случаи, равенките на правите (1) и (2) ќе ги трансформираме во нивниот експлицитен вид:

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}, \tag{1'}$$

$$y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}. \tag{2'}$$

Дали правите (1) и (2) се сечат, или се паралелни и различни, или се паралелни и се совпаѓаат, тоа зависи од нивните коефициенти на правецот и отсечките што тие ги отсечуваат од ординатната оска. Тоа го утврдува следнава:

Теорема 3. Правите (1) и (2) односно (1') и (2'):

1^o. се сечат, ако и само ако $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

2^o. се паралелни и различни, ако и само ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

3^o. се паралелни и се совпаѓаат, ако и само ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Доказ. Од условот за паралелност на две прави следува дека правите (1) и (2) се паралелни, ако и само ако имаат еднакви коефициенти на правецот $k_2 = k_1$:

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}, \text{ односно } \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}.$$

А дали паралелните прави се различни или се совпаѓаат, зависи од тоа дали тие Oy-оската ја сечат во различни точки $(-\frac{C_1}{B_1} \neq -\frac{C_2}{B_2})$ или во иста точка $(-\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2})$. Всушност, тоа е утврдено со тврдењата 2^o и 3^o од теоремата.

Ако, пак, правите (1') и (2') не се паралелни, т.е. ако: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, тогаш тие се сечат (тврдење 1^o). ♦

Пример 28. Да го одредиме пресекот на правите: $3x - 2y = 5$ и $5x + y - 17 = 0$.

Решение. Го решаваме системот од равенките на прави по кој било метод и наоѓаме: $x = 3$, $y = 2$. Значи, правите се сечат во точката со координати (3,2). ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги координатите на пресекот на правите: $4x - y - 7 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.

2. Најди го пресекот на правите: $2x + 5y - 29 = 0$ и $5x + 2y - 20 = 0$.

3. Одреди го пресекот на правите:

а) $3x + 2y – 13 = 0$ и $5x – 3y – 9 = 0$; б) $x + y – 5 = 0$ и $2x + 3y – 13 = 0$.

4. Покажи дека пресекот на правите: $7x – 9y + 15 = 0$ и $13x + 12y – 20 = 0$ лежи на Oy-оската.

5. Дадени се темињата на четириаголникот: $A(–5,–2)$, $B(5,6)$, $C(8,3)$ и $D(1,–4)$. Одреди го пресекот на неговите дијагонали.

6. Дадени се равенките на страните на триаголникот ABC: AB: $x – y + 4 = 0$; BC: $5x + 6y + 9 = 0$; AC: $4x + 2y – 20 = 0$. Одреди ги координатите на неговите темиња.

7. Низ пресекот на правите: $x – y + 4 = 0$ и $4x – 2y – 20 = 0$, повлечена е права паралелна со правата $2x–3y –1 = 0$. Одреди ја нејзината равенка.

8*. Низ пресекот на правите: $4x + 2y – 19 = 0$ и $5x + 6y + 6 = 0$, повлечена е права што е нормална на правата $x + y –3 = 0$. Одреди ја нејзината равенка.

9. Одреди за која вредност на коефициентот k, правата $y = kx + 3$ минува низ пресекот на правите: $y = 2x + 1$ и $y + 5 = 0$.

10. Дадени се равенките на страните на триаголникот: AB: $3x + 4y –14 = 0$; BC: $12x + 5y –1 = 0$ и AC: $5x + 3y + 6 = 0$. Одреди го периметарот на триаголникот.

11. На правата: $2x + 3y – 6 = 0$ одреди ја точката што е еднакво оддалечена од точките: $A(4,3)$ и $B(5,1)$.

12*. Дадени се равенките на две соседни страни на паралелограмот: $2x + y = 1$ и $8x + 3y + 1 = 0$, и равенката на една негова дијагонала $3x + 2y + 3 = 0$. Одреди ги координатите на темињата на тој паралелограм.

IV.8. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Во геометријата се сретнуваат многу задачи со барање да се одреди растојанието од дадена точка до дадена права. На пример, одредувањето на висините на триаголникот се сведува на одредување на растојанието на едно негово теме до спротивната негова страна.

Нека се дадени точката $M_o(x_o,y_o)$ и права l, што е зададена со нејзината равенка во нормален вид

$$x \cdot \cos\omega + y \cdot \sin\omega – p = 0, \tag{1}$$

односно

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \tag{2}$$

Под растојание од точката M_o до правата l ја подразбираме должината на отсечката M_oM_1,каде $M_1(x_1,y_1)$ е подножје на нормалата, што е повлечена од точката M_o кон правата l (црт. 27).

Низ точката M_o да повлечеме права l_1 паралелна со дадената права l. Ако со p_1 го означиме нејзиното растојание од координатниот почеток 0, тогаш равенката на правата l_1 ќе гласи:

$$x \cdot \cos\omega + y \cdot \sin\omega - p_1 = 0, \tag{3}$$

Бидејќи $M_o \in l_1$, тогаш координатите на точката $M_o(x_o,\ y_o)$ ќе ја задоволуваат равенката (3), т.е. ќе важи:

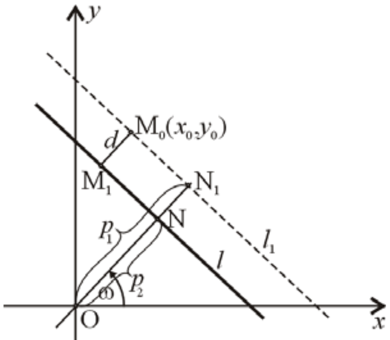
$$x_o \cdot \cos\omega + y_o \cdot \sin\omega - p_1 = 0,$$

од каде:

$$p_1 = x_o \cdot \cos\omega + y_o \cdot \sin\omega\ . \tag{4}$$

Бараното растојание d од точката M_o до правата l, како што гледаме од цртежот 27, ќе биде:

$$d = \overline{ON}_1 - \overline{ON} = p_1 - p = |x_o \cdot \cos\omega + y_o \cdot \sin\omega - p|, \tag{5}$$



црт. 27

односно

$$d = \frac{|Ax_o + B_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ . \tag{6}$$

При пресметувањето на растојанието d, бројот $Ax_o + By_o + C$ може да биде позитивен или негативен, што зависи од тоа дали точката M_o и координарниот почеток 0 се од иста страна или на различни страни од правата l. Меѓутоа, растојанието d секогаш е позитивен број ($d > 0$), затоа ја земаме апсолутната вредност на $Ax_o + By_o + C$.

Пример 29. Да го одредиме растојанието од точката $T(2,-3)$ до правата $3x - 4y - 8 = 0$.

Решение. $d = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) - 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|6 + 12 - 8|}{\sqrt{25}} = 2$. ♦

Пример 30. Да го одредиме растојанието од точката $A(-1,4)$ до правата $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$.

Решение. Равенката на правата ја трансформираме во општ вид: $5x + 3y - 15 = 0$, па со замена во (6), добиваме: $d = \dfrac{|5 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 - 15|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \dfrac{|-6 + 12 - 15|}{\sqrt{34}} = \dfrac{9}{\sqrt{34}} = \dfrac{9\sqrt{34}}{34}$. ♦

Пример 31. Да го одредиме растојанието од точката $C(-5, \frac{5}{4})$ до правата $\frac{3}{5} \cdot x - \frac{4}{5} \cdot y - 3 = 0$.

Решение. Равенката на правата е во нормален вид. Провери. Со замена на координатите на точката C во (5), добиваме: $d = \left|\frac{3}{5} \cdot (-5) - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} - 3\right| = |-3 - 1 - 3| = |-7| = 7$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди го растојанието од точката $B(2,5)$ до правата $y = 3x - 4$.

2. Одреди го растојанието од точката $M(3,0)$ до правата

а) $2x - y + 5 = 0$; б) $-x + 3y + 1 = 0$.

3*. Одреди го растојанието меѓу паралелните прави: $2x + y - 3 = 0$ и $6x + 3y + 5 = 0$.

4. Отсечката AB: $A(-3,1)$ и $B(5,-1)$ е основа на триаголникот ABC. Одреди ја висината спуштена од врвот $C(6,5)$ кон основата.

5. Дадени се темињата на триаголникот: $A(0,2)$; $B(5,7)$; $C(3,–2)$. Пресметај ги должините на неговите три висини.

6. Кружница со центар $C(2,–3)$ се допира до правата: $5x + 12y = 13$. Одреди го нејзиниот радиус.

IV.9. КРУЖНИЦА, РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

Во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на некои специјални случаи од општата равенка од втор степен со две променливи

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Кривите – линиите, што се определени (зададени) со некоја равенка од втор степен по однос на променливите x и y, се викаат *криви од втор ред*. Тие имаат голема улога во астрономијата, архитектурата, техниката и другите гранки на науката. За нив знаеле и древните Грци. Но, бидејќи ним не им биле познати равенките и методот на координати, тогаш кривите од втор ред тие ги разгледувале како пресеци на кружната конусна површина со рамнината. Затоа, кривите од втор ред, што се добиваат како пресек на кружната конусна површина и рамнина, уште се викаат и *конусни пресеци.* Тоа се кружницата (како специјален вид елипса), елипсата, хиперболата и параболата.

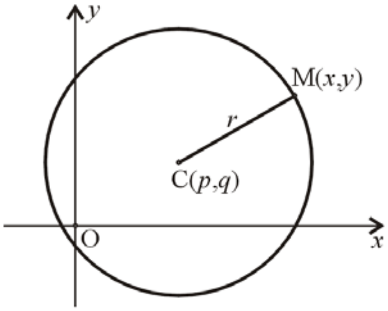
Кружницата ти е позната уште од основното училиште. Припомни си: Кружница се вика множеството од сите точки во рамнината, кои се на исто растојание r од една фиксна точка од таа рамнина.

Дадената фиксна точка се вика *центар*, а растојанието r – *радиус* на кружницата.

Да ја составиме равенката на кружницата, која во правоаголниот координатен систем е определена со нејзиниот центар $C(p,q)$ и радиусот r (црт. 28).

Општото својство на која било точка $M(x, y)$, од кружницата го запишуваме со равенството: $\overline{CM} = r,$ односно $\overline{CM}^2 = r^2$. Со формулата за растојание меѓу две точки, растојанието $\overline{CM}$ го изразуваме преку координатите на точките $M(x, y)$ и $C(p, q)$ па добиваме

$$(x – p)^2 + (y – q)^2 = r^2. \qquad (2)$$



црт. 28

Равенката (2) е *равенка на кружницата со центар во точката* $C(p,q)$ *и радиус* r (црт. 28). Неа ја задоволуваат координатите на која било точка од кружницата, и не ја задоволуваат координатите на ниту една точка што не лежи на кружницата.

Од друга страна, пак, која било точка $M(x,y)$, чии координати ја задоволуваат равенката (2), лежи на кружницата, бидејќи нејзиното растојание до центарот C е еднакво на r.

Ако центарот на кружницата се совпадне со координатниот почеток, т.е. ако $p = q = 0$, тогаш равенката (2) добива попрост вид:

$$x^2 + y^2 = r^2 . \qquad (3)$$

Равенката (3) се вика *централна равенка на кружница.* На пример, $x^2 + y^2 = 9$ е равенка на кружница со центар во координатниот почеток и радиус $r = 3$.

Пример 32. Да ја составиме равенката на кружница со радиус $r = 4$ и центар $C(3,–1)$.

Решение. Со замена во формулата (2) на познатите елементи, добиваме:

$$(x – 3)^2 + (y + 1)^2 = 16. \blacklozenge$$

Ако во равенката (2) се ослободиме од заградите и извршиме средување, таа го добива видот:

$$x^2 + y^2 – 2px – 2qy + p^2 + q^2 – r^2 = 0 \qquad (4)$$

или пократко

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (5)$$

каде

$$D = – 2p, E = – 2q \text{ и } F = p^2 + q^2 – r^2 \qquad (6)$$

Пример 33. Да ги одредиме координатите на центарот C и радиусот r на кружницата зададена со равенката $x^2 + y^2 – 2x – 6y = 6$.

Решение. Од релациите (6) имаме:

$$p = -\frac{D}{2} = 1,\ q = -\frac{E}{2} = 3 \text{ и } r = \sqrt{p^2 + q^2 - F} = \sqrt{1+9+6} = 4.$$

Значи, кружницата има радиус $r = 4$ и центар во точката $C(1,3)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на кружница со радиус $r = 5$ и центар во точката:

а) (2,3), б) (0,4) и в) (–5,0).

2. Состави ја равенката на кружница, чиј центар е во точката $C(–2,3)$ и има радиус $r=\sqrt{3}$.

3. Состави ја равенката на кружница, чиј центар C и радиус r се:

а) $C(1,–4)$, $r = 2$; б) $C(0,–2)$, $r = \frac{1}{2}$.

4. Состави равенка на кружница, чиј центар е во точката $C(3,–4)$, и ја допира:

а) Ox-оската, б) Oy-оската.

5. Состави равенка на кружница, која ги допира координатните оски и има радиус $r = 4$. (Внимавај, постојат четири такви кружници.)

6. Покажи дека кружницата $x^2 + y^2 – 12x + 12y + 36 = 0$ ги допира двете координатни оски.

7. Состави ја равенката на кружницата, чиј центар лежи на позитивниот дел од Oy-оската, ја допира Ox-оската и има радиус r.

8. Одреди ги координатите на центарот C и радиусот r на кружницата:

а) $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$; б) $x^2 + (y + 3)^2 = 4$; в) $(x + 5)^2 + y^2 = 1$.

9. Одреди ги координатите на центарот C и радиусот r на кружницата:

а) $x^2 + y^2 – 6x + 10y + 18 = 0$; б) $5x^2 + 5y^2 + 8x – 6y – 15 = 0$.

10*. Одреди ја равенката на кружницата, која минува низ точката $A(6,-3)$ и ги допира координатните оски.

11*. Одреди ја равенката на кружницата, што е опишана околу триаголникот со темиња: $A(0,2)$, $B(0,-2)$ и $C(4,0)$.

IV.10. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И КРУЖНИЦА

<u>**1.**</u> Од геометријата познато е дека права и кружница во рамнината можат да имаат една од следниве три заемни положби:

1°. Правата и кружницата имаат две заеднички точки. Велиме дека правата ја сече кружницата (или е *секанта* на неа). Тоа ќе биде, ако и само ако растојанието d на правата од центарот на кружницата е помало од радиусот r на кружницата, т.е. ако $d < r$.

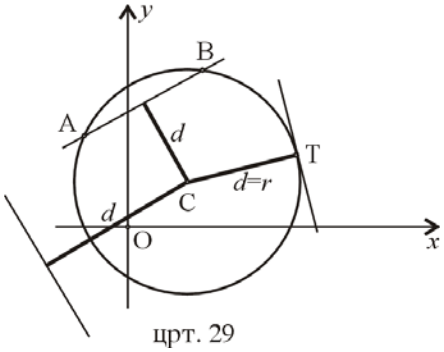
2°. Правата и кружницата имаат само една заедничка точка Т. Велиме дека правата ја допира (или таа е *тангента* на кружницата). Тоа ќе биде, ако и само ако е $d = r$ е (црт. 29).

3°. Правата и кружницата немаат ниту една заедничка точка, ако и само ако $d > r$ (црт. 29).

Овие положби – резултати што се добиени геометриски, сега ќе ги добиеме со методот на координати по чисто аналитички пат.

Нека е дадена кружницата $x^2 + y^2 = r$ и правата $y = kx + n$, а треба да се одреди нивната заемна положба во рамнината. За таа цел, треба да ги одредиме координатите на нивните заеднички точки. А наоѓањето на заедничките точки на права и кружница (или две криви) се сведува на решавање на системот од нивните равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = kx + n \end{cases}. \qquad (1)$$



црт. 29

Со заменување на изразот за y од втората во првата равенка на системот, ја добиваме квадратната равенка од една променлива: $x^2 + (kx + n)^2 - r = 0$, односно

$$(1 + k^2)x^2 + 2knx + (n^2 - r^2) = 0. \qquad (2)$$

Дали правата и кружницата ќе имаат една, две или нема да имаат заеднички точки, зависи од дискриминантата $D = k^2n^2 - (1 + k^2)(n^2 - r^2)$, односно

$$D = (1 + k^2)r^2 - n^2 \qquad (3)$$

на квадратната равенка (2), и тоа:

1°. Ако $D = (1 + k^2)r^2 - n^2 > 0$, тогаш равенката (2) има две реални различни решенија x_1 и x_2, а со тоа и за y ќе се добијат две различни реални вредности y_1 и y_2.

Значи, системот равенки (1) ќе има две решенија (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тоа се координатите на заедничките точки на правата и кружницата.

Според тоа, ако $D>0$, правата е секанта на кружницата.

2°. Ако $D = (1 + k^2)r^2 - n^2 =0$, тогаш равенката (2) има еден двократен реален корен $x_1 = x_2$, а со тоа и системот (1) ќе има едно решение (x_1, y_1).

Според тоа, ако $D = 0$, тогаш правата и кружницата имаат една заедничка точка, односно *правата е тангента на кружницата.*

Нивната заедничка точка се вика *допирна точка* на тангентата и кружницата. Релацијата

$$(1+k^2)r^2 - n^2 = 0\ . \tag{4}$$

претставува и се вика услов *правата* $y = kx + n$ *да е тангента на кружницата* $x^2 + y^2 = r^2$.

3°. Ако $D = (1 + k^2)r^2 - n^2 < 0$, тогаш равенката (2) нема реални корени, односно системот равенки (1) нема решение.

Според тоа, ако $D < 0$, тогаш правата и кружницата немаат заеднички точки.

Пример 34. Да испитаме каква заемна положба имаат кружницата $x^2 + y^2 = 25$ и правата $2x + y - 10 = 0$.

Решение. Го решаваме системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -2x + 10 \end{cases}.$$

Со замена на y од втората во првата равенка, добиваме: $x^2 + (-2x + 10)^2 - 25 = 0$, односно $5x^2 - 20x + 75 = 0$, од каде $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Потоа од втората равенка наоѓаме: $y_1 = 4$, $y_2 = 0$. Според тоа, правата ја сече кружницата во точките (3,4) и (5,0). ♦

Пример 35. Низ точката $A(-2,6)$ повлечена е тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 8$. Да ја одредиме равенката на тангентата.

Решение. Бараната равенка на тангентата нека е $y = kx + n$.

Значи, задачата се сведува на одредување на параметрите k и n. Бидејќи точката $A(-2,6)$ лежи на тангентата, тогаш нејзините координати мораат да ја задоволуваат равенката на тангентата $y=kx+n$, т.е. треба да важи $6 = -2k + n$.

Меѓутоа, треба да важи и условот (4), правата да е тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 8$ (каде $r^2 = 8$). Така добиваме уште една равенка $(1 + k^2) \cdot 8 = n^2$, која ги содржи параметрите k и n.

Сега го решаваме системот равенки

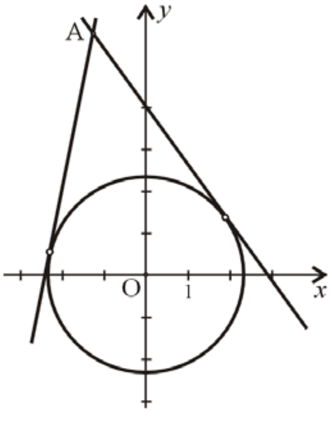
$$\begin{cases} (1+k^2)\cdot 8 = n^2 \\ 6 = -2k + n \end{cases} \tag{5}$$

во кој параметрите k и n играат улога на променливи.

Од втората равенка $n = 2k + 6$ го заменуваме во првата равенка на системот, па добиваме:

$$(1 + k^2) \cdot 8 = (2k + 6)^2 \text{ или } k^2 - 6k - 7 = 0.$$

Тоа е квадратна равенка по однос на параметарот k, па од неа добиваме $k_1 = 7$ и $k_2 = -1$, а заменувајќи ги едно по друго во $n = 2k + 6$, добиваме и две вредности за n. Тоа се $n_1 = 20$ и $n_2 = 4$.



црт. 30

Ова покажува дека од дадената точка $A(-2,6)$ можат да се повлечат две различни тангенти кон дадената кружница $x^2 + y^2 = 8$ (црт. 31). Нивните равенки се: $y = y_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$, односно $y = 7x + 20$ и $y = -x + 4$. ♦

2. Ако кружницата е дадена со равенката

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2, \tag{6}$$

а правата со равенката $y = kx + n$, тогаш испитувањето на нивната заемна положба го вршиме аналогно како погоре.

Меѓутоа, утврдувањето на нивната заемна положба може да се изврши и преку споредување на растојанието d на центарот $C(p,q)$ на кружницата (6) до правата $y = kx + n$ и радиусот r на кружницата.

Бидејќи растојанието на центарот $C(p, q)$ до правата $kx - y + n = 0$, знаеш, еднакво е на

$$d=\frac{|kp-q+n|}{\sqrt{1+k^2}},$$

тогаш условот, дека правата $y = kx + n$ е тангента на кружницата зададена со равенката (6), ќе гласи:

$$d=r, \text{ односно } \frac{|kp-q+n|}{\sqrt{1+k^2}}=r,$$

односно

$$(kp-q+n)=(1+k^2)\cdot r^2\,. \tag{7}$$

Пример 36. Да провериме дали правата $x = y - 7 = 0$ е тангента на кружницата $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$, или не.

Решение. Дадената права ја доведуваме во експлицитен вид $y = -x + 7$, па наоѓаме дека $k = -1$ и $n = 7$. Од равенката на кружницата ги наоѓаме координатите на центарот и нејзиниот радиус. Тие се:

$$p=-\frac{-4}{2}=2\,,\quad q=-\frac{-6}{2}=3 \quad \text{и} \quad r^2=p^2+q^2-F=2^2+3^2-11=2.$$

На крај вредностите на параметрите k, n, p, q и r^2 ги внесуваме во равенството (7):

$$(-1\cdot 2-3+7)^2=[1+(-1)^2]\cdot 2, \quad \text{односно} \quad 2^2=2\cdot 2$$

и утврдуваме дека таа е исполнета.

Значи, дадената права е тангента на кружницата. Ако сакаме да ги одредиме координатите на допирната точка, тоа го правиме преку решавање на системот од нивните равенки. ♦

ЗАДАЧИ

1. Испитај каква положба имаат правата $7x + 4y - 65 = 0$ и кружницата $x^2 + y^2 = 65$.

2. Најди ги координатите на заедничките точки (ако ги има) на правата $y = x + 2$ и кружницата $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0$.

3. Испитај ја заемната положба на правата: а) $4x + 3y - 50 = 0$; б) $3x = 4y$ и кружницата $x^2 + y^2 = 100$.

4. Одреди ги координатите на пресечните точки на кружницата $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ со координатните оски.

5. Во равенката на правата $y = kx + 3$ одреди го параметарот k, така што таа да биде тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 4$.

6. Докажи дека правата $12x + 5y = 85$ е тангента на кружницата $(x + 7)^2 + y^2 = 169$. Одреди ги координатите на допирната точка.

7*. Одреди ги координатите на крајните точки на дијаметарот на кружницата $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 37 = 0$ кој има коефициент на правец $k = -7$.

8. Дадена е правата $y = 2x + 3$ и кружницата $x^2 + y^2 = 5$. Одреди ги равенките на тангентите на дадената кружница, кои се: а) паралелни; б) нормални на дадената права; в) со дадената права градат агол од 45°.

9. Состави ја равенката на кружницата, чиј центар е во точката $C(3,-4)$ и ја допира правата $y = 2x - 5$.

10. Одреди ги равенките на тангентите на кружницата $x^2 + y^2 = 25$, што се повлечени од точката $M(-1,7)$.

11*. Одреди, под каков агол се гледа кружницата од точката $T(8,0)$.

IV.11. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА НА КРУЖНИЦАТА

1. Нека се дадени кружница со равенката $x^2 + y^2 = r^2$ и точка $M(x_1, y_1)$ од неа, а треба да ја одредиме равенката на тангентата t на кружницата во таа точка.

Познато е дека тангентата t на кружницата е нормална на радиусот OM во допирната точка M (црт. 31). Според тоа, таа е права, која минува низ една дадена точка $M(x_1, y_1)$ и е нормална на правата OM, определена со центарот $O(0,0)$ и допирната точка $M(x_1, y_1)$. Оттука, следува дека бараната равенка на тангентата t, ќе гласи:

$$y - y_1 = k_t(x - x_1). \tag{1}$$

Коефициентот на правецот k_t, на тангентата ќе го одредиме од условот за нормалност:

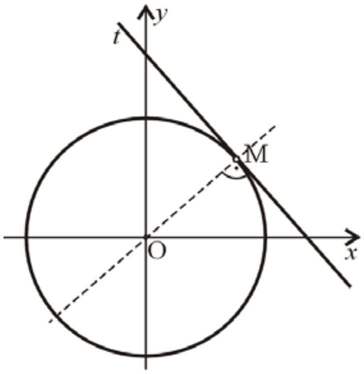
$$k_t \cdot k_n = -1.$$

Бидејќи е

$$k_n = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}\ , \tag{2}$$

за k_t, добиваме:

$$k_t = -\frac{1}{k_n} = -\frac{x_1}{y_1}. \tag{3}$$



црт. 31

Според тоа, равенката на тангентата на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$ во допирната точка $M(x_1, y_1)$ од неа, гласи:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1). \tag{4}$$

Оваа равенка ќе добие многу попогоден вид, ако членовите со x и y ги пренесеме на левата страна, а другите – на десната страна:

$$y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2 \quad \text{односно} \quad x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2,$$

или конечно

$$x_1 x + y_1 y = r^2. \tag{4’}$$

Пример 37. Да ја напишеме равенката на тангентата на кружницата $x^2 + y^2 = 5$ во точката $T(2,1)$ од неа.

Решение. Со замена на координатите на точката T во равенката (4'), ја добиваме бараната тангента $2x + y = 5$. ♦

2. Ако равенката на кружницата е дадена со општата равенка

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \tag{5}$$

и тогаш равенката на тангентата во дадена точка $M(x, y)$ од неа ја добиваме на ист начин.

Прво го одредуваме коефициентот на правецот k_n на правата определена со центарот $C(p, q)$ и допирната точка $M(x_1, y_1)$ на кружницата (5):

$$k_n = \frac{y_1 - p}{x_1 - q} \tag{2'}$$

а потоа од него и коефициентот на правецот на тангентата:

$$k_t = -\frac{x_1 - q}{y_1 - p}\,. \tag{3'}$$

Со внесување на вредноста на k_t во равенката (1), ја добиваме бараната равенка на тангентата на кружницата (5), во допирната точка $M(x_1, y_1)$ од неа:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1). \tag{6}$$

која со мала трансформација лесно може да се доведе во видот:

$$(x_1 - p)\,(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2 \tag{6'}$$

Пример 38. Да ја одредиме равенката на тангентата на кружницата $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ во точката $M(4, y_1 < 0)$ од неа.

Решение. Бидејќи точката M лежи на кружницата, затоа од равенката $(4 - 3)^2 + (y_1 + 1)^2 = 5$, наоѓаме $y_1 = -1 \pm 2$. Ја земаме вредноста $y_1 = -3 < 0$, па така точката M ќе има координати $(4, -3)$. Потоа од (6') добиваме: $(4 - 3)\,(x - 3) + (-3 + 1)\,(y + 1) = 5$, односно

$$1 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y + 1) = 5,$$

или конечно $x - 2y - 10 = 0$. ♦

3. Нормала на кружницата во дадена точка од неа е права, што минува низ дадената точка, и е нормална на тангентата на кружницата во таа точка.

Од оваа дефиниција и познатото својство на тангентата на кружницата, следува дека нормалата во дадена точка $M(x_1, y_1)$ на кружницата, минува и низ центарот на кружницата.

Значи, коефициентот на правецот на нормалата k_n на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$, односно кружницата (5), во точката $M(x_1, y_1)$ од нив е даден со равенството (2), односно со равенството (2').

Според тоа, равенката на нормалата на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$ во точката $M(x_1, y_1)$ од неа ќе гласи:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1). \tag{7}$$

а равенката на нормалата на кружницата $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ во точката $M(x_1, y_1)$ од неа е:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1). \tag{8}$$

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на тангентата на кружницата $x^2 + y^2 = 13$ во точката $T(3, y_1 > 0)$ од неа.

2. Состави ја равенката на тангентата на кружницата $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$, во точката $M(-1,3)$ од неа.

3. Одреди ги равенките на тангентата и нормалата во точката $M(8,-6)$ од кружницата $x^2 + y^2 = 100$.

4. Одреди ја равенката на тангентата во точката $M(3, -4)$ на кружницата $x^2 + y^2 = 25$

5. Одреди ја равенката на тангентата во точката $T(-6,5)$ на кружницата

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 29.$$

6. Најди ја равенката на тангентата во нормалата на кружницата $x^2 + y^2 = 65$ во точката $M(4,-7)$ од неа.

7. Најди ја равенката на тангентата во нормалата во точката $M(3,4)$ на кружницата $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$.

8. Одреди ги равенките на тангентите на кружницата $x^2 + y^2 = 25$, што се повлечени во пресечните точки со правата $2x + y = 10$.

9. Одреди го аголот меѓу тангентите, што се повлечени во просечните точки на правата $y = 4x - 7$ и кружницата $x^2 + y^2 = 10x$.

10*. Испитај, дали правата $3x - 4y + 11 = 0$ е нормала на кружницата $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$. Ако е нормала, тогаш во пресечните точки одреди ги равенките на тангентите на кружницата.

11. Правата $4x - 3y - 50 = 0$ е тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 100$. Провери. Одреди ја равенката на правата, која минува низ допирната точка и е паралелна со правата $2x + 3y - 4 = 0$.

IV.12. ЕЛИПСА, ЦЕНТРАЛНА РАВЕНКА НА ЕЛИПСА

Поимот *елипса* ти е познат од геометријата. Пресекот на кружен конус или цилиндар со рамнина, која е коса спрема нивната оска и ги сече сите генератриси, е елипса.

Секоја кружница, ако лежи во рамнина што не е нормална на правецот на гледањето, ја гледаш во форма на елипса. Многу леи во цветните градини имаат форма на елипса, итн. Но, малкумина знаат како се црта елипсата. Неа ја цртаме вака:

Забодуваме две колчиња во земја на некое растојание (на пример $2m$) едно од друго. Потоа, земаме јаже со должина приближно трипати поголема од растојанието меѓу колчињата, двата краја му ги врзуваме еден за друг и со него ги опфаќаме колчињата. Потоа, со трето колче го затегнуваме јажето и движејќи го околу колчињата со третото колче ја цртаме елипсата (црт. 32).

Елипсата ја определуваме со следнава:

Дефиниција 2. *Елипса* се вика множеството од сите точки во рамнината, такви што, за секоја од нив збирот од растојанијата до две дадени фиксни точки од таа рамнина е константен.

Дадените точки се викаат *фокуси* на елипсата, ги означуваме со F_1 и F_2, а растојанието меѓу нив, кое го означуваме со $2c$, се вика *фокусно растојание* (црт. 32).

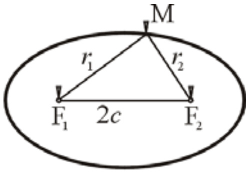
Една произволна точка од елипсата да ја означиме со M. Растојанијата на точката M до фокусите F_1 и F_2 се викаат *фокусни радиуси* и се означуваат соодветно:

$$r_1 = \overline{F_1M} \quad \text{и} \quad r_2 = \overline{F_2M}\ .$$

Согласно дефиницијата на елипсата, нивниот збир $\overline{F_1M} + \overline{F_2M}$ е константен, па го означуваме со $2a$ ($a > 0$). Според тоа, условот, точката M да лежи на елипсата го изразуваме со равенството:

$$\overline{F_1M} + \overline{F_2M} = 2a. \qquad (1)$$

Равенството (1) претставува равенка на елипсата. Да го запишеме тоа во најпроста координатна форма.



црт. 32

За таа цел, избираме правоаголен координатен систем, така што апсцисната оска да минува низ фокусите F_1 и F_2, а ординатната оска да се совпаѓа со симетралата на отсечката F_1F_2 (црт. 33). Во тој координатен систем фокусите ќе имаат координати $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

Нека $M(x,y)$ е која било точка од елипсата. Согласно формулата за растојание меѓу две точки, за фокусните радиуси $r_1 = \overline{F_1M}$ и $r_2 = \overline{F_2M}$ добиваме:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (2)$$

Според дефиницијата на елипсата, за секоја нејзина точка важи:

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (3)$$

Ова равенство е потребен и доволен услов за точката $M(x,y)$ да лежи на елипсата. Да го докажеме тоа.

Нека $M(x,y)$ е произволна точка од елипсата. Тогаш равенството (3) согласно (2), може да се запише вака:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (4)$$

Равенката (4) е равенка на елипсата во избраниот координатен систем. Таа може да се сведе во попрост вид. За да ја рационализираме, префрлуваме еден од корените на десната страна, имено:

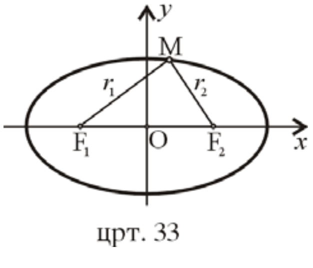
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Ги квадрираме двете страни и по мало средување добиваме:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Со повторно квадрирање и мало средување добиваме:

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2).$$



црт. 33

Бидејќи $2a > 2c$, затоа $a^2 - c^2 > 0$. Заменувајќи $a^2 - c^2 = b^2$, последното равенство го добива видот:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{5}$$

Ако двете страни на (5) ги поделиме со $a^2b^2 \neq 0$, тогаш таа може да се запише и вака:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Равенката (5), односно (6) е најпроста равенка на елипсата и се вика *централна* или *канонична равенка на елипсата.*

Со тоа покажавме дека координатите на произволна точка M од елипсата ја задоволуваат равенката (5), односно (6).

Забелешка. Во процесот на упростувањето на равенката (4) двапати вршевме квадрирање, па според тоа, можеше да се добие равенка што не е еквивалентна на (4), т.е. освен точките на елипсата, добиената равенка (6) да ја задоволуваат и други точки што не лежат на елипсата. Меѓутоа, се докажува дека равенките (4) и (6) се еквивалентни, т.е. никакви други точки што не лежат на елипсата, не можат да ја задоволуваат равенката (6), односно дека важи и обратното тврдење – ако точката $P(x,y)$ ја задоволува равенката (5) или (6), тогаш таа лежи на елипсата.

Пример 39. Да ја составиме равенката на елипсата, ако се дадени: $a = 5$ и $c = 3$.

Решение. Од $a^2 - c^2 = b^2$, наоѓаме $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Заменувајќи ги вредностите на параметрите a и b во равенката (6), добиваме: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, односно $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. ♦

Пример 40. Дадена е равенката на елипсата $x^2 + 5y^2 = 5$. Да ги одредиме координатите на нејзините фокуси.

Решение. Равенката ја запишуваме во видот $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. Оттука $a^2 = 5$, $b^2 = 1$, па за c^2 добиваме: $c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 1 = 4$, односно $c = 2$.

Според тоа, фокусите F_1 и F_2 имаат координати $(-2,0)$ и $(2,0)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на елипса, ако $a = 13$ и $b = 12$.

2. Напиши ја равенката на елипса, ако се дадени: а) $a = 5$, $b = 3$; б) $a = 7$, $b = 3$.

3. Одреди ја равенката на елипса, ако се дадени координатите на фокусите $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ и $2a = 12$.

4*. Одреди ја равенката на елипсата, ако е познато:

а) $a - c = 6$, $b = 12$; б) $a + b = 18$, $c = 12$.

5. Одреди ја равенката на елипсата, ако: а) $a + b = 14$, $a - b = 4$; б) $a - b = 2$, $c = 6$.

6. Одреди ја равенката на елипсата, ако:

а) $a + c = 25$, $\frac{c}{a} = \frac{12}{13}$; б) $a = 4$ и $b = \sqrt{6}$.

7. Одреди ги координатите на фокусите на елипсата:

а) $9x^2+25y^2 = 255$, б) $9x^2 + 36y^2 = 324$.

8. Одреди ги координатите на фокусите на елипсата:

а) $9x^2+16y^2 = 144$, б) $9x^2 + 25y^2 = 900$.

9. Точката $T(6, y_1>0)$ лежи на елипсата $49x^2+100y^2 = 4\,900$. Одреди ја нејзината ордината.

10*. Одреди ја равенката на елипсата која минува низ точките $A(2,-1)$ и $B(3,0)$.

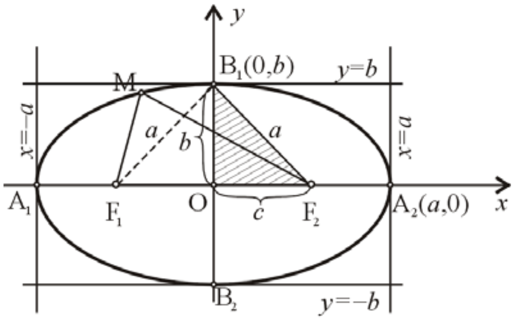
11. Дадена е равенката на елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$ и координатите на точката $M(3,\frac{12}{5})$ од елипсата. Одреди ги фокусните радиуси на точката M.

IV.13. ИСПИТУВАЊЕ ФОРМА НА ЕЛИПСА. ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ НА ЕЛИПСАТА

1. Нека е дадена елипсата со нејзината канонична равенка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

1°. Да ги одредиме прво координатите на пресеците на елипсата (1) со координатните оски. Знаеш, пресечните точки на елипсата со Ox-оската се такви точки што лежат на елипсата и имаат ордината $y = 0$. Затоа, ако во равенката (1) ставиме $y = 0$, ќе добиеме $x = \pm a$. Значи, елипсата ја сече Ox-оската во точките $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$. Аналогно за $x = 0$ од (1), добиваме $y = \pm b$. Според тоа, елипсата ја сече Oy-оската во точките $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ (црт. 34).



црт. 34

Точките A_1, A_2, B_1 и B_2 се викаат *темиња на елипсата.* Отсечката $\overline{A_1A_2}=2b$, на која лежат фокусите F_1 и F_2 се вика *голема оска на елипсата,* а отсечката $\overline{B_1B_2}=2b$ се вика *мала оска на елипсата.* Позитивните броеви a и b се викаат *полуоски на елипсата.* Нивниот сооднос е секогаш $a > b$.

Ако е $b > a$, и тогаш равенката (1) очигледно е равенка на елипса, но само нејзините фокуси се наоѓаат на Oy-оската на растојание $\sqrt{b^2-a^2}$ од координатниот почеток. Во тој случај, голема оска е отсечката $\overline{B_1B_2}=2b$, а мала оска – отсечката $\overline{A_1A_2}=2a$ (црт. 35).

2°. Забележуваме, во равенката (1) променливите x и y се наоѓаат само на парен степен – квадрат. Оттука, следува дека, ако точката $T(x, y)$ лежи на елипсата, тогаш на елипсата ќе лежат и точките $T_1(-x, y)$, $T_2(x, -y)$ и $T_3(-x, -y)$. Тоа значи, дека точката T_1 е симетрична со точката T во однос на ординатната оска, точката T_2 е симетрична, пак, со T во однос на апсцисната оска, а точката T_3 е симетрична со точката T во однос на координатниот почеток. Според тоа, елипсата е крива, која е симетрична во однос на координатните оски и во однос на координатниот почеток.

Значи, елипсата има две оски на симетријата. Пресекот на оските на симетрија се вика *центар на елипсата*. А секоја тетива на елипсата, која минува низ центарот, се располовува од него, и затоа се вика *дијаметар на елипсата.*

3°. За одредување на областа на менување на променливата x, равенката (1) ќе ја решиме по променливата y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ . \tag{2}$$

Равенката (2) покажува дека променливата y добива реални вредности само за вредностите на x, кои го задоволуваат условот $a^2 - x^2 \geq 0$, односно $-a \leq x \leq a$.

Од последното неравенство следува дека точките на елипсата, освен темињата A_1 и A_2, се наоѓаат меѓу правите $x = -a$ и $x = a$ (црт. 34).

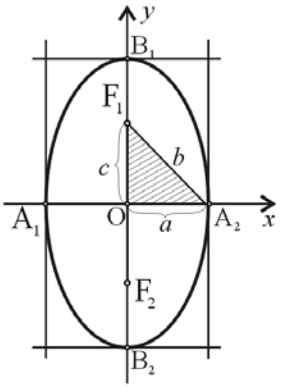
За одредување на областа на менување на променливата y, пак, равенката (1) ќе ја решиме по променливата x:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\ . \tag{3}$$

Равенката (3) покажува дека променливата добива реални вредности само за вредностите на y, кои го задоволуваат условот $b^2 - y^2 \geq 0$, односно $-b \leq y \leq b$.

Од последното неравенство следува, дека точките на елипсата, освен темињата B_1 и B_2, се наоѓаат меѓу правите $y = b$ и $y = -b$ (црт. 34).

Оттука заклучуваме, дека сите точки на елипсата се наоѓаат во правоаголникот, ограничен со правите $x = a$, $x = -a$, $y = b$, и $y = -b$, а само темињата на елипсата лежат на тие прави (црт. 34).



црт. 35

Од равенката (2) забележуваме уште дека при растењето на x од $x = 0$ до $x = a$, променливата y се намалува од $y = b$ до $y = 0$, и обратно, од равенката (3) гледаме: при растењето на y од 0 до b, променливата x се намалува од a до 0.

За поголемо нагледно претставување на текот на елипсата, потребно е да конструираме и неколку нејзини точки. Поради симетричноста на елипсата, тие точки ги земаме во првиот квадрант. Така, за $x = c$ и $x = -c$ од (2) добиваме:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \pm\frac{b^2}{a}\ .$$

Значи, точките $C_1(c,\frac{b^2}{a})$, $C_2(c,-\frac{b^2}{a})$, $C_3(-c,\frac{b^2}{a})$, $C_4(-c,-\frac{b^2}{a})$ се две по две точки, кои лежат во пресеците на елипсата и нормалите кон Ox-оската, повлечени низ фокусите F_1 и F_2. Отсечката од таа нормала, што е заклучена меѓу две точки на елипсата C_1 и C_2, има должина $\frac{2b^2}{a}$ и се вика *параметар на елипсата.*

Пример 41. Дадени се полуоските на елипсата $a = 4$ и $b = 3$. Заменувајќи ги a и b во (1), ја добиваме равенката на дадената елипса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$. ♦

Пример 42. Дадена е равенката на елипсата $3x^2 + 5y^2 = 15$. Да ги одредиме полуоските, полупараметарот и координатите на фокусите на елипсата.

Решение. Од $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ наоѓаме $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$. Потоа,

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5},\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2},\ \ F_1(-\sqrt{2},0),\ \ F_2(\sqrt{2},0).$$ ♦

Пример 43. Да ја составиме равенката на елипса и да ги одредиме координатите на фокусите, ако $a = 4$, $b = 5$.

Решение. Бидејќи $b > a$, затоа фокусите на елипсата лежат на Oy-оската, а полуфокусното растојание е $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3$. Според тоа, елипсата има равенка $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, а нејзините фокуси се $F_1(0,3)$ и $F_2(0,-3)$. ♦

2. Ексцентрицитет на елипсата. Да разгледаме две елипси со еднакви големи оски, но различни мали оски, на пример, $b_1 > b_2$ (црт. 36). Забележуваме дека формата на елипсата зависи од вредноста на односот $\frac{b}{a}$, и тоа: доколку односот $\frac{b}{a}$ е помал, дотолку елипсата е позбиена, и обратно: доколку тој однос е поголем, дотолку елипсата е поокругла. Затоа велиме, односот $\frac{b}{a}$ ја карактеризира формата на елипсата.

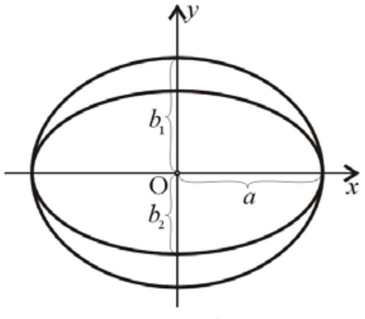
Меѓутоа, за карактеризирање на формата на елипсата во практика, наместо односот $\frac{b}{a}$ го користиме односот меѓу полуфокусното растојание c и големата полуоска a. Тој однос се вика *ексцентрицитет на елипсата* и се означува со $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Бидејќи $c < \alpha$, затоа $0 \le \varepsilon < 1$. Очигледно е дека, доколку ексцентрицитетот ε (при фиксно a) е поголем, дотолку е поголемо полуфокусното растојание c, па со тоа елипсата ќе биде позбиена (сплесната); а доколку ексцентрицитетот е помал, дотолку е помало и полуфокусното растојание, па елипсата е поокругла.

Бидејќи $c=\sqrt{a^2-b^2}$, затоа за ексцентрицитетот ќе важи:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Ако $\varepsilon = 0$, а тоа е ако $c = 0$ или $b = a$, тогаш равенката на елипсата (1) го добива видот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, односно $x^2 + y^2 = a^2$, т.е. елипсата преминува во кружница. Оттука заклучуваме:



црт. 36

Кружницата е специјален случај на елипса, и тоа елипса со ексцентрицитет $\varepsilon = 0$, односно елипса со еднакви оски.

Пример 44. Дадени се елипсите со равенките $3x^2 + 8y^2 = 48$ и $9x^2 + 25y^2 = 225$. Која од нив има поголем ексцентрицитет и што значи тоа?

Решение. Равенките на елипсите ги доведуваме во видот: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$ и $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. За првата елипса е $a^2 = 16$, $b^2 = 6$, па според тоа, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{10}}{4}\approx 0{,}79$, а за втората елипса е: $a^2 = 25$, $b^2 = 9$. Оттука $\varepsilon=\frac{\sqrt{25-9}}{5}=\frac{4}{5}=0{,}8$. Така наоѓаме: првата елипса има помал ексцентрицитет од втората, а тоа значи дека првата е малку поокругла од втората. ♦

ЗАДАЧИ

1. Дадена е елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$. Нацртај (скицирај) ја.

2. Одреди ги ексцентрицитетите на елипсите:

а) $4x^2 + 25y^2 = 100$; б) $16x^2 + 25y^2 = 1600$.

3. Одреди ги полуоските, ексцентрицитетот и координатите на фокусите на елипсата $3x^2 + 4y^2 = 12$.

4. Одреди ги оските, ексцентрицитетот и координатите на темињата и фокусите на елипсата $4x^2 +2y^2 = 1$.

5. Одреди ја равенката на елипсата, на која две темиња имаат координати (±4,0), а фокусите – (± 2,0).

6. Состави ја равенката на елипса, чии фокуси имаат координати (0, ± 4), а големата оска е долга 12.

7. Одреди ја равенката на елипса, чиј ексцентрицитет е еднаков на $\frac{1}{3}$, а еден од фокусите има координати $(\frac{2}{3},0)$.

8. Одреди ја равенката на елипсата, ако се дадени: ексцентрицитетот $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и големата полуоска $a = 6$.

9. Две темиња елипсата има во точките (± 6,0), а фокусите се во точките (± 4,0). Одреди ја равенката на елипсата.

10*. Одреди го ексцентрицитетот на елипсата, ако нејзиниот полупараметар е еднаков на $\frac{2}{3}$ од малата полуоска.

11. Одреди ги координатите на пресечните точки на правата $3x – y + 2 = 0$ и елипсата $4x^2 + 16y^2 = 64$ (ако има).

IV.14. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ЕЛИПСА

Нека се дадени равенките на елипса и права:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

$$y = kx + n \tag{2}$$

За да ја одредиме положбата на правата кон елипсата, треба да ги одредиме нивните заеднички точки (ако имаат такви). А тоа се сведува на решавање на системот од нивните равенки:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = kx + n \end{cases}. \tag{3}$$

Променливата y во (1) ја заменуваме со $kx + n$, па ја добиваме квадратната равенка со една променлива:

$$b^2x^2 + a^2(kx + n)^2 = a^2b^2,$$

која по малку средување ја доведуваме во каноничен вид

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2knx + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0. \tag{4}$$

Дали координатите на заедничките точки на елипсата (1) и правата (2) ќе бидат реални или комплексни броеви, односно дали елипсата и правата ќе имаат заеднички точки, зависи од дискриминантата на квадратната равенка (4):

$$D = (a^2kn)^2 - (b^2 + a^2k^2)\,(a^2n^2 - a^2b^2), \quad \text{односно} \quad D = a^2k^2 + b^2 - n^2.$$

1°. Ако $D = a^2k^2 + b^2 - n^2 > 0$, тогаш равенката (4) има две реални решенија x_1 и x_2, а со тоа и за y се добиваат две реални различни вредности y_1 и y_2.

Значи, системот равенки (1) ќе има две решенија (x_1, y_1), (x_2, y_2). Тоа се координатите на заедничките точки на правата и елипсата.

Според тоа, ако $D > 0$, правата (2) е *секанта на елипсата* (1).

2°. Ако $D = a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, тогаш равенката (4) има еден двократен реален корен $x_1 = x_2$, а со тоа и системот (3) ќе има едно решение (x_1, y_1).

Според тоа, ако $D = 0$, тогаш правата и елипсата имаат една заедничка точка, односно правата (2) *е тангента на елипсата* (1). Нивната заедничка точка се вика *допирна точка* на тангентата и елипсата.

Релацијата $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, односно $n^2 = a^2k^2 + b^2$ претставува *услов правата* $y = kx + n$ *да е тангента на елипсата* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

3°. Ако $D = a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, тогаш равенката (4) нема реални корени, односно системот (3) нема решение. Според тоа, ако $D < 0$, тогаш правата и елипсата немаат заеднички точки.

Пример 45. Да испитаме каква заемна положба имаат правата $3x + 2y - 10 = 0$ и елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$.

Решение. Го решаваме системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases}.$$

Од втората равенка $y = \frac{10-3x}{2}$ го заменуваме во првата и добиваме $x^2 + 4\cdot\frac{(10-3x)^2}{4} = 20$, а таа е еквивалентна со $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Последната равенка има две решенија $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Соодветните вредности за y се $y_1 = -1$, $y_2 = 2$.

Значи, правата ја сече елипсата во точките (4,–1) и (2,2). ♦

Пример 46. Да испитаме каква заемна положба имаат правата $3x + y - 9 = 0$ и елипсата $27x^2 + 6y^2 = 162$.

Решение. Ако го решиме системот равенки

$$\begin{cases} 27x^2+6y^2=162 \\ 3x+y-9=0 \end{cases}$$

наоѓаме дека тој има едно решение (2,3). Значи, дадената права е тангента на елипсата во точката (2,3). Навистина, параметрите на елипсата $a^2 = 6$, $b^2 = 27$ и на правата $k = -3$ и $n = 9$ го задоволуваат условот $a^2k^2 + b^2 = n^2$, т.е. $6 \cdot (-3)^2 + 27 = 81$. ♦

Пример 47. Да ја одредиме равенката на тангентата на елипсата $x^2 + 3y^2 = 4$, што е паралелна со правата $2x-6y + 5 = 0$.

Решение. Бараната тангента нека е правата $y = kx + n$.

Задачата се сведува на одредување на k и n. Бидејќи тангентата треба да биде паралелна со правата $2x - 6y + 5 = 0$, затоа коефициентот k на тангентата ќе биде еднаков на коефициентот на правецот на дадената права, т.е. ќе биде $k=\frac{1}{3}$. Полуоските на елипсата $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$ се: $a^2 = 4$ и $b^2=\frac{4}{3}$.

Параметарот n ќе го одредиме од условите $a^2k^2 + b^2 = n^2$. Од него наоѓаме:

$$n^2 = a^2k^2 + b^2 = 4\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{3}=\frac{16}{9}, \text{ односно } n_{1,2}=\pm\frac{4}{3}.$$

На крајот, најдените вредности за k и n ги заменуваме во $y = kx + n$, па наоѓаме дека постојат две такви тангенти на дадената елипса: $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, односно $x - 3y - 4 = 0$ и $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$, односно $x - 3y + 4 = 0$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја заемната положба на правата $x = 2$ и елипсата $x^2 + 4y^2 = 4$.

2. Одреди, каква положба има правата $y = 2x + 11$ спрема елипсата $7x^2+6y^2=1$.

3. Низ левиот фокус на елипсата $x^2 + 4y^2 = 64$ повлечена е тетива, која со позитивниот дел на Ox-оската гради агол 45°. Одреди ја должината на таа тетива.

4. Одреди ги координатите на пресечните точки на елипсата $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ со правата:

а) $y = 4x$; б) $x = 6$; в) $2x - y = 9$.

5. Одреди ги равенките на тангентите на елипсата $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, што се повлечени од точката $M(-6,3)$ кон неа.

6. Одреди ги равенките на тангентите на елипсата $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, што се нормални на правата $2x - y + 7 = 0$.

7. Пресметај ја должината на тетивата на елипсата $x^2 + 4y^2 = 25$, што ја образува правата $x + 2y - 7 = 0$ со неа.

8*. Елипса допира две прави: $9x + 20y - 75 = 0$ и $4x - 25 = 0$. Одреди ја равенката на елипсата и координатите на допирните точки.

9*. Низ десниот фокус на елипсата $16x^2 + 25y^2 = 400$ повлечена е права, која го преполовува негативниот дел на малата оска на елипсата. Одреди ја равенката на правата.

10*. Запиши го условот – правата во општ вид $Ax + By + C = 0$ е тангента на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

IV.15. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА НА ЕЛИПСАТА

1. Видовме дека правата $y = kx + n$ е тангента на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ако параметрите k, n, a^2 и b^2 го задоволуваат условот

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \tag{1}$$

Во тој случај системот равенки

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \wedge \quad y = kx + n \tag{2}$$

чие решавање се сведува на квадратната равенка

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0, \tag{3}$$

има единствено решение (x_1,y_1), што се координати на допирната точка M на тангентата $y = kx + n$.

Да ги одредиме координатите (x_1,y_1), на допирната точка M.

Апсцисата x_1 се добива како единствено решение (при (1)) на квадратната равенка (3), т.е.

$$x_1 = -\frac{kna^2}{n^2} = -\frac{ka^2}{n}.$$

Ординатата y_1 ја одредуваме со помош на правата $y = kx + n$, т.е.

$$y_1 = kx_1 + n = -\frac{k^2a^2}{n} + n = \frac{-k^2a^2+n^2}{n} = \frac{-k^2a^2+k^2a^2+b^2}{n} = \frac{b^2}{n}.$$

Значи, допирната точка има координати $M(-\frac{ka^2}{n}, \frac{b^2}{n})$.

Од $x_1 = -\frac{ka^2}{n}$ и $y_1 = \frac{b^2}{n}$ следува дека $n = \frac{b^2}{y_1}$ и $k = -\frac{nx_1}{a^2} = \frac{b^2}{y_1} \cdot (-\frac{x_1}{a^2}) = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, т.е.

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \tag{4}$$

Според тоа, равенката на тангентата $y = kx + n$ во точката $M(x_1,y_1)$ на елипсата $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ гласи

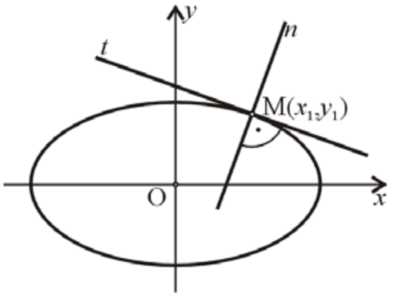
$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \cdot x + \frac{b^2}{y_1}. \tag{5}$$

Оваа равенка на тангентата добива многу попогоден вид, ако ја трансформираме како што следува:

$$a^2y_1y = -b^2x_1x + a^2b^2, \; b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

односно

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1. \tag{6}$$



црт. 37

Пример 48. Да ја составиме равенката на тангентата на елипсата $x^2 + 3y^2 = 4$ во точката $M(-1,1)$ од неа.

Решение. Пожелно е да се провери дали точката M лежи на елипсата: $(-1)^2 + 3 \cdot 1^1 = 4$. Ги одредуваме полуоските на елипсата $a^2 = 4$ и $b^2 = \frac{4}{3}$, потоа од (6) добиваме: $\frac{4}{3} \cdot (-1)x + 4 \cdot 1 \cdot y = 4 \cdot \frac{4}{3}$, односно $x - 3y + 4 = 0$. ♦

2. Нормала на елипсата во дадена точка од неа е права, што минува низ дадената точка и е нормална на тангентата на елипсата во таа точка (црт. 37).

Од (4) следува дека коефициентот на правецот k_n на нормалата на елипсата во точката $M(x_1, y_1)$ од неа, ќе биде:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \tag{6}$$

Според тоа, равенката на нормалата на елипсата во точката $M(x_1, y_1)$ од неа е:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)\,. \tag{7}$$

Пример 49. Да ја одредиме равенката на нормалата во точката $M(8,\ y_1 > 0)$ на елипсата $x^2 + 4y^2 = 100$.

Решение. Ординатата на точката M ја одредуваме од $64 + 4y_1^2 = 100$, од каде $y_1 = 3 > 0$. Дадената елипса има полуоски $a = 10$ и $b = 5$. Заменувајќи ги a и b, и координатите на точката M во (7), добиваме: $y - 3 = \frac{100 \cdot 3}{25 \cdot 8}(x - 8)$, односно $3x - 2y - 18 = 0$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја равенката на тангентата на елипсата $2x^2 + 8y^2 = 16$ во точката $M(2,\ y_1 < 0)$ од неа.

2. Одреди ја равенката на нормалата во точката $S(2,2)$ на елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$.

3. Одреди ја равенката на тангентата на елипсата $4x^2 + 25y^2 = 100$ во точката $M(3,\ y_1 < 0)$ од неа.

4. Одреди ги координатите на допирната точка, ако $x + 2y - 9 = 0$ е тангента на елипсата $9x^2 + 45y^2 = 405$.

5. Напиши ги равенките на тангентите на елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$ во нејзините пресечни точки со правата $3x + 2y = 10$.

6*. Покажи дека тангентите на елипсата, што се повлечени во крајните точки на кој било дијаметар, меѓусебе се паралелни.

7. Одреди ја равенката на нормалата во точка $M(x_1 > 0, -2)$ на елипсата $7x^2 + 3y^2 = 19$.

IV.16. ХИПЕРБОЛА, ЦЕНТРАЛНА РАВЕНКА НА ХИПЕРБОЛАТА

1. Хиперболата е помалку позната крива. Со неа си се сретнал кај графикот на обратната пропорционалност $y=\frac{k}{x}$, но таа е еден нејзин специјален случај.

Во општ случај хиперболата ја определуваме со следнава:

Дефиниција 3. *Хипербола* се вика множеството од сите точки во рамнината, такви што, за секоја од нив апсолутната вредност од разликата на растојанијата до две дадени фиксни точки од таа рамнина е константна.

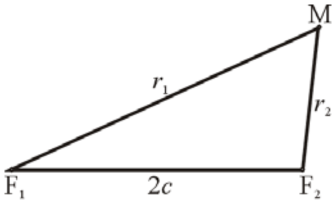
Дадените точки се викаат *фокуси на хиперболата,* и ги означуваме со F_1 и F_2, а растојанието меѓу нив, кое се означува со $2c$, се вика *фокусно растојание* (црт. 38).

Произволната точка од хиперболата ја означуваме со M. Растојанијата на точката M до фиксните точки F_1 и F_2 се викаат *фокусни радиуси* и се означуваат соодветно:

$$r_1=\overline{F_1M} \quad \text{и} \quad r_2=\overline{F_2M}\ .$$

Согласно дефиницијата на хиперболата, апсолутната вредност од нивната разлика $\left|\overline{F_1M}-\overline{F_2M}\right|$ е константна. Да ја означиме со $2a$ (a>0). Според тоа, условот – точката M да лежи на хиперболата, го изразуваме со равенството:

$$\left|\overline{F_1M}-\overline{F_2M}\right|=2a. \qquad (1)$$



црт. 38

Равенството (1), всушност, е равенка на хиперболата. Да го запишеме тоа во најпроста координатна форма. За таа цел, избираме правоаголен координатен систем, така што, апсцисната оска да минува низ фокусите F_1 и F_2, а ординатната оска да се совпаѓа со симетралата на отсечката F_1F_2 (црт. 39).

Во тој координатен систем фокусите ќе имаат координати $F_1(-c,\,0)$ и $F_2(c,\,0)$.

Нека $M(x,y)$ е која било точка од хиперболата. Согласно формулата за растојание меѓу две точки, за фокусните радиуси, добиваме:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{и} \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (2)$$

Според дефиницијата на хипербола, за секоја нејзина точка M важи:

$$\left|r_1-r_2\right|=2a\ . \qquad (3)$$

Ова равенство е потребен и доволен услов, дека точката $M(x,\,y)$ лежи на хиперболата. Да го докажеме тоа.

Нека $M(x,\,y)$ е произволна точка од хиперболата. Тогаш равенството (3), согласно (2), може да се запише вака:

$$\left|\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ \right|=2a. \qquad (4)$$

Ова равенство, всушност, е равенка на хиперболата во избраниот правоаголен координатен систем. Тоа може да се сведе во попрост вид, вака: Прво, равенството (4) го запишуваме без апсолутна вредност:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (5)$$

Всушност, добивме не една, туку две равенки, секоја од нив го изразува условот, точката M да лежи на хиперболата. Тоа покажува, дека хиперболата се состои од две гранки.

Понатаму од (5) добиваме: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ = $\pm 2a$ + $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Ги квадрираме двете страни и по мало средување, добиваме:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

Со повторно квадрирање и мало средување, имаме:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (6)$$

Бидејќи за хиперболата е $2a < 2c$, односно $a < c$, разликата $a^2–c^2$ е негативна.

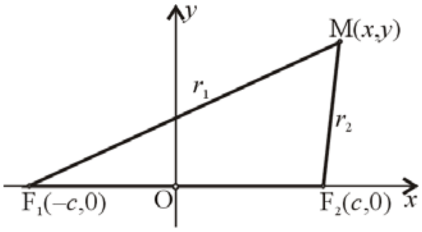
Ако ставиме $a^2–c^2 = –b^2$, односно ако $c^2–a^2 = b^2$, тогаш равенката (6) го добива видот $–b^2x^2 + a^2y^2 = –a^2b^2$, односно

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \,. \qquad (7)$$

Ако двете страни на равенката (7) ги поделиме со $a^2b^2 \neq 0$ таа може да се запише уште и во видот:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

Равенките (7) и (8) се најпрости равенки на хиперболата, и се викаат *централна* или *канонична равенка на хиперболата.*



црт. 39

Со тоа покажавме, дека координатите на произволна точка M од хиперболата ја задоволуваат равенката (7), односно (8), а може да се докаже и обратното: Ако точката $P(x, y)$ ја задоволува равенката (7), односно (8), тогаш таа лежи на хиперболата.

Пример 50. Да ја составиме равенката на хипеебола, ако се дадени: $a = 4$, $c = 5$.

Решение. Од $b^2 = c^2–a^2$ имаме $b = \sqrt{25-16} = 3$. Тогаш бараната равенка на хиперболата е $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, односно $9x^2 – 16y^2 = 144$. ♦

Пример 52. Да ги одредиме координатите на фокусите на хиперболата $x^2 – 8y^2 = 8$.

Решение: Од равенката на хиперболата $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$, наоѓаме: $a^2 = 8$ и $b^2 = 1$. Оттука $c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 1 = 9$, т.е. $c = 3$. Значи, фокусите на хиперболата имаат координати: $F_1(–3,0)$ и $F_2(3,0)$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на хиперболата, ако се дадени:

а) $a = 3$ и $b = \sqrt{6}$; б) $b = 1$ и $c = \sqrt{5}$.

2. Состави ја равенката на хиперболата, ако е дадено:

а) $c = 10$ и $a – b = 2$; б) $a + b = 5$ и $c = \sqrt{13}$.

3. Одреди ја равенката на хиперболата, чии фокуси имаат координати (± 4,0) и $2a = 6$.

4. Одреди ја равенката на хиперболата, што минува низ точката $M\,(2, \sqrt{3}\,)$ и $b = 3$.

5. Одреди ја ординатата на една точка од хиперболата $4x^2 - 6y^2 = 1$, ако нејзината апсциса е $x = \frac{5}{2}$.

6*. Одреди ја равенката на хиперболата, која минува низ точките $A(5,3)$ и $B(8,-10)$.

7*. Хипербола и елипса (или две хиперболи, односно елипси) се *конфокални,* ако тие имаат заеднички фокуси. Дадена е равенката на хиперболата $x^2 - y^2 = 8$. Одреди ја равенката на конфокалната хипербола со неа, која минува низ точката $T(5,3)$.

IV.17. ИСПИТУВАЊЕ НА ФОРМАТА НА ХИПЕРБОЛА. ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ НА ХИПЕРБОЛАТА

1. Нека е дадена хиперболата со нејзината канонична равенка:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

1°. Да ги одредиме прво координатите на пресечните точки на хиперболата (1) со координатните оски.

Знаеш, пресечните точки на хиперболата со Ox-оската, се точки што лежат на хиперболата и имаат ордината $y = 0$. Ако во равенката (1) ставиме $y = 0$, ќе добиеме $x = \pm a$. Значи, хиперболата ја сече Ox-оската во точките $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$.

Тие се викаат *темиња на хиперболата* (црт. 40).

За одредување на пресечните точки на хиперболата (1) со Oy-оската треба да се реши системот равенки:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \; x = 0. \qquad (2)$$

Ако во равенката на хиперболата ставиме x=0, ќе добиеме $y^2 = -b^2$. Тоа покажува дека системот (2) нема реални решенија, односно дека хиперболата (1) не ја сече Oy-оската.

2°. Забележуваме, во равенката на хиперболата (1) променливите x и y се наоѓаат само на парен степен – квадрати. Оттука следува, дека ако точката $T_1(x, y)$ лежи на хиперболата (1), тогаш на хиперболата ќе лежат и точките $T_1(-x, y)$, $T_2(x,-y)$ и $T_3(-x,-y)$. Тоа значи, дека точката $T_1(-x, y)$ е симетрична со точката T во однос на ординатната оска, точката $T_2(-x, y)$ е симетрична, пак, со $T(x, y)$ во однос на апсцисната оска, а точката $T_3(-x, -y)$ со точката $T\,(x, y)$ е централно симетрична во однос на координатниот почеток. Според тоа, хиперболата е крива, која е симетрична во однос на координатните оски (и Ox и Oy-оската) и во однос на координатниот почеток. Значи, таа има две оски на симетрија.

Оската на симетрија, која ја сече хиперболата се вика *реална оска на симетрија,* а оската на симетрија, која не ја сече хиперболата се вика *имагинарна оска на симетрија.* Пресекот на двете оски на симетрија се вика *центар на хиперболата.*

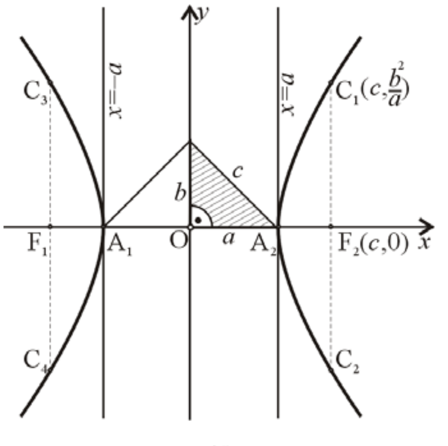
Фокусите F_1 и F_2 на хиперболата лежат на реалната оска. Отсечката A_1A_2 што ги врзува темињата на хиперболата, се вика *реална оска на хиперболата* и има должина $\overline{A_1A_2} = 2a$. Бројот a се вика *реална полуоска,* а бројот b ($b = \sqrt{c^2 - a^2}$) се вика *имагинарна полуоска на хиперболата.*

3°. За определување на областа на менување на променливата x, равенката (1) ќе ја решиме по променливата y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ . \qquad (3)$$

Равенката (3) покажува, дека променливата y добива реални вредности, само за вредностите на x, кои го задоволуваат условот: $x^2 - a^2 \geq 0$, односно $x^2 \geq a^2$, односно $|x| \geq a$ а тоа означува дека $x \leq -a$ или $x \geq a$.

Затоа, сите точки на хиперболата, освен темињата, се наоѓаат налево од правата $x = -a$ и надесно од правата $x = a$, а темињата A_1 и A_2 лежат на тие прави (црт. 40).



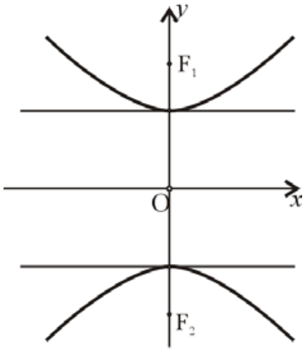
црт. 40

Според тоа, хиперболата има две гранки: *лева гранка* за точките кај кои е $x \leq -a$, и *десна гранка* за точките кај кои е $x \geq a$.

Од равенката (3) следува, дека со растење на апсолутната вредност на апсцисата x, апсолутната вредност на ординатата y на точките од хиперболата исто така, се зголемува. Тоа значи, дека гранките на хиперболата се простираат неограничено далеку налево и надесно од правите $x = -a$ и $x = a$, како и неограничено нагоре и надолу од апсцисната оска.

За $x = c$ и $x = -c$ од (3) добиваме: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \pm\frac{b^2}{a}$. Значи, точките $C_1(c, \frac{b^2}{a})$, $C_2(c, -\frac{b^2}{a})$, $C_3(-c, \frac{b^2}{a})$ и $C_4(-c, -\frac{b^2}{a})$ се две по две точки, кои лежат во пресеците на хиперболата и нормалите кон Ox-оската повлечени низ фокусите F_1 и F_2. Отсечката C_1C_2, од таа нормала има должина $\frac{2b^2}{a}$ и се вика *параметар на хиперболата.*

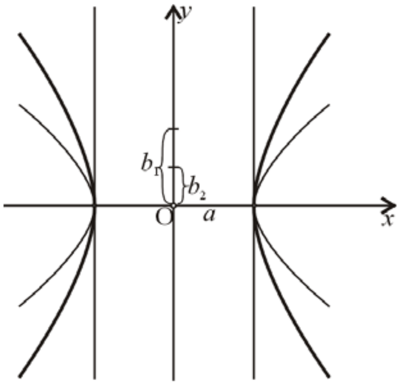
Забелешка. Хипербола, чии фокуси F_1 и F_2 лежат на Oy-оската има равенка $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, односно $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогаш Oy-оската е *реална оска,* а Ox-оската – *имагинарна оска* (црт. 41).



црт. 41

2. Ексцентрицитет на хиперболата. Да разгледаме две хиперболи со еднакви реални оски, но различни имагинарни оски, на пример, нека $b_1 > b_2$ (црт. 42).

Забележуваме, дека формата на хиперболата зависи од вредноста на односот $\frac{b}{a}$, и тоа: доколку тој е помал, дотолку хиперболата е позатворена, и обратно: доколку односот $\frac{b}{a}$ е поголем, дотолку гранките на хиперболата се поотворени (подалеку од Ox-оската) (црт. 42). Значи, односот $\frac{b}{a}$ ја карактеризира формата на хиперболата.



црт. 42

Но, бидејќи деленикот b на односот $\frac{b}{a}$ зависи од a и c, тогаш попогодно е наместо односот $\frac{b}{a}$ да се користи односот $\frac{c}{a}$, што ја карактеризира формата на хиперболата.

Односот $\frac{c}{a}$ од полуфокусното растојание и реалната полуоска на хиперболата се вика *ексцентрицитет на хиперболата* и се означува со $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Бидејќи кај хиперболата е $c > a$, затоа $\varepsilon > 1$. Но, кај хиперболата е $c^2 = a^2 + b^2$, па затоа за ε важи:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} \qquad (4)$$

Од формулата (4) гледаме: доколку ексцентрицитетот на хиперболата е поголем (при фиксно a), а дотолку е поголем и односот $\frac{b}{a}$, па со тоа хиперболата ќе биде поотворена, односно нејзините гранки се пооддалечени од Ox-оската.

Пример 52. Дадена е хиперболата $16x^2 - 9y^2 = 1$. Да ги одредиме:

а) полуоските, б) координатите на темињата и фокусите,

в) полупараметарот и ексцентрицитетот на хиперболата.

Решение. Ја доведуваме равенката во видот $\frac{x^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

а) Оттука $a = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$, $b = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

б) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Од овде $A_1(-\frac{1}{4}, 0)$, $A_2(\frac{1}{4}, 0)$, $F_1(-\frac{\sqrt{5}}{4}, 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{5}}{4}, 0)$.

в) $p = \frac{b^2}{a} = 1$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на хиперболата, ако се познати: $2c = 16$, $2b = 12$.

2. Состави ја равенката на хиперболата, ако се дадени реалната полуоска $a = 5$ и ексцентрицитетот $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

3. Состави ја равенката на хиперболата, ако се дадени:

а) $c = 3$ и $\varepsilon = 1{,}5$; б) $c = \sqrt{17}$, $b = 4$.

4. Состави ја равенката на хиперболата, ако растојанието на едно нејзино теме до фокусите на хиперболата е еднакво на 1 и 9.

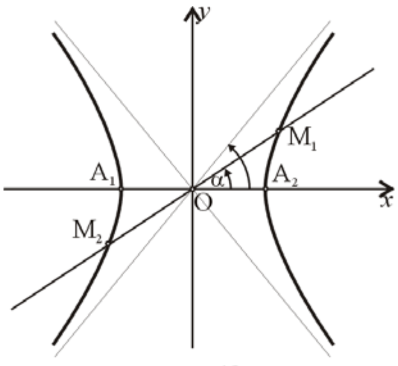
5. Одреди ги ексцентрицитетот и координатите на фокусите на хиперболата: а) $9x^2 - 16y^2 = 144$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$.

6. Хипербола, кај која е $b = a$, се вика *рамнострана хипербола*. Одреди го ексцентрицитетот на рамностраната хипербола.

7. Одреди ја равенката на рамнострана хипербола, која минува низ точката $T(3, -1)$.

8. Одреди ги координатите на пресечните точки (ако имаат) на хиперболата $4x^2-y^2=7$ и правата $y=\frac{3}{2}x$.

IV.18. АСИМПТОТИ НА ХИПЕРБОЛАТА



црт. 43

Да ја разгледаме заемната положба на хиперболата

$$b^2x^2 - a^2y^2= a^2b^2 \tag{1}$$

со правата

$$y = kx, \tag{2}$$

која минува низ координатниот почеток, а зависно од промената на коефициентот на правецот k, односно од аголот α што правата го гради со позитивната насока на Ox-оската. Кога y во (1) го замениме со kx, добиваме: $b^2x^2 - a^2(kx)^2 = a^2b^2$, односно $(b^2 - a^2k^2)x^2 = a^2b^2$, а оттука

$$x_{1,2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}} \tag{3}$$

па со замена во (2) се добива: $y_{1,2}=\pm\frac{kab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}$. Гледаме, ако поткореновиот израз $b^2 - a^2k^2$ е позитивен број, тогаш правата (2) има две заеднички точки со хиперболата (1), а ако е $b^2-a^2k^2 < 0$, тогаш тие немаат заеднички точки.

Условот $b^2 - a^2k^2 > 0$ може да се запише вака $k^2<\frac{b^2}{a^2}$, односно $|k|<\frac{b}{a}$ (бидејќи $a > 0$ и $b > 0$).

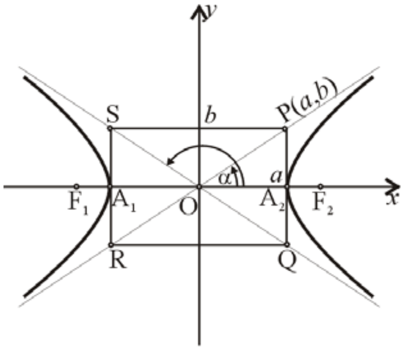
Значи, правата $y = kx$ при $|k|<\frac{b}{a}$ секогаш има две заеднички точки со хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Сега да претпоставиме, дека апсолутната вредност на k постепено расте и се приближува до вредноста на $\frac{b}{a}$. Тогаш разликата $b^2 - a^2k^2$ се намалува и се стреми кон нула. А кога изразот $b^2-a^2k^2$ неограничено се намалува, тогаш вредноста на дропката (3) неограничено расте (бидејќи броителот ab е константен). Со други зборови, кога разликата $b^2-a^2k^2$ се стреми кон нула (односно кога $|k|$ се стреми кон $\frac{b}{a}$), тогаш x (а со тоа и y) неограничено расте, што значи дека пресеците M_1, M_2 неограничено се оддалечуваат долж гранките на хиперболата (црт. 43).

Правата $y = kx$, кога $k=\pm\frac{b}{a}$, се вика *асимптота на хиперболата.*

Значи, хиперболата (1) има две асимптоти:

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x. \qquad (4)$$



црт. 44

Асимптотите можат да се искористат за поточно цртање на хиперболата. Да го конструираме правоаголникот *PQRS* (црт. 44), чии страни се паралелни со координатните оски и имаат должини 2*a* и 2*b*. Бидејќи коефициентите на правци на неговите дијагонали:

$$k_1 = \text{tg}\ \alpha = \frac{b}{a},\quad k_2 = \text{tg}\ (\pi - \alpha) = -\ \text{tg}\ \alpha = -\frac{b}{a},$$

се исти со коефициентите на правците на асимптотите на хиперболата, тоа значи, дека со продолжување на дијагоналите на правоаголникот *PQRS* ги добиваме и асимптотите на хиперболата (црт. 44). За цртање на хиперболата останува уште да се нацртаат обете симетрични гранки, кои постепено им се приближуваат на асимптотите.

Пример 53. Да ги составиме равенките на асимптотите на хиперболата $9x^2 - y^2 = 9$.

Решение. Од равенката на хиперболата наоѓаме: $a = 1$ и $b = 3$. Според тоа, равенките на асимптотите на хиперболата се: $y=\frac{3}{1}x=3x$ и $y = -3x$. ♦

Пример 54. Да ја составиме равенката на хиперболата, ако се дадени равенките на нејзините асимптоти $2x + 3y = 0$ *и* $2y - 3y = 0$ и реалната полуоска $a = 6$.

Решение. Знаеме, асимптотите имаат коефициент на правец $k_{1,2}=\pm\frac{b}{a}$, а дадените асимптоти имаат коефициент на правец $k_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$. Од условот $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ и $a = 6$, ја наоѓаме имагинарната полуоска $b=\frac{2}{3}a=4$. Според тоа, хиперболата има равенка $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$, односно $4x^2 - 9y^2 = 144$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги равенките на асимптотите на рамнострана хипербола.

2. Дадена е хиперболата $9x^2 - 16y^2 = 144$. Одреди ги координатите на темињата и фокусите, ексцентрицитетот и равенките на асимптотите на хиперболата.

3. Состави равенка на хипербола, ако се познати равенките на асимптотите $y=\pm\frac{12}{5}x$ и $b = 24$.

4. Левиот фокус на хиперболата се наоѓа во точката (–5,0), а десното теме – во точката (3,0). Состави ја равенката на хиперболата.

5. Состави ја равенката на хипербола, ако се дадени равенките на асимптотите $y = \pm 2x$ и фокусното растојание $2c = 10$.

6. Одреди, при кој услов асимптотите на хиперболата се нормални една на друга.

7. Напиши ги равенките на паралелните прави, кои го ограничуваат делот од рамнината, кој не содржи ниедна точка од хиперболата $4x^2 - 9y^2 = 36$, освен нејзините темиња.

8. Одреди ја равенката на хиперболата, која има асимптоти $y=\pm\frac{3}{4}x$ и минува низ точката *M*(2,1).

9. Одреди го ексцентрицитетот и равенките на асимптотите на хиперболата $4x^2 - 9y^2 = 36$.

10. Одреди ги полуоските на хиперболата знаејќи ги равенките на асимптотите $y = \pm\frac{5}{3}x$ и една нејзина точка $M(6,9)$.

11*. Одреди го ексцентрицитетот на хиперболата, ако знаеш дека аголот меѓу асимптотите е: а) 90°; б) 60°.

12. Испитај, дали имаат заеднички точки хиперболата $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ и правата $2x - y - 3=0$.

IV.19. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ХИПЕРБОЛА

Сега да ја испитаме заемната положба на дадена хипербола $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и правата $y = kx + n$, кога $n \neq 0$.

За таа цел, треба да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = kx + n \end{cases} \qquad (1)$$

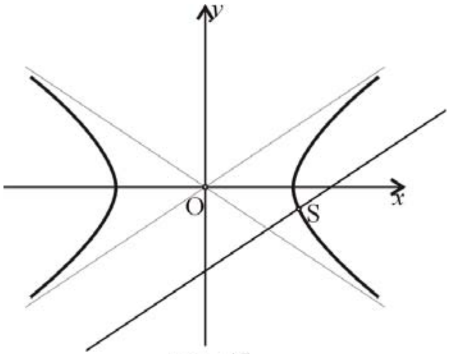
Со замена на y од втората во првата равенка на системот (1), ја добиваме равенката:

$$(b^2 - a^2k^2)\,x^2 - 2a^2knx - a^2(b^2 + n^2) = 0 \qquad (2)$$

Зависно од коефициентот $b^2 - a^2k^2$, разликуваме три случаи:

1°. Ако $b^2 - a^2k^2 = 0$, односно $|k| = \frac{b}{a}$, тогаш равенката (2) е линеарна и од неа за x добиваме:

$$x = -\frac{a^2(b^2+n^2)}{2a^2kn} = -\frac{b^2+n^2}{2kn},$$



црт. 45

а од втората равенка на системот (1), за y наоѓаме:

$$y = kx + n = -\frac{b^2+n^2}{2n} + n = \frac{-b^2-n^2+2n^2}{2n} = \frac{n^2-b^2}{2n}.$$

Според тоа, правата $y = kx + n$ при $|k| = \frac{b}{a}$ и $n \neq 0$ секогаш има една заедничка точка со хиперболата, односно таа ја сече само едната гранка (левата или десната) на хиперболата (црт. 45).

Пример 55. Да ја испитаме заемната положба на хиперболата $x^2 - 9y^2 = 9$ и правата $x - 3y - 1 = 0$.

Решение. Од равенката на хиперболата имаме: $a = 3$, $b = 1$, а од равенката на правата: $k = \frac{1}{3}$ и $n = -\frac{1}{3}$. Бидејќи $k = \frac{1}{3}$ е еднаков со $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, затоа ќе биде $|k| = \frac{b}{a}$. Значи, правата ја сече едната гранка на хиперболата во една точка $S(5, \frac{4}{3})$. Провери! ♦

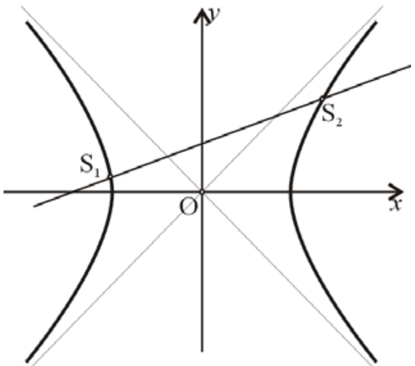
Ако пак, $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, односно ако $|k| \neq \frac{b}{a}$, тогаш равенката (2) е квадратна по однос на x и еквивалентна е со:

$$x^2 - \frac{2a^2kn}{b^2-a^2k^2} \cdot x - \frac{a^2(b^2+n^2)}{b^2-a^2k^2} = 0\,, \tag{3}$$

од каде $x_{1,2} = \frac{a^2kn \pm \sqrt{b^2-a^2k^2+n^2}}{b^2-a^2k^2}$. Забележуваме, квадратната равенка (2), односно (3) има дискриминанта:

$$D = b^2 - a^2k^2 \; + n \tag{4}$$

2°. Ако $b^2 - a^2k^2 > 0$, односно, ако $|k| < \frac{b}{a}$, тогаш дискриминантата (4) е позитивна, а тоа значи дека равенката (3) има два реални корена x_1 и x_2. Од друга страна пак, бидејќи слободниот член на квадратната равенка (3) е негативен, од него согласно второто Виетово правило ($x_1 \cdot x_2 = q < 0$) заклучуваме, дека корените x_1 и x_2 имаат спротивни знаци.



црт. 46

Тие вредности за x_1 и x_2 ги заменуваме во равенката на правата, па ги добиваме соодветните вредности y_1 и y_2.

Според тоа, правата $y=kx+n$ при $|k| < \frac{b}{a}$, односно $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$, секогаш има две заеднички точки (x_1,y_1), (x_2,y_2) со хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = ab^2$, а бидејќи нивните апсциси x_1 и x_2 имаат спротивни знаци, затоа тие заеднички точки се наоѓаат од различни страни на Oy-оската, па затоа правата и двете гранки на хиперболата ги сече во по една точка (црт. 46).

Пример 56. Да ја испитаме заемната положба на хиперболата $7x^2 - 3y^2 = 148$ и правата $x - y - 8 = 0$.

Решение. Од равенката на хиперболата имаме $a^2 = \frac{148}{7}$, $b^2 = \frac{148}{3}$, а од правата: $k = 1$ и $n = -8$. Бидејќи $k^2 = 1$, а $\frac{b^2}{a^2} = \frac{7}{3}$, затоа ќе биде $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$. Значи, правата ги сече двете гранки на хиперболата во по една точка.

Ако го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} 7x^2 - 3y^2 = 148 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases}$$

ќе ги одредиме и координатите на пресечните точки $S_1(-17,-25)$ и $S_2(5,-3)$. ♦

3°. Ако $b^2 - a^2k^2 < 0$, односно $|k| > \frac{b}{a}$, тогаш за дискриминантата (4) на квадратната равенка (3) постојат три можности: $D > 0$, $D = 0$, или $D < 0$.

Според тоа, при $|k| > \frac{b}{a}$, зависно од знакот на дискриминантата D, ќе разликуваме три подслучаи:

1) Ако $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 > 0$, тогаш квадратната равенка (3) ќе има два реални корена и x_1 и x_2, а со тоа и системот (1) ќе има две решенија (x_1, y_1), (x_1, y_2).

Бидејќи при $b^2 - a^2k^2 < 0$ знакот на слободниот член на квадратната равенка (3) е позитивен, затоа корените x_1 и x_2 ќе имаат еднакви знаци. А тоа значи, дека заедничките точки на хиперболата и правата се наоѓаат на иста страна од Oy-оската, односно дека правата ја сече во две точки само едната гранка (или левата или десната) на хиперболата (права p на цртеж 47).

Според тоа, ако $|k| > \frac{b}{a}$ и $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 > 0$, тогаш правата $y = kx + n$ ја сече во две точки само едната гранка на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Пример 57. Да ја испитаме заемната положба на хиперболата $x^2 - y^2 = 64$ и правата $3x - y = 36$.

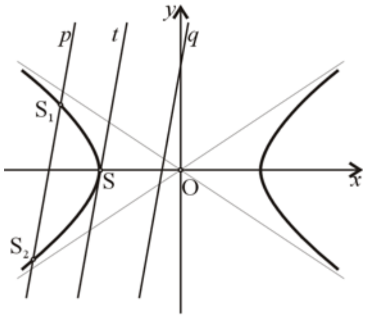
Решение: Од равенката на хиперболата имаме: $a^2 = b^2 = 64$, а од равенката на правата: $k = 3$ и $n = -36$. Тие ги задоволуваат условите $|k| > \frac{b}{a}$ и $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 > 0$. Провери. Според тоа, правата ја сече само едната гранка на хиперболата во две точки. Ако сакаме да ги одредиме координатите на пресеците, го решаваме системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 64 \\ 3x - y = 36 \end{cases},$$

па наоѓаме $S_1(10,-6)$, $S_2(17,15)$. ♦

2) Ако $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 = 0$, тогаш квадратната равенка (3) има еден двократен реален корен $x_1 = x_2 = \frac{a^2kn}{b^2 - a^2k^2}$, па од $y = kx + n$ добиваме $y_1 = y_2 = kx_1 + n$.

Тоа значи, дека заедничките точки S_1 и S_2 на хиперболата и правата се сливаат во една точка $S_1 \equiv S_2 \equiv S$, па секантата p станува *тангента* t кон едната гранка на хиперболата (црт. 47).



црт. 47

Според тоа, ако $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 = 0$, тогаш правата $y = kx + n$ е тангента на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Нивната заедничка точка се вика *допирна точка* на тангентата и хиперболата.

Равенството $b^2 = a^2k^2 - b^2$, односно

$$n^2 = a^2k^2 - b^2 \qquad (5)$$

претставува и се вика *услов да правата $y = kx + n$ е тангента на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.*

Пример 58. Да ги одредиме равенките на тангентите на хиперболата $4x^2 - y^2 = 7$, што се нормални на правата $3x + 8y = 9$.

Решение. Дадената права има коефициент на правец $k_1 = -\frac{3}{8}$, што значи, дека бараните тангенти треба да имаат коефициент на правец $k_2 = \frac{8}{3}$. Од равенката на хиперболата ги наоѓаме полуоските: $a^2 = \frac{7}{4}$ и $b^2 = 7$. Бидејќи сакаме правата $y = kx + n$ со $k = \frac{8}{3}$ да биде тангента на хиперболата, тогаш параметрите a^2, b^2, k и n треба да го задоволуваат условот (5). Од него наоѓаме: $n^2 = \frac{7}{4} \cdot (\frac{8}{3})^2 - 7 = \frac{49}{9}$, а оттука $n_{1,2} = \pm\frac{7}{3}$. Според тоа, бараните тангенти ќе имаат равенки: $y = \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$ и $y = \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}$, односно $8x - 3y + 7 = 0$ и $8x - 3y - 7 = 0$. ♦

3) Ако $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 < 0$, тогаш квадратната равенка (3) нема реални корени. Тоа значи, дека апсцисите x_1, x_2, а исто и ординатите $y_1 = y_2$ се имагинарни броеви, од каде следува дека хиперболата и правата немаат заеднички точки. Значи, правата не ја сече, ниту допира хиперболата (права q на црт. 47).

Според тоа, ако $D = b^2 - a^2k^2 + n^2 < 0$, тогаш $y = kx + n$ правата и хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ немаат заеднички точки.

На пример, правата $y = 4x + 3$ (за која е $k = 4$ и $n = 3$) и хиперболата $16x^2 - 5y^2 = 80$ (за која е $a^2 = 5$ и $b^2 = 16$) немаат заеднички точки, бидејќи нивните параметри го задоволуваат условот $b^2 - a^2k^2 + n^2 < 0$, т.е. $16 - 5 \cdot 16 + 9 < 0$.

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја заемната положба на правата $y = 2x + 3$ и хиперболата $x^2 - 4y^2 = 4$.

2. Испитај, каква заемна положба имаат правата $5x - 3y = -32$ и хиперболата $x^2 - y^2 = 64$.

3. Покажи дека правата $4x - 3y = 7$ е тангента на хиперболата $x^2 - y^2 = 7$ и одреди ја допирната точка.

4. Одреди ги равенките на тангентите што се повлечени од точката $M(-2,-5)$ кон хиперболата $x^2 - y^2 = 7$.

5. Одреди ги равенките на тангентите на хиперболата $4x^2 - 3y^2 = 12$, кои се паралелни со правата $4x - 2y - 5 = 0$.

6. Одреди ги пресечните точки (ако има такви) на хиперболата $3x^2 - 5y^2 = 15$ со правата: а) $x - y + 5 = 0$; б) $2x - y + 3 = 0$; в) $2x + y - 18 = 0$.

7*. Дадени се асимптотите $y = \pm\frac{1}{2}\cdot x$ на хиперболата и равенката на една нејзина тангента $5x - 6y - 8 = 0$. Состави ја равенката на хиперболата.

8. Каква положба има хиперболата со права, која е паралелна со една нејзина асимптота?

9. Каква положба има правата $y = kx + n$ со хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, ако а) $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$; б) $k > \frac{b}{a}$; в) $k < \frac{b}{a}$; г) $k = \pm\frac{b}{a}$.

10*. Низ точката $M(3,-1)$ да се повлече онаа тетива на хиперболата, која е преполовена со таа точка.

IV.20. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА НА ХИПЕРБОЛАТА

1. Нека е дадена хиперболата

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

и правата

$$y = kx + n\,. \tag{2}$$

Видовме, правата (2) е тангента на хиперболата (1) во точката $M(x_1,y_1)$ од неа, ако и само ако е исполнет условот

$$n^2=a^2k^2-b^2. \qquad (3)$$

Равенката на тангентата на хиперболата во допирната точка $M(x_1, y_1)$ ја изведуваме на сличен начин како и равенката на тангентата на елипсата во допирната точка.

Прво, ги одредуваме координатите на допирната точка M.

Ако е исполнет условот (3), тогаш дискриминантата на квадратната равенка $(b^2-a^2k^2)\,x^2-2a^2\,knx-a^2\,(b^2+n^2)=0$, $D=0$, па добиваме

$$x_1=\frac{kna^2}{b^2-a^2k^2}=\frac{kna^2}{-n^2}=-\frac{ka^2}{n},$$

а од $y=kx+n$ имаме:

$$y_1=kx_1+n=k(-\frac{ka^2}{n})+n=-\frac{k^2a^2}{n}+n=\frac{-k^2a^2+n^2}{n}=\frac{-k^2a^2+a^2k^2-b^2}{n}=-\frac{b^2}{n}.$$

Значи, допирната точка M има координати $M(-\frac{ka^2}{n},-\frac{b^2}{n})$.

Потоа од $y_1=-\frac{b^2}{n}$ следува $n=-\frac{b^2}{y_1}$, а од $x_1=-\frac{ka^2}{n}$ добиваме $ka^2=-nx_1$, односно $k=-(-\frac{b^2}{y_1})\cdot\frac{x_1}{a^2}=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$, т.е.

$$n=-\frac{b^2}{y_1}, \text{ а } \quad k_t=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}. \qquad (4)$$

Според тоа, равенката $y = kx + n$ на тангентата во точката $M(x_1,y_1)$ на хиперболата $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, гласи

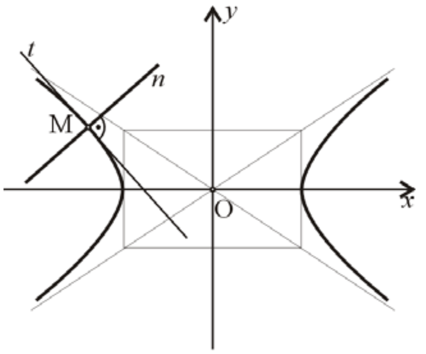
$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x-\frac{b^2}{y_1}, \qquad (5)$$

односно

$$b^2x_1x-\alpha^2y_1y=a^2b^2, \qquad (6)$$

т.е.

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad (7)$$



црт. 48

Пример 59. Да ја одредиме равенката на тангентата на хиперболата $x^2-4y^2=64$ во точката $M(10,3)$ од неа.

Решение. Координатите на допирната точка M ги заменуваме во равенката $x_1x-4y_1y=64$, па бараната тангента на хиперболата ќе биде $10x-12y=64$, односно $5x-6y=32$. ♦

2. Нормала на хиперболата во дадена точка од неа (како и кај кружницата и елипсата) е права, што минува низ дадената точка и е нормална на тангентата на хиперболата во таа точка (црт. 48).

Од (4) следува дека коефициентот на правецот x_n на нормалата на хиперболата во точката $M(x_1, y_1)$ од неа, ќе биде

$$k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}.$$

Според тоа, равенката на нормалата на хиперболата (1) во точката M од неа е:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)\,. \tag{8}$$

Пример 60. Да ја одредиме равенката на нормалата во точката M(2,3) на хиперболата $4x^2 - y^2 = 7$.

Решение. За одредување на равенката на нормалата (8) освен координатите на точката M, потребни се уште и полуоските на хиперболата. За таа цел, дадената равенка на хиперболата ја доведуваме во видот $\frac{x^2}{\frac{7}{4}} - \frac{y^2}{7} = 1$, од каде $a^2 = \frac{7}{4}$ и $b^2 = 7$.

На крај од (8) ја добиваме равенката на нормалата: $y - 3 = -\frac{\frac{7}{4}\cdot 3}{7\cdot 2}(x - 2)$ односно

$$3x + 8y - 18 = 0.\ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја равенката на тангентата на хиперболата $7x^2 - 9y^2 = 63$ во точката $T(x_1 < 0,0)$ од неа.

2. Одреди ја равенката на нормалата на хиперболата $x^2 - y^2 = 16$ во точката $M(5,-3)$ од неа.

3. Напиши ја равенката на тангентата на хиперболата $4x^2 - 6y^2 = 1$ во точката $M(\frac{5}{2},2)$ од неа.

4. Состави ја равенката на тангентата на хиперболата $4x^2 - 5y^2 = 20$ во допирната точка $(5, -4)$.

5. Правата $8x - 3x = 7$ е тангентата на хиперболата $4x^2 - y^2 = 7$. Одреди ги координатите на допирната точка.

6. Состави ја равенката на нормалата на хиперболата $x^2 - 4y^2 = 64$ во точката $M(10, y < 0)$.

7. Во точката $M(3, y > 0)$ од хиперболата $7x^2 - 3y^2 = 15$ повлечени се тангента и нормала на хиперболата. Одреди ги нивните равенки.

8. Одреди ја равенката на нормалата на хипеерболата $3x^2 - y^2 = 11$, ако е дадена равенката на тангентата $9x - 4y = 11$ на хиперболата во истата точка.

9. Испитај, дали правата $4x - 3y = 7$ е тангента на хиперболата $x^2 - y^2 = 7$ и ако е тангента, одреди ги координатите на допирната точка и равенката на нормалата во таа точка.

IV.21. ПАРАБОЛА, РАВЕНКА НА ПАРАБОЛАТА

1. Темена равенка на парабола. Параболата ти е добро позната крива. Знаеш, графикот на квадратната функција е парабола. Параболата, како крива од втор ред, во аналитичката геометрија ја определуваме вака:

Дефиниција 4. *Парабола* се вика множеството од сите точки во рамнината, такви што, секоја од нив е на исто растојание од една фиксна точка и една фиксна права од таа рамнина, која не минува низ дадената точка.

Дадената фиксна точка се вика *фокус на параболата,* и се означува со F, а дадената фиксна права се вика *директриса* и се означува со d. Растојанието од фокусот до директрисата се вика *параметар на параболата* и се означува со p.

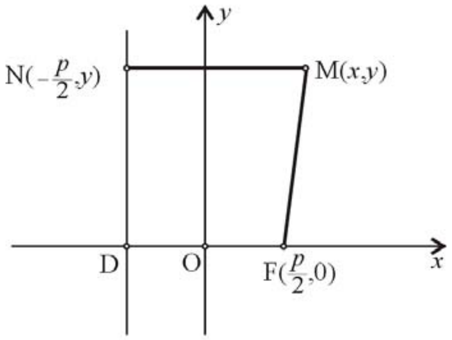
Со цел, равенката на параболата да биде што е можно во попрост вид, за апсцисна оска ја избираме правата што минува низ фокусот F и е нормала на директрисата d. Пресекот на апсцисната оска и директрисата да го означиме со D, и за позитивна насока на апсцисната оска да ја земеме насоката на полуправата DF. За ординатна оска на координатниот систем да ја избереме симетралата на отсечката DF и да ја насочиме како на цртежот 49. Во така избраниот координатен систем, фокусот ќе има координати $F(\frac{p}{2},0)$, а директрисата ќе има равенка $x=-\frac{p}{2}$, односно $x+\frac{p}{2}=0$. Нека $M(x,y)$ е која било точка од горното множество точки (т.е. параболата). Од точката M да ја повлечеме нормалата MN на директрисата d, каде N е пресекот на таа нормала со d. Според тоа, точката N има координати $(-\frac{p}{2},y)$.

Согласно дефиницијата на параболата, точката M ќе лежи на параболата, ако и само ако важи равенството:

$$\overline{MN}=\overline{MN}. \qquad (1)$$

Со примена на формулата за растојание меѓу две точки, равенството (1) го запишуваме во координатна форма:

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}. \qquad (2)$$



црт. 49

Добиената равенка е равенка на параболата во избраниот координатен систем. Таа може да се упрости. Кога ги квадрираме нејзините страни (кои се позитивни), ја добиваме еквивалентната равенка

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2,$$

односно $x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$, или конечно:

$$y^2 = 2px. \qquad (3)$$

Равенката (3) се вика *канонична* или *темена равенка на параболата.*

Пример 61. Да ја составиме равенката на параболата, ако нејзиниот фокус има координати $F(3,0)$.

Решение. Параметарот p на праболата го наоѓаме од апсцисата на F. Така од $\frac{p}{2}=3$ имаме $p = 6$.

Според тоа, параболата има равенка $y^2 = 12x$. ♦

Пример 62. Да ја одредиме равенката на параболата, која минува низ точката $A(3,6)$.

Решение. Бидејќи точката A лежи на параболата, затоа нејзините координати ќе ја задоволуваат равенката $y^2 = 2px$. Така од $36 = 6p$ го наоѓаме параметарот $p = 6$ на параболата.

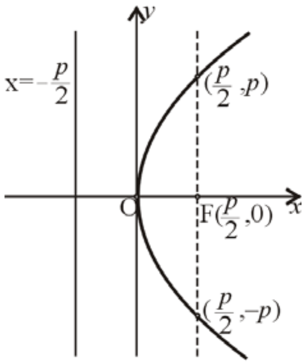
Според тоа, параболата има равенка $y^2 = 12x$. ♦

2. Испитување на формата на параболата. Тоа го правиме вака:

1°. Гледаш, равенката $y^2 = 12px$ не содржи слободен член, што значи таа минува низ координатниот почеток.

2°. Исто така, забележуваш дека променливата влегува во равенката само на квадрат – парен степен. Тоа покажува: ако координатите на точката $M(x, y)$ ја задоволуваат равенката на параболата, тогаш и координатите на точката $M(x_1,–y)$ ќе ја задоволуваат неа. Според тоа, параболата е симетрично поставена во однос на Ox-оската.

Значи, параболата има една *оска на симетрија* – Ox-оската. Пресекот на параболата со нејзината оска на симетрија, се вика *теме на параболата.* Од досега кажаното следува, дека темето на параболата е во средината меѓу фокусот и нејзината директриса. Во избраниот координатен систем, темето на параболата се совпаѓа со координатниот почеток.



црт. 50

3°. Да ја решиме равенката на параболата по променливата x:

$$x = \frac{y^2}{2p}. \qquad (1)$$

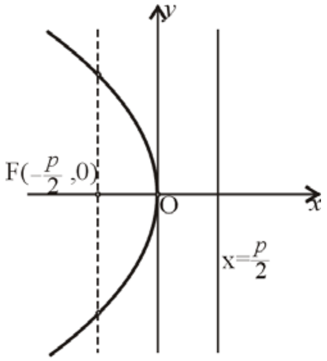
Бидејќи параметарот p секогаш е позитивен број ($p > 0$), затоа апсцисите на сите точки на параболата се ненегативни, т.е. $x \geq 0$. А исто и фокусот има позитивна апсциса $F(\frac{p}{2},0)$. Затоа можеме да кажеме: сите точки на параболата, освен темето, лежат на иста страна од Oy-оската каде што се наоѓа и фокусот.

4°. Од равенката на параболата следува, дека при растење на апсцисата x од 0 до бесконечност и ординатата по апсолутна вредност расте од 0 до бесконечност (црт. 50).

При цртањето на дадена парабола потребно е, поради поголема точност, да се конструираат и неколку нејзини точки. Еве две такви точки. За $x = \frac{p}{2}$ имаме

$$y = \pm\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = \pm p\text{, т.е. } (\frac{p}{2}, p) \text{ и } (\frac{p}{2}, -p)$$

се две точки од параболата (црт. 50).



црт. 51

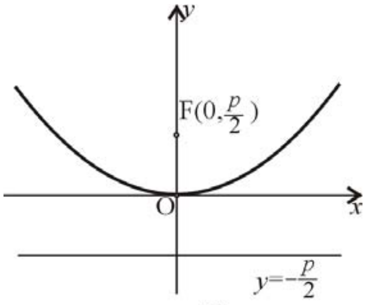
5°. Ако фокусот на параболата го земеме на негативниот дел од Ox-оската во точката $F(-\frac{p}{2},0)$, а директриса да е правата $x - \frac{p}{2} = 0$, тогаш равенката на параболата ќе гласи:

$$y^2 = -2px. \qquad (2)$$

Во тој случај, целата парабола е расположена налево од Oy-оската (освен темето, што се наоѓа во координатниот почеток) (црт. 51).

6°. Ако фокусот на параболата лежи на Oy-оската во точката $F(0,\frac{p}{2})$, а директрисата е паралелна со Ox-оската и има равенка $y = -\frac{p}{2}$, тогаш равенката на параболата ќе го добие видот.

$$x^2 = 2py. \qquad (3)$$



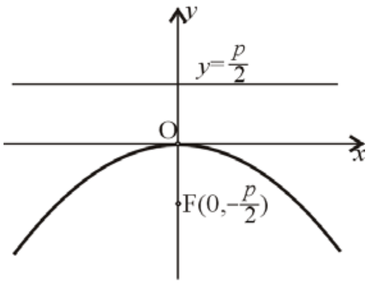
црт. 52

Во тој случај, целата парабола се наоѓа над апсцисната оска (освен темето, кое лежи во координатниот почеток), и симетрична е во однос на ординатната оска (црт. 52).

Бидејќи равенката на параболата (3) може да се запише и во видот:

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2 \qquad (4)$$

затоа, станува јасно дека параболата со равенка (4), всушност, претставува график на квадратната функција: $y = ax^2$, каде $a = \frac{1}{2p} > 0$, што е добро познато од минатата година.



црт. 53

7°. Ако, пак, фокусот на параболата го земеме на *Oy*-оската во точката $F(0,-\frac{p}{2})$, а директриса да е правата $y = \frac{p}{2}$, тогаш равенката на параболата ќе биде:

$$x^2 = -2py, \qquad (5)$$

односно $y = ax^2$, каде што

$$a = -\frac{1}{2p} < 0\,. \qquad (6)$$

Во тој случај, параболата се наоѓа под апсцисната оска (освен темето) и симетрична е во однос на *Oy*-оската (црт. 53).

Пример 63. Да ја составиме равенката на параболата, чија оска на симетрија се совпаѓа со *Ox*-оската, а фокусот има координати $F(-\frac{p}{2},0)$ *и* $p = 6$.

Решение. Фокусот лежи налево од *Oy*-оската, па и параболата ќе се наоѓа налево од *Oy*-оската. Нејзината равенка ќе гласи: $y^2 = -2 \cdot 6 \cdot x$, т.е. $y^2 = -12x$. ♦

Пример 64. Дадена е равенката на параболата $x^2 = 8y$. Да ги одредиме координатите на нејзиниот фокус и директрисата.

Решение. Од $2p = 8$ го добиваме параметарот $p = 4$ на дадената парабола. Од равенката на параболата гледаме, нејзината оска на симетрија се совпаѓа со *Oy*-оската, а параболата и фокусот се наоѓаат над апсцисната оска. Според тоа, фокусот ќе има координати $F(0,2)$, а нејзината директриса е правата $y = -2$.

ЗАДАЧИ

1. Состави ја равенката на параболата, чија директриса е правата $x + 5 = 0$.

2. Одреди ја равенката на директрисата и координатите на фокусот на параболата, чија равенка е $y^2 = 15x$.

3. Состави ја равенката на параболата, чија директриса е правата:

а) $x - 2 = 0$; б) $x + 3 = 0$; в) $y - 4 = 0$.

4. Дадена е равенката на параболата: а) $y^2 = 4x$; б) $x^2 = 5y$; в) $x^2 = -4y$.

Одреди ги координатите на нејзиниот фокус.

5. Состави ја равенката на параболата, чие теме е во координатниот почеток, а фокусот има координати: а) $F\,(4{,}0)$; б) $F(0,\frac{3}{4})$; в) $F\,(-3{,}0)$; г) $F(0,-1)$.

6. Одреди ги параметарот, фокусот и директрисата на параболата, чија равенка е:

а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = -x$; в) $x^2 = 3y$.

7. Одреди ја ординатата на точката $M\,(4,\, y > 0)$ од параболата $y^2 = 9x$.

8. Состави ја равенката на параболата, чие теме е во координатниот почеток, фокусот лежи на Oy-оската и минува низ точката $M(3{,}6)$.

9. Одреди ја равенката на параболата, чие теме лежи во координатниот почеток, ако е позната равенката на нејзината директриса: а) $x = 3$; б) $y = -4$; в) $x = -5$.

10. Која точка на параболата: а) $y^2 = 2x$; б) $x^2 = -3y$, има еднакви координати?

11. Одреди ја точката M од параболата $y^2 = 8x$, која е на растојание 4 од директрисата.

12. Одреди ги координатите на пресечните точки (ако има такви) на параболата $y^2 = 9x$ и правата $3x + y - 6 = 0$.

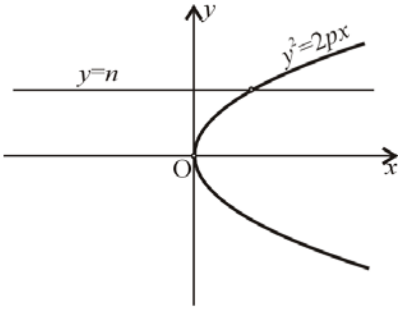
IV.22. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ПАРАБОЛА

Нека се дадени парабола со равенката $y^2 = 2px$ и права со равенката $y = kx + n$. За да утврдиме каков заемен однос имаат параболата и правата, треба да ги најдеме координатите на нивните заеднички точки (ако има такви), а тоа го правиме кога ќе го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = kx + n \end{cases}. \qquad (1)$$

Во првата равенка y го заменуваме со $kx + n$ и ја добиваме равенката: $(kn + n)^2 = 2px$, односно

$$k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0. \qquad (2)$$



црт. 54

Ако е $k = 0$, тогаш равенката (2) е линеарна и ни ја дава апсцисата на пресечната точка на правата $y = n$ со параболата $y^2 = 2px$. Значи, права што е паралелна со оската на параболата, со неа има само една пресечна точка (црт. 54).

Да претпоставиме дека е $k \neq 0$, тогаш равенката (2) е квадратна, па од неа добиваме:

$$x_{1,2} = \frac{-(kn-p)\pm\sqrt{(kn-p)^2-k^2n^2}}{k^2}, \text{ односно } x_{1,2} = \frac{p-kn\pm\sqrt{p^2-2knp}}{k^2}.$$

Вредностите за x_1 и x_2 потоа ги заменуваме во $y = kx + n$, па ги добиваме и соодветните вредности y_1 и y_2:

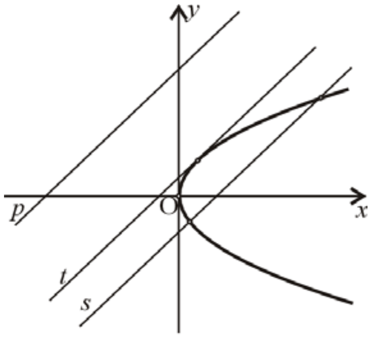
$$y_{1,2} = \frac{p\pm\sqrt{p^2-knp}}{k}.$$

Од поткореновиот израз $D = p^2 - 2knp$ зависи дали координатите на заедничките точки се реални или имагинарни, односно дали параболата и правата имаат заеднички точки или не.

1°. Ако $p^2 - 2knp > 0$, тогаш системот (1) има две решенија (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тоа се координатите на заедничките точки на параболата и правата. Велиме, дадената права е секанта на параболата (права s на црт. 55).

2°. Ако $p^2 - 2knp = 0$, односно $p^2 = 2knp$, тогаш равенката (2) има еден двократен корен $x_{1,2} = \frac{p-kn}{k^2}$, па според тоа, системот (1) ќе има едно решение $\left(\frac{p-kn}{k^2}, \frac{p}{k}\right)$.

Велиме, правата е тангента на параболата, а добиеното решение ни ги дава координатите на допирната точка (права t на црт. 55).



црт. 55

Релацијата:

$$p^2 = 2knp, \quad \text{односно} \quad p = 2kn \qquad (3)$$

претставува услов, *правата $y = kx + n$ да е тангента на параболата.*

3°. Ако $p^2 - 2knp < 0$, тогаш равенката (2) нема реални корени, односно системот равенки (1) нема решение.

Според тоа, ако $p^2 - 2knp < 0$, тогаш правата и параболата немаат заеднички точки (права p на црт. 55).

Пример 65. Да ја одредиме заемната положба на правата $2x - y + 8 = 0$ и параболата $y^2 = 14x$.

Решение. Го решаваме системот равенки: $\begin{cases} y^2 = 14x \\ 2x - y + 8 = 0 \end{cases}$.

Од втората равенка имаме $y = 2x + 8$, а од првата $(2x + 8)^2 = 14x$, по средувањето ја добиваме равенката $2x^2 + 9x + 32 = 0$.

Бидејќи дискриминантата на добиената равенка е: $D = -175 < 0$, тогаш таа нема реални корени. Според тоа, системот нема решение, а тоа значи, правата и параболата немаат заеднички точки. ♦

Пример 66. Да ја одредиме равенката на параболата, ако таа ја допира правата: $2x + 2y + 5 = 0$.

Решение. Задачата се сведува на одредување на параметарот на параболата. Бидејќи правата, за која $k = -1$, е тангента на параболата, тогаш елементите p, k и n ќе го задоволуваат условот (3) за допирање, т.е. ќе важи: $p^2 - 2\cdot(-1)\cdot(-\frac{5}{2})\cdot p = 0$, односно $p^2 - 5p = 0$. Оттука $p_1 = 0$, $p_2 = 5$. Бидејќи кај параболата секогаш е $p > 0$, тогаш вредноста $p = 0$ ја отфрламе, па останува само $p = 5$.

Според тоа, параболата има равенка $y^2 = 10x$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Испитај ја заемната положба на параболата $y^2 = 5x$ и правата:

а) $x - y + 3 = 0$; б) $x - 2y + 2 = 0$.

2. Испитај ја заемната положба на параболата $y^2 = 12x$ со правата $y + 2x = 0$.

3. Одреди ги координатите на заедничките точки (ако има такви) на параболата $y^2 = 8x$ и правата $2x - 3y + 8 = 0$.

4. Одреди ги координатите на пресечните точки на параболата $y = \frac{1}{4}x^2$ со правата:

а) $y = -x$; б) $x - 2y + 4 = 0$.

5. Одреди ја равенката на тетивата, која минува низ фокусот на параболата $y^2 = 14x$ и со Ox-оската зафаќа агол 45°.

6. Испитај, дали правата $x + 4y + 20 = 0$ е тангента на параболата $y^2 = 5x$ и ако е тангента, одреди ги координатите на допирната точка.

7. Од точката $M(-3,-1)$ повлечени се тангенти на параболата $y^2 = 8x$. Одреди ги равенките на тие тангенти.

8. Напиши ја равенката на тангентата на параболата $y^2 = 4x$, која е паралелна со правата $2x - 2y + 5 = 0$.

9*. За кои вредности на параметарот A, правата: $Ax - 2y + 3 = 0$ е тангента на параболата $y^2 = 8x$?

IV.23. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА НА ПАРАБОЛАТА

Нека е дадена правата

$$y = kx + n \tag{1}$$

и параболата

$$y^2 = 2px, \ (p > 0). \tag{2}$$

Видовме, правата (1) е тангента на параболата (2), ако и само ако параметрите p, k и n го задоволуваат условот

$$p = 2kn\,. \tag{3}$$

Во тој случај, системот од равенките (1) и (2), чие решавање, видовме, се сведува на решавање на квадратната равенка

$$k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0, \ k \neq 0. \tag{4}$$

има единствено решение (x_1, y_1) што се координати на точката M во која правата (1) ја допира параболата (2).

Да ја одредиме равенката на тангентата на параболата (2) во допирната точка $M(x_1, y_1)$.

Апсцисата x_1 се добива како единствено решение на квадратната равенка (4), т.е.

$$x_1 = -\frac{kn-p}{k^2} = \frac{1}{k^2}(p - kn) = \frac{1}{k^2}(2kn - kn) = \frac{n}{k}\,.$$

Ординатата y_1 се добива со помош на равенката $y = kx + n$:

$$y_1 = kx_1 + n = k \cdot \frac{n}{k} + n = 2n.$$

Значи, допирната точка има координати $M(\frac{n}{k}, 2n)$.

Од $y_1 = 2n$ имаме $n = \frac{1}{2} y_1$, а од $x_1 = \frac{n}{k}$ добиваме

$$k = \frac{n}{x_1} = \frac{1}{2} \cdot y_1 \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{y_1}{2x_1}, \quad \text{т.е.} \quad k_t = \frac{y_1}{2x_1}. \tag{5}$$

Според тоа, равенката на тангентата на параболата (2) во допирната точка (x_1, y_1), гласи:

$$y = \frac{y_1}{2x_1} \cdot x + \frac{y_1}{2}. \tag{6}$$

Оваа равенка на тангентата ќе ја доведеме во попогоден вид за помнење. Ја множиме равенката (6) со y_1 и врз основа на равенството $y_1^2 = 2px_1$ (бидејќи точката (x_1, y_1) лежи на параболата (2)), таа го добива видот: $y_1 y = \frac{y_1^2}{2x_1} \cdot x + \frac{y_1^2}{2} = \frac{2px_1}{2x_1} \cdot x + \frac{2px_1}{2}$, т.е. $y_1 y = px + px_1$, односно

$$y_1 y = p(x_1 + x). \tag{7}$$

Пример 67. Равенката на тангентата на параболата $y^2 = 8x$ во точката $M(2,4)$ од неа, согласно (7) гласи: $4y = 4(2 + x)$, односно $y = x + 2$. ♦

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја равенката на тангентата на параболата $y^2 = 9x$ во точката $M(4, y < 0)$ од неа.

2. Во која точка на параболата $y^2 = 15x$ тангентата со позитивната насока на Ox-оската ќе гради агол од 45^o?

3. Одреди ја равенката на нормалата на параболата $y^2 = 9x$ во точката $M(4, -6)$ од неа.

4. Напиши ја равенката на тангентата на параболата $y^2 = 6x$ во нејзината точка $M(6,6)$.

5. Во пресечните точки на правата $2x - 3y + 8 = 0$ и параболата $y^2 = 8x$ повлечени се тангенти на параболата. Одреди ги нивните равенки.

6. Напиши ја равенката на нормалата на параболата $y^2 = 10x$ во нејзината точка $B(x > 0, -3)$.

7. Испитај, дали правата $x + y + 2 = 0$ е тангента на параболата $y^2 = 8x$, и ако е тангента, тогаш одреди ја равенката на нормалата на параболата во допирната точка.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - IV

1. Одреди го центарот $C(x,y)$, на кружницата што минува низ точките: $O(0,0)$, $A(4,2)$ и $B(6,4)$.

2. Дадени се две точки $A(2,-1)$ и $B(3,-1)$. Одреди ги координатите на: а) точката M, што е симетрична на A во однос на точката B, б) точката S, што е симетрична на B во однос на A.

3. Состави равенка на права што минува низ точката $T(-4,3)$ и е нормална на:

а) Ox-оската, б) Oy-оската.

4. Даден е триаголник со темиња: $A(-3,1)$, $B(4,2)$ и $C(2,5)$. Одреди ги равенките на неговите тежишни линии.

5*. Состави равенка на права, што минува низ точката $A(8,0)$, ако плоштината на триаголникот образуван од правата и координатните оски, е еднаква на 16.

6. Која од правите $2x - 3y + 5 = 0$ и $x - y = 0$ гради поголем агол со позитивната насока на Ox-оската?

7. Дадена е равенката на права $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$. Одреди го аголот што таа го гради со позитивната насока на Ox-оската.

8*. Дадена е отсечка, чии крајни точки се $A(-3,2)$, и $B(5,4)$. Од која точка на нејзината симетрала, таа се гледа под агол од 90^o?

9. Даден е триаголник ABC, чии темиња се: $A(-2,0)$ $B(4,2)$ и $C(2,4)$. Одреди ги неговите внатрешни агли.

10. Одреди ја равенката на права, што минува низ точката $T(4,-1)$, а чиј коефициент на правецот е еднаков со коефициентот на правецот на правата, што е определена со точките $A(0,3)$ и $B(2,0)$.

11. Низ пресекот на правите $3x + 2y - 13 = 0$ и $x + 3y - 9 = 0$ повлечена е права, паралелна со правата $5x + 4y - 20 = 0$. Одреди ја нејзината равенка.

12. Дадени се две точки $A(-4,2)$ и $B(3,1)$. Одреди ја равенката на правата што е паралелна со AB, и Oy-оската ја сече во точката $C(0,-2)$.

13. Дадени се равенките на страните на триаголникот ABC: AB: $3x - y + 10 = 0$, BC: $3x + 4y + 5 = 0$, AC: $y + 2 = 0$. Одреди ја равенката на симетралата на страната AB.

14. Дадени се равенките на страните на триаголникот ABC: AB: $3x - 4y + 12 = 0$, BC: $x + 2y - 4 = 0$ и AC: $x - 3y - 3 = 0$. Одреди ги неговите внатрешни агли.

15*. Дијагоналите на ромбот се долги 12 *cm* и 5 *cm*. Земајќи ја подолгата дијагонала за апсцисна оска, а пократката за ординатна оска, состави ги равенките на неговите страни.

16. Одреди ја ортогоналната проекција на точката $T(1\frac{1}{6},2\frac{1}{4})$ врз права $6x - 4y - 15 = 0$.

17. Дадени се равенките на страните на триаголникот ABC:

AB: $3x + 4y - 14 = 0$, BC: $12x + 5y - 1 = 0$ и AC: $5x + 3y + 6 = 0$.

Одреди го периметарот на триаголникот.

18. Дадени се равенките на две соседни страни на паралелограмот: $2x + y = 1$ и $8x + 3y + 1 = 0$, и равенката на една негова дијагонала $3x + 2y + 3 = 0$. Одреди ги координатите на темињата на тој паралелограм.

19. Одреди го растојанието меѓу центрите на кружниците:

а) $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 76 = 0$ и $x^2 + y^2 + 10x + 6y - 2 = 0$.

20*. Испитај, дали равенката $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey = 0$, $A \neq 0$ определува кружница или не. Што е карактеристично за неа?

21. Одреди ја равенката на кружницата, која минува низ точките: $O(0,0)$, $A(2,0)$ и $B(0,2)$.

22. Одреди ја равенката на кружницата, која минува низ точките $A(-2,4)$ и $B(-1,3)$, а центарот и лежи на правата $2x - 3y + 2 = 0$.

23. Одреди ја равенката на кружницата, која минува низ точката $A(-4,5)$ и е концентрична со кружницата $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$.

24*. Да се одреди равенката на тетивата на кружницата $x^2 + y^2 = 25$ која минува низ точката $M(-3,-2)$ и се располовува од неа.

25. Одреди го радиусот r на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$, така што таа да се допира до правата $3x + 4y - 12 = 0$.

26. Дадени се равенките на страните на триаголникот ABC: AB: $3x + 4y + 4 = 0$, BC: $6x - 7y = 97$, AC: $3x + 19y - 26 = 0$. Одреди ја равенката на кружницата со центар во темето A, а минува низ темето B на триаголникот.

27. Да се одреди равенката на кружница, со центар во точката $C(-1,2)$ и да ја допира правата $3x + 4y - 30 = 0$.

28. Испитај, дали правата $y = -3$ е тангента на кружницата $x^2 + y^2 - 6x = 0$, и ако е тангента, одреди ги координатите на допирната точка.

29. Одреди ја равенката на елипса, ако е познат ексцентрицитетот $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и полупараметарот $p = 4$.

30. Одреди ја равенката на елипса, која минува низ точките $M(6,4)$ и $N(-8,3)$.

31*. Низ точката $S(1,1)$ во внатрешноста на елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$, повлечена е тетива која се располовува од таа точка. Одреди ја равенката на тетивата.

32. Кон елипсата $2x^2 + 3y^2 = 120$ да се повлече тангента, која од позитивните делови на координатните оски да отсекува еднакви отсечки.

33*. Напиши ја равенката на тангентата на елипсата $x^2 + 4y^2 = 10$, која со правата $x - 2y + 5 = 0$ гради агол од 45°.

34. За кои вредности на коефициентот A, правата $Ax + y - 5 = 0$ ја допира елипсата $x^2 + 4y^2 = 8$?

35. Состави ја равенката на хиперболата, чии фокуси се наоѓаат во темињата на елипсата $9x^2 + 16y^2 = 576$, а темињата (на хиперболата) се наоѓаат во фокусите на елипсата.

36*. Дадена е хиперболата $16x^2 - 9y^2 = 144$. Одреди ги координатите на оние точки од хиперболата на кои левиот фокусен радиус им е еднаков на 7.

37. Покажи дека ексцентрицитетот на рамностраната хипербола е еднаков на односот од дијагоналата на квадратот, чија страна е еднаква на оската на хиперболата, и страната на тој квадрат.

38. Одреди ги координатите на пресечните точки на рамностраната хипербола $x^2 - y^2 = 16$ и кружницата $x^2 + y^2 = 34$.

39*. На хиперболата $16x^2 - 49y^2 = 784$, одреди точка, чие растојание од едната асимптота е трипати поголемо од растојанието до другата асимптота.

40. Докажи, дека производот на растојанијата на која било точка на хиперболата до нејзините асимптоти е константен број.

41*. На хиперболата $9x^2 - 16y^2 = 144$ одреди ја точката M за која важи:

а) $MF_1 \perp MF_2$; б) $\overline{MF}_1 = \overline{MF}_2$, каде F_1 и F_2 се фокуси на дадената хипербола.

42. Во точката М$(2, y > 0)$ на параболата $y^2 = 8x$, повлечена е тангента на параболата. Одреди го аголот што таа го зафаќа со позитивната насока на Ox-оската.

43. Состави ја равенката на параболата, чие теме е во координатниот почеток, фокусот и лежи на Ox-оската, и минува низ точките: а) $A(4,-6)$, б) $B(2,4)$.

44. На параболата $y^2 = 8x$ одреди точка M, за која важи $\overline{FM} = 20$.

45. Одреди ги координатите на фокусот на параболата $y^2 = x$.

46. Одреди го фокусниот радиус на точката $M(7, y > 0)$ што лежи на параболата $y^2 = 20x$.

47. Од точката М(5,9) повлечени се тангенти на параболата $y^2 = 5x$. Состави ја равенката на тетивата што ги сврзува допирните точки на повлечените тангенти.

48*. Во која точка од параболата $y^2 = 12x$, повлечената тангента, нормалата и Ox-оската ќе градат рамнокрак триаголник?

49. Одреди ги пресечните точки на елипсата $16y^2 + 25y^2 = 1600$ со параболата, чие теме лежи во центарот на елипсата, а фокусот и се совпаѓа со десниот фокус на елипсата.

ЗАДАЧИ ЗА САМОКОНТРОЛА

1. Колкав агол образува правата, што минува низ точките $A(2,0)$ и $B(4,-2)$, со позитивната насока на Ox-оската?

2. Дадени се две точки $A(-3,-1)$ и $B(4,1)$. Одреди ја равенката на правата, што минува низ средината на отсечката AB, и е нормална на неа.

3. Одреди го растојанието од точката $M(2,-5)$ до правата $6x - 8y - 17 = 0$.

4. Одреди за која вредност на коефициентот k, правата $y = kx + 3$ минува низ пресекот на правите $y = 2x + 1$ и $x - y + 5 = 0$.

5. Одреди ја равенката на кружницата, која ги допира правите $x = 2$ и $x = 6$, а центарот и лежи на правата $3x - y - 6 = 0$.

6. Да се одреди равенката на кружница, со центар во точката $C(-3,4)$ и да минува низ координатниот почеток.

7. Напиши ја равенката на елипса, ако растојанијата на еден нејзин фокус до темињата на големата оска се 3 и 7.

8. Правата $2x - y - 4 = 0$ е тангента на хиперболата, чии фокуси се $F_1(-3,0)$ и $F_2(3,0)$. Одреди ја равенката на таа хипербола.

9. На параболата $y^2 = 16x$ одреди ги точките, чиј фокусен радиус е еднаков на 13.

10. Одреди ги пресечните точки на хиперболата $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ и параболата $y^2 = 3x$.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА НА ЗАДАЧИТЕ

Тема I - Експоненцијална функција и логаритамска функција

I.1. стр. 10

1. а) $2^{\frac{1}{2}}$, б) $x^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{1-2n}}$. **2.** а) 9, б) 4, в) $4-6\sqrt{6}$, г) $-5\cdot 2^{\frac{2n-1}{n(n-1)}}$. **3.** $2^{\frac{1}{3}}<5^{\frac{1}{6}}<3^{\frac{1}{4}}$.

4. $4^{-\sqrt{2}}<4^{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}<4^{\frac{3\sqrt{3}}{4}}<4^{\sqrt{2}}$.

I.2. стр. 14

2. $f(x)=(\frac{27}{64})^x$. **3. а) Доказ.** Од дифеницијата на степени имаме $f(2+3)=3^{2+3}=3^2 3^3=f(2)f(3)$. **б) Доказ.** Од дифеницијата на степени имаме $f(x+t)=a^{x+t}=a^x a^t=f(x)f(t)$.

I.3. стр. 18

1. а) $x=2$, б) $x=4$, в) $x=3$. **2.** а) $x_1=1$, $x_2=2$, б) $x_1=-4$, $x_2=1$, в) $x=6$. **3.** а) $x=1$, б) $x=4$, в) $x=1$. **4.** а) $x=5$, б) $x=4$. **5.** а) $3^x=t>0$, $x=1$, б) $4^x=t>0, x=1$, в) $5^x=t>0, x=2$. **6.** а) Подели со 9^x, $x=0$, б) Подели со 4^x, $x_{1/2}=\pm 1$. **7.** а) Смена $2^{\sqrt{2x-1}}=t, 2x-1>0$, б) Смена $3^{x+\sqrt{x-1}}=t$, $x-1>0$. **8.** а) $x>1$, б) $x\le 2$, в) $x\ge -\frac{1}{2}$. **9.** а) $x\in[-2,2]$, б) $x\in(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$. **10.** а) Смена $3^x=t>0$, б) Смена $5^x=t>0$. **11.** а) $x>0$, б) $x\in\mathbf{R}$.

I.4. стр. 21

1. а) 12, б) 3, в) $\frac{4}{21}$. **2.** а) 5, б) 2. **3.** а) 670, б) -144, в) 0, г) $4\frac{4}{5}$, д) 19. **5.** а) -11, б) $(b-a)^2$. **6.** Имаме

$$\log_{10}(x+2y)-2\log_{10}2=\frac{1}{2}[\log_{10}(x+2y)^2-4\log_{10}2$$

$$=\frac{1}{2}[\log_{10}16xy-\log_{10}2^4]=\frac{1}{2}\log_{10}xy=\frac{1}{2}(\log_{10}x+\log_{10}y).$$

7. Изрази го x со помош на y, а потоа y со помош на z.

I.5. стр. 25

1. $x=0, x=-\frac{2}{5}$. **2.** а) $x>1$, б) $x\ne 0$, в) $x<0$ или $x>2$, г) $x>0$, д) $x<-1$ или $x>3$. **3.** а) негативен, б) негативен, в) позитивен. 4. $-\frac{7}{5}<x<-\frac{6}{5}$.

I.6. стр. 29

1. а) 2, б) 4, в) 1, г) -1, д) -2. **2.** а) 1,602059991, б) $-0{,}397940009$, в) $-3{,}397940009$, г) 4,602059991, д) 6,602059991.

I.7. стр. 31

1. а) $x=\frac{5}{2}$, б) $x=7$, в) $x=\pm 2\sqrt{2}$. **2.** а) $x=2$, б) $x=6$. **3.** а) Јасно $x>0$. Со смената $\log_x\sqrt{5}=t$, се добива равенката $4t^2-12t+5=0$ чии решенија се $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=\frac{5}{2}$. Конечно, $x_1=5$ и $x_2=\sqrt[5]{5}$. б) $\frac{1}{\log_x a}-\frac{1}{\log_x a^2}+\frac{1}{\log_x a^4}=\frac{3}{4}$ па е $\frac{1}{\log_x a}-\frac{1}{2\log_x a}+\frac{1}{4\log_x a}=\frac{3}{4}$ т.е. $x=a$. **7.** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенката $\frac{2}{\log_{2^x-1}4}+\log_2 2^x+\frac{1}{\log_3\frac{1}{2}}+\frac{1}{\log_6\frac{\sqrt{6}}{6}}=0$

$$\frac{2}{2\log_{2^x-1}2}+\log_2 2^x-\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\frac{1}{2}\log_6 6-\log_6 6}=0$$

$$\log_2(2^x-1)+\log_2 2^x-(\log_2 3+\log_2 4)=0.$$

$\log_2(2^x-1)2^x=\log_2 12$, чие решение е $x=2$. **8.** а) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $\log\frac{x-4}{x+1}<1$, $x>4$ и $x>-1$ од што добиваме $x>4$. б) Нема решение. в) $x>1000$

9. Упатство. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $0<x^2-5x+6<1$.

I.8. стр. 34

1. 1730 години. **2.** а) $2{,}25\cdot 10^6$, **б)** 1465 т.е. после 36 часа. **4. Упатство.** а) $2=1{,}12^t$, б) $2=1{,}17^t$, в) $2=1{,}21^t$.

Задачи за повторување и утврдување. стр. 35

4. а) $x=1$, б) $x=2$, в) $x=1$. **6.** а) Смена $2^x=t$, $x=2$, б) Смена $3^x=t$, $x=2$, в) Смена $2^x=t$, $x=3$, г) Смена $3^{\sqrt[3]{x}}=t$, д) Јасно $x^2\ge 4$ и смена $(\sqrt{2})^{x+\sqrt{x^2-4}}=t$. **7.** а) Подели со 9^x и воведи смена $(\frac{2}{3})^x=t$, $x=1$, б) Подели со 49^{x^2} и воведи смена $(\frac{2}{7})^{x^2}=t$, в) Подели со $4^{\frac{1}{x}}$ и воведи смена $(\frac{5}{2})^{\frac{1}{x}}=t$, г) Подели со 6^x, д) Подели со $\sqrt[x]{16}$, ѓ) Воведи смена $2^{x^2-x}=t$. **8.** а) Искористи $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$ и смена $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x=t$;

$x=2$. б) Смена $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x=t$. в) Смена $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x=t$. г) Дадената равенка ќе ја запишеме во обликот $(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})^x+(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})^x=1$. Очигледно $x=2$ е решение на оваа равенка. Ќе покажеме дека равенката нема други решенија. Навистина, бидејќи $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}<1, \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}<1$, за $x<2$ добиваме $(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})^x+(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})^x>1$, а за $x>2$ имаме $(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})^x+(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})^x<1$. **9.** а) Имаме

$$4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x \Leftrightarrow$$
$$(2^x)^2+(3^x)^2+(5^x)^2-2^x3^x-3^x5^x-5^x2^x=0 \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}[(2^x-3^x)^2+(3^x-5^x)^2+(5^x-2^x)^2]=0 \Leftrightarrow$$
$$2^x=3^x \wedge 3^x=5^x \wedge 5^x=2^x \Leftrightarrow x=0.$$

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $(2^x-\frac{1}{2^{x-1}})^3=1 \Leftrightarrow (2^x)^2-2^x-2=0$.

10. а) $x\in[-3,1]$, б) $x\le -3$ или $x\ge \frac{1}{3}$, в) $-\infty<x<\frac{3}{2}$. **11.** а) $x\in(0,1)$, б) $x\in\mathbf{R}$, в) $x<-2$ или $x>2-\log_2 3$. **13.** а) 3, б) 655, в) 600, г) 696, д) 238, ѓ) 21. **15.** а) $\frac{(a+b)^2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}$, б) $\frac{a^3\sqrt{7b}}{8c^3}$, в) $\frac{3\sqrt{ab^3}}{d^2\cdot\sqrt[3]{c}}$. **16.** а) Имаме $\log_{10a} a=\frac{1}{\log_a 10a}=\frac{1}{\log_a a+\log_a}=\frac{1}{m+1}$. б) $\frac{5}{4m}$.

17. Дадениот услов може да се запише во видот $(\frac{a+b}{3})^2=ab$. Со логаритмирање се добива бараното равенство. **18.** Дадениот услов може да се запише како $(a+b)^2=8ab$ и $(a-b)^2=4ab$. Ако последните две равенства ги логаритмираме и ги собереме, после средувањето го добиваме бараното равенство. **19.** Од условот имаме $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$. Ако последното равенство го логаритмираме за основа a го добиваме равенството $2\log_a a=\log_a(c-b)+\log_a(c+b)$ т.е. $2=\frac{1}{\log_{c-b} a}+\frac{1}{\log_{c+b} a}$ кое е еквивалентно на даденото равенство. **20.** $\log_{45} 100=\frac{\log_5 100}{\log_5 45}=\frac{2a+2}{1+2b}$.

21. $\log_{70} 2{,}5=\frac{\log_7 \frac{5}{2}}{\log_7 70}=\frac{\log_7 5-\log_7 2}{\log_7 2\cdot5\cdot7}=\frac{d-c}{1+d+c}$. **22.** $\frac{3(1-a)}{a}$

23. $\frac{m+1}{n+1}$. **24.** Имаме $f(a)+f(b)=\log\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$ и $f(\frac{a+b}{1+ab})=\log\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}=\log\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}=\log\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$.

26. Изразот на левата страна може да се запише како $\frac{1}{\log_a x}+\frac{2}{\log_a x}+\ldots+\frac{n}{\log_a x}=\frac{1+\ldots+n}{\log_a x}=\frac{n(n+1)}{2\log_a x}$.

27. Од $a,b\in(0,1) \Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}>ab \Rightarrow \frac{2ab}{a+b}<1$, т.е. $\frac{2ab}{a+b}\in(0,1)$. Затоа даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\log_{\frac{2ab}{a+b}} a\log_{\frac{2ab}{a+b}} b\le 1.$$

Од неравенството меѓу средините имаме

$$\sqrt{\log_{\frac{2ab}{a+b}} a\log_{\frac{2ab}{a+b}} b}\le\frac{\log_{\frac{2ab}{a+b}} a+\log_{\frac{2ab}{a+b}} b}{2}=\log_{\frac{2ab}{a+b}}\sqrt{ab}.$$

Бидејќи $\log_{\frac{2ab}{a+b}}\sqrt{ab}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow$

$$a+b\ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$$

и како последново неравенство е точно добиваме дека и почетното неравенство е точно.

28. Од условите за броевите a,b,c следува дека сите логаритми се позитивни и ако искористиме дека $\log_a b\log_b c\log_c a=1$ од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$2(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{a+a})\ge 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a\log_c b\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge\frac{18}{a+b+b+c+c+a}=\frac{9}{a+b+c}.$$

29. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>$$
$$4\sqrt[4]{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8}=4\sqrt[4]{\log_4 8}$$
$$=4\sqrt[4]{\frac{3}{2}}>4\cdot 1{,}1=4{,}4.$$

30. а) 48, б) 1693. **31.** Бројот 21^{23} има 31 цифра, а бројот 23^{21} има 29 цифри, па затоа 21^{23} е поголем од 23^{21}. **32.** а) $x\le -1$ или $x\ge 1$, б) $x\in(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$, в) $\mathbf{R}$, г) $x>2$, д) $x\in(1,4]$. **33.** а) Бидејќи $3>1$ и $2<5$ од својствата на логаритамската функција следува $\log_3 2<\log_3 5$, б) $\log_{\frac{1}{3}} 4>\log_{\frac{1}{3}} 5$, в) $\log_2 3>\log_5 3$. **35.** а) нема решение, б) $x=2$. **36.** а) $x=2$, б) $x=3$, в) $x=2$. **37.** а) $x=48$, б) $x=4-\sqrt{3}$. **38.** а) $x=100$ или $x=1000$, б) $x=3\cdot10^{-3}$ или $x=3\cdot10^3$, в) $x=3$, г)

$x=3$ или $x=\frac{1}{3}$. **39.** а) $x=10^{\pm 2}$, б) $x=100$ или $x=10^{-1}$, в) $x=3$ или $x=\sqrt{3}$. **41.** а) $x=64$, б) $x=8$ или $x=\frac{\sqrt{3}-3}{3}$. **42.** а) $x=100$, б) $x=2$, в) $x=\frac{1}{25}$. **43.** а) $x>6$, б) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, в) $x\le 2$ или $x\ge 4$, г) $x\in(\frac{1}{4},1)\cup(2,+\infty)$. **44.** а) $x>4$, б) $x\in(3,4)\cup(5,+\infty)$, в) $-\frac{1}{2}<x<0$. **45.** а) $-3\le x\le -2$ б) $x>\frac{1}{100}$.

Тема II - Тригонометрија

II.1. стр. 42

2. а) $(0^{\circ},90^{\circ})$; б) $(90^{\circ},180^{\circ})$. **3.** а) $\angle BOA=150^{\circ}$; б) $\angle BOA=210^{\circ}$; в) $\angle AOB=-210^{\circ}$. **4.** а) $-2\cdot 360^{\circ}$; б) $-24\cdot 360^{\circ}$; в) $-1440\cdot 360^{\circ}$. **7.** $\alpha=75^{\circ}$, $\beta=-55^{\circ}$, $\gamma=161^{\circ}30'$. **9.** Вторите краци им се совпаѓаат на аглите α_1, α_3 и α_5, а исто и на аглите α_2 и α_4. **10.** 3 часа и 10 минути. **12.** а) π, б) 2π.

II.2. стр. 45

1. 0,01745 рад. **2.** $-\frac{\pi}{30}$, $\frac{\pi}{15}$, $-\frac{\pi}{10}$, $-\frac{\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{6}$. **3.** 15°, -150°, 135°. **4.** а) –40π, б) –480π. **5.** 12π. **6.** 15 (*cm*). **7.** ω=10π рад./сек. **8.** $\frac{\pi}{12}$ рад./час., $\frac{\pi}{43200}$ рад./сек. **9.** $r=\frac{9\pi}{12}\approx 1{,}43cm$.

II.3. стр. 47

2. а) IV квадрант, б) II квадрант; в) III квадрант. **3.** а) Во точката A_1, б) во точката B. **4.** а),б) во IV квадрант, в) во II квадрант. **5.** а),б) во IV квадрант, в) во III квадрант. **6.** а) Во B_1, б) во B, в) во B. **7.** а) Во A, б) во A_1. **8.** $P_\alpha(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

II.4. стр. 50

1. а),б) Точно. **2.** а),в),г) Може, б),д) не може. **3.** а), б), г) може, в) не може. **5.** $P_{60^o}(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_{45^o}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_{120^o}(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. **7.** **Упатство:** Од $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y_a}{x_a}=1$, следува $y_\alpha = x_\alpha$. Затоа, точката P_α лежи на симетралата на I и III квадрант. **8.** $\sin 70^{\circ}=\sin(70^{\circ}+2\cdot 360^{\circ})=\sin(70^{\circ}-4\cdot 360^{\circ})$, $\sin(-70^{\circ})=\sin(-70^{\circ}-3\cdot 360^{\circ})$. **9.** а),г) Можно е, б),в) не е можно. **10.** а) 0, б) –1, в) 0, г) –1, д) 1. **11.** а), б), ѓ), ж) Позитивни, в), г), д), е) негативни.

II.5. стр. 54

1. а) Негативен, б) позитивен. **2.** а) Позитивен, б) негативен. **3.** а) Негативен, б) позитивен. **4.** а)+,+,+, б)+, –, –, в) –,+,–. **5.** а) –,–,+, б) +,–,–. **6.** а),б),в) +, г) –. **7.** а) Во I и III квадрант, б) во II и IV квадрант. **8.** а) Во II и IV квадрант, б) во I и II квадрант, в) во II и III, г) I и III квадрант. **9.** а) На cos и ctg, б) на tg и ctg. **10.** Не постои. **11.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) 2. **12.** а) 4; б) $-\frac{1}{2}$. **13.** а) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, б) $3\sqrt{3}-1$. **14.** а) $\sqrt{2}+3$, б) –2. **15.** а) 2, б) $2-\sqrt{3}$. **16.** а) $\frac{3}{4}(\sqrt{3}+1)$, б) $-\frac{1}{2}$. **17.** а) $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$, б) $\frac{1}{2}$. **18.** 5. **19.** а) 0, б) *a*. **20.** $(a-b)^2$. **21.** а) $2(2\sqrt{3}+3)$, б) $\frac{2}{3}$. **22.** а),б), в) точни се.

II.6. стр. 57

1. $\alpha\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. **7.** а) **Упатство:** Дропката на десната страна множи ја со $\cos^2\alpha$, б) $\frac{\sin\alpha}{1+ctg\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+tg\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. **9.** а) $(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha -2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha = 2(1-\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha) = 2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$, б) се докажува аналогно. **10.** **Упатство:** Користи дека $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha) = (\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$. **11.** $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$. **12.** $\sin\alpha=-\frac{9}{41}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{9}{40}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{40}{9}$. **13.** $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **14.** $\mathrm{tg}\alpha=\frac{17}{144}$, $\sin\alpha=-\frac{17}{145}$, $\cos\alpha=-\frac{144}{145}$. **15.** $\frac{3}{10}$. **16.** $\frac{a^2-b^2}{ab}$. **17.** а) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=2\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$, б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$, $\mathrm{ctg}\alpha=a$, $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$. **18.** $\cos\alpha=\frac{n-1}{n+1}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\sqrt{n}}{n-1}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{(n-1)\sqrt{n}}{2n}$. **19.** $\sin\alpha=-\frac{221}{229}$, $\cos\alpha=-\frac{60}{229}$. **20.** 2. **21.** $\cos^4\alpha$. **22.** $-\frac{5}{12}$.

II.7. стр. 62

1. $\mathrm{ctg}140^{\circ}$. **2.** $-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}$. **3.** $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{8}$. **4.** $-\sin\frac{3\pi}{8}$. **5.** а) $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$, б) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{10}$. **6.** $-\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$. **7.** а) $-\mathrm{tg}\frac{7\pi}{15}$, б) $-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{30}$. **8.** $\cos 83^{\circ}=\sin 7^{\circ}$, $\mathrm{tg}72^{\circ}=\mathrm{ctg}18^{\circ}$. **9.** а) $-\sin 10^{\circ}$, б) $-\sin 20^{\circ}$, в) $\mathrm{tg}30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** cos α. **12.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\sqrt{3}$. **13.** а) 9, б) 1. **14.** $\frac{5}{6}$. **15.** а) $\sin 35^{\circ}$, б) $-\mathrm{tg}45^{\circ}=-1$, в) $-\cos\frac{2\pi}{5}$. **17.** –tgα.

II.8. стр. 65

1. ≈0,9, ≈0,3. **2.** а) ≈1,4; б) ≈–1,3. **3.** а) ≈0,8; б) ≈0,3. **8.** sin125^o≈0,8; cos125^o≈–0,6; tg125^o≈–1,4; ctg125^o ≈–0,7. **9.** sin220^o≈–0,6; cos220^o≈–0,8; ctg220^o≈1; tg220^o≈0,8.

II.9. стр. 68

2. а),б) Непарна. **3.** $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. **4.** а) sin31^o, б) cos50^o, в) –tg58^o, г) –ctg60^o=$-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **5.** а) Точно, б),в) неточно. **6.** а) –1, б) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$, в) 0. **7.** а) $-2\cos\alpha$, б) 2ctgα–sinα. **8.** tg α. **9.** Точно. **10.** а) 1, б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.10. стр. 72

1. а) tg33^o> tg18^o; б) ctg10^o> ctg57^o. **2.** а) sin120^o> sin208^o; б) $\sin\frac{3\pi}{4}>\sin\frac{5\pi}{4}$. **3.** а) Првиот, б) вториот. **4.** а) $tg\frac{5\pi}{4}>tg\frac{9\pi}{8}$, б) tg(–130^o)> tg(–160^o). **5.** а), б) Првиот. **6.** а) Првиот, б) вториот. **7.** а) Позитивна, б) негативна. **8.** а),б) Разликата е позитивна. **9.** а) sin215^o<sin28^o<cos324^o<sin125^o<cos14^o; б) ctg152^o<tg19^o<ctg45^o<tg52^o<tg256^o. **10.** а) Позитивен; б) **Упатство:** Ако $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, тогаш е tgα>1, односно 1–tgα<0, па ќе биде $\frac{1-\sin\alpha}{1-tg\alpha}<0$.

II.11. стр. 80

2. а) Знак –, б) **Упатство:** Бидејќи $\frac{3\pi}{2}<6<2\pi$, затоа аголот 6 рад. е во IV квадрант, па sin6<0. **5.** а) –, б) Бидејќи $-\pi<-3<-\frac{\pi}{2}$, затоа sin(–3)<0. **6.** а),б) Првиот. **8.** а) Позитивен, б) негативен. **13.** а) x=$\frac{\pi}{2}$, б) x=π, в) x=$\frac{\pi}{6}$ и x=$\frac{5\pi}{6}$, г) x=$\frac{\pi}{4}$ и x=$\frac{5\pi}{4}$. **14.** а) $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

II.12. стр. 85

17. а) D=**R**, б) $x\in[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi]$, в) $x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$. **18.** а) π, б) 2π, в) $\frac{\pi}{2}$.

II.13. стр. 89

3. $\sin 75^o=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\cos 75^o=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $\mathrm{tg}\,75^o=2+\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,75^o=2-\sqrt{3}$. **4.** $\sin 15^o=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $\cos 15^o=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $\mathrm{tg}\,15^o=2-\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\,15^o=2+\sqrt{3}$. **5.** $\frac{\sqrt{3}}{10}(\sqrt{7}+2)$. **6.** $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{2(1+\sqrt{42})}{15}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{21}+4\sqrt{2}}{15}$. **7.** $\frac{1}{3}$. **8.** а) sin(α+β+γ) = sinα·cosβ·cosγ + cosα·sinβ·cosγ + cosα·cosβ·sinγ – sinα·sinβ·sinγ; б) cos(α+β+γ) = cosα·cosβ·cosγ – sinα·sinβ·cosγ – sinα·cosβ·sinγ – cosα·sinβ·sinγ. **9.** $(7\sqrt{3}+9\sqrt{7}+2\sqrt{21}-6)\cdot\frac{1}{40}$. **10.** $(1-2\sqrt{30}+8\sqrt{3}+6\sqrt{10})\cdot\frac{1}{60}$. **11.** sin^{2}β. **12.** а), б) Точни се. **15.** $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$. **16.** cosα. **17.** а) sin(14^o+16^o)=sin30^o=$\frac{1}{2}$, б) cos(50^o+10^o)=cos60^o=$\frac{1}{2}$, в) tg(70^o–10^o)=$\sqrt{3}$, г) ctg(25^o+20^o)=1. **18.** sin(α+α)= sinα·cosα+cosα·sinα=2sinα·cosα. **19.** а) $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$; б) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, важат.

II.14. стр. 91

1. $\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$. **2.** $\sin 2\alpha=\frac{336}{625}$, $\cos 2\alpha=-\frac{527}{625}$. **3.** а) sin2·15^o = sin30^o =$\frac{1}{2}$; б) cos2·$\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** а) $\frac{\sin 25^o}{\sin 50^2}=\frac{\sin 25^o}{2\sin 25^o\cdot\cos 25^o}=\frac{1}{2\cos 25^o}$, б) $\frac{1}{2\cos 42^o}$, в) $\frac{1}{2\cos 27^o}$. **5.** $f(x)=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}$. **6.** $\sin 2\alpha=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{13}$, $\sin 2\alpha=\frac{37-20\sqrt{3}}{13}$, ctg 2α=$\frac{17\sqrt{3}-23}{4}$. **7.** cos3α=4cos^{3}α – 3cosα. **8.** За $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **9.** Не може. **10.** $\frac{1}{16}$. **11.** а) cos2α, б) cos2α, в) cos4α. **12.** **Упатство:** Помножи со $\frac{2\sin 20^o}{2\sin 20^o}$, потоа во броителот користи дека 2sin20^o·cos20^o=sin40^o. **13.** **Упатство:** Замени sin(45^o–α) = cos[90^o–(45^o–α)] = cos(45^o+α). **14.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$. **15.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{3}$. **16.** $\sin 15^o=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})$; $\cos 15^o=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$. **17.** а) $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **18.** а) sin15^o·cos75^o=(sin15^o)^2=$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$; б) $\cos 36^o\cdot\cos 72^o=\frac{\sin 2\cdot 36^o\cdot\cos 72^o}{2\cdot\sin 36^o}=\frac{\sin 144^o}{4\cdot\sin 36^o}=\frac{\sin 36^o}{4\cdot\sin 36^o}=\frac{1}{4}$. **19.** –(cosα + sinα). **20.** а) ctg^{2}40^o; б) $4\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

II.15. стр. 94

1. Упатство: Замени $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, а потоа примени ја формулата за збир на два синуса. **2.** $\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 9^{o})$. **3.** а) 1, б) $\frac{1}{4}$. **4. Упатство:** а) Замени $1 = \sin\frac{\pi}{2}$; б) замени $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. **Одг.** а) $2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$; б) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$. **5.** а) $2\sin 27^{o}\cos 9^{o}$, б) $-2\sin\frac{7\pi}{80}\cdot\cos\frac{17\pi}{80}$. **6.** а), б) Точни се. **7.** $\frac{2\cos^2(45^{o} - \frac{\alpha}{2})}{\cos(45^{o} - \alpha)}$. **8.** $\sin 2\alpha(1+2\cos\alpha)$. **9.** $\frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma)]$. **10. Доказ.** $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}{2\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})} = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$. **12. Упатство:** Групирај $(\operatorname{tg}9^{o} + \operatorname{tg}81^{o}) - (\operatorname{tg}27^{o} + \operatorname{tg}63^{o}) \ldots = 4$.

II.16. стр. 98

1. а) $x_o = \frac{\pi}{4}$, $x_1 = \frac{3\pi}{4}$; б) $x_o = x_1 = \frac{\pi}{2}$; в) $x_o = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{3\pi}{2}$. **2.** а) $x_o = \frac{\pi}{4}$, $x_1 = -\frac{\pi}{4}$; б) $x_o = \frac{\pi}{3}$, $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. **11.** а) $x_o = \frac{\pi}{6}$, $x_1 = \frac{5\pi}{6}$; б) $x_o = \frac{\pi}{4}$, $x_1 = -\frac{\pi}{4}$. **12.** а) $x = \frac{\pi}{3}$; б) $x = \frac{\pi}{4}$.

II.17. стр. 102

1. а) $x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{4} + n\pi$; б) $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + n\pi$, $(n \in \mathbf{Z})$. **2.** а) $x = \frac{k\pi}{3}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **3.** $x = \frac{k\pi}{2}$. **4.** $x = 25^{o} + k\cdot 180^{o}$. **5.** а) **Упатство:** tg 50° замени го со ctg 40°. **Одг.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; б) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. **6.** а) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$; б) $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2k\pi \approx \pm 41^{o}24' + k\cdot 360^{o}$. **7.** а) $x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{5} + n\pi$; б) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. **8.** а) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; б) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. **9.** а) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = 20^{o} + (2k+1)\pi$; б) $x = 35^{o} + 2k\cdot 180^{o}$, $x = -65^{o} + (2k+1)\cdot 180^{o}$. **10.** а) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; б) $x = -145^{o} + k\cdot 180^{o}$. **11. Упатство:** $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0$. **12.** а) Нема, бидејќи sin*x* и cos*x* за иста вредност на *x* не можат да добијат вредност 1, б) има, в) има. **13.** а) Нема, б), в) има. **14.** $x = 2k\pi$, $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2k\pi$.

II.18. стр. 105

1. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; б) $x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **2.** а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; б) $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **3.** а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{4\pi}{3} + (2k+1)\pi$; б) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. **4.** а) $x = 2k\pi$; б) $x = 58^{o}17' + k\pi$, $x = 31^{o}43' + k\pi$. **5.** а) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **6.** а) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; б) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. **7.** а) $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = 2k\pi$; б) $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$. **8.** а) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = 19^{o}28' + 2k\pi$, $x = 160^{o}32' + 2k\pi$; б) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 48^{o}36' + 2k\pi$, $x = 131^{o}24' + 2k\pi$. **9.** а) $x = k\pi$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **10.** а) $x = 2k\pi$; б) $x = 53^{o}7' + 2k\pi$, $x = 6^{o}53' + (2k+1)\cdot\pi$. **11.** а) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 61^{o}56' + 2k\pi$; б) $x = 8^{o}4' + 2k\cdot 180^{o}$, $x = 104^{o}34' + 2k\cdot 180^{o}$. **12.** а) $x = 36^{o}52' + 2k\cdot 180^{o}$, $x = 157^{o}22' + 2k\cdot 180^{o}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = 18^{o}26' + k\pi$. **13.** а) $x = 43^{o}36' + 2k\cdot 180^{o}$, $x = 126^{o}52' + 2k\cdot 180^{o}$; б) $x = 16^{o}36' + 2k\cdot 60^{o}$, $x = 5^{o}52' + (2k+1)\cdot 180^{o}$. **14.** а) $x = 50^{o}26' + 2k\cdot 180^{o}$, $x = -18^{o}36' + 2k\cdot 180^{o}$, б) нема решение. **15.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = k\pi$.

II.19. стр. 107

1. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **2.** а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = 2k\pi$, б) $x = k\pi$. **3.** а) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2} + 1 + k\pi$; б) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k\pi$. **4.** а) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$; б) $x = k\pi$. **5.** а) $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; б) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **6.** а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\pi$; б) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. **7.** а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; б) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. **8.** а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. **9.** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **10.** $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 2k\pi$. **11.** а) $x = \pm 120^{o} - 15^{o} + 2k\pi$, $x = -15^{o} + 2k\pi$; б) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = k\pi$. **12.** а) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, б) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = 2k\pi$. **13.** а) $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $x = \frac{2k\pi}{5}$; б) $x = 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **14.** а) $x = \pm\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$; б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

II.20. стр. 109

1. ≈7. **2.** Од $\frac{c}{\sin 90^{o}} = 2R$, добиваме $R = \frac{c}{2}$. **5.** $\frac{a\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{a}{2\cos 2\alpha}$. **6.** Не.

II.21. стр. 111

1. $\beta=59^\circ$; $a\approx3{,}7$; $c\approx6$. **2.** $\alpha\approx59^\circ$, $b\approx14{,}8$; $c\approx14$. **3.** а) $\gamma\approx26^\circ14'$; $\alpha\approx108^\circ46'$; $a\approx11{,}8$; б) нема решение. **4.** а) $\gamma=50^\circ45'$; $a=9{,}7$; $c=9{,}2$; б) $\alpha\approx13^\circ$; $a\approx2{,}5$; $b\approx9{,}4$. **5.** а) $\alpha\approx36^\circ20'$; $b=9{,}7$; $c=18{,}4$; б) $\beta\approx79^\circ15'$; $a\approx10{,}9$; $c\approx13{,}6$. **6.** а) $c\approx10{,}2$; $\beta\approx49^\circ20'$; $\gamma\approx55^\circ10'$; б) нема решение. **7.** а) $c\approx18{,}3$; $\beta\approx68^\circ24'$; $\gamma\approx71^\circ6'$; б) $a\approx13{,}8$; $\alpha\approx93^\circ35'$; $\gamma\approx49^\circ10'$. **8.** $\gamma=60^\circ$; $c\approx26$; $a\approx22{,}3$; $b\approx28{,}5$. **9.** Точно е. **10.** $\gamma=40^\circ$; $b=11{,}4$.

II.22. стр. 113

1. а) $\overline{AC}\approx10{,}4$; б) $\overline{AC}\approx21{,}2$. **3.** $\overline{AD}=5$. **4.** **Упатство:** Од косинусната теорема изрази го $\cos\gamma$ преку a, b и c. **5.** ≈92 *m*. **6.** $\alpha\approx25^\circ12'30''$. **7.** а) $\gamma\approx117^\circ17'$; б) $\alpha=180^\circ$. Триаголникот не постои, бидејќи $a=b+c$.

II.23. стр. 115

1. а) $a=9{,}9$; $\alpha=66^\circ22'$; $\beta=44^\circ38'$; б) $b=16{,}3$; $\alpha=51^\circ41'$; $\gamma=69^\circ49'$. **2.** $c\approx80$. **3.** $\alpha=34^\circ46'$; $\beta=51^\circ39'$; $\gamma=93^\circ35'$. **4.** $\alpha=40^\circ$; $\beta=71^\circ54'$; $\gamma=68^\circ6'$. **5.** а) $\alpha=37^\circ20'$; $\beta=70^\circ40'$; $c=7{,}1$; б) $b=15{,}1$; $\alpha=51^\circ$; $\gamma=75^\circ$. **6.** а) $a\approx0$; $\beta=73^\circ50'$; $\gamma=71^\circ10'$; б) $b=3{,}8$; $\alpha=78^\circ30'$; $\gamma=41^\circ30'$. **7.** а) $\alpha=71^\circ53'$; $\beta=26^\circ47'$; $\gamma=81^\circ20'$; б) $\alpha=36^\circ46'$; $\beta=85^\circ54'$; $\gamma=57^\circ20'$. **8.** а) $\alpha=82^\circ50'$; $\beta=41^\circ24'$; $\gamma=55^\circ46'$; б) $\alpha=67^\circ23'$; $\beta=22^\circ37'$; $\gamma=90^\circ$. **9.** ≈2 пати. **10.** $\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=0{,}82$. **11.** $\gamma=53^\circ40'$. **12.** $a=2$. **13.** $b=c\approx8{,}2$. **14.** Најмал агол е β, а најмала страна е $b=8{,}2$.

II.24. стр. 117

2. ≈15,13. **3.** ≈142,76. **4.** ≈366,15. **5.** ≈134,78. **6.** а) 45,8; б) 15,59. **7.** а) 40,72; б) 3598,5. **8.** 123,24; б) 64,226. **9.** **Упатство:** Прво реши го триаголникот. **Одг.** а) 65,9; б) 3750. **10.** $P=ab\cdot\sin\,\alpha$. **11.** **Доказ:** $P=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin120^o=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. **12.** $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

II.25. стр. 118

1. $P=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\alpha$, $L=2d\cdot(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})$.

2. $P=166{,}26$; $V=121{,}7$. **3.** $F=90$ *N*. **4.** $R\approx30N$. **7.** $d_1=6{,}13$; $P\approx120$. **8.** $\sin\alpha=\frac{h_1+h_2}{s}$, $\beta=\pi-\alpha$. **10.** $V=\frac{\pi(a+2b)(a-b)^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin^2(\alpha+\beta)}$. **11.** $V\approx35{,}64$. **12.** $l=\frac{4R\sqrt{3}}{3}\sqrt{\cos(30^o+\frac{\alpha}{2})\cos(30^o-\frac{\alpha}{2})}$. **13.** $\approx0{,}29\cdot10^7$ *N*. **14.** $1^\circ26'$. **15.** ≈29,3*N*. **16.** $\overline{CD}=99{,}24m$. **17.** $x=\frac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$.

II. Задачи за повторување и утврдување - стр. 121

1. 864°. **2.** II и IV квадрант. **3.** а) 2 и 0; б) 2 и 0; в) –2 и –4. **4.** а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $|\cos\alpha|$, $D=\mathbf{R}$. **5.** $\sin\alpha=-\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$. **6.** a^2+b^2. **10.** **Упатство:** Тригонометриските функции од агли поголеми од 45° сведи ги на тригонометриски функции од агли помали од 45°. **Одг.** а) $\frac{5}{2}$; б) 1. **11.** **Доказ:** Со собирање и одземање на дадените равенства, добиваме $m+n=2\mathrm{tg}\alpha$ и $m-n=2\sin\alpha$. Оттука $\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha}{2tg\alpha}=\frac{m-n}{m+n}$. **12.** **Упатство:** Докажи дека $\sin(\alpha+\beta)=1$, или $\cos(\alpha+\beta)=1$. **13.** а) $\mathrm{tg}\alpha$, б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **15.** **Упатство:** $-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<0$. **Одг.** а) $-\sqrt{\frac{1-c}{2}}$, б) $\sqrt{\frac{1+c}{2}}$. **16.** а) $\sin(55^\circ-10^\circ)=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos(42^\circ-12^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **21.** $\frac{\cos(45^o+\alpha)}{2\cos^2(45^o+\frac{\alpha}{2})}$. **22.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; б) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $x=k\pi$. **23.** а) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=2k\pi$; б) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=k\pi$. **24.** а) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=k\pi$; б) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=2k\pi$. **25.** а) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; б) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=k\pi$. **26.** а) $x=23^\circ32'+k\cdot180^\circ$, $x=66^\circ28'+k\cdot180^\circ$; б) $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, $x=19^\circ28'+k\cdot360^\circ$, $x=160^\circ32'+k\cdot360^\circ$. **27.** а) $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$; б) $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **28.** а) $x=\frac{\pi}{2}+2k\cdot\pi$; б) $x=\pm70^\circ32'+2k\cdot180^\circ$. **29.** а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$; б) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\cdot\pi$, $x=\frac{k\pi}{2}$. **30.** 15°, 75°. **31.** $R=\frac{9}{2\sin36^o}\approx$ 7,7 *cm*. **32.** $d_1=2a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, $d_2=2a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. **35.** $\alpha=62^\circ25'$. **36.** $R=9{,}5$. **37.** $r=2{,}7$; $R=7{,}5$. **38.** $P=45$. **39.** ≈ 594 *m*. **40.** $a=\frac{h_b}{\sin\alpha}$, $b=\frac{h_a}{\sin\alpha}$. **41.** По 19 минути и 12 секунди.

II. Задачи за самоконтрола стр. 125

1. а) 5°; б) 100°; в) 150°. **2.** а) II и III квадрант; б) III и IV квадрант. **4.** **Упатство:** Докажи дека $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=1$. **6.** а) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; б) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=k\pi$. **7.** $-\sqrt{5}<\lambda<\sqrt{5}$. **8.** $R\approx3{,}4$. **9.** а) Тапоаголен, б), в) остроаголен. **10.** $P=242{,}21$.

Тема III - Елементи од комбинаторика и веројатност

III.1. стр. 131

1. а) За $n=1$ имаме $1=1^2$, т.е. равенството важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $1+3+...+(2k-1)=k^2$. Тогаш за $n=k+1$ имаме $1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$, па од ПМИ заклучуваме дека равенството важи за секој $n \in \mathbf{N}$. ѓ) За $n=1$ имаме $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{1+2}{2\cdot1+2}$, т.е. равенството важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{(k+1)^2})=\frac{k+2}{2k+2}$.

Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$(1-\frac{1}{4})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{(k+1)^2})(1-\frac{1}{(k+2)^2})=\frac{k+2}{2k+2}(1-\frac{1}{(k+2)^2})$$

$$=\frac{k+2}{2k+2}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\frac{k+3}{2(k+2)}=\frac{(k+1)+2}{2(k+1)+2}$$

па од ПМИ заклучуваме дека равенството важи за секој $n \in \mathbf{N}$. **2.** в) За $n=1$ имаме $11^{1+1}+12^{2\cdot1-1}=133$ и овој број се дели со 133. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$ т.е $133|(11^{k+1}+12^{2k-1})$ што значи $11^{k+1}+12^{2k-1}=133M$. Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$11^{k+1+1}+12^{2(k+1)-1}=11(11^{k+1}+12^{2k-1})+133\cdot12^{2k-1}$$

$$=133M+133\cdot12^{2k-1}=133(M+12^{2k-1})$$

па од ПМИ следува дека твдењето важи за секој $n \in \mathbf{N}$. **3.** Јасно $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$ т.е. твдењето зажи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{k \text{ корени}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{k+1 \text{ корени}}=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}_{k \text{ корени}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

$$=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}})}=\sqrt{2\cdot2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

па од ПМИ следува дека тврдењето важи за секој $n \in \mathbf{N}$. **4. Упатство.** Искористи дека

$$\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+4}=$$

$$=\frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{3k+1}+(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1})$$

$>1+(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3k+3})$. **6.** За $n=4$ имаме $4!=24>16=2^4$, т.е. тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. дека $k!>2^k$. Тогаш за $n=k+1$ имаме $(k+1)!=(k+1)\cdot k!>2^k(k+1)>2^{k+1}$, па од ПМИ следува дека тврдењето важи за секој $n>3$.

III.2. стр. 135

1. $n=6$. **2.** Од равенката $n(n-1)(n-2)(n-3)=1680$ добиваме $(n^2-3n)(n^2-3n+2)=1680$ и со смената $n^2-3n=t$ добиваме $t^2+2t-1680=0$. Од овде $t=40$ и $t=-42$, па е $n=8$. **3.** а) $n=9$, б) $n=57$, в) $n=10$. **4.** $n=15$. **6.** $V_6^5=480$.

III.3. стр. 139

1. $P_{12}=12!$. **2.** $P_3=3!$ **3.** $2P_3=2\cdot3!$ **4.** Од равенката $P_n:P_{n+2}=1:30$ добиваме $(n+1)(n+2)=30$ и наоѓаме $n=4$. **5.** $n=6$. **6.** а) $5!=120$, б) $4!5!=2880$ **7.** а) $n=31$, б) $n=11$, в) $n=8$. **8.** $n=20$, $C_n^{17}=C_{20}^{17}=1140$. **9.** $n=6, k=3$. **10.** $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. **13.** Заедно со страните имаме $m+2$ хоризонтални и $n+2$ вертикални прави. Секои две хоризонтални прави определуваат еден правоаглник. Бројот на правоаголниците определен со хоризонталните прави е C_m^2. Бидејќи за секој правоаголник определен со пар хоризонтални прави имаме C_n^2 правоаголници определени со вертикалните прави добиваме дека вкупниот број правоаголници е еднаков на $C_n^2\,C_m^2$. **14.** Бараниот број кружници е $C_{11}^3-C_5^3+1=156$.

III.4. стр. 142

1. $P_9^{2,3,4}=\frac{9!}{2!3!4!}$. **2.** $P_{10}^{1,2,2,2,3}=\frac{10!}{1!2!2!2!3!}$. **3.** а) $\frac{8!}{3!4!}=280$ б) $\frac{8!}{5!2!}=186$, в) $\frac{8!}{5!3!}=56$. **5.** $\frac{7!}{4!}-\frac{6!}{3!}=210-120=90$. **6.** $C_{3+4-1}^4=\frac{6!}{4!2!}=15$. **8.** C_{k+n-1}^k.

III.5. стр. 14

2. а) 0,88584 б) 85,76666 в) 1,03043. **3.** Од $C_n^2=105$ наоѓаме $n=15$ и $T_{13}=C_{15}^{12}(\frac{1}{\sqrt{3x}})^{12}(9x)^3=455x^{-3}$.

4. Од $T_{k+1}=C_{12}^k(\frac{2}{3}\sqrt{a})^k(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2})^{12-k}$ добиваме

$\frac{k}{2}+\frac{2(12-k)}{3}=7$, па затоа $k=6$ и бараниот член е седмиот. **5.** Можат да стигнат сите во различни времиња, можат да стигнат двајца заедно и останатите во различно време, тројца заедно и останатите во различно време ..., во групи по двајца, по тројца итн. Вкупниот број можности е $C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ = 2^n-1. **6.** Да ги разгледаме идентитетите

$$(x+1)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^n \text{ и}$$

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n.$$

Производот на двете равенства на левата страна дава $(1+x)^{2n}$ и ако се развие по биномната формула коефициентот пред x^n е еднаков на C_{2n}^n. Во производот на десната страна коефициентот пред x^n е еднаков на

$$(C_n^1)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+...+(C_n^n)^2.$$

Според тоа,

$$(C_n^1)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+...+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

7. Да го разгледаме општиот член $T_{k+1}=2^{\frac{100-k}{2}}3^{\frac{k}{4}}$. За $k=4p$, p е природен број и $k=0,1,...,100$ членот ќе биде рационален. Лесно се гледа дека бројот на такви членови е 26.

III.7. стр. 154

1. PP1, PP2, PP3, PP4, PP5, PP6, PG1, PG2, PG3, PG4, PG5, PG6, GP1, GP2, GP3, GP4, GP5, GP6, GG1, GG2, GG3, GG4, GG5, GG6. **2.** Тоа е множеството од варијациите со повторување од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6 од класа n и нивниот број е 6^n. **3.** а) Тоа е множеството варијации со повторување од елемнтите $1,2,3,...,n$ од класа k. б) Тоа е множеството варијации без повторување од елемнтите $1,2,3,...,n$ од класа k. в) Тоа е множеството комбинации комбинации без повторување од елемнтите $1,2,3,...,n$ од класа k. г) Тоа е множеството комбинации со повторување од елемнтите $1,2,3,...,n$ од класа k. **4.** а) 55, 56, 65, 66. б) 16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65. в) 15, 16, 61, 51, 24, 25, 26, 62, 52, 42, 33, 34, 35, 36, 63, 53, 43, 44, 45, 46, 64, 54, 55, 56, 65, 66. **5.** PPG, PPP, GGP, GGG, PG1, PG2, PG3, PG4, PG5, PG6, GP1, GP2, GP3, GP4, GP5, GP6. За настанот *A* имаме *A*={PPG, PPP, GGP, GGG}.

III.8. стр. 158

1. а) $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, б) $p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. **2.** Бројот на можните лементарни настани е $n=36$, а додека бројот на поволните настани е $m=5$. Значи $P(A)=\frac{5}{36}$. **3.** Просторот елементарни настани е множеството комбинации без повторување од $3+7+8=18$ елементи од класа 2 и нивниот број е $n=C_{18}^2=153$. Белото топче може да се извлече на C_3^1 начини, а црвеното на C_7^1, па затоа бројот на поволните елементарни настани е $m=C_3^1C_7^1=21$. Конечно, $P(A)=\frac{21}{153}=\frac{7}{51}$. **4.** Бројот на сите можните настани е $n=\frac{12!}{5!4!3!}$, а бројот на пволните настани за бараниот настан A е $m=\frac{9!}{2!4!3!}$. Значи, бараната веројатност е $P(A)=\frac{1}{22}$. **5.** Бројот на поволните елементарни настани е $C_a^pC_b^q$, а бројот на сите можни елементарни настани е C_{a+b}^{p+q}. Значи, $P(A)=\frac{C_a^pC_b^q}{C_{a+b}^{p+q}}$.

6. $P(A)=\frac{C_8^2C_8^4C_8^3C_8^1}{C_{32}^{10}}$. **7.** Бидејќи имаме 34 ученици и секој може да биде роден во еден од 365 денови од годината добиваме дека бројот на сите елементарни настани е $n=\overline{V}_{365}^{34}=365^{34}$. Од друга страна, бројот на елементарните настани кај кои сите ученици се родени во раличен ден, т.е. бројот на неповолните настани е V_{365}^{34} па затоа, во случајот, бројот на сите поволни настани е $m=\overline{V}_{365}^{34}-V_{365}^{34}$. Конечно, бараната веројатност е $p=\frac{m}{n}=1-\frac{V_{365}^{34}}{\overline{V}_{365}^{34}}$.

8. Бројот на можните распореди на писмата е $n!$. За секој $k\in\{1,2,...,n\}$ со A_k да го означиме настанот дека $k-$тото писмо стигнува на вистинската адреса. Бројот на поволните настани дека ниедно писмо нема да стигне на вистинската адреса е $n!-|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|$. Бидејќи бројот на распоредите, кај кои фиксирани j писма стигнуват на вистинската адреса е еднаков на вистинската адреса е еднаков на $(n-j)!$ добиваме дека бројот на поволните настани е еднаков на

$$m=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-...+(-1)^nC_n^n,$$

па затоа бараната веројатност е еднаква на

$$\frac{m}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+(-1)^n\frac{1}{n!}.$$

III.9. стр. 161

1. $B=B\Omega=B(A\cup\overline{A})=AB\cup B\overline{A}$ и настаните AB и $B\overline{A}$ се дисјунктни, па затоа

$$P(B)=P(AB\cup B\overline{A})=P(AB)+P(B\overline{A})=0,59.$$

2. Имаме $n=C_{30}^{6}$.

а) $m_A=C_{12}^{3}C_{18}^{3}$, па е $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{C_{12}^{3}C_{18}^{3}}{C_{30}^{6}}$.

б) Настанот B ќе се појави ако се изберат 5 или ученици и $m_B=C_{12}^{5}C_{18}^{1}+C_{12}^{6}C_{18}^{0}=C_{12}^{5}C_{18}^{1}+C_{12}^{6}$. Според тоа, $P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_{12}^{5}C_{18}^{1}+C_{12}^{6}}{C_{30}^{6}}$.

в) $m_C=C_{18}^{6}$, па е $P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{C_{18}^{6}}{C_{30}^{6}}$.

3. Имаме $p_k=2^{k-1}p_1$, $k=2,3,4,5,6$ и како

$$1=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6$$

добиваме

$$1=p_1(1+2+4+8+16+32)=63p_1 \text{ т.е. } p_1=\frac{1}{63}.$$

а) $P(A)=\frac{1+4+16}{63}=\frac{1}{3}$, б) $P(B)=\frac{4+32}{63}=\frac{4}{7}$.

4. Бидејќи имаме 6 татковци, шест мајки и 18 деца, добиваме дека бројот на сите можни елементарни настани е $n=6\cdot6\cdot18=648$. Од друга страна за секој брачен пар имаме три поволни елементарни настани (од три деца треба да се избере едно) и како имаме 6 брачни парови добиваме дека бројот на сите поволни елементарни настани е $m=6\cdot3=18$. Конечно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{18}{648}=\frac{1}{36}$.

5. а) $P(A)=\frac{C_{10}^{2}C_{240}^{8}}{C_{250}^{10}}$, б) $P(C)=\frac{C_{10}^{0}C_{240}^{10}}{C_{250}^{10}}$

б) $P(B)=\frac{C_{10}^{4}C_{240}^{6}+C_{10}^{5}C_{240}^{5}+...+C_{10}^{10}C_{240}^{0}}{C_{250}^{10}}$.

6. Јасно бројот на сите елементарни настани е $n=C_{24}^{2}=276$. Со A да го означиме настанот: извлечените топчиња се жолти. Тогаш, $m=C_{7}^{2}=21$, па затоа $P(A)=\frac{21}{276}$. Конечно, за спротивниот настан: извлечените топчиња не се и двете жолти добиваме $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{276-21}{276}=\frac{85}{92}$.

7. $p=0,7+0,5-0,7\cdot0,5=1,2-0,35=0,85$

III.10. стр. 161

1. Ако означиме $x=\overline{AM}$, тогаш просторот елементарни настани е $\Omega=\{x\mid 0\le x\le 12\}$. Се бара веројатноста на настанот

$$A=\{x\mid 0\le x\le 12, 36\le x^2\le 81\}=\{x\mid 6\le x\le 9\}.$$

Од $m(\Omega)=12$ и $m(A)=3$ добиваме дека

$$P(A)=\frac{m(\Omega)}{m(A)}=\frac{1}{4}.$$

2. Ако означиме $x=\overline{AM}$, тогаш $\Omega=\{x\mid 0\le x\le l\}$ $m(\Omega)=l$ и $A=\{x\mid 0\le x\le l, |\frac{l}{2}-x|\le a\}$. За $a<0$ имаме $A=\varnothing$, па е $P(A)=0$. За $0\le a\le\frac{l}{2}$ имаме $A=\{x\mid \frac{l}{2}-a\le x\le\frac{l}{2}+a\}$, $m(A)=\frac{l}{2}+a-\frac{l}{2}+a=2a$, па е $P(A)=\frac{2a}{l}$. За $a>\frac{l}{2}$ имаме $A=\Omega$ и $P(A)=1$.

3. Нека делбените точки се M и N, редоследно и нека $x=\overline{AM}$ и $y=\overline{AN}$. Тогаш просторот елементарни настани е $\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le l\}$ и $m(\Omega)=\frac{l^2}{2}$. Бидејќи

$$x=\overline{AM},\ \overline{MN}=y-x \text{ и } \overline{NB}=l-y$$

настанот A се реализира кога збирот на кои било две страни е поголем од третата и апсолутната вредност од разликата на кои било две страни е помала од третата страна, па затоа

$$A=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le l, y>\frac{l}{2}, x<\frac{l}{2}, y-x>\frac{l}{2}\}$$

од каде $m(A)=\frac{1}{2}(\frac{l}{2})^2$, па затоа $P(A)=\frac{m(\Omega)}{m(A)}=\frac{1}{4}$.

4. Просторот елементарни настани се сите точки од кругот се радиус R, па затоа $m(\Omega)=\pi R^2$. За настанот A имаме $m(A)=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$, па затоа $P(A)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Задачи за повторување и утврдување стр. 164

1. д) Имаме $\frac{1^2}{1\cdot3}=\frac{1}{3}=\frac{1(1+1)}{2(2\cdot1+1)}$, т.е. равенството важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека равенството важи за $n=k$, т.е. дека

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}\,.$$

За $n=k+1$ добиваме

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+$$

$$+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+1}\left[\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right]=\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{(k+2)(2k+1)}{2(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}\,,$$

и од ПМИ следува дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbf{N}$.

3. Од $32>25$ следува $2^5>5^2$, т.е. тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека $2^k>k^2$. За $n=k+1$, од $k\geq5$ следува $k^2\geq5k>2k+1$ па затоа $2^{k+1}=2^k\cdot2>2k^2=k^2+2k+1=(k+1)^2$ и од ПМИ следува дека тврдењето важи за секој $n\geq5$.

4. За $n=2$ неравенството важи. Нека претпоставиме дека за $n=k$ важи $\sqrt{p^k}+\sqrt{q^k}\leq\sqrt{(p+q)^k}$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$\sqrt{p^{k+1}}+\sqrt{q^{k+1}}=\sqrt{p^k}\sqrt{p}+\sqrt{q^k}\sqrt{q}$$

$$\leq\sqrt{p^k}\sqrt{p+q}+\sqrt{q^k}\sqrt{p+q}=(\sqrt{p^k}+\sqrt{q^k})\sqrt{p+q}$$

$$\leq\sqrt{(p+q)^{k+1}}$$

и од ПМИ следува дека тврдењето важи за секој $n>5$.

7. а) $(n-m+1)!$, б) $(n-m+1)!\,m!$. **8.** Ако топчињата ги нумерираме со 1, 2, 3, 4, 5 -бели, 6, 7, 8, 9, 10- сини, 11, 12, 13, 14, 15- црвени и 16, 17, 18, 19, 20- црни и ги групираме на следниов начин: **1,6,11,16**, *2,7,12,17*, **3,8,13,18**, *4,9,14,19*, **5,10,15,20**, добиваме дека бројот на можните распоредувања е $5!5!5!5!=207360000$ начини (зошто?). **9.** $5!-4!=96$. **11.** $n=20$. **12.** $n=22$ **13.** $\overline{V}_5^3=5^3=125$. **14.** $n=17$. **15.** $n=5,m=2$ **16.** $n=15,k=6$. **17.** $C_{12}^2=66$. **18.** $C_{12}^3=220$. **19.** Збирот на коефициентите се добива за $x=1$ и затоа а) $2^{10}=1024$, б) 0. **20.** $T_{8+1}=1287a^8x^{-4}$ **21.** Тоа е 11-от чле и $T_{11}=3003a^{10}$. **22.** Само седмиот член е рационален и тој е $T_7=C_{10}^6x^5$. **23.** $T_{15}=C_{24}^{14}3^22^2$. **24.** $P(A)=\frac{200}{10000}=0{,}02$. **25.** $P(A)=\frac{14}{99}$. **26.** а) $\frac{1}{12}$, б) $\frac{5}{9}$. **30.** $P(A)=0{,}8$. **31.** а) $\frac{1}{520}$, б) $\frac{1}{1240}$. **32.** Имаме $m(\Omega)=\pi R^2$ и $m(A)=2R^2$ и $P(A)=\frac{2}{\pi}$. **33.** Ако означиме $x=\overline{AM}$ и $y=\overline{AN}$, тогаш

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\leq x,y\leq l\}\text{ и }m(\Omega)=l^2.$$

Се бара веројатноста на настанот

$$A=\{(x,y)\,|\,0\leq x<y\leq l\},$$

Сега $m(A)=\frac{1}{2}l^2$, па затоа $P(A)=\frac{1}{2}$.

34. Ако означиме $x=\overline{AM}$ и $y=\overline{AN}$, тогаш просторот елементарни настани е

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\leq x,y\leq l\}\text{ и }m(\Omega)=l^2.$$

Се бара веројатноста на настанот

$$B=\{(x,y)\,|\,0\leq x,y\leq l,|\,y-x\,|<y\}.$$

Имаме $m(B)=\frac{1}{2}(l+\frac{l}{2})l=\frac{3}{4}l^2$, па затоа $P(B)=\frac{3}{4}$.

35. Просторот елементарни настани е коцка со страна 1, што значи $m(\Omega)=1$. Понатаму, настанот A е осмина од топка со радиус 1, па затоа $m(A)=\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi$. Конечно, $m(A)=\frac{1}{6}\pi$.

Тема IV. Аналитичка геометрија во рамнина

IV.1. стр. 172

1. $\overrightarrow{OA}=(3,2)$; $\overrightarrow{OB}=(-3,4)$; $\overrightarrow{OC}=(0,3)$; $\overrightarrow{OD}=(-5,-3)$; $\overrightarrow{OE}=(-4,0)$; $\overrightarrow{OF}=(1,-4)$; $\overrightarrow{OM}=(4,-2)$.

2. $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+2\vec{j}$; $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}+4\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}=3\vec{j}$; $\overrightarrow{OD}=-5\vec{i}-3\vec{j}$; $\overrightarrow{OE}=-4\vec{i}$; $\overrightarrow{OF}=\vec{i}-4\vec{j}$; $\overrightarrow{OM}=4\vec{i}-2\vec{j}$.

4. $\overrightarrow{OM}=4\vec{i}-\vec{j}$; $\overrightarrow{ON}=-3\vec{j}$; $\overrightarrow{OR}=-3\vec{i}+2\vec{j}$.

5. $\overrightarrow{OA}=(2,-3)$; $\overrightarrow{OB}=(-3,1)$; $\overrightarrow{OC}=(4,-4)$. **6.** а) *x*=2, *y*=2; б) *x*= –3, *y*=7. **7.** а) *x*=2, *y*=2; б) $x=\frac{8}{3}$, $y=-\frac{7}{3}$. **8.** а) $|\overrightarrow{OM}|=3$; б) $|\overrightarrow{OM}|=4$.

IV.2. стр. 175

1. $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(-5,-4)=-5\vec{i}-4\vec{j}$. **2.** $\overrightarrow{CD}=(-1,7)$. **3.** а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(5,3)$; б) $\vec{a}+\vec{c}=(1,-5)$. **4.** а) $\vec{a}-\vec{b}=(-5,2)$; б) $\vec{b}-\vec{c}=(6,1)$. **5.** а) $-2\vec{i}+11\vec{j}$, б) $3\vec{i}-13\vec{j}$, в) $-\frac{7}{2}\vec{i}+\frac{29}{2}\vec{j}$. **6.** $\vec{a}=(2,-7)$. **7.** $A_2(4,-6)$. **8.** $B_1(-\frac{7}{4},5)$. **9.** а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$; б) $\vec{a}-\vec{b}=5\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}$; в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=-5\vec{i}-\vec{j}$; г) $\vec{b}-(\vec{a}+\vec{c})=-9\vec{i}$. **10.** а)

$2\vec{a}-\vec{b}=-2\vec{i}-\frac{5}{2}\vec{j}$; б) $\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}=\frac{21}{8}\vec{i}+\frac{5}{4}\vec{j}$; $3\vec{a}-2\vec{b}=-\frac{9}{2}\vec{i}-4\vec{j}$. **11.** $\vec{a}=(-2,3)$; $\vec{b}=(0,3)$; $\vec{c}=(-3,4)$; $\vec{d}=(-2,-3)$; $\vec{e}=(2,2)$; $\vec{f}=(-3,-2)$; $\vec{g}=(-2,-5)$; $\vec{k}=(3,0)$; $\vec{h}=(-3,3)$. **12.** $|\vec{a}|=\sqrt{5}$.

IV.3. стр. 178

1. $\overline{PT}=\sqrt{29}$. **2.** $L=3\sqrt{2}+\sqrt{34}+\sqrt{40}$. **3.** $|\vec{b}|=5$. **4.** а) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$; б) $\overline{CD}=3\sqrt{5}$; в) $\overline{MN}=|a-b|\sqrt{2}$. **5.** а) $6\sqrt{2}+2\sqrt{10}$; б) $3+\sqrt{5}+\sqrt{26}=10,3$. **6.** $T(-\frac{5}{8},0)$. **7.** $(\frac{3}{2},2)$. **10.** $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=5$. **11.** а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$; б) $|\overrightarrow{AB}|\approx 0,86$. **12.** а) $\vec{c}=(4,1)$; $|\vec{c}|=\sqrt{17}$; б) $\vec{d}=(2,-5)$; $|\vec{d}|=\sqrt{29}$.

IV.4. стр. 179

1. $M(-\frac{5}{2},\frac{9}{2})$. **2.** $A_1(-1,1)$; $B_1(-1,\frac{3}{2})$; $C_1(2,-\frac{9}{2})$. **3.** $M(2,-1)$; $S(3,1)$. **4.** $A(-6,6)$; **5.** $A(4,5)$; $B(-2,-3)$. **6.** $S(-\frac{3}{5},3)$. **7.** $C(10,-6)$; $D(2,-10)$. **8.** $T(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$. **9.** $T(3,1)$. **10.** $\overline{AA_1}=3$; $\overline{BB_1}=\sqrt{45}$; $\overline{CC_1}=6$; $T(3,2)$. **11.** $A(3,-1)$; $B(0,8)$. **12.** $b_y=-14$. **13.** $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+7\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}=5\vec{i}$; $\overrightarrow{AB}=(4,-1)$; $\overrightarrow{BA}=(-4,1)$. **14.** $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y)$. **15.** $\overrightarrow{OA}=4\vec{i}$; $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OC}=4\vec{i}+4\sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OD}=4\sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OE}=-2\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{ED}=2\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{CB}=2\vec{i}-2\sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{BA}=-2\vec{i}-2\sqrt{3}\vec{j}$.

IV.5.1. стр. 183

1. AC: $x-8y+30=0$; BC: $7x-4y-50=0$. **2.** B и C лежат. **3.** а), в) Не; б), г) да. **4.** а) $2x-7y-22=0$; б) $y=4$. **5.** $2x-y+5=0$; $2x-5y-15=0$ и $2x+y-9=0$. **6.** $y=4$; $x=2$ и $8x+y-20=0$. **7.** Во $(-2,0)$ и $(0,3)$.

IV.5.2. стр. 186

1. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x-5$. **2.** а) $y=\sqrt{3}\cdot x-3$, б) $y=\sqrt{3}\cdot x+4$. **4.** $k=\frac{2}{3}$. **5.** $y=\frac{2}{3}\cdot x+2$. **6.** Во точките $(-2,0)$ и $(0,3)$.

IV.5.3. стр. 188

1. AB: $3x-2y+8=0$, BC: $7x+6y+8=0$, AC: $5x+2y-8=0$. **2.** $k=\frac{3}{2}$. **3.** $x+y-3=0$. **4.** а) $9x-y+5=0$, б) правата е паралелна со Oy-оската и има равенка $x=2$. **5.** $y=-\frac{2}{3}\cdot x$. **6.** $10x+5y=0$, односно $2x+y=0$. **7.** $x-y+2=0$. **8.** $4x-3y-17=0$. **9.** $x+3y+1=0$.

IV.5.4. стр. 189

1. а) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$, односно $3x-2y+6=0$, б) $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$, односно $3x-4y+12=0$. **2.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{-3}=1$, т.е. $x-y+3=0$. **3.** $(4,0)$, $(0,-3)$. **4.** а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, б) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, в) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{8}=1$. **5.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$, $\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}=1$, $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1$, $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-4}=1$ **6.** $P=6$.

IV.5.5. стр. 191

1. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{3}{4}=0$, б) $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-5=0$. **2.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0$, $p=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\omega=-63^o26'$. **3.** а), в), г) во нормален вид, б), д) не се во нормален вид. **4.** $p=\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$. **5**. Имаат еднакви коефициенти на правец.

IV.6. стр. 193

1. а) $\varphi=7^o7'30''$; б) $\varphi=66^o48'$. **2.** $7x+2y+33=0$. **3.** $\varphi=45^o$. **4.** $38^o40'$. **5.** $\varphi=45^o$. **6.** $y=2$. **8.** $\text{tg}\varphi=\frac{n^2-m^2}{2mn}$. **9.** $x-6y+41=0$. **10.** $2x+3y+5=0$. **11.** $4x-3y=0$. **12.** $5x-2y+23=0$. **13.** $x-7y-25=0$. **14.** $(5,0)$, $(0,-3)$. **15.** $(4,0)$ и $(0,-3)$.

IV.7. стр. 195

1. $(\frac{17}{14},-\frac{15}{7})$. **2.** $(2,5)$. **3.** а) $(3,2)$; б) $(2,3)$. **4.** $(0,\frac{5}{3})$. **5.** $(\frac{167}{55},\frac{12}{11})$. **6.** $A(2,6)$, $B(-3,1)$, $C(\frac{69}{7},\frac{68}{7})$. **7.** $2x-3y+26=0$. **8.** $2x-2y-35=0$. **9.** $k=\frac{3}{2}$. **10.** $L=35,5$. **11.** $(\frac{27}{11},-\frac{5}{7})$. **12.** $(-2,5)$, $(1,-3)$, $(5,-9)$, $(8,-17)$.

IV.8. стр. 197

1. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **2.** а) $\frac{11\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **3.** $\frac{14\sqrt{45}}{45}$. **4.** $h=\frac{25\sqrt{17}}{17}$. **5.** $h_c=\frac{7\sqrt{2}}{2}$, $h_b=7$, $h_a=\frac{7\sqrt{85}}{17}$. **6.** $r=3$.

IV.9. стр. 199

1. а) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; б) $x^2+(y-4)^2$; в) $(x+5)^2+y^2=25$. **2.** $(x+2)^2+(y-3)^2=3$. **3.** а) $(x-1)^2+(y-4)^2=4$; б) $x^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$. **4.** а) $(x-3)^2+(y+4)^2=16$; б) $(x-3)^2=(y+4)^2=9$. **5.** $(x-4)^2+(y-4)^2=16$, $(x+4)^2+(y-4)^2=16$, $(x+4)^2+(y+4)^2=16$, $(x-4)^2+(y+4)^2=16$. **6.** Услов, кружницата да ги допира двете координатни оски, е: $|p| = |q| = r$, $C(6, –6)$, $r = 6$. **7.** $x^2 + (y – r)^2 = r^2$. **8.** а) $C(2, –1)$, $r^2 = 2$; б) $C(0, –3)$, $r = 2$; в) $C(–5,0)$, $r = 1$. **9.** а) $C(3, –5)$, $r = 4$; б) $C(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$, $r = 2$. **10.** $(x – 15)^2 + (y + 15)^2 = 15^2$; $(x – 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$. **11.** $x^2 + y^2 – 3x – 4 = 0$.

IV.10. стр. 202

1. Правата е тангента на кружницата. **2.** $(\frac{3+\sqrt{29}}{2},\frac{7+\sqrt{29}}{2})$; $(\frac{3-\sqrt{29}}{2},\frac{7-\sqrt{29}}{2})$. **3.** а) Правата е тангента на кружницата; б) правата е секанта на кружницата. **4.** (3,0), (2,0), (0,6) и (0,1). **5.** $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. **7.** (3, –10), (1,4). **8.** а) $y = 2x + 5$, $y = 2x – 5$; б) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$; в) $y=\frac{1}{3}x+\frac{5\sqrt{5}}{3}$, $y=\frac{1}{3}x-\frac{5\sqrt{5}}{3}$. **9.** $(x–3)^2+(y+4)^2=5$. **10.** $y=\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$. **11**. $\varphi = 60^o$.

IV.11. стр. 205

1. $3x + 2y = 13$. **2.** $3x – 4y + 15 = 0$. **3.** t: $8x – 6y = 100$, n: $3x + 4y = 0$. **4.** $3x – 4y = 25$. **5.** $5x –2y + 40 = 0$. **6.** t: $4x – 7y = 65$; n: $7x + 4y = 0$. **7.** t: $x +y –7 = 0$; n: $x – y + 1 = 0$. **8.** $x = 5$ и $3x + 4y – 25 = 0$. **9.** $4x + 3y + 5 = 0$; $36x – 77y + 245 = 0$; $\varphi= 78^o11'$. **10.** $4x + 3y – 2 = 0$; $4x + 3y – 52 = 0$. **11.** $2x + 3y + 2 = 0$.

IV.12. стр. 207

1. $144x^2 + 169y^2 = 24\ 336$. **2.** а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $9x^2 + 49y^2 = 441$. **3.** $5x^2 + 4y^2 = 108$. **4.** а) $16x^2 + 25y^2 = 3\ 600$; б) $25x^2 + 169y^2 = 4\ 225$. **5.** а) $25x^2 + 81y^2 = 2\ 025$; б) $16x^2 + 25y^2 = 1\ 600$. **6.** а) $25x^2 + 169y^2 = 4\ 225$; б) $3x^2 + 8y^2 = 48$. **7.** а) $F_1(–4,0)$, $F_2(4,0)$; б) $F_1(-3\sqrt{3},0)$, $F_2(3\sqrt{3},0)$. **8.** а) $F_1(-\sqrt{7},0)$, $F_2(\sqrt{7},0)$; б) $F_1(–8, 0)$, $F_2(8, 0)$. **9.** $y_1 = 5,6$. **10.** $2x^2 + 10y^2 = 18$. **11.** $\overline{F_1M}=7\frac{2}{5}$; $\overline{F_2M}=2\frac{3}{5}$.

IV.13. стр. 211

2. а) $\varepsilon=\frac{\sqrt{21}}{5}$; б) $\varepsilon=\frac{3}{5}$. **3.** $a = 2$, $b=\sqrt{3}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $F_1(–1,0)$, $F_2(1,0)$. **4.** $a=\frac{1}{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}, F_1(0,-\frac{1}{2})$, $F_2(0,\frac{1}{2})$. **5.** $12x^2 + 16y^2 = 12 \cdot 16$ т.е. $3x^2 + 4y^2 = 48$. **6.** $9x^2 + 5y^2 = 180$. **7.** $8x^2 + 9y^2 = 32$. **8.** $3x^2 + 4y^2 = 108$. **9.** $5x^2 +9y^2 = 180$. **10.** $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **11.** 0,2 и $(-\frac{48}{37},-\frac{70}{37})$.

IV.14. стр. 213

1. Правата е тангента на елипсата. **2.** Немаат заеднички точки. **3.** 6,4. **4.** а) $(\frac{6}{7},\frac{24}{7})$, $(-\frac{6}{7},-\frac{24}{7})$; б) (6,0); в) (3, –3), $(\frac{69}{13},\frac{21}{13})$. **5.** $y = 3$ и $12x + 7y + 51 = 0$. **6.** $y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{3\sqrt{14}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **8.** $9x^2 + 25y^2 = 225$; $T_1(3,\frac{12}{5}), T_2(-4,\frac{9}{5})$. **9.** $y=\frac{2}{3}x-2$. **10.** $a^2A^2+b^2B^2=C^2$.

IV.15. стр. 215

1. $x–2y = 4$. **2.** $4x – y – 6 = 0$. **3.** $3x – 10y = 25$. **4.** (5,2). **5.** $x – y – 5 = 0$, $x + 4y – 10 = 0$. **7.** $6x + 7y + 8 = 0$.

IV.16. стр. 217

1. а) $2x^2 – 3y^2 = 18$; б) $x^2– 4y^2 = 4$. **2.** а) $9x^2 – 16y^2 = 576$; б) $4x^2 – 9y^2 = 36$; $9x^2 – 4y^2 = 36$. **3.** $7x^2 – 9y^2 = 63$; **4.** $3x^2 – y^2 = 9$. **5.** $(\frac{5}{2},2)$; $(\frac{5}{2},-2)$. **6.** $7x^2 – 3y^2 = 148$. **7**. $3x^2 – 5y^2 = 30$.

IV.17. стр. 220

1. $9x^2 – 7y^2 = 252$. **2.** $24x^2 – 25y^2 = 600$. **3.** а) $5x^2 – 4y^2 = 20$; б) $16x^2 – y^2 = 16$. **4.** $9x^2 – 16y^2 = 144$. **5.** а) $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $F_1(–5,0)$, $F_2(5,0)$; б) $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $F_1(–5,0)$, $F_2(5,0)$. **6.** $\varepsilon=\sqrt{2}$. **7.** $x^2 – y^2 = 8$. **8.** (2,3), (–2, –3).

IV.18. стр. 222

1. $y = \pm x$. **2.** $A_1(–4,0)$, $A_2(4,0)$, $F_1(–5,0)$, $F_2(5,0)$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}\cdot x$. **3.** $144x^2 – 25y^2 = 14400$. **4.** $16x^2 – 9y^2 = 144$. **5.** $4x^2 –y^2 = 20$. **6.** При услов $b = a$. **7.** $x = –3$ и $x=3$. **8.** $9x^2–16y^2 = 20$. **9.** $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$**,** $y=\pm\frac{2}{3}x$. **10.** $a=\frac{3\sqrt{19}}{5}$, $b=\sqrt{19}$. **11.** а) $\varepsilon=\sqrt{2}$; б) $\varepsilon=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **12.** Правата и хиперболата немаат заеднички точки.

IV.19. стр. 226

1. Правата и хиперболата немаат заеднички точки. **2.** Правата е тангента на хиперболата во точката (10, –6). **3.** (4,3). **4.** $4x – 3y – 7 = 0$, $8x + y + 21 = 0$. **5.** $y = 2x + 2\sqrt{2}$, $y = 2x– 2\sqrt{2}$. **7.** $x^2 – 4y^2 = 4$. **8.** Правата ја сече само едната гранка на хиперболата во една точка. **9.** а) Правата $y = kx$ ги сече двете гранки во по една точка; б), в) правата $y = kx$ нема заеднички точки со хиперболата; г) правата $y = kx$ е асимптота на хиперболата. **10.** $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

IV.20. стр. 228

1. $x = –3$. **2.** $3x – 5y – 30 = 0$. **3.** $10x – 12y = 1$. **4.** $x + y = 1$. **5.** (2,3). **6.** $M(10, –3)$, $6x – 5y – 75 = 0$. **7.** $M(3,4)$, t: $7x – 4y = 5$, n: $4x + 7y – 40 = 0$. **8.** $4x + 9y = 48$. **9.** Да. $M(4,3)$, $3x + 4y –24 = 0$.

IV.21. стр. 231

1. $y^2 = 20x$. **2.** $x = -\frac{15}{4}$, $F(\frac{15}{4},0)$. **3.** а) $y^2 = -8x$; б) $y^2 = 12x$; в) $x^2 = -16y$. **4.** а) $F(-1,0)$; б) $F(0,\frac{5}{4})$; $F(0,1)$. **5.** а) $y^2 = 16x$; б) $x^2 = 3y$; в) $y^2 = -12x$; г) $x^2 = -4y$. **6.** а) $p = 3$; б) $p = \frac{1}{2}$; в) $p = \frac{3}{2}$. **7.** $M(4,6)$. **8.** $x^2 = \frac{3}{2}y$. **9.** а) $y^2 = -12x$; б) $x^2 = 16y$; в) $y^2 = 20x$. **10.** а) $O(0,0)$ и $A(2,2)$; б) $O(0,0)$, $A(-3, -3)$. **11.** $M_1(2,4)$, $M_2(2, -4)$. **12.** (4, –6) и (1,3).

IV.22. стр. 234

1. Параболата и правата: а) немаат заеднички точки; б) се сечат во точките $(8+2\sqrt{15},5+\sqrt{15})$ и $(8-2\sqrt{15},5-\sqrt{15})$. **2.** Правата ја сече параболата во точките (0,0) и (3, –6). **3.** (8,8), (2,4). **4.** а) (0,0) и (–4,4); б) (4,4), (–2,1), $(1-\sqrt{5},\frac{5-\sqrt{5}}{2})$. **5.** $2x - 2y - 7 = 0$. **6.** Да. (20, –10). **7.** $y = x + 2$, $y = -\frac{2}{3}x - 3$. **8.** $x - y + 1 = 0$. **9.** $A = 6$.

IV.23. стр. 235

1. $M(4, -6)$, $3x + 4y + 12 = 0$. **2.** $M(\frac{15}{4},\frac{15}{2})$. **3.** $4x - 3y - 34 = 0$. **4.** $x - 2y + 6 = 0$. **5.** $x - 2y + 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **6.** $B(\frac{5}{2},-5)$, $2x - 2y - 15 = 0$. **7.** $x - y - 6 = 0$.

IV. Задачи за повторување и утврдување стр. 235

1. $C(-3,11)$. **2.** $M(4,3)$, $S(1, -3)$. **3.** а) $x = -4$; б) $y = 3$. **4.** $AA_1 : 5x - 12y + 27 = 0$; $BB_1 : 2x + 9y - 26 = 0$; CC_1: $7x - 3y + 1 = 0$. **5.** $\frac{x}{8} \pm \frac{y}{4} = 1$. **6.** Втората. **7.** $k = -\frac{5}{3}$, $\alpha \approx 121^o$. **8.** Од точките (2, –1) и (0,7). **9.** $\alpha = 26^o34'$, $\beta = 63^o26'$, $\gamma = 90^o$. **10.** $3x + 2y - 10 = 0$. **11.** $5x + 4y - 23 = 0$. **12.** $x + 7y + 14 = 0$. **13.** $2x + 6y + 10 = 0$. **14.** $\alpha = 18^o26'$, $\beta = 116^o34'$, $\gamma = 45^o$. **15.** $5x + 6y - 15 = 0$, $5x + 6y + 15 = 0$, $5x - 6y + 15 = 0$, $5x - 6y + 15 = 0$. **16.** $T(\frac{122}{39},\frac{49}{52})$. **17.** $L = 35{,}5$. **18.** (–2,5), (1, –3), (5, –9) и (18, –17). **19.** а) 5; б) 15. **20.** Да. Таа минува низ координатниот почеток. **21.** $x^2+y^2-2x-2y=0$. **22.** $(x+13)^2+(y+8)^2=265$. **23.** $(x+\frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = \frac{61}{4}$. **24.** $3x + 2y + 13 = 0$. **25.** $r = \frac{12}{5}$. **26.** $(x+4)^2+(y-2)^2 = 225$. **27.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **28.** Да. $M(3, -3)$. **29.** $8x^2 + 9y^2 = 162$. **30.** $x^2 + 4y^2 = 100$. **31.** $4x + 9y - 13 = 0$. **32.** $y = -x + 10$. **33.** $y = 3x \pm \frac{\sqrt{370}}{6}$, $y = -\frac{1}{3}x \pm \frac{\sqrt{210}}{6}$. **34.** За $A = \pm\frac{\sqrt{46}}{4}$. **35.** $9x^2 - 7y^2 = 252$. **36.** $(-6,4\sqrt{3})$, $(-6,-4\sqrt{3})$. **38.** (5,3), (–5,3), (5, –3), (–5, –3). **39.** $(\frac{14\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{14\sqrt{3}}{3},-\frac{4\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{14\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{14\sqrt{3}}{3},-\frac{4\sqrt{3}}{3})$. **41.** а) $(\frac{4\sqrt{34}}{5},\pm\frac{9}{5})$, $(-\frac{4\sqrt{34}}{5},\pm\frac{9}{5})$, б) $(-\frac{48}{5},\pm\frac{3\sqrt{119}}{5})$. **42.** $M(2,4)$, $y = x + 2$, $\alpha = 45^o$. **43.** а) $y^2 = 9x$; б) $y^2 = 8x$. **44.** $M(18,12)$, $M_1(18, -12)$. **45.** а) $F(\frac{1}{4},0)$; б) $F(0,\frac{1}{4})$; в) $F(0, -1)$, г) $F = (-\frac{5}{2},0)$. **46.** $\overline{FM} = 12$. **47.** $5x - 18y + 25 = 0$. **48.** (3,6), (3, –6). **49.** $(\frac{5}{2},\pm 2\sqrt{15})$.

IV. Задачи за самоконтрола стр. 238

1. 135^o. **2.** $14x + 4y - 7 = 0$. **3.** $d = 3{,}5$. **4.** $k = \frac{3}{2}$. **5.** $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 4$. **6.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **7.** $21x^2 + 25y^2 = 525$. **8.** $4x^2 - 5y^2 = 20$. **9.** (9, 12), (9, –12). **10.** $(10,\pm\sqrt{30})$, $(2,\pm\sqrt{6})$.

ИНДЕКС НА ПОИМИ

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андров, И. К.; Окунев, А. К.:** *Курс тригонометрии*, Просвещение, Москва, 1967
2. **Антонов, Н. П.; Выгодский, М. Я.; Никитин, В. В.; Санкин, А. И.:** *Сборник задач по елементарной математике*, ГИФМЛ, Москва, 1961
3. **Атанасян, Л. С.:** *Геометрия*, част 1, Москва, 1973
4. **Бандиќ, И. М.; Илиќ-Дајовиќ, М.:** *Математика за* III *клас гимназија*, Просветно дело, Скопје, 1970
5. **Bogoslavov, T. V.:** *Zbirka rešenih zadataka iz elementarne algebre, za* II *razred gimnazije,* ZUNS, Beograd, 1975
6. **Bogoslavov, T. V.:** *Zbirka rešenih zadataka iz elementarne algebre, za* III *razred gimnazije,* Savremena administracija, Beograd, 1973
7. **Георгиева, М.; Секулоски, Р.; Чундева, К.:** *Практична математика за* IV *година природно-математичка струка*, Просветно дело, Скопје, 1992
8. **Gnedenko, B. V.; Hinčin, A. J.:** *Uvod u teoriju vjerojatnosti*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1968
9. **Димитровски, Д.:** *Математика за* IV *година* (*биотехничка струка*), Просветно дело, Скопје, 1987
10. **Димоски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јосифовски, Б.:** *Практикум по елементарна математика*, Просветно дело, Скопје, 1993
11. **Đurković, R.:** *Zbirka riješenih zadataka iz elementarne algebre*, IKTP “Sarajevo”, 1990
12. **Živković, R.:** *Matematika* 2, Svjetlost, Sarajevo, 1991
13. **Илиевски, Б.; Пандевски, Н.; Малчески, Р.; Бабинкостова, Л.:** *Приемни испити на Институт за математика*, ПМФ, Скпје, 2002
14. **Јанев, И., Илиевски, Ј.:** *Збирка задачи по математика за* III *година*, Просветно дело, Скопје, 1996
15. **Кечкић, Ј. Д.:** *Математика са збирком задатака за* III *разред средње школе*, Београд, ЗУНС, 2001
16. **Кожуеров, П. Я.:** *Тригонометрия*, Физматгиз, Москва, 1961
17. **Kurepa, Đ.; Škreblin, S.; Brečević, J.:** *Matematika za* III *razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb, 1966
18. **Kurepa, A.; Kurepa, S.:** *Matematika* 2, Školska knjiga, Zagreb, 1987
19. **Mladenović, P.:** *Elementaran uvod u veravatnoći i statistiku*, DMS, Beograd, 1998
20. **Малчески, Р.:** *Методика на наставата по математика (општ дел),* Просветно дело, Скопје, 2003

21. **Малчески, Р.:** *Веројатност и статистика* (*авторизирани предавања*), ПМФ, Скопје, 2003

22. **Новоселов, С. И.:** *Тригонометрия*, учебник для 9-10 класоов средней школы, Москва, 1962

23. **Обрадовић, М.; Георгијевић, Д.:** *Одабрани задаци за други разред средњих школа*, Математископ, Београд, 1995

24. **Паскалев, Г.:** *Конкурсни задачи по математика (свитьк 8),* Модул, София, 1997

25. **Попов, С. Б.; Секулоски, Р.:** *Математика за* IV *година технички училишта,* Просветно дело, Скопје, 2002

26. **Pavlić, I.:** *Statistička teorija i primjena,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1970

27. **Речкоски, Н.; Речкоски, В.:** *Веројатност и актуарска математика*, ФТУ, Охрид, 2003

28. **Сканави, М. И.:** *Сборник задача по математике*, Высшая школа, Москва, 1972

29. **Стипанић, Е.:** *Математика за* III *и* IV *разред гимназије труштвено-језичког смера*, ЗУНС, Београд, 1962

30. **Стојановић, В.:** *Математика за матуранте*, Математископ, Београд, 1996

31. **Стојановић, В. ; Ћирић, Н.:** *Збирка решених задатака за трећи разред средњих школа,* Математископ, Београд, 1999

32. **Вукадиновић, С.; Стојановић, В.:** *Збирка решених задатака за четврти разред средњих школа,* Математископ, Београд, 1999

33. **Трајковска, И.:** *Збирка задачи од веројатност и статистика*, (авторизирани вежби), ПМФ, Скопје, 2003

34. **Тренчевски, Г.:** *Математика за технички струки за* III *година*, Просветно дело, Скопје 2001

35. **Тренчевски, Г.:** *Математика за* III *година културолошка-просветна струка и технички струки* (III степен), Просветно дело, Скопје 1992

36. **Улчар, Ј.:** *Аналитичка геометрија со векторска алгебра*, Скопје, 1958

37. **Škara-Vidojević, Lj.:** *Osnovi statistike,* Savremena administracija, Beograd, 1963